ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΔ'
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1997
ΤΗΣ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ ΚΥ.Μ.Ε.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΤΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΤΗΣ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
ΚΥ.Μ.Ε., Τ.Θ. 5675, Λευκωσία 1311, Κύπρος

Επιτροπή Περιοδικού
Γλαύκος Αντωνιάδης
Γρηγόρης Μακρίδης
Μάριος Αντωνιάδης
Γρηγόρης Γιάγκου

Επιμέλεια Εξωφύλλου
Γρηγόρης Μακρίδης

Επιμέλεια Σχημάτων
Μάριος Αντωνιάδης
Γρηγόρης Μακρίδης

Ετήσια συνδρομή περιοδικού: £2,00
Ετήσια συνδρομή για το εξωτερικό: £6,00

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Χαιρετισμός του Γενικού Διευθυντή του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού κ. Αντρέα Φυλακτού κατά την τελετή βράβευσης μαθητών από την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Τετάρτη, 18 Ιουνίου 1997, 12 μεσημέρι
Πολιτιστικό Ίδρυμα Τράπεζας Κύπρου, Αγ. Παρασκευή, Λευκωσία

Με ιδιαίτερη χαρά βρίσκομαι σήμερα μαζί σας, για να απευθύνω θερμότατο και εγκάρδιο χαιρετισμό στην ωραία αυτή τελετή που οργανώνει η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία για την απονομή των βραβείων και διπλωμάτων των Παγκύπριων Διαγωνισμών Λυκείου ''Ζήνων'', ''Πετράκης Γιάλλουρος'' και ''Ιωνάς Νικολάου'', ενός θεσμού που έχει πλέον καθιερωθεί ως ο πιο καταξιωμένος και άρτια οργανωμένος στο είδος του.

Διαλύοντας μύθους και δεισιδαιμονίες, δόγματα και δοξασίες, τα Μαθηματικά, ως γνήσιο τέκνο του Ελληνικού Λόγου, αναδύθηκαν μέσα από τη κολυμβήθρα του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού. Πάνω στα γερά θεμέλια που έθεσαςο Πλάτωνας με τη μαθηματική θεώρηση των μαθηματικών εφαρμογών, ο Αριστοτέλης με τη θεωρητική μελέτη της λογικής και την ανάλυση της ορθής σκέψης και ο Πυθαγόρας με την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών, αλλά και πάνω στο ανυπέρβλητο έργο του Αρχιμήδη, του Ευκλείδη και του Απολλώνειου έχει στηριχθεί ολόκληρο το οικοδόμημα της σύχρονης Μαθηματικής Επιστήμης.

Πολύπλευρη και θεμελιώδης είναι η σημασία των μαθηματικών τόσο για την όξυνση της ανθρώπινης σκέψης όσο και για την πρόοδο και ανάπτυξη όλων γενικά των επιστημών. Δε θα ήταν υοερβολή, πιστεύω, αν λέγαμε ότι τα Μαθηματικά έχουν καθορίσει σε πολύ μεγάλο βαθμό την ανάπτυξη της ανθρώπινης διανόησης, αλλά και την πρόοδο των επιστημών και της τεχνολογίας.

Το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού δίνει τεράστια σημασία στα μαθηματικά, στο ''κατ'εξοχήν μάθημα'', σύμφωνα με την ετυμολογία του όρου, γι' αυτό και τα θεωρεί ως βασικό μάθημα σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Επιδίωξη μας είναι η αναβάθμιση των μαθηματικών, η οποία επιδιώκεται τόσο με τον εκσυγχρονισμό και αναπροσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων και σχολικών βοηθημάτων όσο και με τη διαρκή επιμόρφωση του προσωπικού.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, με την πραγματικά πλούσια και πολύπλευρη δραστηριότητα της, αποτελεί πολύτιμο συνεργάτη μας γι' αυτή την αναβάθμιση. Τα επιστημονικά συνέδρια, τα Καλοκαιρινά Μαθηματικά Σχολεία με συμμετοχή πάνω από 150 μαθητών από όλη την Κύπρο, την Ελλάδα και άλλες Βαλκανικές χώρες, οι μαθηματικοί διαγωνισμοί, οι εκδόσεις και η διεθνής δράση της ΚΥΜΕ συμβάλλουν ουσιαστικά στην ανάπτυξη της Μαθηματικής Επιστήμης στον τόπο μας. Συγχαίρω γι' αυτό θερμότατα την ΚΥΜΕ και ιδιαίτερα τους 150 μαθηματικούς που προσφέρουν αφιλοκερδώς τις υπηρεσίες τους στον ελεύθερο τους χρόνο.

Συγχαρω επίσης θερμά όλα τα παιδιά που διακρίθηκαν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς, τους γονείς και καθηγητές τους και όλους τους συντελεστές της σεμνής αυτής εκδήλωσης. Εύχομαι τέλος καλές επιτυχίες στην αποστολή μας στην 38η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, που αρχίζει σε ένα ακριβώς μήνα από σήμερα.

Ομιλία του Προέδρου της ΚΥ.Μ.Ε. κ. Γλαύκου Αντωνιάδη κατά την τελετή επίδοσης των επαίνων και βραβείων

Στην ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών του Sir Thomas Heath αναφέρεται το εξής επεισόδειο για τον Θαλή το Μιλήσιο έναν από τους επτά σοφούς της αρχαιότητας.

Καθώς ένα ασέληνο βράδυ περπατούσε ο Θαλής, και μπροστά πήγαινε η υπηρέτρια που κρατούσε ένα λαδοφάναρο για να φωτίζει το δρόμο σκόνταψε σε μια λακκούβα με νερά, γιατί, όπως συνήθιζε, κοίταζε τα άστρα και σύκρινε τις σχετικές θέσεις των πλανητών προς τους απλανείς.

Η υπηρέτριά του σχολίασε ως εξής:

''Κοιτάζεις τους ουρανούς και δεν ενδιαφέρεσαι για το τι γίνεται κάτω στη γή και κόντεψες να σκοτωθείς''

Εδώ θα πρέπει να πώ πως όλα τα θεωρήματα που αφορούν τα ισοσκελή τρίγωνα είναι επιτεύγματα του θαλή.

Ετσι ακριβώς, όπως βλέπει η υπηρέτρια το Θαλή, βλέπει ο πολύς κόσμος και εμάς όλους τους μαθηματικούς. Σαν ανθρώπους που ασχολούνται με πάρα πολλή θεωρεία και με ελάχιστη πράξη και εφαρμογή. Και αυτά όλα χωρίς να θέλω να πω πως εμείς όλοι μοιάζουμε του Θαλή, ''απελθέτω των χειλέων μου'' τέτοια βλασφημία.

Αφού λοιπόν άρχισα με το επεισόδιο για το Θαλή θα συνεχίσω με κάποιες αναφορές στα Ελληνικά Μαθηματικα αφού διευκρινήσω πως όταν οι ξένοι μιλούν για Ελληνικά Μαθηματικά ή Φυσικά ή οτιδήποτε άλλο Ελληνικό εννοούν την αρχαία Ελλάδα από τους ιστορικούς χρόνους μέχρι το 300μ.Χ.

Όλοι μιλούμε για τη Γεωμετρία του Ευκλείδη και όλοι μας έχουμε ασχοληθεί κάποτε με αυτήν. Τι είναι όμως η Γεωμετρία του Ευκλείδη; Στην ουσία πρόκειται για μικρό μόνο μέρος από τα 13 βιβλία Μαθηματικών που έγραψε ο Ευκλείδης, το μέρος εκείνο που αναφέρεται στη Γεωμετρία. Εδώ θα πρέπει να διευκρινήσουμε πως ο Ευκλείδης είχε μαζέψει όλες τις μέχρι τότε γνώσεις γύρω από τα Μαθηματικά, τους έδωσε μορφή, και τις κατέγραψε σε 13 βιβλία, γενικών Μαθηματικών.

Για δυο περίπου εκατονταετίες μέχρι τη δεκατία του 60 τα βιβλία του Ευκλείδη, σε μετάφραση βέβαια, είχαν την ίδια κυκλοφορία με τη μετάφραση της ''Βίβλου''.

Η γεωμετρία του Ευκλείδη στηρίζεται κατά βάση στο αξίωμα αριθμός 5(πέντε) των στοιχείων του. Το αξίωμα αυτό λέει: (Θα το πω στα αρχαία και στη συνέχεια στα αγγλικά για να δούμε ποια από τις δύο γλώσσες καταλαβαίνουν καλύτερα οι μαθητές μας). Η γλώσσα μας βλέπετε όπως λένε κάποιοι μεγάλοι γλωσσολόγοι είναι ενιαία, που σίγουρα είναι, όμως έχει αλλάξει, τόσο στη δομή και τη σύνταξη όσο και στο εννοιολογικό των λέξεων μέρος, που μάλλον δυσκολευόμαστε να καταλάβουμε τις πιο παλιές μορφές της.

'' Και εάν εις δύο ευθείας, ευθεία εμπίπτουσα τας εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίας δυο ορθών ελάσσονας ποιή, εκβαλλομένας τας δύο ευθείας επ' άπειρον συμπίπτειν, εφ' α μέρη εισίν αι των δύο ορθών ελάσσονες''.

"That, if a straight line falling on two other straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet at that side on which are the angles less than the two right angles"

Ο Ευκλείδης δηλαδή λέει: " Αν δυο ευθείες τέμνονται από μια τρίτη έτσι ώστε να σχηματίζουν τις δυο εντός και επί τα αυτά γωνίες μικρότερες των δυο ορθών και τις άλλες δυο μεγαλύτερες, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος προς το οποίο το άθροισμα των γωνιών είναι μικρότερο από τις δυο ορθές". Αλήθεια, πολλές φορές αναρωτήθηκα γιατί δεν μας υποχρεώνουν να διδάσκουμε και τη γεωμετρία στα αρχαία αφού όλα τα άλλα κάποιοι τα θέλουν στα αρχαία.

Το αξίωμα αυτό πάνω στο οποίο στηρίζεται όλη η γεωμετρία που ξέρουμε δεν ικανοποιούσε τους μεγάλους Μαθηματικούς κατά τους αιώνες που ακολούθυσαν και έτσι προσπάθησαν να το θεωρήσουν ως θεώρημα και να το αποδείξουν, είτε να το διατυπώσουν διαφορετικά. Εμείς ξέρουμε το αξίωμα υπό την πιο κάτω μορφή: " Από σημείο έξω από ευθεία μόνο μια παράλληλη σε αυτήν μπορούμε να φέρουμε".

Στη μορφή αυτή το αξιώμα είναι γνωστό στο δυτικό κόσμο σαν αξίωμα του Playfair που όμως δεν είναι μια καινούργια διατύπωση του αξιώματος αρ.5 του Ευκλείδη γιατί στη μορφή αυτή αναφέρεται από τον Πρόκλο στη μελέτη του για τον Ευκλείδη.

Ο Sir Thomas Heath από τον οποίο παίρνω όλες αυτές τις πληροφορίες αναφέρει εννέα εναλλακτικές προτάσεις για αντικατάσταση του αξιώματος αυτού του Ευκλείδη.Τελικά έχει επικρατήσει η διατύπωση των Playfair-Πρόκλου που ανάφερα πριν λίγο.

Ο Πλάτων έλεγε: " Ο Θεός αεί γεωμετρεί" και ο μέγας Γερμανός μαθηματικός Gauss συμπλήρωσε: " Ο Θεός αεί γεωμετρεί σύμφωνα με τα στοιχεία του Ευκλείδη".

Όταν είχα πάει στην Αγγλία για μετεκπαίδευση το 1969-70 μου είχαν πει πως έπρεπε να γράψω δυο "long essays" δηλαδή δυο εκτεταμένα δοκίμια για θέματα που αφορούν τα Μαθηματικά. Εγώ αφελώς σκεπτόμενος διάλεξα το θέμα " Η προσφορά των Ελλήνων στα Μαθηματικά". Νόμιζα πως αφού ήμουν Έλληνας θα μπορούσα να ασχοληθώ με το θέμα αυτό πιο εύκολα παρά με οποιοδήποτε άλλο θέμα.

Στο τέλος αποδείχτηκε πως ήμουν πάρα πολύ αφελής εγώ που δεν είχα καμιά σχεδόν γνώση για τα Ελληνικά μαθηματικά να θελήσω να γράψω μια μελέτη γι'αυτά. Ξεκίνησα από εγκυκλοπαίδειες για να ανακαλύψω πως εκείνος που είχε ασχοληθεί πάρα πολύ με τα Ελληνικά Μαθηματικά ήταν ο Sir Thomas Heath. Βρήκα λοιπόν μια δίτομη ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, καθώς και μελέτες του που αφορούσαν τον αρχιμήδη, τον Διόφαντο από την Αλεξάνδρεια, τον πατέρα της Άλγεβρας, τον Ευκλείδη και τον Αρίσταρχο από την Σάμο. Αυτά ανέρχονταν στις 4000 σελίδες και φυσικά μου ήταν αδύνατο να τα μελετήσω. Τελικά ανακάλυψα πως ο ίδιος συγγραφέας έγραψε και το " A manual of Greek Mathematics" δηλαδή εγχειρίδιο Ελληνικών Μαθηματικών όπου ασχολείται με τα Ελληνικά Μαθηματικά σε μόνο 530 σελίδες.

Στο βιβλίο αυτό έμαθα για τα Μαθηματικά των Ελλήνων όχι λίγα πράγματα. Θα σας αναφέρω μερικά μόνο, ελάχιστα για να πάρετε μια πολύ αμυδρή ιδέα των προγόνων μας.

Λοιπόν:

Ο Διόφαντος πατέρας της Άλγεβρας είναι γνωστός σε όλους από κάποιο πρόβλημα που συνήθως υπάρχει σε όλα τα βιβλία της Άλγεβρας.

Ο Αρίσταρχος από τη Σάμο αποκαλείται από τον Sir Thomas Heath " Κοπέρνικος της αρχαιότητας" το γιατί είναι φανερό. Αυτός πρώτος διατύπωσε την ηλιοκεντρική θεωρία και κατά τον Heath, από αυτόν πήρε ο Κοπέρνικος τις πρώτες ιδέες για τη θεωρία του.

Ο Απολλώνιος από την Πέργα μάζεψε και κατάγραψε σε 13 και αυτός βιβλία, όλα όσα αποτελούν σήμερα την αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου που κάνουμε στις Α, Β και Γ Λυκείου. Οι ονομασίες Έλλειψη, Υπερβολή, Παραβολή εμφανίζονται πρώτη φορά στα βιβλία του Απολλώνιου και τα ονόματα για μεν την Έλλειψη είναι ε<1 ελλείπη δηλαδή της μονάδας για την υπερβολή είναι ε>1 υπερβάλλει δηλαδή τη μονάδα και τέλος για την παραβολή χρησιμοποιεί τη λέξη παρά που σημαίνει ίσον. Όσοι ασχολείστε με οικονομικά ξέρετε πως όταν λέμε για κάποιες μετοχές πως η αξία τους είναι "at par" εννοούμε πως η αγοραστική αξία συμπίπτει με την ονομαστική. Το "at par" προέρχεται από το αρχαίο παρά, που όπως είπα σημαίνει ίσον.

Τελειώνω με μια αναφορά στον άνθρωπο που ανακάλυψε το ολοκλήρωμα με τη μέθοδο της εξαντλήσεως. Τον Αντιφώντα τον σοφιστή. Αυτός στην προσπάθεια του να βρεί το εμβαδό του κύκλου ανακάλυψε το ολοκλήρωμα όπως το ξέρουμε σήμερα. Όμως ο Πλάτων, άλλος μέγιστος Μαθηματικός της αρχαιότητας, του παρατήρησε πως μένουν κάποια κομματάκια εμβαδού που δεν έλαβε υπόψη του. Έτσι μερικές δεκατίες αργότερα ήλθε ο Αρχιμήδης ο οποίος επανέλαβε τα όσα έκανε ο Αντιφών και συμπλήρωσε πως τα κομματάκια του εμβαδού που μένουν είναι τόσο μικρά, απειροστά, που είναι αμελητέα.

Όπως όλοι ξέρουμε οι Έλληνες είχαν προχωρήσει πάρα πολύ στη Γεωμετρία ενώ δεν ανέπτυξαν στο βαθμό που αναμενόταν την Άλγεβρα ή την αναλυτική ή τη μηχανική. Ο λόγος είναι η έλλειψη συμβολισμού χ,ψ,ω και κυρίως η γραφή των αριθμών με τα: α,β,γ κλπ.

Η μεγάλη, η μέγιστη πρόοδος ήλθε αργότερα με την εισαγωγή στην Ευρώπη αφενός του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης από τους Άραβες που το έφεραν από τις Ινδίες και αφετέρου με την εισαγωγή των διάφορων συμβόλων.

Από όσα έχω μελετήσει είναι φανερό πως όλοι οι ξένοι πιστεύουν πως τα θεμέλια όλων ανεξαίρετα των επιστημών είχαν την καταγωγή τους στην ελληνική αρχαιότητα.

Πολλοί και διάφοροι λόγοι για τους οποίους η πατρίδα μας έχασε την πρωτοπορία στις τέχνες, τα γράμματα, τις επιστήμες με κύριο λόγο την για 400 χρόνια σκλαβιά στους βάρβαρους Αττίλες.

Σιγά - σιγά ο λαός ο Ελληνικός, σαν ιδιαίτερα άτομα, βρίσκει και πάλι το δυναμισμό και την έφεση για μάθηση και μέσα από τα σπλάχνα του αναδεικνύονται μεγάλοι άνδρες, λογοτέχνες, μουσικοί , ζωγράφοι, επιστήμονες. Εμείς εδώ, μέρος του δυναμικού αυτού του λαού, έχουμε καθήκον τόσο απέναντι στους προγόνους μας όσο και απέναντι στον εαυτό μας και στις επερχόμενες γενιές να δώσουμε δυναμικά το παρόν μας και να φροντίσουμε να διακριθούμε ώστε να φανούμε έστω και κατ'ελάχιστον αντάξιοι απόγονοι των προγόνων μας.

Τα Μαθηματικά είναι ένα μέσο που θα μας βοηθήσει στην προσπάθεια μας αυτή. Και τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο θεωρία και ατένισμα των ουρανών όπως νόμισε η υπηρέτρια του Θαλή, τα Μαθηματικά αντίθετα είναι η πιο προσγειωμένη επιστήμη, είναι η επιστήμη εκείνη που ακόμη και στη θεωρία της αβεβαιότητας αν μεταφράζω σωστά τη λέξη "uncertainty" θεωρία των πιθανοτήτων όπως έχει επικρατήσει να ονομάζεται μιλά για βεβαιότητα συμβάντων, όταν φυσικά τα ενδεχόμενα είναι αρκούντος πολλά.

Εμείς οι άνθρωποι της ΚΥ.Μ.Ε. που έχουμε τάξη σαν σκοπό μας την πρόοδο και ανάπτυξη των Μαθηματικών στον τόπο μας πιστεύουμε πως θα ήταν σχεδόν αδύνατο να επιτελέσουμε τους στόχους μας αν δεν είχαμε την αμέριστη και πολυδιάστατη βοήθεια του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού.

Ο σημερινός Γενικός Διευθυντής του Υπουργείου δρ. Ανδρέας Φυλακτού, είχε διαπιστώσει τη μεγάλη και αφιλοκερδή προσφορά μας στα Μαθηματικά και αγκάλιασε με αγάπη και στοργή κάθε προσπάθεια τηςΚΥ.Μ.Ε. τόσο πριν από τη θέση του Διευθυντή Μέσης Εκπαίδευσης όσο και τώρα από τη θέση του Γενικού Διευθυντή του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού. Ευχαριστώ λοιπόν θερμά τον κ. Φυλακτού για την πολύπλευρη βοήθεια που μας προσφέρει. Ευχαριστώ επίσης το νέο Διευθυντή Μέσης Εκπαίδευσης κ. Γιώργο Πουλλή που μας βλέπει με το ίδιο μάτι όπως ο κ. Φυλακτού και μας βοηθά επίσης.

Ευχαριστώ την Τράπεζα Κύπρου η οποία μας συμπαρίσταται από την πρώτη μέρα της ίδρυσης μας πριν 14 τόσα χρόνια και την εταιρεία ΚΕΟ που βραβεύει τους μαθητές της Γ΄ τάξης Γυμνασίου.

Ευχαριστώ επίσης όσους άλλους συμβάλλουν στη βράβευση αυτών που διακρίνονται, δηλαδή την οικογένεια Μορφάκη από τη Λάρνακα, την κ.

Ανδρούλα Σκώττη, την οικογένεια της μακαρίτισσας συναδέλφου Κανίκλη και τη κ. Μαρούλα Χριστοδουλίδου, μαθηματικό και χήρα του εκλιπόντος μαθηματικού Στέλιου χριστοδουλίδη.

Τέλος συγχαίρω όλους όσους έχουν διακριθεί και τους εύχομαι "εις ανώτερα" και ευχαριστώ όλους εσάς που είχατε την υπομονή να με ακούσετε.

Όσοι συνάδελφοι ή μαθητές αναζητούν πληροφορίες για τα εκπαιδευτικά συστήματα στην Ευρώπη μπορούν να μελετήσουν στο INTERNET την ιστοσελίδα με διεύθυνση: http://www.eurydice.org

Ομιλία του προέδρου της ΚΥ.Μ.Ε. για την έναρξη του καλοκαιρινού μαθηματικού σχολείου 1997 στον Αγρό.

Όταν πριν επτά χρόνια λειτουργήσαμε το καλοκαιρινό μαθηματικό σχολείοστον Πεδουλά δεν είχε περάσει από το μυαλό μας πόσην επιτυχία επρόκειτο να έχει ο θεσμός αυτός.

Είχαμε ξεκινήσει με 80 μαθητές και φτάσαμε να έχουμε πέρυσι 230 πράγμα που αποδείχτηκε αρκετά δύσκολο στο χειρισμό του.

Είναι φανερό πως υπάρχει μεγάλη ζήτηση, από τους γονιούς για ένα καλοκαιρινό σχολείο που θα προσφέρει στα παιδιά τους γνώσεις και ψυχαγωγία. Σε μας το καλοκαιρινό σχολείο στηρίζεται κατά βάση στη εθελοντική αφιλοκερδή προσφορά των συναδέλφων μαθηματικών. Είναι ήλιου φαεινότερο πως για να λειτουργήσει το καλοκαιρινό σχολείο χρειάζεται από μέρους όλων των εμπλεκομένων κόπος, κέφι για δουλειά και αγάπη για το μαθητή. Πράγματα που όπως φαίνεται τα έχουμε αρκετοί συνάδελφοι και γι' αυτό και το σχολείο μας πάει αρκετά καλά. Αν τώρα επρόκειτο να πληρωθούν τόσο οι καθηγητές που θα διδάξουν όσο και οι καθηγητές που θα μείνουν μαζί με τα παιδιά τότε σίγουρα τα κόστα θα ήταν απαγορευτικά και δεν θα μπορούσαμε να λειτουργήσουμε το σχολείο μας.

Και πάλιν όμως για να λειτουργήσει το σχολείο αυτό χρειάζεται τη βοήθεια και τη στήριξη του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού γιατί όλοι οι καθηγητές που εμπλέκονται στη διαδικασία χρειάζεται να πάρουν άδεια από τα σχολεία τους και αυτή η άδεια δίνεται από το Υπουργείο Παιδείας και πολιτισμού. Ακόμη οι αίθουσες που χρησιμοποιούμε είναι σχολικές αίθουσες μετά από άδεια του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού. Με λίγα λόγια εμείς προσφέρουμε τον κόπο και την έμπνευση μας και το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού τις εγκαταστάσεις και ευκολίες του και έτσι οι δύο μαζί λειτουργούμε το σχολείο αυτό, γιατί όλοι μας πιστεύουμε πως έτσι προσφέρουμε στη νεολαία του τόπου μας και κατ' επέκταση στην ίδια μας την πατρίδα.

Κατά τις 5 μέρες που λειτουργεί το σχολείο προσπαθούμε να προσφέρουμε στα παιδιά που παρακολουθούν κάτι περισσότερο από αυτά που κάνουμε στο σχολείο.

Τα μαθηματικά είναι η βάση όλων σχεδόν των επιστημών και χωρίς αυτά, είναι βέβαιο πως δεν μπορεί κάποιος να προχωρήσει στην επιστήμη που έχει επιλέξει γιατί ακόμη και στα φιλολογικά θέματα θα πρέπει να μπορεί κάποιος να αντιλαμβάνεται έννοιες όπως, μέσος όρος, διάμεσος, τυπική απόκλιση κ.λ.π. για να μπορεί να καταλαβαίνει αν τα θέματα με τα οποία ασχολείται προχωρούν κανονικά ή όχι. Γι' αυτό και στο Ηνωμένο Βασίλειο τα μαθηματικά θεωρούνται θέμα εισαγωγής για οποιαδήποτε πανεπιστημιακή σπουδή. Και είναι για τον ίδιο ακριβώς λόγο για τον οποίον πιστεύουμε πως οι μέλλοντες δάσκαλοι θα πρέπει να ικανοποιούν ένα ελάχιστο όριο μαθηματικών γνώσεων για να μπορούν να γίνουν δάσκαλοι. Γιατί αλήθεια πως θα μπορέσουν να διδάξουν σωστά, απλά έστω πράγματα που έχουν σχέση με τα μαθηματικά αν αυτοί είναι άσχετοι; Έτσι πρέπει το συντομώτερο δυνατό να υλοποιηθεί η προσπάθεια του Υπουρείου Παιδείας και Πολιτισμού για εξέταση και στα μαθηματικά για όλους όσοι πρόκειται να παρακολουθήσουν το τμήμα των Επιστημών της αγωγής του πανεπιστημίου Κύπρου, να γίνουν δηλαδή δάσκαλοι. Όπως ακριβώς πρέπει οι μέλλοντες δάσκαλοι να κατέχουν τη γλώσσα που θα διδάξουν, κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο πρέπει να κατέχουν και τις βασικές γνώσεις μαθηματικών που θα διδάξουν. Τα τρία Ρ που λέγουν οι Εγγλέζοι πως πρέπει να μαθαίνουν οι μαθητές του δημοτικού σχολείου είναι εντελώς ουσιώδες να τα κατέχουν σε ένα αρκετά ψηλό βαθμό και αυτοί που πρόκειται να τα διδάξουν.

Σήμερα η πατρίδα μας βρίσκεται σε συνθήκες ημικατοχής και ο λόγος του πληθυσμού της προς τον πληθυσμό του εισβολέα μας οδηγεί σε πολύ δυσάρεστα για μας συμπεράσματα. Όμως δεν είναι μόνο η πληθυσμιακή αναλογία που θα κρίνει τις σχέσεις μας με τον εισβολέα. Στη μάχη μας με τον εισβολέα υπεισέρχονται και άλλες παράμετρες. Μια από αυτές τις παράμετρες είναι και η πνευματική ανάπτυξη και η κατά συνέπειαν ικανότητα του κάθε λαού για προσαρμογή στην προηγμένη τεχνολογία που απαιτούν τα νέα οπλικά συστήματα.

Έμεις πιστεύουμε πως μια καλή γνώση των μαθηματικών, θα βοηθήσει, αυτό είναι σίγουρο, στη σωστή γνώση και ικανότητα χρήσης των νέων οπλικών συστημάτων. Δεν λέμε πως τα μαθηματικά αποτελούν πανέκεια, ισχυριζόμαστε όμως πως ένας που έχει πολύ καλή γνώση μαθηματικών μπορεί πιο εύκολα να προσαρμοστεί στα νέα δεδομένα και να αντεπεξέλθει στις νέες συνθήκες. Γι' αυτό ακριβώς πιστεύουμε πως λειτουργώντας το καλοκαιρινό μαθηματικό σχολείο προσφέρουμε, έμμεσα έστω, στον αγώνα του λαού μας για επιβίωση.

Είναι καθήκον μου να ευχαριστήσω το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού για την εν γένει βοήθεια που μας προσφέρει. Οι ευχαριστίες μου, έχουν βέβαια κάποιον ειδικόν αποδέκτη το γενικό διευθυντή του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού δόκτορα Ανδρέα Φυλακτού κατά πρώτο λόγο, που αγκάλιασε από την πρώτη μέρα θετικά τις προσπάθειες της ΚΥ.Μ.Ε. και το σημερινό διευθηντή Μέσης δόκτορα Γεώργιο Πουλλή που συνεχίζει την πολιτική του κ. Φυλακτού.

Ευχαριστώ θερμά τη Γυμνασιάρχη Αγρού κ. Κορφιώτου για τη βοήθεια της καθώς και όλους εσάς που είχατε την καλωσύνη να έλθετε στην τελετή έναρξης του καλοκαιρινού μας σχολείου. Ευχαριστώ επίσης την κοινότητα Αγρού για τη βοήθεια που μας προσφέρει και την αγάπη με την οποία βλε΄πουν την προσπάθεια μας αυτή. Εύχομαι τέλος κάθε επιτυχία στο καλοκαιρινό μαθηματικό σχολείο.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

1. Παρακαλούνται τα μέλη της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας να μήν πληρώνουν απευθείας συνδρομές προς την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία διότι τελικά θα πληρώσουν διπλά, εφ'όσον η συνδρομή προς την ΚΥ.Μ.Ε. συμπεριλαμβάνει τη συνδρομή προς την Ε.Μ.Ε.. Αν κατά λάθος λάβεται ειδοποίηση από την Ε.Μ.Ε. παρακαλούμε να μή τη λάβετε υπόψη.

2. Ο μαθηματικός διαγωνισμός επιλογής θα γίνει το Σάββατο, 21/3/98 στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Λατσιά, Λευκωσία. Η διάρκεια του διαγωνισμού θα είναι 4,5 ώρες, από 10:00 - 14:30 . Για περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να τηλεφωνήσετε στο 09-641843 .

3. Η 15η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα θα διεξαχθεί στη Κύπρο στις 3-9 Μαΐου, 1998. Παρακαλούνται όσοι συνάδελφοι ενδιαφέρονται να βοηθήσουν να τηλεφωνήσουν στο Γρηγόρη Μακρίδη στον αριθμό 09-641843 .

4. Το καλοκαιρινό Μαθηματικό Σχολείο θα διοργανωθεί και φέτος στον Αγρό τις 22-26 Ιουνίου, 1998. Δηλώσεις θα γίνουν μέσω των σχολείων κατά το μήνα Μάϊο.

5. Τα πρακτικά του 1ου Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικών πωλούνται στην ειδική τιμή των 5 λιρών. Στα πρακτικά αυτά θα βρείτε σημαντικές εργασίες τόσο στο κλάδο της διδακτικής των μαθηματικών όσο και στο κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Πληροφορίες στο 09-641843 .

6. Τα περιοδικά της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας δεν θα στέλνονται πλέον στη διεύθυνση σας από την Ελλάδα. Τα περιοδικά αυτά θα στέλνονται μέσω της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας. Σημειώνουμε ότι όσοι συνάδελφοι δεν έχουν διευθετήσει τις συνδρομές τους δεν θα τους αποστέλλονται τα περιοδικά.

7. Το Δεύτερο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικών της ΚΥ.Μ.Ε. αναμένεται να πραγματοποιηθεί το φθινόπωρο του 1998. Η ΚΥ.Μ.Ε θα δέχεται εργασίες/μελέτες για παρουσίαση στο συνέδριο από τη 1η Ιουνίου 1998 στη διεύθυνση της εταιρείας αναφέροντας, για το Παγκύπριο Συνέδριο.

ΠΡΩΤΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΕΥΚΩΣΙΑ, ΚΥΠΡΟΣ

2-5 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ, 1997

Το Πρώτο Μεσογειακό Συνέδριο Μαθηματικών πραγματοποιήθηκε στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου τις 2-5 Ιανουαρίου 1997. Το συνέδριο οργανώθηκε από τη Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία και το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου. Την έναρξη των εργασιών του συνεδρίου κήρυξε η Υπουργός Παιδείας και Πολιτισμού κα Κλαίρη Αγκελίδου.

Το θέμα του Συνεδρίου ήταν Διδακτική και Εφαρμογές και εξέτασε παιδαγωγικά θέματα, εκπαιδευτική αξιολόγηση και θέματα που αφορούν τις εφαρμογές των μαθηματικών σε άλλους κλάδους και επιστήμες. Εργασίες σε καθαρά Μαθηματικά χωρίς εφαρμογές δεν έγιναν αποδεχτές.

Όλες οι εργασίες έχουν αξιολογηθεί απο τουλάχιστο δύο κριτές. Τα μέλη της Επιτροπής Κριτών αποτελούνταν από επιστήμονες από την Κύπρο, Ελλάδα, Ισραήλ, Αίγυπτο, Ισπανία, Γαλλία, Ηνωμένο Βασίλειο και Ηνωμένες Πολιτείες.

Είχαν υποβληθεί 39 εργασίες και η Επιτροπή Κριτών, μετά που παρέλαβε τις αξιολογήσεις απο τους κριτές έκανε τις ακόλουθες εισηγήσεις για τις εργασίες. (α) να γίνουν αποδεχτές για παρουσίαση και δημοσίευση στα πρακτικά, (β) να γίνουν αποδεχτές για παρουσίαση μονο χωρίς να δημοσιευθούν στα πρακτικά, (γ) να μήν γίνουν αποδεχτές ούτε για πρακτικά και ούτε για δημοσίευση. Έγινε και τέταρτη εισήγηση για εργασίες που έφθασαν πολύ αργά και δεν υπήρχε χρόνος για να υποβληθούν για αξιολόγηση. Οι τελευταίες, μετά που μελετήθηκε η περίληψη τους έγινε εισήγηση να παρουσιαστούν μόνο χωρίς να επιτραπεί η δημοσίευση τους στα πρακτικά. Η Επιτροπή Κριτών πρότεινε 32 εργασίες για παρουσίαση και δημοσίευση στα πρακτικά, 4 εργασίες για παρουσίαση μονο, 1 εργασία είχε απορριφθεί και για παρουσίαση αλλά και δημοσίευση στα πρακτικά. Δύο εργασίες που έφθασαν πολύ αργά προτάθηκαν για παρουσίαση μόνο.

Ευχαριστούμε το Τμήμα Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου και την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία για την συνεργασία τους στην οργάνωση αυτού του συνεδρίου. Ευχαριστούμε όσους εργάστηκαν για την επιτυχία αυτού του συνεδρίου.

Με τις πιό ειλικρινές μου ευχές,

Δρ Γρηγόρης Μακρίδης
Πρόεδρος Συνεδρίου
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου
E-mail: makrides@cyearn.pi.ac.cy

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΠΡΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 1998

Επιμέλεια: Ιωάννης Φάκας

1. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Κριόν την 20ην Μαρτίου εις τις 21ω, 53λ, 41δ. Αρχή του Έαρος.
2. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Καρκίνον την 21ην Ιουνίου εις τις 16ω, 01λ, 49δ. Αρχή του Θέρους.
3. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Ζυγόν την 23ην Σεπτεμβρίου εις τις 07ω, 36λ, 46δ. Αρχή του Φθινοπώρου.
4. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Αιγόκερω την 22αν Δεκεμβρίου εις τις 3ω, 55λ, 46δ. Αρχή του Χειμώνα.

Φάσεις του φεγγαριού

Νέο φεγγάρι				1ον τέταρτο			
	μ	ω	λ		μ	ω	λ
				Ιαν	5	16	19
Ιαν	28	08	02	Φεβ	4	00	54
Φεβ	26	19	27	Μαρ	5	10	42
Μαρ	28	05	15	Απρ	3	22	19
Απρ	26	13	42	Μαη	3	12	05
Μαη	25	21	33	Ιουν	2	03	46
Ιουν	24	05	51	Ιουλ	1	20	44
Ιουλ	23	15	45	Ιουλ	31	14	06
Αυγ	22	04	04	Αυγ	30	07	07
Σεπ	20	19	02	Σεπ	28	23	12
Οκτ	20	12	10	Οκτ	28	13	47
Νιο	19	06	28	Νιο	27	02	24
Δεκ	19	00	43	Δεκ	26	12	47

Πανσέληνος				4ον τέταρτο			
	μ	ω	λ		μ	ω	λ
Ιαν	12	19	25	Ιαν	20	21	41
Φεβ	11	12	24	Φεβ	19	17	28
Μαρ	13	06	35	Μαρ	21	09	39
Απρ	12	00	24	Απρ	19	21	54
Μαη	11	16	30	Μαη	19	06	36
Ιουν	10	06	19	Ιουν	17	12	39
Ιουλ	9	18	02	Ιουλ	16	17	14
Αυγ	8	04	11	Αυγ	14	21	49
Σεπ	6	13	22	Σεπ	13	03	59
Οκτ	5	22	13	Οκτ	12	13	12
Νιο	4	07	19	Νιο	11	02	29
Δεκ	3	17	20	Δεκ	10	19	54

ΕΚΛΕΙΨΕΙΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 1998

1. Ολική Έκλειψη Ηλίου στις 26 Φεβρουαρίου, αόρατη όμως στην Κύπρο.

2. Έκλειψη Σελήνης από την παρασκιά της Γης στις 13 Μαρτίου. Πρακτικά αόρατος εις την Κύπρο.

3. Έκλειψη Σελήνης από την παρασκιά της Γης, στις 8 Αυγούστου. Πρακτικά αόρατη στην Κύπρο.

4. Δακτυλοειδής Έκλειψη Ηλίου αόρατη όμως στην Κύπρο στις 21-22 Αυγούστου.

5. Έκλειψη Σελήνης από την παρασκιά της Γης στις 6 Σεπτεμβρίου. Πρακτικά αόρατη στην Κύπρο.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

Συγκριτικοί Πίνακες Μαθηματικής Παιδείας στον Ευρωπαϊκό Χώρο

Δρ Γρηγόρης Μακρίδης
Μαθηματικός, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο
Κυπριακή Μονάδα ΕΥΡΥΔΙΚΗ-EURYDICE

Από τη 1η Νοεμβρίου, 1997 η Κύπρος εντάχθηκε στο Ευρωπαϊκό πρόγραμμα ΣΩΚΡΑΤΗΣ-SOCRATES το οποίο αποτελείται από διάφορα υποπρογράμματα, το κάθε ένα με το δικό του σκοπό και αποστολή. Ένα απο αυτά τα υποπρογράμματα είναι το ΕΥΡΥΔΙΚΗ-EURYDICE το οποίο είναι ένα δίκτυο πληροφοριών για την εκπαίδευση στην Ευρώπη. Οι πληροφορίες συλλέγονται και δημοσιεύονται σε ειδικές εκδόσεις-βιβλία ή δια του INTERNET. Η πληροφορίες αυτές είναι πολύ σημαντικές για όσους ενδιαφέρονται να κάνουν συγκριτικές μελέτες για εκπαιδευτικά θέματα χωρών της Ευρώπης καθώς και για όσους συμμετέχουν στη χάραξη εκπαιδευτικής πολιτικής. Η μονάδα αυτή εδρεύει στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού, Τ.Θ. 12720, Λευκωσία 2252 και έχει ηλεκτρονική διεύθυνση eurydcy@cyearn.pi.ac.cy , τηλ. 02-305933.
Εκδόσεις του Eurydice μπορείτε να μελετήσετε στην ιστοσελίδα με διεύθυνση:

http://www.eurydice.org

Ένα παράδειγμα μιάς συκριτικής μελέτης παρουσιάζεται στις επόμενες σελίδες μέσω πινάκων οι οποίοι περιγράφονται πιό κάτω.

Ο πίνακας 1 περιγράφει τον ετήσιο αριθμό ωρών διδασκαλίας σε εξηντάλεπτες ώρες στις χώρες τις Ευρώπης για τις ηλικίες 6,9,13 και 16 κατά τη χρονιά 1995.
Όπου αναγράφονται τα αρχικά ΕΜ σημαίνει ότι υπάρχει Επιλογή Μαθημάτων και έτσι ο αριθμός των ωρών δεν είναι σταθερός. Εδώ διαπιστώνουμε ότι στις ηλικίες 6 και 9 τις περισσότερες ώρες διδασκαλίας Μαθηματικών έχει το Λουξεμβούργο, στην ηλικία 13 η Αυστρία ενώ στην ηλικία 16 πρώτη έρχεται η Δανία.
Ο πίνακας 2 παρουσιάζει το ποσοστό γυναικών στο σύνολο των φοιτητών που σπουδάζουν Μαθηματικά κατά χώρα τη χρονιά 1992-93. Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος ότι το μεγαλύτερο ποσοστό βρίσκεται στην Πορτογαλλία ενώ το μικρότερο στην Ολλανδία.
Ο πίνακας 3 παρουσιάζει το ποσοστό αποφοίτων τριτοβάθμιων σχολών στο κλάδο των Μαθηματικών κατά τη χρονιά 1991-92. Τους περισσότερους απόφοιτους φαίνεται να έχουν εξίσου η Ιρλανδία και η Φινλανδία.
Ο πίνακας 4 είναι ένας συγκριτικός πίνακας ο οποίος παρουσιάζει το ποσοστό των αποφοίτων τριτοβάθμιων σχολών κατά θέμα τη χρονιά 1991-92. Τα ποσοστά έχουν υπολογιστεί από ένα σύνολο 13 χωρών μελών της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Στον πίνακα αυτό φαίνεται καθαρά ότι τα Μαθηματικά ήταν η λιγότερο δημοφιλής επιστήμη μιά που μόνο 3% είχαν αποφοιτήση στα Μαθηματικά τη χρονιά εκείνη.

1. ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ - ΕΤΗΣΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΩΡΩΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (1995)

ΧΩΡΑ / ΗΛΙΚΙΑ	ΗΛΙΚΙΑ 6	ΗΛΙΚΙΑ 9	ΗΛΙΚΙΑ 13	ΗΛΙΚΙΑ 16
ΒΕΛΓΙΟ	153	152	121	ΒΕΛΓΙΟ 91
ΔΑΝΙΑ	120	120	120	ΔΑΝΙΑ <u>150</u>
ΓΕΡΜΑΝΙΑ	130	152	130	ΓΕΡΜΑΝΙΑ 104
ΕΛΛΑΔΑ	131	105	105	ΕΛΛΑΔΑ 105
ΙΣΠΑΝΙΑ	130	130	105	ΙΣΠΑΝΙΑ 105
ΓΑΛΛΙΑ	ΕΜ	ΕΜ	136	ΓΑΛΛΙΑ 132
ΙΡΛΑΝΔΙΑ	109	146	ΕΜ	ΙΡΛΑΝΔΙΑ ΕΜ
ΙΤΑΛΙΑ	91	91	100	ΙΤΑΛΙΑ 133
ΛΟΥΞΕΜΒΟΥΡΓΟ	<u>187</u>	<u>159</u>	90	ΛΟΥΞΕΜΒΟΥΡΓΟ 90
ΟΛΛΑΝΔΙΑ	ΕΜ	ΕΜ	111	ΟΛΛΑΝΔΙΑ 89
ΑΥΣΤΡΙΑ	120	120	<u>165</u>	ΑΥΣΤΡΙΑ 90
ΠΟΡΤΟΓΑΛΛΙΑ	ΕΜ	ΕΜ	140	ΠΟΡΤΟΓΑΛΛΙΑ105
ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ	86	114	86	ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ ΕΜ
ΣΟΥΗΔΙΑ	86	105	95	ΣΟΥΗΔΙΑ 67
Η.Β. (ΑΓΓΛ/ΟΥΑΛΛΙΑ)	ΕΜ	ΕΜ	ΕΜ	(ΑΓΓΛ/ΟΥΑΛΛΙΑ) ΕΜ
Η.Β. (Β. ΙΡΛΑΝΔΙΑ)	ΕΜ	ΕΜ	ΕΜ	(Β. ΙΡΛΑΝΔΙΑ) ΕΜ
Η.Β. (ΣΚΩΤΙΑ)	ΕΜ	ΕΜ	ΕΜ	(ΣΚΩΤΙΑ) ΕΜ
	ΗΛΙΚΙΑ 6	ΗΛΙΚΙΑ 9	ΗΛΙΚΙΑ 13	ΗΛΙΚΙΑ 16

Πηγή: ΕΥΡΥΔΙΚΗ
Source: EURYDICE

2. ΠΟΣΟΣΤΟ ΓΥΝΑΙΚΩΝ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΠΟΥ ΣΠΟΥΔΑΖΟΥΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΑ ΧΩΡΑ (1992/93)

ΧΩΡΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΔΑΝΙΑ	27
ΓΕΡΜΑΝΙΑ	25
ΕΛΛΑΔΑ	38
ΙΣΠΑΝΙΑ	33
ΙΡΛΑΝΔΙΑ	29
ΙΤΑΛΙΑ	44
ΟΛΛΑΝΔΙΑ	11
ΑΥΣΤΡΙΑ	22
ΠΟΡΤΟΓΑΛΛΙΑ	45
ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ	20
ΣΟΥΗΔΙΑ	20
Η.Β.	25

Πηγή: ΕΥΡΥΔΙΚΗ
Source: EURYDICE

3. ΠΟΣΟΣΤΟ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (1991/92)

ΧΩΡΑ	ΠΟΣΟΣΤΟ
ΔΑΝΙΑ	2
ΓΕΡΜΑΝΙΑ	4
ΕΛΛΑΔΑ	4
ΙΣΠΑΝΙΑ	4
ΓΑΛΛΙΑ	<1
ΙΡΛΑΝΔΙΑ	6
ΙΤΑΛΙΑ	3
ΟΛΛΑΝΔΙΑ	1
ΑΥΣΤΡΙΑ	3
ΠΟΡΤΟΓΑΛΛΙΑ	3
ΦΙΝΛΑΝΔΙΑ	6
ΣΟΥΗΔΙΑ	4
Η.Β.	5

Πηγή: ΕΥΡΥΔΙΚΗ
Source: EURYDICE

4. ΠΟΣΟΣΤΟ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΚΑΤΑ ΘΕΜΑ (ΣΥΝΟΛΟ 13 ΧΩΡΩΝ ΜΕΛΩΝ ΤΗΣ ΕΥΡΩΠΑΪΚΗΣ ΕΝΩΣΗΣ) 1991/92

ΘΕΜΑ	*ΠΟΣΟΣΤΟ*
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΑ, ΘΕΟΛΟΓΙΑ ΚΑΛΕΣ ΤΕΧΝΕΣ	12
ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗ	**25**
ΝΟΜΙΚΑ	**4**
ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ	**9**
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	**3**
ΙΑΤΡΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ	**13**
ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ	**16**
ΑΛΛΑ	**18**

Πηγή: ΕΥΡΥΔΙΚΗ
Source: EURYDICE

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Επιμέλεια : Μάριος Αντωνιάδης.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

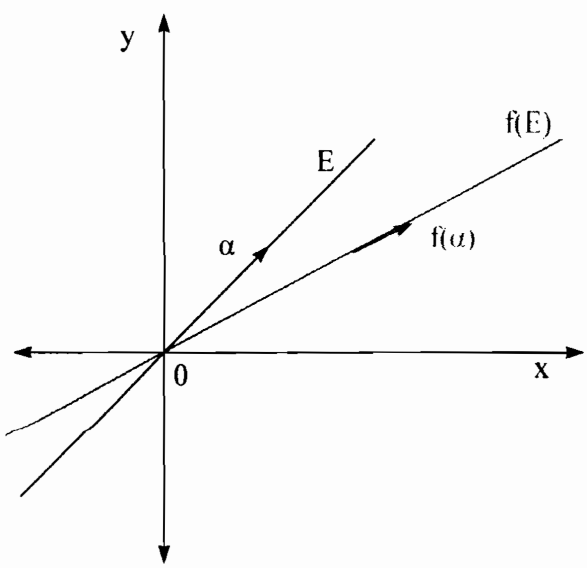
Εστω δύο διανυσματικοί χώροι V(K) και E(K). Μία απεικόνηση $f: V \to E$ καλείται γραμμική, εάν για όλα τα $x, y \in V$ και $\lambda \in K$ ισχύουν τα κάτωθι

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
3. ισοδύναμα με τις 1,2 είναι η $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ για όλα τα $x, y \in V$ και $\lambda, \mu \in K$.

Μία γραμμική απεικόνηση καλείται ισομορφισμός εάν είναι αμφιμονοσήμαντη- επί (ένα προς ένα). Σ'αυτή τη περίπτωση υπάρχει μία αντίστροφος απεικόνηση f^{-1} η οποία επίσης είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Στην περίπτωση που έχωμε γραμμική απεικόνιση ενός χώρου V^n στον εαυτό του τότε έχωμε **γραμμικό μετασχηματισμό** του V^n.

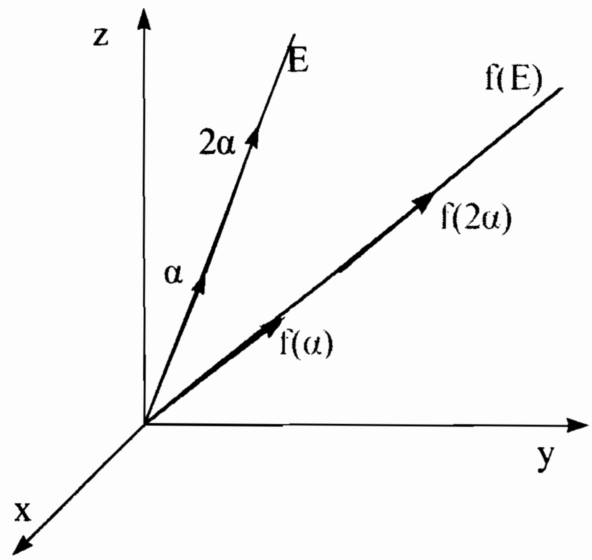
Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός του R^n (n=2,3) μετασχηματίζει όλες τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων σε ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων

Για R^2

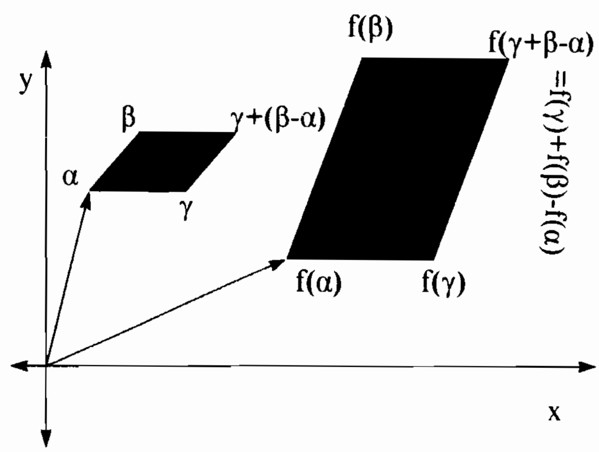


$E = \{\lambda\alpha; \lambda \varepsilon R\}$ με $\alpha \varepsilon R$ και
$f(E) = \{\lambda f(\alpha); \lambda \varepsilon R)$

Για R^3



Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός του R^n (n=2,3) μετασχηματίζει όλα τα παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα



Ένας γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος είναι ισομορφισμός του V^n επί του εαυτού του καλείται **ΚΑΝΟΝΙΚΟΣ** (αυτομορφισμός) διαφορετικά καλείται ιδιάζων ή ανώμαλος.

Στην απεικόνιση f αντιστοιχεί ένας τετραγωνικός nxn πίνακας A και στην απεικόνιση f^{-1} ένας nxn πίνακας B. Επειδή $f \circ f^{-1}$ είναι αυτομορφισμός και είναι η ταυτοτική απεικόνιση έπεται ότι στην απεικόνιση $f \circ f^{-1}$ αντιστοιχεί ο

μοναδιαίος πίνακας I και επομένως A.B=B.A=I άρα ο πίνακας $B=A^{-1}$ και ο πίνακας A έχει $|A| \neq 0$ για να υπάρχει αντίστρφος πίνακας.
Αντίστροφα αν $|A| \neq 0$ τότε ο πίνακας A έχει αντίστροφο A^{-1} ο οποίος αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση f^{-1} αντίστροφο της f επομένως η f είναι ισομορφισμός.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ.

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V^n και ένας γραμμικός μετασχηματισμός f με πίνακα $A=(\alpha_{i,j})$, μία βάση του $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,...,\bar{e}_n)$ καί $\bar{r} \in V^n$ τότε

$\bar{r} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2+...+x_n\bar{e}_n$ όπου $x_1,x_2,...,x_n$ οι συντεταγμένες του $\bar{r}$ ως προς τη βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,...,\bar{e}_n)$. Τότε

$$f(\bar{r}) = x_1 f(\bar{e}_1)+...+x_n f(\bar{e}_n) \Rightarrow$$

$$f(\bar{r})= x_1(\alpha_{11}\bar{e}_1+...+\alpha_{1n}\bar{e}_n)+...+x_n(\alpha_{n1}\bar{e}_1+...+\alpha_{nn}\bar{e}_n)$$

και αν $x'_1,x'_2,...,x'_n$ είναι οι συντεταγμένες του $f(\bar{r})$ ως προς τη βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,...,\bar{e}_n)$ θα έχωμε

$$x'_1 = x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{21}+...+x_n\alpha_{n1}$$
$$x'_2 = x_1\alpha_{12} + x_2\alpha_{22}+...+x_n\alpha_{n2}$$

.... και

....

$$x'_n = x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n}+...+x_n\alpha_{nn}$$

ισοδύναμα με τη χρήση πινάκων

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & . & . & . & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & . & . & . & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Έστω τώρα ο συνήθης διανυσματικός χώρος V διαστάσεως 3 και μια ορθοκανονική βάση του $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ με σύστημα τρισορθογώνιο συντεταγμένων με άξονες παράλληλους με τα διανύσματα $\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0$ και αρχή O. Για ένα σημείο T με διάνυσμα θέσεως $\bar{r}$ κάτω από ένα γραμμικό μετασχηματισμό f του διανυσματικού χώρου θα έχωμε

$$f(\bar{x}_0) = \alpha_{11}\bar{x}_0 + \alpha_{12}\bar{y}_0 + \alpha_{13}\bar{z}_0$$
$$f(\bar{y}_0) = \alpha_{21}\bar{x}_0 + \alpha_{22}\bar{y}_0 + \alpha_{23}\bar{z}_0$$
$$f(\bar{z}_0) = \alpha_{31}\bar{x}_0 + \alpha_{32}\bar{y}_0 + \alpha_{33}\bar{z}_0$$

Εάν καλέσωμεν το σύνολο των σημείων του τρισδιάστατου χώρου με R^3 τότε οι προηγούμενες σχέσεις δείχνουν μια σχέση του R^3 επί του εαυτού του.
Πράγματι εάν $T(\bar{r})$ είναι ένα σημείο με διάνυσμα θέσεως $\bar{r}$ και $f(\bar{r})=\bar{r}'$ τότε η εικόνα του T είναι ένα σημείο T′ με διάνυσμα θέσεως $\bar{r}'$ δηλ. f(T)=T′
Εάν δε T(x,y,z) και T′(x′,y′,z′) σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$x'=x\alpha_{11}+y\alpha_{21}+z\alpha_{31}$$
$$y'=x\alpha_{12}+y\alpha_{22}+z\alpha_{32} \qquad [1]$$
$$z'=x\alpha_{13}+y\alpha_{23}+z\alpha_{33}$$

Οι τύποι αυτοί δίνουν τις συντεταγμένες του σημείου T′ μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού συναρτήση των συντεταγμένων του T.
Το γραμμικό μετασχηματισμό σημείων του χώρου μπορούμε να τον ορίσουμε μόνο με τους τύπους [1] χωρίς να κάμουμε χρήση των διανυσματικών χώρων. Ο ορισμός όμως που δόθηκε είναι πιο πάραστατικός και χρήσιμος.
Εάν ο γραμμικός μετασχηματισμός είναι κανονικός, τότε

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$ και οι τύποι [1]

αντιστρέφονται οπότε έχομε

$$x=x'\beta_{11}+ y'\beta_{21}+ z'\beta_{31}$$
$$y=x'\beta_{12}+ y'\beta_{22}+ z'\beta_{32} \qquad [2]$$
$$z=x'\beta_{13}+ y'\beta_{23}+ z'\beta_{33}$$

όπου $B=(\beta_{ij})$ είναι ο πίνακας A^{-1} αντίστροφος του A.
Οι τύποι [1] και [2] παρατηρούμε ότι είναι όμοιοι με τους τύπους αλλαγής συντεταγμένων εδώ όμως δεν θεωρούμε ότι οι T(x,y,z) και T′(x′, y′,z′) παριστάνουν το ίδιο σημείο σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων αλλά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων διαφορετικό σημείο. Το σημείο T′ θα είναι η εικόνα του T μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού.
Γενικά ένας **γεωμετρικός μετασχηματισμός** είναι μία απεικόνιση $f: R^3 \rightarrow R^3$ για το χώρο ή $f: R^2 \rightarrow R^2$ για το επίπεδο, όπου σε κάθε σημείο T

του χώρου ή του επιπέδου αντιστοιχεί ένα σημείο Τ΄ αντίστοιχα του χώρου ή του επιπέδου δηλαδή f(T)=T΄.
Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός εκφράζεται με τις αναλυτικές σχέσεις
$x'=f_1(x,y,z)$, $y'=f_2(x,y,z)$, $z'=f_3(x,y,z)$ [3]
για το χώρο και
$x'=f_1(x,y)$, $y'=f_2(x,y)$ [4]
για το επίπεδο.
Θεωρούμε συνήθως κανονικούς μετασχηματισμούς και ώς εκ τούτου οι τύποι [3] και [4] αντιστρέφονται και δίνουν :
$x=f'_1(x',y',z')$,$y=f'_2(x',y',z')$, $z=f'_3(x',y',z')$
για το χώρο και
$x=f'_1(x',y')$, $y=f'_2(x',y')$ για το επίπεδο.

<u>Μετασχηματισμός Ευθείας και Εμβαδών</u>

Για το επίπεδο ένας γραμμικός μετασχηματισμός είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} x' &= x\alpha_{11} + y\alpha_{21} \\ y' &= x\alpha_{12} + y\alpha_{22} \end{aligned} \qquad \text{όπου} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας μετασχηματισμού.
Έστω τρία σημεία του επιπέδου $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ και οι εικόνες τους μέσω του προηγούμενου γραμμικού μετασχηματισμού $P'_1(x'_1,y'_1)$ $P'_2(x'_2,y'_2)$, $P'_3(x'_3,y'_3)$. Θα έχωμε

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1\alpha_{11}+y_1\alpha_{21} & x_1\alpha_{12}+y_1\alpha_{22} & 1 \\ x_2\alpha_{11}+y_2\alpha_{21} & x_2\alpha_{12}+y_2\alpha_{22} & 1 \\ x_3\alpha_{11}+y_3\alpha_{21} & x_3\alpha_{12}+y_3\alpha_{22} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (x_1-x_3)\alpha_{11}+(y_1-y_3)\alpha_{21} & (x_1-x_3)\alpha_{12}+(y_1-y_3)\alpha_{22} & 0 \\ (x_2-x_3)\alpha_{11}+(y_2-y_3)\alpha_{21} & (x_2-x_3)\alpha_{12}+(y_2-y_3)\alpha_{22} & 0 \\ x_3\alpha_{11}+y_3\alpha_{21} & x_3\alpha_{11}+y_3\alpha_{21} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (x_1-x_3)\alpha_{11}+(y_1-y_3)\alpha_{21} & (x_1-x_3)\alpha_{12}+(y_1-y_3)\alpha_{22} \\ (x_2-x_3)\alpha_{11}+(y_2-y_3)\alpha_{21} & (x_2-x_3)\alpha_{12}+(y_2-y_3)\alpha_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad [5]$$

Από την σχέση [5] εφ'όσον ο μετασχηματισμός είναι κανονικός εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα:
1) Μια ευθεία γραμμή μετασχηματίζεται σε μια ευθεία γραμμή διότι ο μηδενισμός της ορίζουσας
$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ που είναι συνθήκη για να είναι τρία σημεία συνευθειακά συνεπάγεται και το μηδενισμό της ορίζουσας $\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix}$
2) Αφού το εμβαδό ενός τριγώνου δίνεται από το $E = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$
ένα τρίγωνο μετασχηματίζεται σε ένα άλλο τρίγωνο του οποίου το εμβαδό δίνεται από το γινόμενο της ορίζουσας του μετασχηματισμού με το εμβαδό του πρώτου τριγώνου. $E' = |A| \cdot E$.

Ένα πολύγωνο μπορεί να χωριστεί σε τρίγωνα οπότε και τα εμβαδά των πολυγώνων ακολουθούν τον ίδιο κανόνα.
Επειδή δε και το εμβαδό που περικλείεται από κλειστή καμπύλη ορίζεται σαν το όριο του εμβαδού ενός πολυγώνου έχωμε γενικά ότι :

$$E' = |A| \cdot E$$

όπου E το εμβαδό που περικλείει η καμπύλη E΄ το μετασχηματιζόμενο εμβαδό και $|A|$ η ορίζουσα του μετασχηματισμού.
Θεωρούμε βέβαια τα εμβαδά προσημασμένα. Εάν $|A|>0$ τα εμβαδά διατηρούν τα πρόσημα τους κατά τον μετασχηματισμό ενώ αν $|A|<0$ τα εμβαδά αλλάζουν πρόσημο δηλαδή το τρίγωνο P'_1,P'_2,P'_3 διαγράφεται από την αντίθετη φορά από αυτήν του P_1,P_2,P_3.

Εφαρμογή.
Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός : $x'=\alpha x$, $y'=\beta y$
Ο μετασχηματισμός τούτος μετασχηματίζει το κύκλο $x^2+y^2=1$ στη έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ αφού

$$\left.\begin{array}{l} x'=\alpha x \\ y'=\beta y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{x'}{\alpha} \\ y=\frac{y'}{\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{x'^2}{\alpha^2}+\frac{y'^2}{\beta^2}=1$$

Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι $\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix}=\alpha\beta$ και το εμβαδό του κύκλου $x^2+y^2=1$ είναι ίσο με $E=\pi R^2=\pi$ οπότε βάση του $E'=|A|\cdot E$ έχωμε για το εμβαδό της έλλειψης $E'=\pi\alpha\beta$.

Μετασχηματισμός Επιπέδου και Όγκου

Για το χώρο ένας γραμμικός μετασχηματισμός είναι της μορφής :

$$\begin{aligned} x' &= x\alpha_{11}+y\alpha_{21}+z\alpha_{31} \\ y' &= x\alpha_{12}+y\alpha_{22}+z\alpha_{32} \\ z' &= x\alpha_{13}+y\alpha_{23}+z\alpha_{33} \end{aligned}$$

όπου

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας μετασχηματισμού.
Έστω τέσσερα σημεία $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ $P_3(x_3,y_3,z_3)$, $P_4(x_4,y_4,z_4)$.και οι εικόνες τους μέσω του μετασχηματισμού $P_1'(x_1',y_1',z_1')$, $P_2'(x_2',y_2',z_2')$, $P_3'(x_3',y_3',z_3')$, $P_4'(x_4',y_4',z_4')$ εάν εργαστούμε με το ίδιο τρόπο που εργαστήκαμε για το επίπεδο έχουμε :

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Από τη σχέση αυτή εξάγουμε τα ακόλουθα συμπεράσματα εφόσον ο μετασχηματισμός είναι κανονικός :

1) Ένα επίπεδο μετασχηματίζεται σε επίπεδο διότι ο μηδενισμός της ορίζουσας $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$ που είναι η συνθήκη για να είναι τέσσερα σημεία συνεπίπεδα συνεπάγεται και το μηδενισμό της ορίζουσας $\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 1 \end{vmatrix}$

2) Αφού ο όγκος ενός τετραέδρου δίνεται από το $V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$ ένα τετραέδρο μετασχηματίζεται σε ένα άλλο τετράεδρο του οποίου ο όγκος του δίνεται από το γινόμενο της ορίζουσας του μετασχηματισμού με τον όγκο του πρώτου τετραέδρου. Κατ'επέκταση αυτού έχομε για το μετασχηματισμό των όγκων ότι : $V'=|A|V$.

Εφαρμογή

Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός : $x'=\alpha x$, $y'=\beta y$,$z'=\gamma z$
Ο μετασχηματισμός τούτος μετασχηματίζει την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$ στο ελλειψοειδές $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$.
Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}=\alpha\beta\gamma$ ο όγκος δε της σφαίρας είναι $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi$ άρα βάση του $V'=|A|V$ ο όγκος του ελλειψοειδούς γίνεται $V=\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΔΙΔΑΚΤΗΚΑΝ ΣΤΟ ΕΚΤΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙΝΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΤΗΣ ΚΥ.Μ.Ε.

Επιμέλεια: Χαράλαμπος Λουγκρίδης

Δυνάμεις των φυσικών αριθμών με εκθέτη φυσικό (Το τελευταίο ψηφίο τους)

1. Είναι φανερό ότι κάθε δύναμη του 1 ισούται με 1, άρα 1^{ν} με $\nu \in N$ λήγει σε 1.

2. Δυνάμεις του 2.

$2^1 = 2$ $\quad 2^6 = 64$
$2^2 = 4$ $\quad 2^7 = 128$
$2^3 = 8$ $\quad 2^8 = 256$
$2^4 = 16$ $\quad 2^9 = 512$
$2^5 = 32$ $\quad 2^{10} = 1024$

Παρατηρώ ότι οι δυνάμεις του 2 λήγουν σε: 2, 4, 6, 8.
Οι δυνάμεις του 2 με εκθέτες
1, 5, 9,..., 4μ-3, μ∈N λήγουν σε 2
2, 6, 10,..., 4μ-2, ″ ″
4
3, 7, 11,..., 4μ-1 ″ ″
8
4, 8, 12,..., 4μ ″ ″
6

Εξ αυτών προκύπτει ότι:
$2^{4\nu}$ λήγουν σε 6
$2^{4\nu+1}$ λήγουν σε 2
$2^{4\nu+2}$ λήγουν σε 4
$2^{4\nu+3}$ λήγουν σε 8

Άσκηση: Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο των αριθμών $\alpha=2^{1995}$ και $\beta=2^{2001}$.

Λύση:
1995=4ν+3 (ν=498) άρα ο αριθμός $\alpha=2^{1995}=2^{4\nu+3}$ λήγει σε 8.
2001=4ν+1 (ν=500) άρα ο αριθμός $\beta=2^{2001}=2^{4\nu+1}$ λήγει σε 2.

3. Δυνάμεις του 3.

$3^1 = 3$ $\quad 3^6 = 729$
$3^2 = 9$ $\quad 3^7 = 2187$
$3^3 = 27$ $\quad 3^8 = 6561$
$3^4 = 81$ $\quad 3^9 = 19683$
$3^5 = 243$ $\quad 3^{10} = 59049$

Παρατηρώ ότι οι δυνάμεις του 3 λήγουν σε 1, 3, 7, 9.

Οι δυνάμεις του 3 με εκθέτες :
1, 5, 9, ... λήγουν σε 3
2, 6, 10, ... λήγουν σε 9
3, 7, 11, ... λήγουν σε 7
4, 8, 12, ... λήγουν σε 1

Εξ αυτών προκύπτει ότι:
$3^{4\nu}$ λήγουν σε 1
$3^{4\nu+1}$ λήγουν σε 3
$3^{4\nu+2}$ λήγουν σε 9
$3^{4\nu+3}$ λήγουν σε 7

Άσκηση:

Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο των αριθμών $\alpha=3^{2002}$ και $\beta=2^{1994}+3^{1995}$

Λύση:
(α) $\alpha=3^{2002}=3^{4\nu+2}$ (ν=500) επομένως ο α λήγει σε 9.
(β)Το 1994 είναι της μορφής 4ν+2 $\Rightarrow$ 2^{1994} λήγει σε 4
Το 1995 είναι της μορφής 4ν+3 $\Rightarrow$ 3^{1995} λήγει σε 7
Επομένως ο αριθμός β λήγει σε 1.

4. Δυνάμεις του 4.

$4^1=4$, $4^2=16$, $4^3=64$, $4^4=256$, $4^5=1024$

Παρατηρώ ότι οι δυνάμεις του 4 λήγουν σε 4 ή 6. Οι δυνάμεις της μορφής $4^{2\nu}$ λήγουν σε 6 ενώ εκείνες της μορφής $4^{2\nu+1}$ σε 4.

5. Δυνάμεις του 5 ή του 6.

Είναι φανερό ότι κάθε δύναμη του 5 με εκθέτη $\nu \in N$ λήγει σε 5 και κάθε δύναμη του 6 με εκθέτη $\nu \in N$ λήγει σε 6.

6. Δυνάμεις του 7.

$7^1 = 7$	$7^6 = 117649$
$7^2 = 49$	$7^7 = 823543$
$7^3 = 343$	$7^8 = 5764801$
$7^4 = 2401$	$7^9 = 40353607$
$7^5 = 16807$	$7^{10} = 282475249$

Παρατηρώ ότι οι δυνάμεις του 7 όπως και οι δυνάμεις του 3 λήγουν σε 1, 3, 7, 9.

Δυνάμεις της μορφής:
$7^{4\nu}$ λήγουν σε 1
$7^{4\nu+1}$ λήγουν σε 7
$7^{4\nu+2}$ λήγουν σε 9
$7^{4\nu+3}$ λήγουν σε 3

Άσκηση:
Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=7^{1993}+7^{1995}$ διαιρείται με το 10.
Λύση:
1993 είναι της μορφής $4\nu+1$ ώστε το 7^{1993} λήγει σε 7
1995 είναι της μορφής $4\nu+3$ ώστε το 7^{1995} λήγει σε 3
άρα ο αριθμός α λήγει σε 0 και επομένως διαιρείται με το 10.

7. Δυνάμεις του 8.
$8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$, $8^4 = 4096$, $8^5 = 32768$

Οι δυνάμεις του 8 όπως και του 2 λήγουν σε 2, 4, 6, 8.
Οι της μορφής :
$8^{4\nu}$ λήγουν σε 6
$8^{4\nu+1}$ λήγουν σε 8
$8^{4\nu+2}$ λήγουν σε 4
$8^{4\nu+3}$ λήγουν σε 2

8. Δυνάμεις του 9.
$9^1 = 9$, $9^2 = 81$, $9^3 = 729$, $9^4 = 6561$

Οι δυνάμεις του 9 λήγουν σε 1 αν είναι της μορφής $9^{2\nu}$ ή σε 9 αν είναι της μορφής $9^{2\nu+1}$

9. Κάθε δύναμη του 10 λήγει σε 0.

10. Ανάλογες παρατηρήσεις για τις δυνάμεις των φυσικών αριθμών των μεγαλυτέρων του 10.

Παραδείγματα

11^7 λήγει σε 1 $\quad$ 502^{14} λήγει σε 4
62^8 λήγει σε 6 $\quad$ 143^{26} λήγει σε 9
73^4 λήγει σε 1 $\quad$ 42^{27} λήγει σε 8
54^{18} λήγει σε 6 $\quad$ 53^{19} λήγει σε 7
92^5 λήγει σε 2
83^9 λήγει σε 3
74^{23} λήγει σε 4

Ασκήσεις:

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι αριθμοί $\alpha=9^{1993}+9^{1994}$ και $\beta=2^{1994}+2^{1996}$ είναι ή όχι πρώτοι μεταξύ τους.

2. Να δείξετε ότι κάθε αριθμός της μορφής $\alpha=9^{2\nu} + 9^{2\nu+1}$ διαιρείται με το 10.

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=1995^{1994} + 1994^{1995} + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 10.

4. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=11^{1994} + 4$ είναι σύνθετος.

5. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού: $\alpha=3^{2345} - 5$ και του αριθμού $\beta=3^{1995} + 1$.

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ «ΙΩΝΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΥ»

14.12.1996

Επιμέλεια: Σάββας Αντωνίου

<u>Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις</u>

1. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

$$S_1=9+99+999+9999+\ldots+\underset{q-|\text{kild}}{\underline{999\ldots9}}$$

$$S_2=1+11+111+1111+\ldots+\underset{q-|\text{kild}}{\underline{111\ldots1}}$$

$$S_3=4+44+444+4444+\ldots+\underset{q-|\text{kild}}{\underline{444\ldots4}}$$

2. Αν $\nu\in N$ και $\alpha\in Z$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=\frac{9}{2}\left(2q+1\pm\sqrt{4q+1}\right)$ είναι τετράγωνον ακεραίου.

3. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις $2\beta=\alpha+\gamma$ και $Α-Γ=90^\circ$ να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\sqrt{7}+1}=\frac{\beta}{\sqrt{7}}=\frac{\gamma}{\sqrt{7}-1}$$

4. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές των άκρων Α, Β της διαμέτρου ΑΒ πάνω στην τυχαία χορδή ΓΔ και Η, Θ οι προβολές των άκρων της χορδής ΓΔ πάνω στη διάμετρον ΑΒ, να δείξετε ότι τα σημεία Ε, Ζ, Θ, Η είναι σημεία του ιδίου κύκλου. Να δείξετε επίσης ότι το μέσον της χορδής ΓΔ είναι το κέντρον του κύκλου αυτού.

5. Κανονικόν εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Μ μέσο της ΑΒ και η ΓΜ τέμνει τον κύκλο στο Η, δείξετε ότι

$$(\text{HAB})=\frac{1}{42}(\text{ΑΒΓΔΕΖ})$$

<u>Λύσεις</u>

1. $S_1=9+99+999+\ldots999\ldots9$

$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots(10^\nu-1)$

$=10+10^2+10^3+\ldots+10^\nu-\nu$

$$=\frac{10(10^\nu-1)}{9}-\nu$$

$$S_1=\frac{10^{\nu+1}-9\nu-10}{9}\Rightarrow S_2=\frac{1}{9}S_1=\frac{10^{\nu+1}-9\nu-10}{81}$$

$$S_3=4S_2=\frac{4(10^{\nu+1}-9\nu-10)}{81}$$

2. $\alpha\in Z\Rightarrow 4\nu+1$ είναι τετράγωνο ακέραιου περιττού δηλαδή $4\nu+1=(2\mu+1)^2$ με $\mu\in Z:\mu\neq0$ $\Leftrightarrow 4\nu+1=4\mu^2+4\mu+1 \Leftrightarrow \nu=\mu^2+\mu$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{9}{2}\left[2\mu^2+2\mu+1\pm(2\mu+1)\right]$$

$$\alpha=\begin{cases}=\frac{9}{2}\cdot2\mu^2=9\mu^2=(3\mu)^2\\ =\frac{9}{2}(2\mu^2+2\mu+1+2\mu+1)=9(\mu+1)^2=[3\mu+\end{cases}$$

παρατήρ. για $\nu=0\Rightarrow\alpha=9=3^2$ ή $\alpha=0$

3. $2\beta=\alpha+\gamma\Rightarrow 2ημΒ=ημΑ+ημΓ\Rightarrow$

$$\overset{2}{4}\text{kp}\,\frac{\text{B}}{2}\,\text{vxq}\,\frac{\text{B}}{2}=2\text{kp}\,\frac{\text{A}+\Gamma}{2}\,\text{vxq}\,\frac{\text{A}-\Gamma}{2}$$

$$\Rightarrow 2\text{kp}\,\frac{\text{B}}{2}=\text{vxq}\,\frac{\text{A}-\Gamma}{2}\Rightarrow\text{kp}\,\frac{\text{B}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{vxq}\,\frac{\text{B}}{2}=\sqrt{1-\text{kp}^2\frac{\text{B}}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{4}\Rightarrow$$

$$\text{kp B}=2\text{kp}\,\frac{\text{B}}{2}\cdot\text{vxq}\,\frac{\text{B}}{2}\Rightarrow\text{kp B}=\frac{\sqrt{7}}{4}\quad(1)$$

$$\eta\mu\,\mathrm{A}-\eta\mu\,\Gamma=2\eta\mu\frac{\mathrm{A}-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}+\Gamma}{2}\Rightarrow$$

$$\eta\mu\mathrm{A}-\eta\mu\Gamma=2\eta\mu45^{\circ}\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}$$

$$\Rightarrow\ \eta\mu\mathrm{A}-\eta\mu\Gamma=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\ \Rightarrow$$

$$\eta\mu\mathrm{A}-\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}\ (2)$$

$$\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu\Gamma=2\eta\mu\frac{\mathrm{A}+\Gamma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}-\Gamma}{2}\Rightarrow$$

$$\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu\Gamma=2\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}\eta\mu45^{\circ}$$

$$\Rightarrow\ \eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu\Gamma=\frac{\sqrt{7}}{2}\ (3)$$

λύοντας το σύστημα των εξισώσεων 2 και 3 έχουμε

$$\eta\mu\mathrm{A}=\frac{\sqrt{7}+1}{4}\quad \eta\mu\Gamma=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

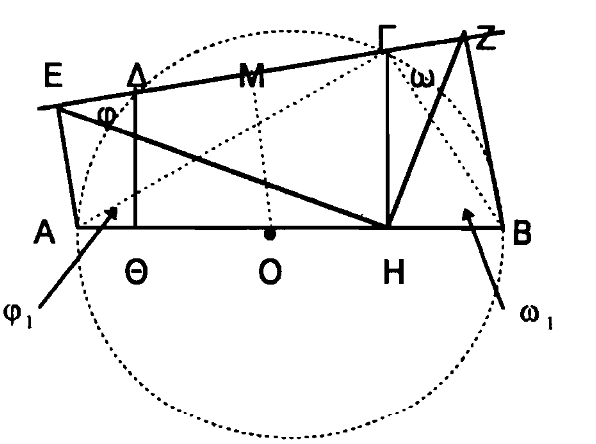
από το νόμο των ημιτόνων έχουμε ότι

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}}=\frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}\Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\frac{\sqrt{7}+1}{4}}=\frac{\beta}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{\gamma}{\frac{\sqrt{7}-1}{4}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\alpha}{\sqrt{7}+1}=\frac{\beta}{\sqrt{7}}=\frac{\gamma}{\sqrt{7}-1}$$

4.



Για να δείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αρκεί να δείξω ότι τα Η και Θ βλέπουν την ΕΖ υπό ορθή γωνία.

Επειδή τα ΕΑΗΓ και ΓΗΒΖ είναι εγγράψιμα

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\hat{\varphi}=\hat{\varphi}_1\\ \omega=\omega_1\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi+\omega=\varphi_1+\omega_1=90^{\circ}$$

$$\left(\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B}=90^{\circ}\right)$$

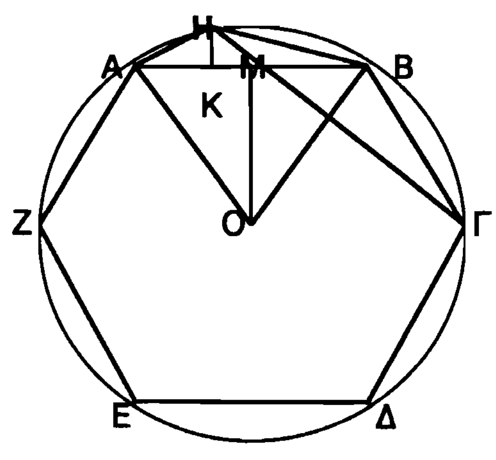
$$\Rightarrow\mathrm{E}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{Z}=90^{\circ}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι $\mathrm{E}\hat{\Theta}\mathrm{Z}=90^{\circ}$ άρα το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο σε κύκλο με διάμετρο ΕΖ.

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{OM}\perp\Delta\Gamma\ \Rightarrow\ \mathrm{M}\Delta=\mathrm{M}\Gamma\\ \text{απο το τραπεζιο } \mathrm{EABZ}\Rightarrow\mathrm{ME}+\mathrm{MZ}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

το μέσο και ΓΔ είναι το μέσο της ΕΖ δηλ. κέντρο του κύκλου (Ε,Η,Θ,Ζ).

5.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(\mathrm{HAB})}{(\mathrm{OAB})}=\dfrac{\frac{(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{HK})}{2}}{\frac{(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{OM})}{2}}=\dfrac{(\mathrm{HK})}{(\mathrm{OM})}\\ \mathrm{H}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{M}\approx\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}\Gamma\Rightarrow\dfrac{\mathrm{HK}}{\mathrm{OM}}=\dfrac{\mathrm{HM}}{\mathrm{M}\Gamma}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{(\mathrm{HAB})}{(\mathrm{OAB})}=\frac{(\mathrm{HM})}{(\mathrm{M}\Gamma)}$$

έχουμε ότι

$(\mathrm{M}\Gamma)^2=(\mathrm{OM})^2+(\mathrm{O}\Gamma)^2=$

$$\alpha_6^2 + R^2 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + R^2$$

$$\Rightarrow (M\Gamma)^2 = \frac{7R^2}{4} \Rightarrow (M\Gamma) = \frac{R\sqrt{7}}{2}$$

AB , ΓΗ χορδές που τέμνονται στο σημείο Μ

$\Rightarrow$ (ΜΓ).(ΜΗ)=(ΜΑ).(ΜΒ)

$$\Rightarrow \frac{R\sqrt{7}}{2} \cdot (MH) = \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow MH = \frac{R\sqrt{7}}{14}$$

$$\Rightarrow \frac{(HAB)}{(AOB)} = \frac{\frac{R\sqrt{7}}{14}}{\frac{R\sqrt{7}}{2}} = \frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$(HAB) = \frac{1}{7}(AOB)$$

$$(AOB) = \frac{1}{6}(AB\Gamma\Delta EZ)$$

$$\Rightarrow (HAB) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}(AB\Gamma\Delta EZ) =$$

$$\frac{1}{42}(AB\Gamma\Delta EZ)$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Β ΚΑΙ Γ ΤΑΞΕΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΛΕΜΕΣΟΥ
"ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΛΑΜΗΣ"

Ημερ.:14.12.1996 Διάρκεια : 3 ώρες

Να λυθούν και τα 5 θέματα. Καθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής

1. Οι κύκλοι (K,R_1) και (Λ,R_2) με $R_1 < R_2$ εφάπτονται εξωτερικά. Τρίτος κύκλος (M,ρ) που εφάπτεται εξωτερικά και των δύο προηγουμένων κύκλων ,εφάπτεται και της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης τους.Να αποδειχθεί οτι:

$$\rho = \frac{R_1R_2}{\left(\sqrt{R_2} \pm \sqrt{R_1}\right)^2} \quad \text{(2 περιπτώσεις).}$$

2.Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνιές Α,Β,και Γ (Α>Β>Γ) είναι διδοχικοί όροι Αριθμητικής προόδου με διαφορά δ και στεμ2Α,στεμ2Β,στεμ2Γ είναι επίσης διαδοχικοι όροι Αριθμητικής προόδου.Να αποδειχθεί ότι:

$$\text{συνδ}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

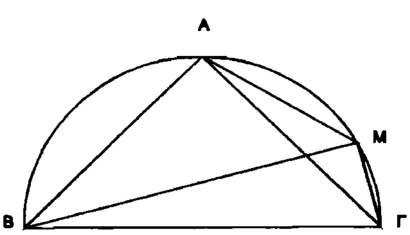
3. Δίνεται η εξίσωση: $4x^2 -4(\eta\mu\alpha +\sigma\upsilon\nu\alpha)x +3(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)=\eta\mu 3\alpha-\sigma\upsilon\nu 3\alpha$
Αν S είναι το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών της να αποδειχθεί ότι:
$3S$, P, $-S^3$ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής προόδου.

4. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδό 48τ.μον., κορυφή Α(0,3) και πλευρά ΑΒ μήκους 6 μον. Με κλίση $-\frac{3}{4}$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β,Γ και Δ στη περίπτωση που οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι και οι δύο θετικές.

5.Στο ημικύκλιο του σχήματος η ΒΓ είναι διάμετρος και Α είναι το μέσο του τόξου ΒΓ.Αν Μ τυχαίο σημείο του τόξου ΑΓ να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{(\text{ΜΑΓ})}-\frac{1}{(\text{ΜΑΒ})}=\frac{2}{(\text{ΜΒΓ})}$$

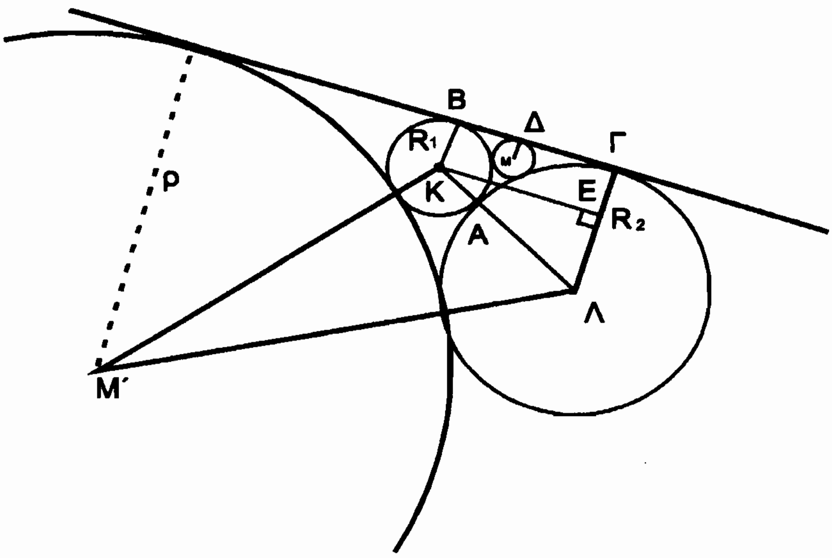
όπου (ΜΑΓ) ,(ΜΑΒ),(ΜΒΓ) τα εμβαδά των τριγώνων ΜΑΓ,ΜΑΒ και ΜΒΓ αντίστοιχα .



Επιμέλεια: **Χρίστος Παπαχριστοδούλου, Β.Δ.**
Μάριος Ευσταθίου

ΛΥΣΕΙΣ

1.



ΚΛ= $R_1 + R_2$ Από ΚΕΛ τρίγωνο ΚΕ=ΒΓ= $\sqrt{(R_1+R_2)^2-(R_2-R_1)^2} \Rightarrow$ ΒΓ=$2\sqrt{R_1R_2}$ Ομοίως ισχύουν και ΒΔ=$2\sqrt{\rho R_1}$, ΓΔ=$2\sqrt{\rho R_2}$

(α) Αν Δ μεταξύ των Β,Γ ΒΓ=ΒΔ+ΔΓ

$2\sqrt{R_1R_2} = 2\sqrt{\rho R_1} + \sqrt{\rho R_2} \Rightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}} \Rightarrow \rho = \frac{R_1R_2}{\left(\sqrt{R_2}+\sqrt{R_1}\right)^2}$

(β) Αν Δ΄ στην προέκταση της ΓΒ : ΒΓ= Δ΄Γ –Δ΄Β $\Rightarrow 2\sqrt{R_1R_2} = 2\sqrt{\rho R_2} - 2\sqrt{\rho R_1}$

$\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}} \Rightarrow \rho = \frac{R_1R_2}{\left(\sqrt{R_2}-\sqrt{R_1}\right)^2}$

---

2. Οι γωνίες Α,Β και Γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. $\Rightarrow$ 2Β= Α+Γ= 180°- Β $\Rightarrow$ Β=60°

2στεμ2Β= στεμ2Α+στεμ2Γ$\Rightarrow 2 . \frac{1}{\eta\mu 120^\circ} = \frac{1}{\eta\mu 2A} + \frac{1}{\eta\mu 2\Gamma} \Rightarrow$ 4ημ2Α ημ2Γ= $\sqrt{3}$ (ημ2Α+ημ2Γ)

2[συν(Α-Γ)-συν2(Α+Γ)]=2$\sqrt{3}$ ημ(Α+Γ)συν(Α-Γ) $\Rightarrow$

συν2(Α-Γ)+$\frac{1}{2}$ = $\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$συν(Α-Γ) $\Rightarrow$2συν^2(Α-Γ)- $\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ συν(Α-Γ)

4συν^2(Α-Γ)-3συν(Α-Γ)-1 = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \text{συν(Α-Γ)}=1 & \text{Απορ.(διότι Α}\rangle\text{Γ)} \\ \text{συν(Α-Γ)} = -\frac{1}{4} & \end{cases}$

Α-Γ = 2δ $\Rightarrow$ 2συν^{2}δ-1= - $\frac{1}{4} \Rightarrow$ συν^{2}δ = $\frac{3}{8} = \frac{6}{16} \Rightarrow$ συνδ = $\frac{\sqrt{6}}{4}$

Διότι 0< δ <$\frac{\pi}{3}$.

3. Η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$4\chi^2 - 4(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)\chi + 3(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha) = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha - 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$4\chi^2 - 4(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)\chi + 3(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha) = 3(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha) - 4(\eta\mu^3\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha)$

$\chi^2 - (\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)\chi + \eta\mu^3\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha = 0$

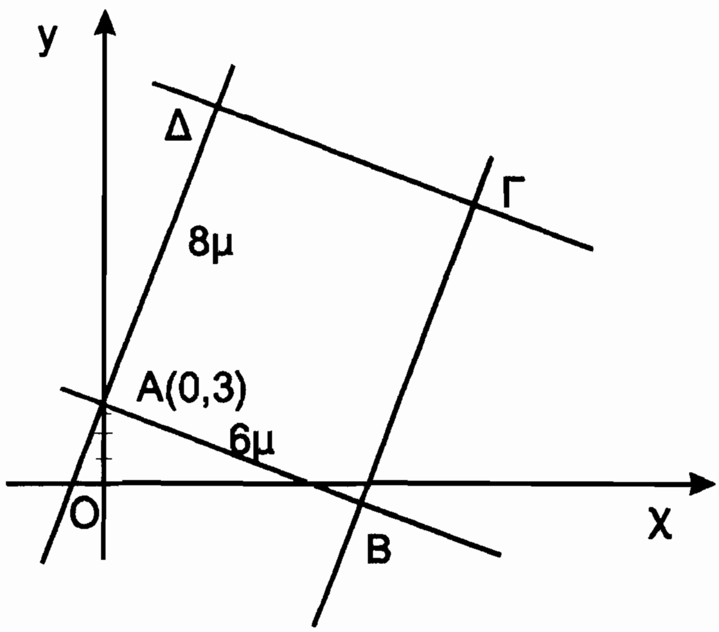
$S = \eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha$ και $P = \eta\mu^3\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha$

$P = (\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu^2\alpha - \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) \Rightarrow \quad P = S\,(1-\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)$

$S = \eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha \Rightarrow S^2 = 1+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \Rightarrow \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{-1+S^2}{2} \Rightarrow$

$P = S\left(1-\dfrac{S^2-1}{2}\right) \Rightarrow 2P = 3S - S^3$ δηλ. $3S, P, -S^3$ είναι διαδ.όροι Α.Προόδου.

4.



Είναι ΑΒ=6μ.και Ε(ΑΒΓ)=48τ.μ.
$\Rightarrow$ΑΔ = 8μ.

ΕξίσωσηΑΒ : $y-3 = -\dfrac{3}{4}x \Rightarrow$

$\underline{3x+4y-12=0}$

Εξίσωση ΑΔ : $y-3 = \dfrac{4}{3}x \Rightarrow$

$\underline{4x-3y+9 = 0}$

Εξίσωση της ΔΓ : $3x+4y+\alpha=0$

Εξίσωση της ΒΓ : $4x-3y+\beta=0$

Οι αποστάσεις του Α από ΔΓ και ΒΓ δίνουν τις σχέσεις :

$\left|\dfrac{12+\alpha}{5}\right| = 8 \Rightarrow \alpha=28$ και $\alpha=-52$,

$\left|\dfrac{-9+\beta}{5}\right| = 6 \Rightarrow \beta=39$ και $\beta=-21$

Επειδή οι συντεταγμένες του Γ είναι και οι δύο θετικές
ΔΓ : $3x+4y-52=0$ και ΒΓ : $4x-3y-21=0$

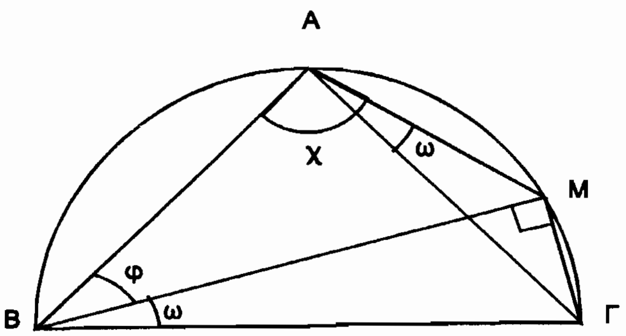
$\Gamma: \begin{cases} 3x+4y-52=0 \\ 4x-3y-21=0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma\left(\dfrac{48}{5}, \dfrac{29}{5}\right)$

$B: \begin{cases} 4x-3y-21=0 \\ 3x+4y-12=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{24}{5}, \dfrac{-3}{5}\right)$

$\Delta: \begin{cases} 4x-3y+9=0 \\ 3x+4y-52=0 \end{cases} \Rightarrow \Delta\left(\dfrac{24}{5}, \dfrac{47}{5}\right)$

Σημείωση : Η άσκηση λύεται και διαφορετικά.

5.



Είναι

$(\text{ΜΑΓ})=\frac{1}{2}(\text{ΜΑ})(\text{ΜΓ})\eta\mu 135^\circ=\frac{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΓ})\sqrt{2}}{4}$

$(\text{ΜΑΒ})=\frac{1}{2}(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})\eta\mu 45^\circ=\frac{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})\sqrt{2}}{4}$

$(\text{ΜΒΓ})=\frac{(\text{ΜΒ})(\text{ΜΓ})}{2}$

$$\frac{1}{(\text{ΜΑΓ})}-\frac{1}{(\text{ΜΑΒ})}=\frac{2\sqrt{2}}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΓ})}-\frac{2\sqrt{2}}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})}=\frac{2\sqrt{2}[(\text{ΜΒ})-(\text{ΜΓ})]}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})(\text{ΜΓ})}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}.2\text{R}(\eta\mu\chi-\eta\mu\omega)}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})(\text{ΜΓ})}=\frac{8\sqrt{2}\text{R}\eta\mu\left(\frac{\chi-\omega}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\chi+\omega}{2}\right)}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})(\text{ΜΓ})}$$

$$=\frac{8\sqrt{2}\ \text{R}\ \eta\mu 45^\circ\sigma\upsilon\nu(45^\circ+\omega)}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})(\text{ΜΓ})}=\frac{8\text{R}.\sigma\upsilon\nu(45^\circ+\omega)}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΑ})(\text{ΜΓ})}$$

$$=\frac{8R\eta\mu(45^\circ-\omega)}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})(\text{ΜΓ})}=\frac{8R\eta\mu\phi}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})(\text{ΜΓ})}=\frac{4(\text{ΜΑ})}{(\text{ΜΑ})(\text{ΜΒ})(\text{ΜΓ})}=\frac{4}{(\text{ΜΒ})(\text{ΜΓ})}=\frac{2}{(\text{ΜΒΓ})}$$

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ "ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΑΠΑΒΕΡΚΙΟΥ" ΓΙΑ ΤΙΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΑΡΧΙΑ : ΠΑΦΟΣ

Επιμέλεια : Λ . Λοΐζου

Να λυθούν όλες οι ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Να γίνει γινόμενο η παράσταση : $συν^2α+συν^23α+συν^27α+συν^29α-2$ β) Να αποδείξετε τη ταυτότητα : $συν\frac{\pi}{13}\cdot συν\frac{2\pi}{13}\cdots συν\frac{6\pi}{13}=\frac{1}{64}$
2. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Δυο τυχαίες χορδές του ΑΓ, ΒΔ τέμνονται σ'ένα σημείο Σ. Να αποδείξετε ότι : $(ΑΣ)(ΑΓ)+(ΒΣ)(ΒΔ)=R^2$
3. α) Δίνεται η εξίσωση: $(x-1)^2-(2x-3)εφα=0$ (1) με $-\frac{\pi}{2}<α<\frac{\pi}{2}$.

   ι) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) , να δείξετε ότι : $\left(x_1-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x_2-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$

   ιι) Να βρείτε για ποιές τιμές του α η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές.

   β) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(4,5) , Β(1,2) και Γ(4,α) με α<5 . Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$.
4. Ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ η μια κορυφή του είναι Α(1,3) και η διαγώνιός του βρίσκεται στην ευθεία 2χ-3ψ=0. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
5. Αν $α_1,α_2,\ldots,α_ν\in R^+$, να αποδείξετε ότι $(α_1+α_2+\ldots+α_ν)\left(\frac{1}{α_1}+\frac{1}{α_2}+\ldots+\frac{1}{α_ν}\right)\geq ν^2,\forall ν\in N$

ΛΥΣΕΙΣ

1. α) $συν^2α+συν^23α+συν^27α+συν^29α-2=$

$$\frac{1+συν2α+1+συν6α+1+συν14α+1+συν18α-4}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(2συν10α\cdot συν8α+2συν10α\cdot συν4α)=$$

$$=συν10α(συν8α+συν4α)=$$

$$=συν10α\cdot 2συν6α\cdot συν2α=$$

$$=2συν2α\cdot συν6α\cdot συν10α$$

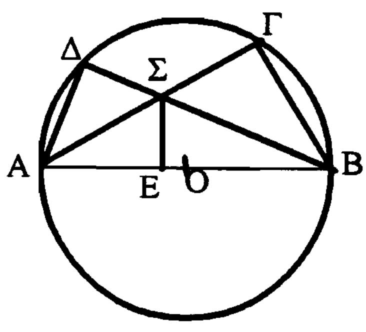
β) Από τον τύπο : ημ2χ=2ημχσυνχ ⇒ $συνx=\frac{ημ2x}{2ημx}$, θα έχω :

$$συν\frac{\pi}{13}συν\frac{2\pi}{13}συν\frac{3\pi}{13}συν\frac{4\pi}{13}συν\frac{5\pi}{13}συν\frac{6\pi}{13}=$$

$$=\frac{ημ\frac{2\pi}{13}}{2ημ\frac{\pi}{13}}\frac{ημ\frac{4\pi}{13}}{2ημ\frac{2\pi}{13}}\cdots\frac{ημ\frac{10\pi}{13}}{2ημ\frac{5\pi}{13}}\frac{ημ\frac{12\pi}{13}}{2ημ\frac{6\pi}{13}}=$$

$$=\frac{1}{64}\frac{ημ\frac{5\pi}{13}\cdot ημ\frac{3\pi}{13}\cdot ημ\frac{\pi}{13}}{ημ\frac{\pi}{13}\cdot ημ\frac{3\pi}{13}\cdot ημ\frac{\pi}{13}}=\frac{1}{64}$$

2.



$(ΑΣ)(ΑΓ)+(ΒΣ)(ΒΔ)\overset{?}{=}4R^2$

Φέρνω τη $ΣΕ\perp ΑΒ$. Τότε :

$Α\hat{Δ}Σ+Α\hat{E}Σ=180^\circ\Rightarrow ΑΕΣΔ$: εγγράψιμο

⇒(ΒΣ)(ΒΔ)=(ΒΕ)(ΒΑ) [1]

παρόμοια, ΕΒΓΣ : εγγράψιμο ⇒

(ΑΣ)(ΑΓ)=(ΑΕ)(ΑΒ) [2] .

Από την [1] και [2] ⇒

(ΒΣ)(ΒΔ)+(ΑΣ)(ΑΓ)=(ΑΒ)[(ΒΕ)+(ΑΕ)] ⇒

⇒$(ΒΣ)(ΒΔ)+(ΑΣ)(ΑΓ)=(ΑΒ)^2$ ⇒

$(ΑΣ)(ΑΓ)+(ΒΣ)(ΒΔ)=4R^2$

3. α) $(x-1)^2-(2x-3)\cdot εφα=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-2x+1-2x\cdot εφα+3εφα=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2(1+εφα)x+1+3εφα=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1+x_2=2(1+\varepsilon\varphi\alpha)$, $x_1x_2=1+3\varepsilon\varphi\alpha$

i.
$$\left(x_1-\frac{3}{2}\right)\left(x_2-\frac{3}{2}\right)=x_1x_2-\frac{3}{2}(x_1+x_2)+\frac{9}{4}=$$
$$=1+3\varepsilon\varphi\alpha-\frac{3}{2}\cdot 2(1+\varepsilon\varphi\alpha)+\frac{9}{4}=-\frac{8}{4}+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}$$

ii. Πρέπει : $\Delta\geq 0\Leftrightarrow$

$4(1+\varepsilon\varphi\alpha)^2-4-12\varepsilon\varphi\alpha\geq 0\Leftrightarrow$

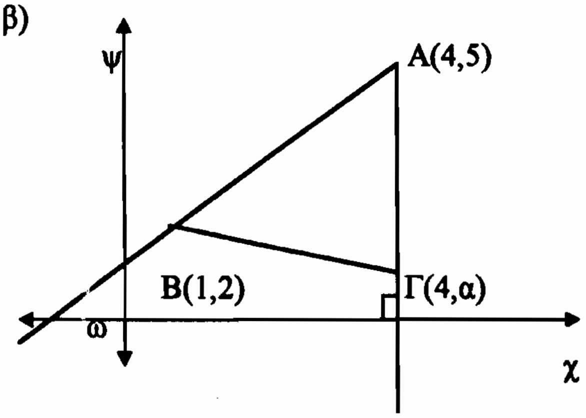
$4+8\varepsilon\varphi\alpha+4\varepsilon\varphi^2\alpha-4-12\varepsilon\varphi\alpha\geq 0\Leftrightarrow$

$4\varepsilon\varphi^2\alpha-4\varepsilon\varphi\alpha\geq 0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\alpha(\varepsilon\varphi\alpha-1)\geq 0\Rightarrow$

$\varepsilon\varphi\alpha\leq 0$, $\varepsilon\varphi\alpha\geq 1$ [1]

επειδή $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, από τις ανισώτητες [1] παίρνουμε: $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

β)



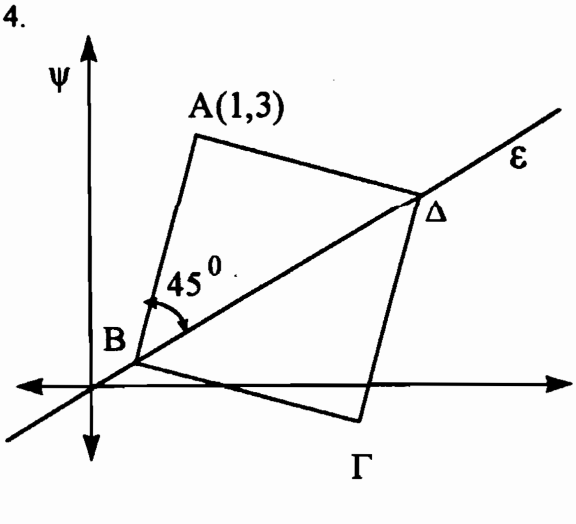
$\hat{A}=90°-\omega\Rightarrow\varepsilon\varphi A=\varepsilon\varphi(90°-\omega)\Rightarrow$

$\varepsilon\varphi A=\sigma\varphi\omega=\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}\Rightarrow\varepsilon\varphi A=\frac{1}{\lambda_{AB}}\Rightarrow$

$\varepsilon\varphi A=\frac{4-1}{5-2}\Rightarrow\varepsilon\varphi A=1\Rightarrow\hat{A}=180°\kappa+45°$

$\hat{A}=45°$

4.



ε: 2χ-3ψ=0

Επειδή το A(1,3) δεν επαληθεύει την εξίσωση της $\varepsilon\Rightarrow\varepsilon\equiv B\Delta$

$\lambda_1=\lambda_{B\Delta}=\lambda_\varepsilon=\frac{2}{3}$. Αν $\lambda=\lambda_{AB}$, θα έχουμε :

$$\varepsilon\varphi 45°=\frac{\lambda-\lambda_1}{1+\lambda\lambda_1}\Rightarrow 1=\frac{3\lambda-2}{3+2\lambda}\Rightarrow\lambda=\lambda_{AB}=5$$

$\Rightarrow\lambda_{A\Delta}=-\frac{1}{5}$

Αρα: AB: $y-3=5(x-1)\Rightarrow$ AB: $5x-y-2=0$

$A\Delta: y-3=-\frac{1}{5}(x-1)\Rightarrow A\Delta: x+5y-16=0$

$$\left.\begin{array}{l}AB{:}5x-y-2=0\\ B\Delta{:}2x-3y=0\end{array}\right|\begin{array}{l}3\\-1\end{array}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}15x-3y=6\\-2x+3y=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}13x=6\Rightarrow x=\frac{6}{13}\\ -\frac{12}{13}+3y=0\Rightarrow y=\frac{4}{13}\end{array}\right\}\Rightarrow B\left(\frac{6}{13},\frac{4}{13}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}A\Delta{:}x+5y-16=0\\ B\Delta{:}2x-3y=0\end{array}\right|\begin{array}{l}2\\-1\end{array}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+10y=32\\-2x+3y=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}13y=32\Rightarrow y=\frac{32}{13}\\ 2x=\frac{96}{13}\Rightarrow x=\frac{48}{13}\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta\left(\frac{48}{13},\frac{32}{13}\right)$$

$\lambda_{B\Gamma}=\lambda_{A\Delta}=-\frac{1}{5}\Rightarrow B\Gamma: y-\frac{4}{13}=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{6}{13}\right)\Rightarrow$

$B\Gamma: x+5y=2$

$\lambda_{\Gamma\Delta}=\lambda_{AB}=5\Rightarrow\Gamma\Delta: y-\frac{32}{13}=5\left(x-\frac{48}{13}\right)$

$\Rightarrow\Gamma\Delta: 5x-y=16$

5. Για ν=1 $\Rightarrow\alpha_1\cdot\frac{1}{\alpha_1}=1\geq 1^2$ ισχύει.

Για ν=2

$$\Rightarrow(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}\right)=1+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+1\geq 4=2^2$$

διότι το άθροισμα 2 αντίστροφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 2.

Έστω ότι :

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\kappa}\right)\geq\kappa^2\quad[1]$$

θα δείξουμε ότι :

$$(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}+\frac{1}{\alpha_{\kappa+1}}\right)\geq(\kappa+1)^2$$

Πράγματι :

$$(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}+\frac{1}{\alpha_{\kappa+1}}\right)=$$

$$=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}\right)+$$

$$+\alpha_{\kappa+1}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\kappa}+\frac{1}{\alpha_{\kappa+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\alpha_{\kappa+1}}(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\kappa+\alpha_{\kappa+1})\geq$$

$$\kappa^2+\frac{\alpha_{\kappa+1}}{\alpha_1}+\frac{\alpha_{\kappa+1}}{\alpha_2}+...+\frac{\alpha_{\kappa+1}}{\alpha_\kappa}+1+\frac{\alpha_1}{\alpha_{\kappa+1}}+...+\frac{\alpha_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}}=$$

$$=\kappa^2+1+\underbrace{\left(\frac{\alpha_{\kappa+1}}{\alpha_1}+\frac{\alpha_1}{\alpha_{\kappa+1}}\right)}_{\geq 2}+...+\underbrace{\left(\frac{\alpha_{\kappa+1}}{\alpha_\kappa}+\frac{\alpha_\kappa}{\alpha_{\kappa+1}}\right)}_{\geq 2}\geq$$

$$\kappa^2+2\kappa+1=(\kappa+1)^2$$

Άρα

$$(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+...+\frac{1}{\alpha_\nu}\right)\geq\nu^2,\forall\nu\in N$$

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
"ΕΥΑΓΟΡΑΣ ΠΑΛΛΗΚΑΡΙΔΗΣ"
17.5.1997

Επιμέλεια: Χαράλαμπος Φακλαμάς - Αντρέας Κύζας

<u>Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.</u>

1. α) Αν το πολυώνυμο $\varphi(x)=2x^3+\alpha x^2+(\alpha-8)x+6$ διαιρείται ακριβώς δια $x+2$, να υπολογίσετε την τιμή του α.

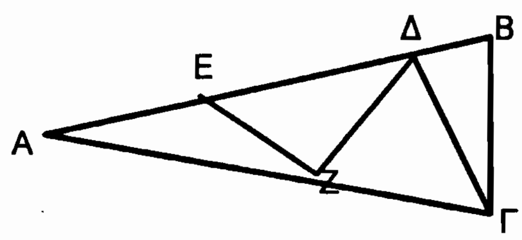
β) Αν $A=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1}{\alpha-1}$,

$B=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^3+\alpha^2-\alpha-1}$

να αποδείξετε ότι: $A:B=(\alpha+1)^3$

2. α) Αν $x=\alpha\eta\mu\varphi\eta\mu\omega$, $\psi=\alpha\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\omega$ και $Z=\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$ να αποδείξετε ότι: $x^2+\psi^2+Z^2=\alpha^2$

β) Με βάση το πιο κάτω σχήμα, όπου είναι: ΑΒ=ΑΓ, ΑΕ=ΕΖ=ΖΔ=ΔΓ=ΓΒ, να βρείτε σε μοίρες τη γωνία Α.



3. Δίνεται ευθεία (ε) με εξίσωση ψ=x. Ευθεία (ε_1) περνά από το σημείο Α(2,0) και είναι παράλληλη προς την (ε). Άλλη ευθεία (ε_2) περνά από το σημείο Β(7,0) και τέμνει τη μεν (ε_1) στο σημείο Γ, τη δε (ε) στο σημείο Δ (τα σημεία Γ, Δ βρίσκονται στην πρώτη γωνία των αξόνων). Αν το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 10 cm^2,

α) Να σχεδιάσετε τις ευθείες (ε), (ε_1) και (ε_2) σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΟΑΓΔ.

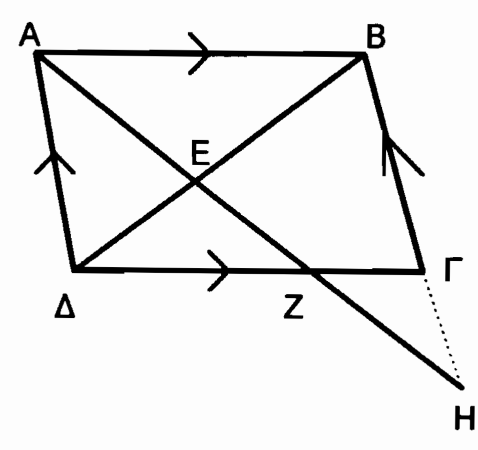
4. α) Αν $x+\psi=\alpha$ και $x-\psi=\beta$ με $\alpha,\beta\in R$ να αποδείξετε ότι: $x^2+\psi^2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$

β) Βιβλιοπώλης αγόρασε μια εγκυκλοπαίδεια, βιβλία και μολύβια. Για όλα πλήρωσε £500 και αγόρασε 100 τεμάχια (μολύβια, βιβλία και τόμους της εγκυκλοπαίδειας). Αν κάθε τόμος της εγκυκλοπαίδειας κόστισε £25, κάθε βιβλίο £5 και κάθε μολύβι 25 σεντ, να βρείτε πόσα βιβλία, πόσους τόμους εγκυκλοπαίδειας και πόσα μολύβια αγόρασε.

5. α) Αν $\alpha\neq-1$ να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{\alpha^{-10}+1}+\frac{1}{\alpha^{-9}+1}+\ldots+\frac{1}{\alpha^{-1}+1}+\frac{1}{\alpha^{0}+1}+$$
$$\frac{1}{\alpha+1}+\ldots+\frac{1}{\alpha^{9}+1}+\frac{1}{\alpha^{10}+1}=x^2-5x+16\frac{1}{2}$$

β) Στο πιο κάτω σχήμα είναι ΑΒ//ΔΓ και ΔΑ//ΓΒ . Να αποδείξετε ότι: $(EA)^2=(EH).(EZ)$



Λύσεις

1. α) Αφού το πολυώνυμο $\varphi(x)\equiv 2x^3+\alpha x^2+(\alpha-8)x+6$ διαιρείται ακριβώς δια $x+2$ σημαίνει ότι $\varphi(-2)=0$

$\varphi(-2)=2(-2)^3+\alpha(-2)^2+(\alpha-8)(-2)+6=0 \Leftrightarrow$

$-16+4\alpha-2\alpha+16+6=0 \Leftrightarrow \alpha=-3$

β)

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1}{\alpha-1},\ \mathrm{B}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3+\alpha^2-\alpha-1},\ \alpha\neq\pm1$$

$$\mathrm{A{:}B}=\frac{\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1}{\alpha-1}:\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3+\alpha^2-\alpha-1}$$

$$=\frac{\alpha^2(\alpha+1)+(\alpha+1)}{(\alpha-1)}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha+1)-(\alpha+1)}{\alpha^2+1}$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha^2+1)}{(\alpha-1)}\cdot\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{\alpha^2+1}$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha^2+1)(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha^2+1)}$$

$$=(\alpha+1)^3\ \omega\sigma\tau\varepsilon\quad \mathrm{A{:}B}(\alpha+1)^3$$

2. α)

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha\eta\mu\varphi\eta\mu\omega\\ \psi&=\alpha\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\omega\\ z&=\alpha\sigma\upsilon\nu\varphi \end{aligned}\right\}$$

A' $\mu\varepsilon\lambda o\grave{\delta}$: $x^2+\psi^2+z^2=$

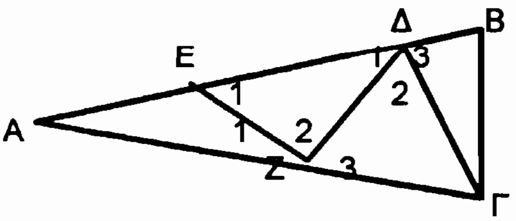
$$\alpha^2\eta\mu^2\varphi\eta\mu^2\omega+\alpha^2\eta\mu^2\varphi\sigma\upsilon\nu^2\omega+\alpha^2\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$=\alpha^2\eta\mu^2\varphi\underbrace{(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega)}_{1}+\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi$$

$$=\alpha^2\eta\mu^2\varphi+\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi$$

$$=\alpha^2(\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi)=\alpha^2\quad \text{B' } \mu\varepsilon\lambda o\grave{\delta}$$

2. β)



Δεδομένα	Ζητούμενα
AB=AΓ AE=EZ=ZΔ=ΔΓ=ΓB	$\hat{A}=;$

AEZ, EZΔ, ZΔΓ, ΔΓB, ABΓ ισοσκελή τρίγωνα, άρα οι παρά τη βάση γωνίες τους είναι ίσες.

$\hat{A}=\hat{Z}_1$

$\hat{E}_1=\hat{A}+\hat{Z}_1=2\hat{A}$ (εξ. γωνία τριγώνου)

$\hat{\Delta}_1=\hat{E}_1=2\hat{\Delta}$ (1)

$\hat{Z}_2=180-2\hat{\Delta}_1=180-4\hat{A}$

$\hat{Z}_3=180-(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)=$

$180-(180+\hat{A}-4\hat{A})\Rightarrow$

$\hat{Z}_3=3\hat{A}$

$\hat{\Delta}_2=180-2\hat{Z}_3=180-6A$ (2)

$\hat{A}=180-2\hat{B}=180-2\hat{\Delta}_3 \Rightarrow$

$\hat{\Delta}_3=\dfrac{180-\hat{A}}{2}$ (3)

$(1)+(2)+(3)\Rightarrow$

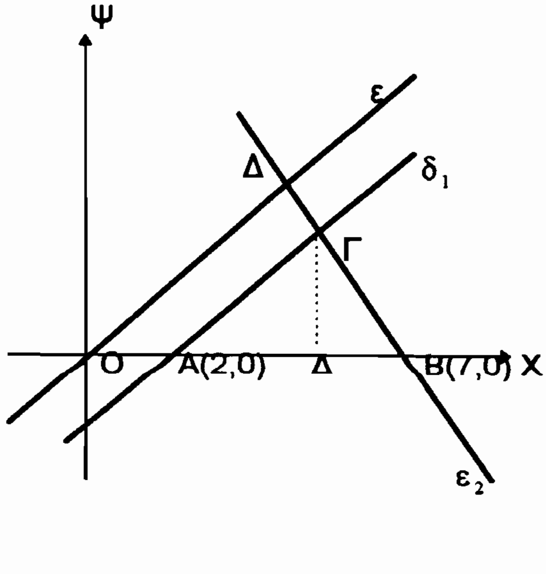
$2\hat{A}+180^\circ-6\hat{A}+\dfrac{180^\circ-\hat{A}}{2}=180^\circ \Leftrightarrow$

$4\hat{A}-12\hat{A}+180^\circ-\hat{A}=0 \Leftrightarrow$

$180^\circ=9\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A}=180^\circ:8=20^\circ$

$\hat{A}=20^\circ$

3 α)



β) Αν ΓΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

$$E=\frac{(AB)(\Gamma\Delta)}{2} \Leftrightarrow 10=\frac{5\cdot\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow \Gamma\Delta=4cm$$

Όμως ΓΔ είναι ψ_Γ ώστε Γ(x,4)

Το Γ ανήκει στην ευθεία ΑΓ που είναι // της (ε) ψ=x $\lambda_\varepsilon=1$ άρα $\lambda_{\varepsilon 1}=1$

$$\left.\begin{array}{l} A\Gamma:\ \psi=x+\beta \\ A(2,\ 0)\end{array}\right\} \Rightarrow 0=2+\beta \Rightarrow \beta=-2$$

$$A\Gamma:(\varepsilon_1)$$
$$\psi=x-2$$

$\Gamma\in(\varepsilon_1)$ $\alpha\rho\alpha$ $4=x-2 \Rightarrow x=6$ $\Gamma(6,4)$

(ε_2): $\psi=\lambda x+\beta$

$$\left.\begin{array}{l} B\in(\varepsilon_2)\Rightarrow 0=7\lambda+\beta \\ \Gamma\in(\varepsilon_2)\Rightarrow 4=6\lambda+\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -7\lambda-\beta=0 \\ \underline{6\lambda+\beta=4} \\ -\lambda=4 \quad \lambda=-4\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ $\beta=+28$

(ε_1) $\psi=-4x+28$

Για τις συν/νες του Δ λύουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \psi=-4x+28 \\ \psi=x\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 5x=28 \\ x=\frac{28}{5}=\psi\end{array}$$

$$\Delta\left(\frac{28}{5},\ \frac{28}{5}\right)$$

γ)

$$E_{OA\Gamma\Delta}=E_{OB\Delta}-E_{AB\Gamma}=\frac{(OB)\cdot(\psi_\Delta)}{2}-10$$

$$E_{OA\Gamma\Delta}=\frac{7\cdot\frac{28}{5}}{2}-10=\frac{7\cdot 28}{10}-10=$$

$$\frac{196}{10}-10=19{,}6-10=9{,}6cm$$

$$E_{OA\Gamma\Delta}=9{,}6cm^2$$

4. α)

$$\left.\begin{array}{l} x+\psi=\alpha \\ x-\psi=\beta\end{array}\right\} \overset{N\delta o}{\Rightarrow} x^2+\psi^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

$1^{o\varsigma}$ τρόπος:

$$(x+\psi)^2=\alpha^2 \Rightarrow x^2+\psi^2+2x\psi=\alpha^2$$
$$(x-\psi)^2=\beta^2 \Rightarrow \underline{x^2+\psi^2-2x\psi=\beta^2}$$
$$2x^2+2\psi^2=\alpha^2+\beta^2 \Rightarrow$$
$$2(x^2+\psi^2)=\alpha^2+\beta^2$$

άρα $x^2+\psi^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$

$2^{o\varsigma}$ τρόπος:

$$\begin{array}{ll} x+\psi=\alpha & x+\psi=\alpha \\ \quad + & \quad - \\ \underline{x-\psi=\beta} & \underline{x-\psi=\beta} \\ 2x=\alpha+\beta & 2\psi=\alpha-\beta \\ x=\frac{\alpha+\beta}{2} & \psi=\frac{\alpha-\beta}{2}\end{array}$$

$$x^2+\psi^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{4}+\frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{4}$$

$$x^2+\psi^2=\frac{2\alpha^2+2\beta^2}{4}=\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{4}=$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

β) Ας είναι x οι τόμοι της εγκυκλοπαίδειας ψ ο αριθμός των βιβλίων ω ο αριθμός των μολυβιών που αγόρασε

<u>πρέπει:</u> x, ψ, ω > 0 και ακέραιοι

$$x+\psi+\omega=100 \Rightarrow \quad -x-\psi-\omega=-100$$

$$25x+5\psi+\frac{\omega}{4}=500 \quad \underline{100x+20\psi+\omega=2000}$$

$$99x+19\psi \quad =1900\Rightarrow$$

$$19\psi=1900-99x \Rightarrow \psi=100-\frac{99}{19}x \quad (1)$$

Όμως για να είναι ο ψ ακέραιος πρέπει ο $\frac{99}{19}x$ να είναι ακέραιος. Και επειδή ο 19 είναι πρώτος αριθμός θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 19. Όμως ο ψ είναι και θετικός άρα x=19.

Αφού x=19 (1) $\overset{x=19}{\Rightarrow}$ ψ=1 και από τη

x+ψ+ω=100 έχουμε
19+1+ω=100 ⇒ ω=80
(Απ. αγόρασε 19 τόμους εγκ. 1 βιβλίο, 80 μολύβια).

5.α)

$$\frac{1}{\alpha^{-10}+1}+\frac{1}{\alpha^{-9}+1}+\ldots+\frac{1}{\alpha^{-1}+1}+\frac{1}{\alpha^{0}+1}+\frac{1}{\alpha+1}+\ldots+\frac{11}{\alpha^{9}+1}+\frac{1}{\alpha^{10}+1}=x^2-5x+16\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha^{-10}+1}=\frac{1}{\frac{1}{\alpha^{10}}+1}=\frac{1}{\frac{1+\alpha^{10}}{\alpha^{10}}}=\frac{\alpha^{10}}{1+\alpha^{10}} \quad \alpha\rho\alpha$$

$$\frac{1}{\alpha^{-10}+1}+\frac{1}{\alpha^{10}+1}=\frac{\alpha^{10}}{\alpha^{10}+1}+\frac{1}{\alpha^{10}+1}=\frac{\alpha^{10}+1}{\alpha^{10}+1}=1$$

Επομένως η αρχική εξίσωση γράφεται:

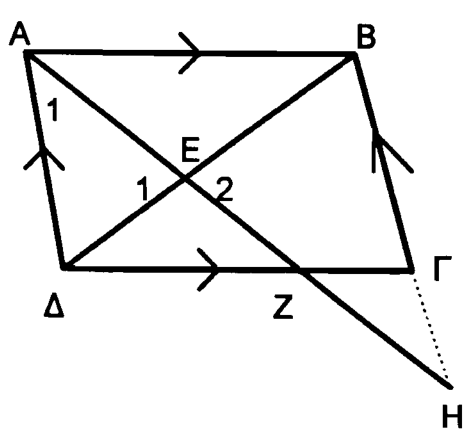
$$\underbrace{1+1+1+1\ldots+1}_{10\ \pi\rho o\sigma.}+\frac{1}{2}=x^2-5x+16\frac{1}{2}$$

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0$$

$$x=2 \ \eta \ x=3$$

β)

Δεδομένα	Ζητούμενα
ΑΒ//ΔΓ	$(EA)^2=(EH)(EZ)$
ΔΑ//ΓΒ	



Συγκρίνω τα τρίγωνα:

ΑΕΔ, ΒΕΗ ε χουν:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_1=\hat{E}_2 \ (\text{κατακορυφην})\\ \hat{A}_1=\hat{H} \ (\text{εντος εναλλαξ})\end{array}\right\}\Rightarrow A\hat{E}\Delta \approx H\hat{E}B \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{AE}{HE}=\frac{E\Delta}{EB}=\frac{A\Delta}{HB}\\ \text{Ομοιωό: } A\hat{E}B \approx Z\hat{E}\Delta \Rightarrow \frac{AE}{ZE}=\frac{EB}{E\Delta}=\frac{AB}{Z\Delta}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(AE)}{(EH)}=\frac{(E\Delta)}{(EB)}\\ \frac{(ZE)}{(AE)}=\frac{(E\Delta)}{(EB)}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{(AE)}{(EH)}=\frac{(ZE)}{(AE)} \Leftrightarrow$$

$$(AE)^2=(EH)(ZE)$$

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ "ΖΗΝΩΝ" 1997
Β' ΚΑΙ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΩΝ

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μακρίδης, Σάββας Ιωαννίδης

Ημερομηνία: 8 Φεβρουαρίου, 1997 **Διάρκεια: 09:00-12:00**

Να λυθούν και τα 5 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
Η χρήση υπολογιστή απαγορεύεται.

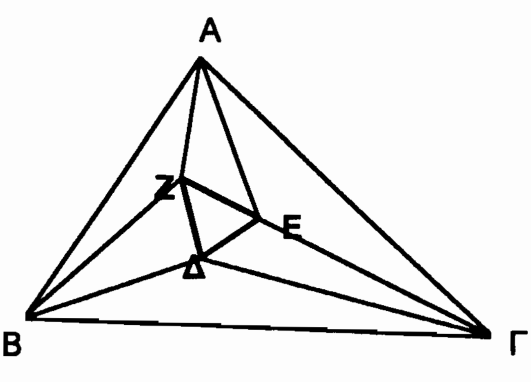
1. Εξετάστε όλες τις ευθείες που τέμνουν τη συνάρτηση

$y = 8x^4 - 12x^3 - 58x^2 + 97x - 35$

σε τέσσερα διαφορετικά σημεία, (x_i, y_i), $i = 1,2,3,4$.

Να αποδειχθεί ότι το $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ είναι ανεξάρτητο των πιό πάνω ευθειών και να βρεθεί η τιμή του.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=γ, ΒΓ=α και ΑΓ=β. Φέρουμε τις τριχοτόμους των γωνιών Α, Β και Γ οι οποίες τεμνόμενες ανα δύο σχηματίζουν το τρίγωνο ΔΕΖ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



3. Αν $\alpha,\beta,\gamma \in \Re^+$ να αποδειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα,

$\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta + \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma - 6) \geq 0$

4. Να βρεθεί συνάρτηση f(x) με πεδίον ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός του 0, που να ικανοποιεί την εξίσωση,

$$f(-x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \quad , \quad x \neq 0$$

5. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^{\nu}x - \sigma\upsilon\nu^{\nu}x = 1$
όπου ν φυσικός αριθμός.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ "ΖΗΝΩΝ" 1997
Β' ΚΑΙ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΩΝ

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μακρίδης, Σάββας Ιωαννίδης

ΛΥΣΕΙΣ

1. Εξετάστε όλες τις ευθείες που τέμνουν τη συνάρτηση

$y = 8x^4 - 12x^3 - 58x^2 + 97x - 35$

σε τέσσερα διαφορετικά σημεία, (x_i, y_i), i =1,2,3,4.

Να αποδειχθεί ότι το $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ είναι ανεξάρτητο των πιό πάνω ευθειών και να βρεθεί η τιμή του.

Η ευθεία που τέμνει την συνάρτηση έχει τη γενική μορφή y=αx+β

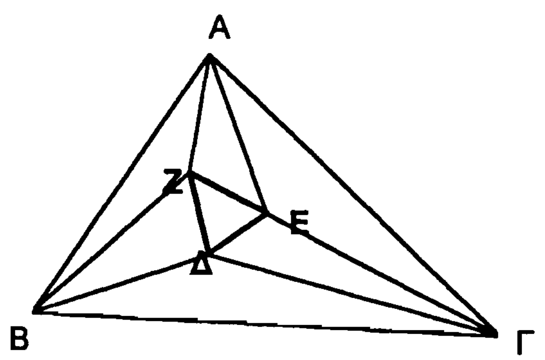
Τότε τα σημεία τομής θα προκύψουν από,

$$8x^4 - 12x^3 - 58x^2 + 97x - 35 = \alpha x + \beta$$

$$\Rightarrow 8x^4 - 12x^3 - 58x^2 + (97 - \alpha)x - (35 + \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = -\frac{-12}{4 \cdot 8} = \frac{3}{8}$$ (<u>ανεξάρτητο της y=αx+β</u>)

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=γ, ΒΓ=α και ΑΓ=β. Φέρουμε τις τριχοτόμους των γωνιών Α, Β και Γ οι οποίες τεμνόμενες ανα δύο σχηματίζουν το τρίγωνο ΔΕΖ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



Στο τρίγωνο ΓΕΔ έχουμε

$$(\Delta E)^2 = (\Gamma E)^2 + (\Gamma\Delta)^2 - 2(\Gamma\Delta)(\Gamma E)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{3}\right) \qquad (1)$$

Στο τρίγωνο ΑΕΓ έχουμε $\dfrac{\text{ΓΕ}}{\eta\mu\frac{\text{Α}}{3}}=\dfrac{\text{ΑΓ}}{\eta\mu\left(180-\frac{\text{Α}+\text{Γ}}{3}\right)}$

$$(\text{ΓΕ})=\frac{2R\cdot\eta\mu\text{Β}\cdot\eta\mu\frac{\text{Α}}{3}}{\eta\mu\left(120^\circ+\frac{\text{Β}}{3}\right)}=\frac{2R\cdot\left[4\eta\mu\frac{\text{Β}}{3}\cdot\eta\mu\left(\frac{\text{Β}}{3}+60^\circ\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\text{Β}}{3}+120^\circ\right)\cdot\eta\mu\frac{\text{Α}}{3}\right]}{\eta\mu\left(120^\circ+\frac{\text{Β}}{3}\right)}$$

$$(\text{ΓΕ})=8R\cdot\eta\mu\frac{\text{Α}}{3}\cdot\eta\mu\frac{\text{Β}}{3}\cdot\eta\mu\left(\frac{\text{Β}}{3}+60^\circ\right)$$

Ομοίως: $(\text{ΓΔ})=8R\cdot\eta\mu\frac{\text{Β}}{3}\cdot\eta\mu\frac{\text{Α}}{3}\cdot\eta\mu\left(\frac{\text{Α}}{3}+60^\circ\right)$

$$(\text{ΔΕ})^2=(\text{ΓΕ})^2+(\text{ΓΔ})^2-2(\text{ΓΕ})(\text{ΓΔ})\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\text{Γ}}{3}\right)$$

$$(\text{ΔΕ})^2=64R^2\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Α}}{3}\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Β}}{3}\cdot\begin{bmatrix}\eta\mu^2\left(\frac{\text{Β}}{3}+60^\circ\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\text{Α}}{3}+60^\circ\right)\\-2\eta\mu\left(\frac{\text{Β}}{3}+60^\circ\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\text{Α}}{3}+60^\circ\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\text{Γ}}{3}\end{bmatrix}$$

αλλά

$$\left[\eta\mu^2\left(\frac{\text{Β}}{3}+60^\circ\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\text{Α}}{3}+60^\circ\right)-2\eta\mu\left(\frac{\text{Β}}{3}+60^\circ\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\text{Α}}{3}+60^\circ\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\text{Γ}}{3}\right]=\eta\mu^2\frac{\text{Γ}}{3}$$

$$(\text{ΔΕ})^2=64R^2\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Α}}{3}\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Β}}{3}\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Γ}}{3}$$

Άρα λόγω της συμμετρίας της σχέσεως

$$(\text{ΖΕ})^2=64R^2\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Α}}{3}\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Β}}{3}\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Γ}}{3}$$

$$(\text{ΖΔ})^2=64R^2\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Α}}{3}\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Β}}{3}\cdot\eta\mu^2\frac{\text{Γ}}{3}$$

Δηλαδή το ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

3. Αν $\alpha,\beta,\gamma \in \Re^+$ να αποδειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα,

$$\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta + \alpha\beta\gamma\,(\alpha + \beta + \gamma - 6) \geq 0 \qquad (1)$$

η (1) γράφεται $\quad \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta + \alpha\beta\gamma\,(\alpha + \beta + \gamma) \geq 6\alpha\beta\gamma$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta + \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha\beta\gamma} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\alpha+\beta+\gamma \geq 6$$ (αρκεί να αποδείξουμε αυτό)

Δια της ανισότητας Cauchy έχουμε:

$$6\left(\frac{1}{6}\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{6}\frac{1}{\beta}+\frac{1}{6}\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{6}\beta+\frac{1}{6}\gamma\right) \geq 6\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/6}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/6}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/6}(\alpha)^{1/6}(\beta)^{1/6}(\gamma)^{1/6}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\alpha+\beta+\gamma \geq 6 \qquad \square$$

4. Να βρεθεί συνάρτηση f(x) με πεδίον ορισμού όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός του 0, που να ικανοποιεί την εξίσωση,

$$f(-x)+x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2 \qquad , \qquad x \neq 0$$

Έστω x=-y : $\quad f(y) - yf(-\frac{1}{y}) = y^2 \qquad (1)$

Έστω $x=\frac{1}{y}$: $\quad f(-\frac{1}{y}) + \frac{1}{y}f(y) = \frac{1}{y^2} \qquad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε: $f(y) = \frac{1}{2}\left(y^2+\frac{1}{y}\right)$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)} \qquad x \neq 0$$

5. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^{\nu}x-\sigma\upsilon\nu^{\nu}x=1$
όπου ν φυσικός αριθμός

Εφόσον η $\eta\mu^{\nu}x-\sigma\upsilon\nu^{\nu}x$ είναι περιοδικό με περίοδο 2π αρκεί να βρούμε λύσεις μεταξύ -π < x ≤ π

<u>**ν=1**</u> ημx - συνx = 1 $\Rightarrow$ $\sqrt{2}\cdot\eta\mu(x-\frac{\pi}{4})=1$

$\Rightarrow$ $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $x=\frac{\pi}{2}$ ή $x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $x=\pi$

<u>**ν=άρτιος**</u> $\eta\mu^{2k}x-\sigma\upsilon\nu^{2k}x=1$ $\Rightarrow$ $\eta\mu^{2k}=1+\sigma\upsilon\nu^{2k}x\leq 1$

$\Rightarrow$ $\sigma\upsilon\nu^{2k}x=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\kappa\alpha\iota-\frac{\pi}{2}$

<u>**ν=περιττός**</u> > **1** $\eta\mu^{2k+1}x-\sigma\upsilon\nu^{2k+1}x=1$

1 = $\eta\mu^{2k+1}x-\sigma\upsilon\nu^{2k+1}x$

ορίζω $x=\frac{\pi}{2}+y$

$$1=\sigma\upsilon\nu^{2k+1}y+\eta\mu^{2k+1}y\leq\left|\sigma\upsilon\nu^{2k+1}y\right|+\left|\eta\mu^{2k+1}y\right|$$

$$=\sigma\upsilon\nu^{2}y\left|\sigma\upsilon\nu^{2k-1}y\right|+\eta\mu^{2}y\left|\eta\mu^{2k-1}y\right|\leq\sigma\upsilon\nu^{2}y+\eta\mu^{2}y=1$$

από τη πρώτη γραμμή $\Rightarrow$ συνy ≥ 0 και ημy ≥ 0
από την δεύτερη γραμμή $\Rightarrow$ |ημy| =1 ή |συνy|=1

Άρα αν |ημy| =1 $\Rightarrow$ ημy =1 $\Rightarrow$ **x=π**
|συνy|=1 $\Rightarrow$ συνy = 1 $\Rightarrow$ **x=$\frac{\pi}{2}$**

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ ΣΧΟΛ. ΕΤΟΥΣ 1996-97
ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ: Σ2,Σ3

Ημερομηνία: 6 Ιουνίου 1997

Επιμέλεια: Μαρία Φαλά

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ερωτήσεις **να απαντήσετε στίς 12**. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu x dx$

2. Να βρείτε το $\sum_{\kappa=1}^{11}(\kappa^2-\kappa)$

3. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\0 & 1\end{pmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα A^2.

4. Δίδεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών, την εκκεντότητα, και τις εξισώσεις των διευθετουσών.

5. Να βρείτε το ανάπτυγμα $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ σε αύξουσες δυνάμεις του x μέχρι τον όρο που περιέχει το x^3. Ποιο είναι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς που προκύπτει από το ανάπτυγμα;

6. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου δίδονται οι πιθανότητες $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(B/A)=\frac{1}{2}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

   α) $P(A\cap B)$

   β) $P(A-B)$

   γ) $P(A/B)$

   δ) $P(A\cup B)$

   ε) $P(B\cap A')$

7. Σε μια παραβολή $y^2=8x$ τα σημεία $A(2t^2,4t)$ και $B(2\rho^2,4\rho)$ είναι τα άκρα μιας χορδής της. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της χορδής AB αν ισχύει $2t\rho=9$.

8. Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (t^2-t)dt}{\sigma\upsilon\nu 3x-1}$

9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής να δείξετε ότι: $\int_0^2 f(x)dx = 2\cdot\int_2^3 f(6-2t)dt$

10. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι γνωστό ότι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$

    α) Να βρείτε το $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

    β) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω, των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

11. Δίδεται η διαφορική εξίσωση: $\frac{dy}{dx}=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ Η λύση, y=f(x), της πιο πάνω εξίσωσης περνά από το σημείο (0,0). Να προσδιορίσετε και να χαρακτηρίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης y=f(x).

12. Διδονται οι ακέραιοι 1,2,3,...,9. Διαλέγω ζεύγη από αυτούς τους αριθμούς, χωρίς να επιτρέπεται η επανάληψη, και χωρίς να έχει σημασία η σειρά των στοιχείων του ζεύγους.

    ι) Να βρείτε πόσα τέτοια ζεύγη μπορώ να σχηματίσω.

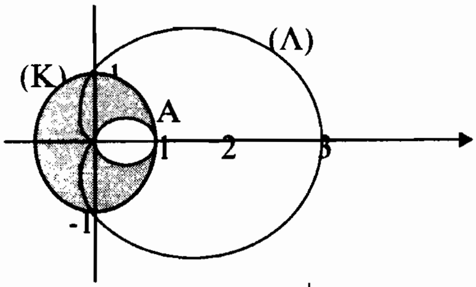
    ιι) Για κάθε ζεύγος που σχημάτισα, υπολογίζω το γινόμενο των στοιχείων του. Να βρείτε πόσα από τα πιο πάνω ζεύγη δίδουν ως γινόμενο <u>περιττό</u> αριθμό.

13. Στο διπλανό σχήμα δίδονται τα διαγράμματα δύο καμπύλων (K) και (Λ) σε πολικές συντεταγμένες. (K):ρ=1 , (Λ):ρ=1+2συνθ

    α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης (Λ) στον πόλο.

    β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων O και A της (Λ).

γ) Να βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους.



14. Δίδεται η $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & συνx \\ 1 & x & 2συνx \\ 1 & x^2 & 3συνx \end{vmatrix}$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=-(x-1)^2συνx$

β) Να βρείτε το $\int f(x)dx$

15. Δίδεται η συνάρτηση $y=x^3-3x^2+4$.

α) Να προσδιορίσετε και να χαρακτηρίσετε τα τοπικά ακρότατα Α και Β και να βρείτε το σημείο καμπής Γ.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία Α,Β, Γ είναι συνευθειακά.

γ) Το χωρίο, που περικλείεται από την καμπύλη (που αντιστοιχεί στην πιο πάνω συνάρτηση) και το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το μέγιστο και το σημείο καμπής της καμπύλης, περιστρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα Οχ. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

Από τις 6 ερωτήσεις **να απαντήσετε τις 4**. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίδεται η συνάρτηση με τύπο $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού, τις ασύμπτωτες, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι αύξουσα και τα τοπικά ακρότατα, και

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

2. Δίδεται η σειρά $\sum_{κ=1}^{\infty}\dfrac{3κ+4}{κ(κ+1)}\left(\dfrac{1}{4}\right)^κ$ Να αποδείξετε ότι η σειρά συγκίνει και να βρείτε το άθροισμα της.

3. Δίδονται τα σημεία Α(1,3,0), Β(1,0,3), Δ(7,3,0) σε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων, με άξονες Οχ, Oy, Oz.

α) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν τα Α,Β και Δ

β) Να δείξετε ότι η γωνία ΒΑΔ είναι ορθή.

γ) Να βρείτε σημείο Γ έτσι ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ορθογώνιο, και

δ) Να βρείτε το σημείο Ζ, όπου η κάθετη από το κέντρο του ΑΒΓΔ συναντά το επίπεδο χOy.

4. α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό y=z-x, όπου z συνάρτηση του x, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$(x+y)\frac{dy}{dx}=x^2+xy+x+1$$

β) Η κάθετος σε κάθε σημείο (x,y) μιας καμπύλης (με εξίσωση F(x,y)=0) περνά από το σημείο (1,1). Να γράψετε αυτή τη συνθήκη υπό μορφή διαφορικής εξίσωσης και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της οικογένειας των καμπύλων που προκύπτει.

5. Δίδονται οι παραβολές $y^2=4x$ και $(y-4)^2=γ(x-β)$. Οι δύο αυτές καμπύλες περνούν από το σημείο Μ(1,2) και έχουν κοινή εφαπτομένη σ'αυτό το σημείο.

α) Να δείξετε ότι γ=-4 και β=2

β) Να σχεδιάσετε τις παραβολές στο ίδιο σύστημα αξόνων.

γ) Να προσδιορίσετε την κορυφή, Κ, τον άξονα της παραβολής $(y-4)^2=-4(x-2)$ και το σημείο, Α , που αυτός ο άξονας συναντά την παραβολή $y^2=4x$.

δ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του ευθυγράμμου τμήματος ΚΑ και των τόξων ΜΚ και ΜΑ των παραβολών $(y-4)^2=-4(x-2)$ και $y^2=4x$ αντίστοιχα.

6. Δίδεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $φ:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, στο επίπεδο, που ορίζεται από τον

πίνακα $M=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

α) Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ και αν $A'(x_1,y_1)$ και $B'(x_2,y_2)$, οι εικόνες των A και B στο μετασχηματισμό φ, αντίστοιχα, να δείξετε ότι: $(AB)^2=(A'B')^2$ δηλαδή ότι ο μετασχηματισμός φ διατηρεί την απόσταση μεταξύ δύο σημείων του επιπέδου.

β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα της ευθείας $x+\sqrt{3}y=4$, στο μετασχηματισμό φ είναι η ευθεία $x'=2$.

γ) Δεδομένου ότι οι εικόνες των $3x^2+y^2-2\sqrt{3}xy-2x-2\sqrt{3}y=0$ και $y=\sqrt{3}x$ στο μετασχηματισμό φ, είναι $(y')^2=x'$ και $y'=0$, αντίστοιχα να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $3x^2+y^2-2\sqrt{3}xy-2x-2\sqrt{3}y=0$ και τις ευθείες $x+\sqrt{3}y=4$ και $y=\sqrt{3}x$.

Λύσεις

Μέρος Α΄

1. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu x\,dx=\eta\mu x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\eta\mu\frac{\pi}{6}-\eta\mu 0=\frac{1}{2}-0$

$I=\frac{1}{2}$

2. $S=\sum_{\kappa=1}^{11}(\kappa^2-\kappa)=\frac{11}{6}(11+1)(2\cdot 11+1)-\frac{11}{2}(11+1)$

$S=506-66=440 \Rightarrow S=440$

3. $A^2=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & \alpha+\alpha\\ 0+0 & 0+1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

4. $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow \alpha=5,\ \beta=4$

$\beta^2=\alpha^2(1-\varepsilon^2) \Rightarrow 16=25-25\varepsilon^2 \Rightarrow \varepsilon=\frac{3}{5}$

$\alpha.\varepsilon=5.\ \frac{3}{5}=3 \Rightarrow E(3,0),\ E'(-3,0)$

$(\delta):\chi=\frac{\alpha}{\varepsilon}=\frac{25}{3},\ \chi=-\frac{25}{3}$

5. $f(x)=(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(-4x)+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\frac{(-4x)^2}{2!}+$

$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-4x)^3}{3!}+\ldots$

$f(x)\approx 1-2x-2x^2-4x^3$, $|-4x|<1 \Rightarrow$

$\Delta.\Sigma\ \ -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$

6. $P_\alpha=P(A\cap B)=P(A)P(B/A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$P_\beta=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

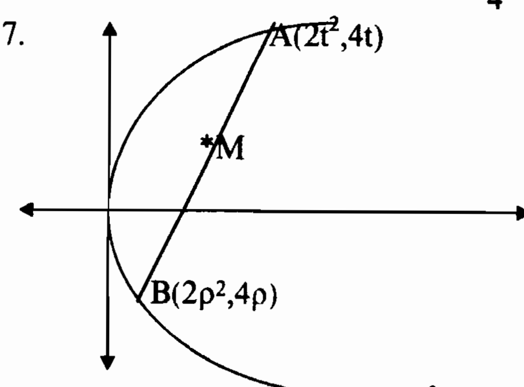
$P_\gamma=P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/6}{1/4}=\frac{2}{3}$

$P_\delta=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

$P_\varepsilon=P(B\cap A')=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

7.



$x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)=\frac{1}{2}(2t^2+2\rho^2)=t^2+\rho^2$

$y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)=\frac{1}{2}(4t+4\rho)=2(t+\rho)$

$y^2=4(t+\rho)^2=4(t^2+\rho^2)+4\cdot 2t\rho$

$2t\rho=9 \Rightarrow$

$y^2=4x+4\cdot 9=4x+36$

$\gamma.\tau\in(\pi_1):\ y^2=4(x+9)$

8. $L=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(t^2-t)dt}{\sigma\upsilon\nu 3x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left.\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right|_0^x}{\sigma\upsilon\nu 3x-1}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}}{\sigma\upsilon\nu 3x-1}=\frac{0-0}{1-1}=\frac{0}{0}\alpha\pi\rho$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{-3\eta\mu 3x}=\frac{0-0}{-3\cdot 0}=\frac{0}{0}\alpha\pi\rho$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{-9\sigma\upsilon\nu 3x}=\frac{0-1}{-9\cdot 1}=\frac{1}{9}\Rightarrow L=\frac{1}{9}$$

9. $$\left.\begin{array}{l} B=2\int_2^3 f(6-2t)dt \\ 6-2t=x\Rightarrow -2dt=dx \\ t=2\Rightarrow x=2, t=3\Rightarrow x=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$B=2\int_2^0 f(x)\frac{dx}{-2}=-\int_2^0 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=A$$

10. $|\vec{\alpha}|=2,\ |\vec{\beta}|=4,\ \vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$

α)
$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})$$
$$=2\cdot 2+3\cdot 3+(-1)\cdot(-1)=14$$

β)
$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=14\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\vec{\alpha}\vec{\beta}=14-4-16=-6\Rightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=-3\Rightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{-3}{2\cdot 4}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{3}{8}$$

11. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\Rightarrow\int dy=\int\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx=$$
$$=-\int(\sigma\upsilon\nu x)^{-2}d(\sigma\upsilon\nu x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\kappa$$
$$\left.\begin{array}{l} y=\tau\epsilon\mu x+\kappa \\ x=0, y=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=1+\kappa\Rightarrow\kappa=-1\Rightarrow$$
$$y=\tau\epsilon\mu x-1$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\quad \rho\iota\zeta\epsilon\varsigma\ \kappa\pi,\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$$

x	..	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π		$5\pi/2$		3π ..
$\frac{dy}{dx}$	-	0	+	//	+	0	-	//	-	0	+	//	+	0	-
y	↘		↗		↗		↘		↘		↗		↗		↘

τοπ. Μέγιστα [(2κ+1)π,-2]
τοπ. Ελάχιστα (2κπ,0) κεZ

12. 1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ι)

$$N_\iota=\binom{9}{2}=\frac{9\cdot 8}{1\cdot 2}=36\Rightarrow N_\iota=36$$

ιι) Για να είναι το γινόμενο δύο αριθμών περιττός αριθμός πρέπει και οι δύο παράγοντες να είναι περιττοί αριθμοί. Έτσι διαλέγω δύο από τους: 1, 3 , 5, 7, 9 ⇒

$$N_{\iota\iota}=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10\Rightarrow N_{\iota\iota}=10$$

13. (Κ) ρ=1 , (Λ) ρ=1+συνθ

α) εφαπτομένες της (Λ) : ρ=0 ⇒ $\sigma\upsilon\nu\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}$, $\theta=-\frac{2\pi}{3}$

β) για το πόλο έχουμε : $O(0,\frac{2\pi}{3})$, $O(0,-\frac{2\pi}{3})$ για το Α έχουμε (από το σχήμα) Α(-1,π)

γ) $$E=\pi\cdot 1^2-2\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(1+2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 d\theta=$$
$$=\pi-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(1+4\sigma\upsilon\nu\theta+4\sigma\upsilon\nu^2\theta)d\theta=$$
$$=\pi-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}[1+4\sigma\upsilon\nu\theta+2(1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)]d\theta=$$
$$=\pi-(3\theta+4\eta\mu\theta+\eta\mu 2\theta)_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=$$
$$E=\pi-3\pi+2\pi+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow E=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

14. α)

$$f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \sigma\upsilon\nu x\\ 1 & x & 2\sigma\upsilon\nu x\\ 1 & x^2 & 3\sigma\upsilon\nu x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \sigma\upsilon\nu x\\ 0 & x-1 & \sigma\upsilon\nu x\\ 0 & x^2-1 & 2\sigma\upsilon\nu x\end{vmatrix}=$$
$$=1\cdot\begin{vmatrix}x-1 & \sigma\upsilon\nu x\\ x^2-1 & 2\sigma\upsilon\nu x\end{vmatrix}-0+0$$
$$f(x)=(x-1)\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ x+1 & 2\end{vmatrix}=-(x-1)^2\sigma\upsilon\nu x$$
$$f(x)=-(x-1)^2\sigma\upsilon\nu x$$

β)$$I=\int f(x)dx=-\int(x-1)^2\sigma\upsilon\nu x dx=$$
$$=-\int(x-1)^2 d(\eta\mu x)=$$
$$=-(x-1)^2\eta\mu x+\int\eta\mu x d(x-1)^2=$$

$= -(x-1)^2 \eta\mu x + 2\int (x-1)\eta\mu x dx$

$I = -(x-1)^2 \eta\mu x - 2\int (x-1) d\sigma\upsilon\nu x$

$I = -(x-1)^2 \eta\mu x - 2(x-1)\sigma\upsilon\nu x + 2\int \sigma\upsilon\nu x dx$

$I = -(x-1)^2 \eta\mu x - 2(x-1)\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x + K$

15) $y= x^3-3x^2+4$

α) $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$ ρίζες : $x=0$, $x=2$

$y''= 6x-6$ ρίζα : $x=1$

x	-∞		0		1		2		+∞
y′		+	0	-		-	0	+	
y′′		-			0		+		
y		↗		↘		↘		↗	

Max Α(0,4) , Min Β(2,0) , Σ.Κ. Γ(1,2) $\Rightarrow$ (ΑΓ) : y=-2x+4

β) $\lambda_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{0-4}{2-0}=-2$

$\lambda_{A\Gamma}=-2 \Rightarrow \lambda_{AB}=\lambda_{A\Gamma} \Rightarrow$

Α,Β,Γ συνευθειακά

γ) $V=\pi\int_0^1\left[\left(x^3-3x^2+4\right)^2-(-2x+4)^2\right]dx$

$V=\pi\int_0^1\left(x^6-6x^5+9x^4+8x^3-28x^2+16x\right)dx$

$=\pi\left(\dfrac{x^7}{7}-x^6+9\dfrac{x^5}{5}+2x^4-28\dfrac{x^3}{3}+8x^2\right)_0^1$

$V=\dfrac{169}{105}\pi$

<u>Μέρος Β′</u>

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

α) πεδίο ορισμού : $x \in R-\{-1,1\}$

κατακόρυφες ασύμπτωτες : $x^2-1=0 \Rightarrow x=1$, $x=-1$

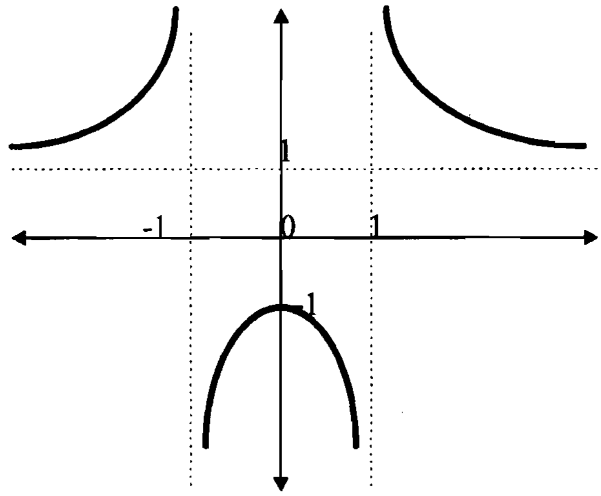
οριζόντια ασύμτωτη : y=1

$y'=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)-2x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$

ρίζες x=0

x	-∞		-1		0		1		+∞
y′		+	//	+	0	-	//	-	
y		↗	//	↗		↘	//	↘	

max (0,1)



αύξουσα : (-∞,-1) U (-1,0)

2) $S=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\dfrac{3\kappa+4}{\kappa(\kappa+1)}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\kappa} \Rightarrow \dfrac{3\kappa+4}{\kappa(\kappa+1)}=\dfrac{4}{\kappa}-\dfrac{1}{\kappa+1}$

$S=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{\kappa}-\dfrac{1}{\kappa+1}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\kappa} \Rightarrow$

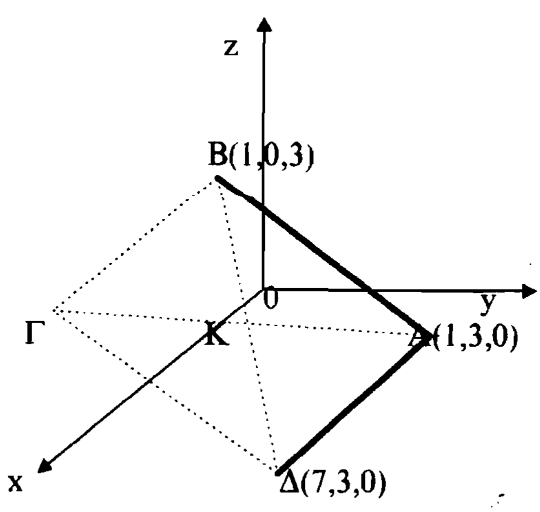
$$S_n=\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\frac{4}{\kappa}-\frac{1}{\kappa+1}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\kappa}=\left[\begin{array}{l}1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^2}+\\ \cdots\\ \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{4^{n-2}}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}+\\ \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{4^n}\end{array}\right]$$

$S_n=1-\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{4^n}$

$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{(n+1)4^n}\right)=1-0$

$S=1$

3)



α) $\vec{n} = \vec{AB}\times \vec{AΔ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 18(\vec{j}+\vec{k})$

$\left.\begin{aligned} &(BAΔ):\ y+z=\rho \\ &A(1,3,0)\in(BBΔ) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \rho = 3$

$(BAΔ):\ y+z=3 \quad , \ x\in R$

β)

$\vec{BA}\cdot\vec{ΔA} = (0,3,-3)\cdot(-6,0,0) = 0+0+0 = 0$

$\Rightarrow \vec{BA}\perp\vec{ΔA} \Rightarrow B\hat{A}Δ = 90^\circ$

γ) $\vec{AB} = \vec{ΔΓ} \Rightarrow$

$0\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} = (x_Γ - 7)\vec{i} + (y_Γ - 3)\vec{j} + (z_Γ - 0)\vec{k}$

$\Rightarrow x_Γ = 7, y_Γ = 0, z_Γ = 3 \Rightarrow Γ(7,0,3)$

δ) το κέντρο του ορθογωνίου (σημείο τομής των διαγωνίων του) έχει συντεταγμένες : $K(4,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

$x_Z=x_K=4 \ , \ y_Z=y_K=\frac{3}{2} \ , \ z_Z=0 \Rightarrow Z(4,\ \frac{3}{2},0)$

4)α) $(x+y)\frac{dy}{dx} = x^2 + xy + x + 1$

$y=z-x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

$z\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = x^2 + x(z-x) + x + 1 \Rightarrow$

$z\frac{dz}{dx} = (x+1)(z+1) \Rightarrow \frac{zdz}{z+1} = (x+1)dx$

$\Rightarrow \int\left(1 - \frac{1}{z+1}\right)dz = \int(x+1)dx$

$\Rightarrow z - \ln|z+1| = \frac{x^2}{2} + x + k \Rightarrow$

$x + y - \ln|x+y+1| = \frac{x^2}{2} + x + k$

Γ.Λ. $y - \ln|x+y+1| = \frac{x^2}{2} + k$

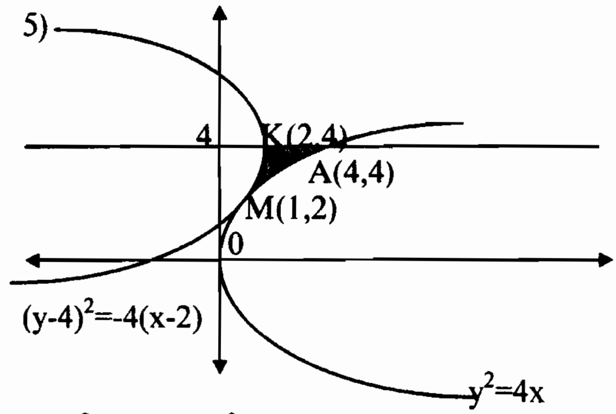
β) εξίσωση κάθετης :

$\left.\begin{aligned} &Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x) \\ &X=1 \ , \ Y=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1-y) = -\frac{dx}{dy}(1-x)$

$\Rightarrow (y-1)\ dy=-(x-1)dx \Rightarrow$
$\int(y-1)dy = -\int(x-1)dx \Rightarrow$

$(y-1)^2 = -(x-1)^2 + k$

5)



α) $y^2=4x$, $(y-4)^2=\gamma(x-\beta)$, $x=1$, $y=2$ $\Rightarrow$ $4=\gamma(1-\beta)$

$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \\ &x=1, y=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_\phi = \frac{2}{2} = 1$

$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma}{2(y-4)} \\ &x=1, y=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\gamma}{2(-2)} = 1 \Rightarrow \begin{matrix}\gamma = -4 \\ \beta = 2\end{matrix}$

γ) $(y-4)^2=-4(x-2) \Rightarrow K(2,4)$, $y=4$ άξονας συμμετρίας , $A(4,4)$

δ) $E = \int_2^4 \left[\frac{y^2}{4} - \left(2 - \frac{(y-4)^2}{4}\right)\right]dy =$

$= \left[\frac{y^3}{12} - 2y + \frac{(y-4)^3}{12}\right]_2^4 = \left(\frac{16}{3} - 8 + 0\right) - \left(\frac{2}{3} - 4 - \frac{2}{3}\right)$

$E=\frac{4}{3}$

6) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow |M| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow$

$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x' & -\frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x' & +\frac{1}{2}y' \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1' - \sqrt{3}y_1' \\ \sqrt{3}x_1' + y_1' \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_2' - \sqrt{3}y_2' \\ \sqrt{3}x_2' + y_2' \end{bmatrix}$

α) $(AB)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=$

$$=\frac{1}{4}\left(x_2'-\sqrt{3}y_2'-x_1'+\sqrt{3}y_1'\right)^2+\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}x_2'+y_2'-\sqrt{3}x_1'-y_1'\right)^2$$

$$(AB)^2=\frac{1}{4}\left[4\left(x_2'-x_1'\right)^2+4\left(y_2'-y_1'\right)^2\right]=$$

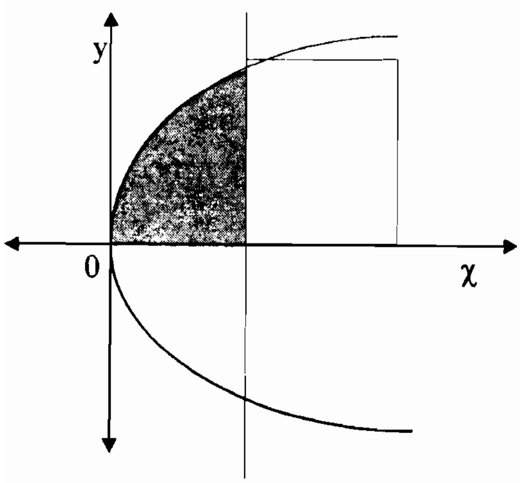
$$=\left(x_2'-x_1'\right)^2+\left(y_2'-y_1'\right)^2=(A'B')^2$$

β) $x+\sqrt{3}\,y=4\Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'\right)=4\Rightarrow$$

$x'=2$

γ) Στο μετασχηματισμό φ τα μήκη διατηρούνται (από το (α)) $\Rightarrow$ το ζητούμενο εμβαδό είναι το γραμμοσκιασμένο.



$$E=\int_0^2 y'dx'=\int_0^2\sqrt{x'}dx'=\frac{2}{3}(x')^{3/2}\Big|_0^2$$

$$E=\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-0\right)\Rightarrow E=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

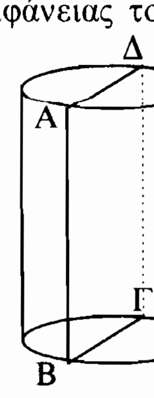
ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ ΣΧΟΛ.ΕΤΟΥΣ 1996-97

ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ : Σ1,Σ4,Σ5

Ημερομηνία:17 Ιουνίου 1997
Επιμέλεια : Μαρία Φαλά

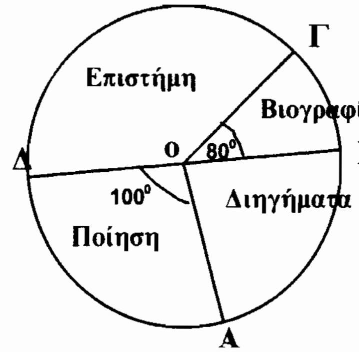
<u>Μέρος Α΄:</u> Να απαντήσετε στις 12 **<u>μόνο</u>** από τις 15 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=4x^3+5x^2+3x-5$. Να βρεθεί η παράγωγος της $f'(x)$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $f(x)-f'(x)$ για $x=1$.
2. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ύψος υ=15cm. Η πλευρά της βάσης της είναι α=16cm και το παράπλευρο ύψος h=17cm. Να υπολογιστεί ο όγκος της.
3. Να βρεθούν οι λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης $2\eta\mu 3x-\sqrt{3}=0$ που βρίσκονται μεταξύ 0° και 180° (0°<x<180°)
4. Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_0^2 (6x^2-2x)dx$
5. Γνωρίζοντας ότι αν Α+Β=90° τότε συνΑ=ημΒ να δειχτεί ότι αν 2ω+x=90° τότε $\sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{2}}$.
6. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε πίνακες ή υπολογιστική μιχανή να δείξετε ότι: ημ78°-ημ18°+συν132°=0 .
7. Η τομή κυλίνδρου από επίπεδο κατά μήκος του άξονα του είναι ορθογώνιο ΑΒΓΔ με περίμετρο 36cm. Αν το μήκος του ορθογωνίου είναι διπλάσιο του πλάτους του να βρεθεί ο όγκος και το εμβαδό ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.



8. Μια τάξη έχει 20 μαθητές και ο μέσος όρος του βάρους τους είναι 45Kg. Δύο μαθητές που είχαν βάρη 60Kg και 50Kg έφυγαν και ήλθαν τρείς νέοι μαθητές με βάρη 31Kg, 45Kg και 58Kg. Ο μέσος όρος του βάρους των μαθητών της τάξης αυξήθη ή ελαττώθη και πόσο;
9. Να βρεθούν και να χαρακτηρισθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $y=x^4-8x^2+9$
10. Να δειχτεί ότι: $\eta\mu(45°-\theta)\eta\mu(45°+\theta)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta$
11. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx$
12. Το κυκλικό διάγραμμα δίπλα δείχνει τις κατηγορίες 540 βιβλίων που δανείστηκαν από μια σχολική βιβλιοθήκη σε μια εβδομάδα. Τα βιβλία της επιστήμης ήταν 60. Να υπολογιστεί :

ι) Ο αριθμός των βιβλίων ποίησης που δανείστηκαν.
ιι) Το μέτρο σε μοίρες του κυκλικού τομέα ΑΟΒ που παριστά τα διηγήματα.



13. Ένας γεωργός κατέγραψε την παραγωγή 60 φυτών ντομάτας σε κιλά ανά φυτό και έκαμε τον πιο κάτω πίνακα συχνοτήτων :

Kg/φυτό (x_i)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Αριθμός φυτών (f_i)	2	7	9	15	16	7	4

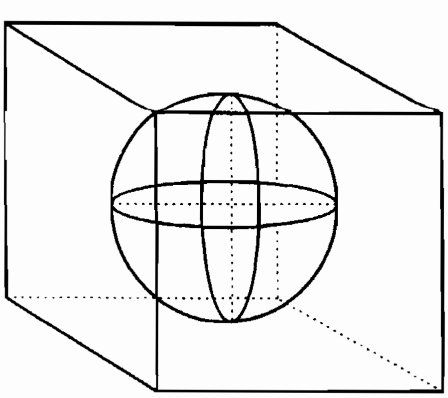
Να υπολογιστεί ο μέσος όρος παραγωγής ανά φυτό. (Η απάντηση να δοθεί σε δεκαδικό αριθμό κατά προσέγγιση εκατοστού). Να γίνει το πολύγωνο συχνοτήτων που παριστά γραφικά την παραγωγή.

14. Θέλουμε να βάψουμε την παράπλευρη επιφάνεια μιας υδατοδεξαμενής σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Η υδατοδεξαμενή έχει μήκος 5m, πλάτος 3m και ύψος 6m. Πόσο θα στοιχίσει το βάψιμο αν θα χρησιμοποιήσουμε μπογιά που πωλείται σε κουβάδες των 4 λίτρων και πωλούνται πρός £15,00 ο ένας, αν γνωρίζουμε ότι με 1 λίτρο μπογιά βάφουμε $6m^2$.
15. Αν η συνάρτηση $s(t)=t^3-t+4$ δίνει το διάστημα σε m που διανύει ένα κινητό σε χρόνο t δευτερόλεπτα και γνωρίζοντας ότι η ταχύτητα u σε m/sec. δίνεται από τη σχέση $u=\frac{ds}{dt}=s'(t)$ να βρεθεί η ταχύτητα του κινητού κατά τη χρονική στιγμή t=3.

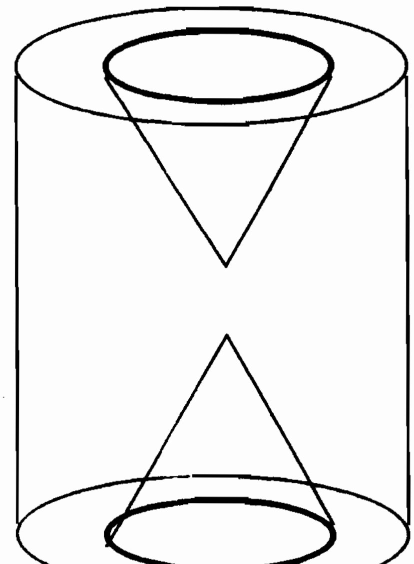
Μέρος Β΄:

Να απαντήσετε στις 4 **μόνο** από τις 6 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Σφαίρα ακτίνας R=6dm βυθίζεται πλήρως σε κυβικό δοχείο γεμάτο νερό. Η σφαίρα εφάπτεται των εδρών του κυβικού δοχείου. Ως γνωστό θα εκτοπίσει νερό από το δοχείο. Πόσα dm^3 νερού θα μείνουν στο δοχείο; (χρησιμοποιήστε π=3,14 για να βρείτε την απάντηση σας).



2. Να βρεθεί η γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης:
$$2ημ^2x=3(1-συνx)$$
3. Σε ξύλινο κύλινδρο με διάμετρο βάσης 8cm και ύψος 10cm ανοίγουμε κωνικές κοιλότητες με διάμετρο βάσης 6cm και ύψος 4cm όπως φαίνονται στο σχήμα. Να υπολογιστεί ο όγκος και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του στερεού.

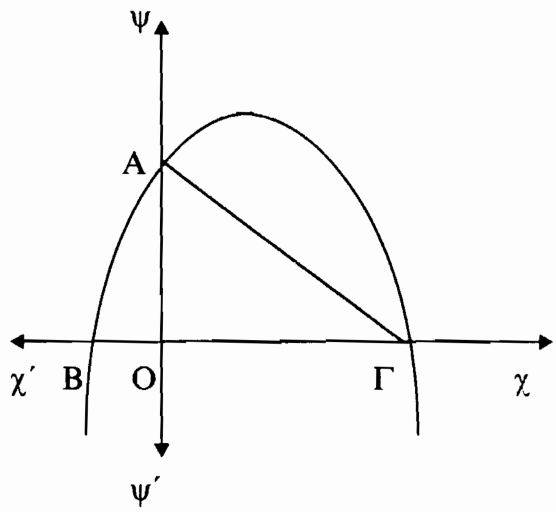


4. Να δειχθεί ότι : $2ημ50^\circ-\frac{1}{2συν20^\circ}=1$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε πίνακες ή υπολογιστική μηχανή.
5. Ένδεκα παιδιά ζυγίστηκαν και τα βάρη τους σε κιλά είναι : 38, 50, 37, 44, 46, 53, 48, 38, 42, 46, 42. Να βρεθεί ο μέσος όρος του βάρους των παιδιών και η τυπική απόκλιση των βαρών. **Σημ.:** Η τυπική απόκλιση μπορεί να δοθεί υπό μορφή ρίζας.
6. Το διπλανό διάγραμμα παριστά τη συνάρτηση με τύπο $y=4+3x-x^2$. Η καμπύλη τέμνει τον άξονα x΄ox στα σημεία Β και Γ και τον άξονα ψ΄oψ στο Α. Να βρεθούν :

ι) Οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ.

ιι) Η κλίση του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ.

ιιι) Το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των χ.



<u>Λύσεις</u>

<u>Μέρος Α′</u>

1. $f(x)=4x^3+5x^2+3x-5 \Rightarrow f'(x)=12x^2+10x+3$
$\Rightarrow f(x)-f'(x)=4x^3+5x^2+3x-5-12x^2-10x-3=$
$=4x^3-7x^2-7x-8 \Rightarrow$
$f(1)-f'(1)=4-7-7-8=-18$

2. $V=\frac{1}{3}E_\beta \upsilon=\frac{1}{3}16^2\cdot 15cm^2=1280cm^3$

3. $2\eta\mu 3x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow \eta\mu 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\eta\mu 60^\circ$
$\Rightarrow 3x=180^\circ\kappa+(-1)^\kappa 60^\circ \quad ,\kappa\in Z \Rightarrow$
$$\left.\begin{matrix} x=60^\circ\kappa+(-1)^\kappa 20^\circ \\ 0^\circ<x<180^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x=20^\circ & =40^\circ \\ x=140^\circ & =160^\circ \end{matrix}$$

4. $I=\int_0^2 (6x^2-2x)dx=2x^3-x^2\Big|_0^2=16-4=12$
$I=12$

5. $$\left.\begin{matrix} A+B=90^\circ \Rightarrow \sigma\upsilon\nu A=\eta\mu B \\ 2\omega+x=90^\circ \ ,(0<\omega<90^\circ) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$\sigma\upsilon\nu 2\omega=\eta\mu x \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\omega-1=\eta\mu x \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega=\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{2}}$

6. $A=\eta\mu 78^\circ-\eta\mu 18^\circ+\sigma\upsilon\nu 132^\circ=$
$=\eta\mu(60^\circ+18^\circ)-\eta\mu 18^\circ+\sigma\upsilon\nu(150^\circ-18^\circ)=$
$=\eta\mu 60\eta\mu 18+\sigma\upsilon\nu 60\eta\mu 18-$
$\eta\mu 18+\sigma\upsilon\nu 150\sigma\upsilon\nu 18+\eta\mu 150\eta\mu 18=$
$=$
$\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu 18+\frac{1}{2}\eta\mu 18-\eta\mu 18-\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu 18+\frac{1}{2}\eta\mu 18=$
$=0 \Rightarrow A=0$

7. $$\left.\begin{matrix} 2(AB)+2(A\Delta)=36cm \\ AB=2(A\Delta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$2.2(A\Delta)+2(A\Delta)=36cm \Rightarrow A\Delta=6cm \Rightarrow$
$A\Delta=2R \Rightarrow R=3cm \ ,AB=2(A\Delta)=12cm$
$AB=\upsilon=12cm$
$V=E_\beta\upsilon=\pi R^2\upsilon=\pi.3^2.12 \Rightarrow V=108\pi cm^3$
$E_{o\lambda}=E_\kappa+2E_\beta=2\pi R.\upsilon+2\pi R^2=2\pi 3.12+2\pi 3^2$
$\Rightarrow E_{o\lambda}=90\pi cm^2$

8. $M=45Kg \Rightarrow \frac{M_1+...+M_{18}+50+60}{20}=45$
$\Rightarrow M_1+...+M_{18}=45\cdot 20-110=790$
$\Rightarrow M_1+...+M_{18}+31+45+58=790+31+45+58$
$M_1+...+M_{18}+M_{19}+M_{20}+M_{21}=924$
$M'=\frac{M_1+...+M_{18}+M_{19}+M_{20}+M_{21}}{21}=\frac{924}{21}$
$M'=44Kg$
Ο μέσος όρος του βάρους των μαθητών ελαττώθηκε κατά 1Kg.

9. $y=x^4-8x^2+9 \Rightarrow y'=4x^3-16x=4x(x-2)(x+2)$
ρίζες : $x=-2$, $x=0$, $x=2$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y′		-	0	+	0	-	0	+	
y		↘	∪	↗	∩	↘	∪	↗	

minA(-2,7)
maxB(0,9)
minΓ(2,-7)

10. $A=\eta\mu(45^\circ-\theta).\eta\mu(45^\circ+\theta)=$
$\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(45-\theta-45-\theta)-\sigma\upsilon\nu(45-\theta+45+\theta)]=$
$A=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu(-2\theta)-\sigma\upsilon\nu 90]=\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu 2\theta-0]$
$A=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta$

11. $I=\int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int(x-x^{-2})dx=\frac{x^2}{2}+x^{-1}+\kappa$
$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\kappa$

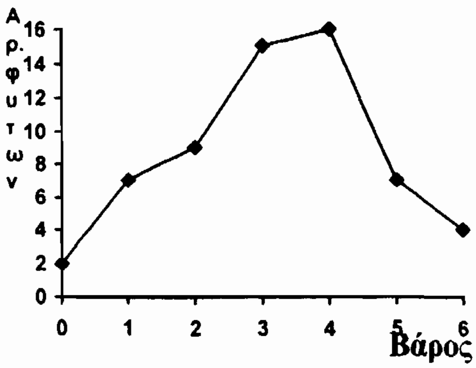
12. ι) $360^\circ \rightarrow 540$ βιβλία
$100^\circ \Rightarrow x=\frac{540\cdot 100}{360}=150$ βιβλία ποίησης
ιι) $360^\circ \rightarrow 540$ βιβλία
βιβλία επιστήμης $\Rightarrow \hat{\Gamma O\Delta}$

$$\hat{\Gamma O \Delta} = \frac{60 \cdot 360}{540} \Rightarrow \hat{\Gamma O \Delta} = 40^\circ$$

$AOB+BO\Gamma+\Gamma O\Delta+\Delta OA=360^\circ \Rightarrow$
$AOB=360^\circ-80^\circ-40^\circ-100^\circ \Rightarrow AOB=140^\circ$

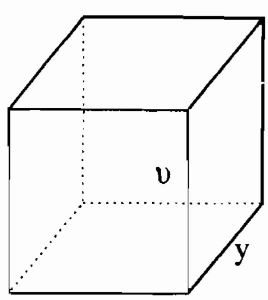
13.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
f_i	2	7	9	15	16	7	4
f_ix_i	0	7	18	45	64	35	24



$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{193}{60} \Rightarrow \bar{x} = 3{,}21$$

14.



x=5cm
y=3cm
υ=6cm

$E_\pi=2x\upsilon+2y\upsilon=2.5.6+2.3.6=96cm^2$
$6m^2 \rightarrow 1$ λίτρο
$96m^2 \Rightarrow 16$ λίτρα μπογιά
4 λίτρα $\rightarrow$ 1 κουβάς $\rightarrow$£15
16 λίτρα$\Rightarrow$4 κουβάδες $\Rightarrow$£60
Το βάψιμο θα στοιχίσει £60.

15. $s(t)=t^3-t+4 \Rightarrow u=s'(t)=3t^2-1$
για $t=3sec \Rightarrow u=s'(3)=3.3^2-1 \Rightarrow u=2$[illegible]sec.

Μέρος Β΄

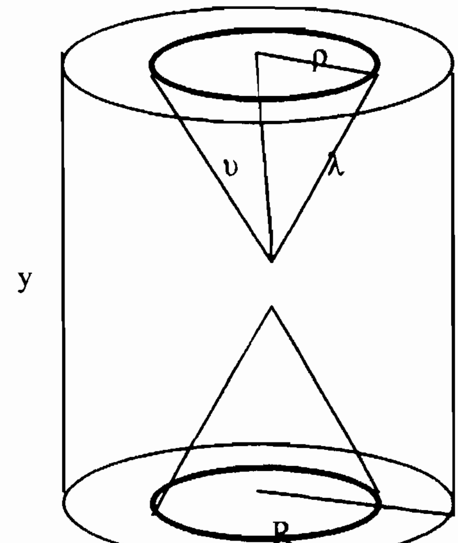
1. $V=V_{κυβου}-V_{σφαιρας}=(2R)^3-\frac{4}{3}\pi R^3=$

$=8.6^3-\frac{4}{3}3{,}14.6^3=1728-904{,}32=823{,}68dm$
V=823,28dm

2. $2\eta\mu^2x=3(1-\sigma\upsilon\nu x) \quad \Rightarrow 2-2\sigma\upsilon\nu^2x=3-3\sigma\upsilon\nu x$
$\Rightarrow(2\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x-1)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} i)\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ ii)\ \ \sigma\upsilon\nu x = 1 \ \ \Rightarrow x = 2\kappa\pi \end{cases} ,\kappa \in Z$$

3.



R=4cm , y=10cm, ρ=3cm , υ=4cm
$\lambda^2=\upsilon^2+\rho^2=4^2+3^2=25 \Rightarrow \lambda=5cm$

$V=V_{κυλ}-2V_{κων}=\pi R^2y-2\cdot\frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$

$V=\pi 4^2.10-\frac{2}{3}\pi 3^2.4 \Rightarrow V=136\pi cm^3$

$E=E_{κυρ.κυλ}+2E_{κυρ.κων}+2(E_{β.κυλ}-E_{β.κων})$
$E=2\pi Ry+2\pi\rho\lambda+2(\pi R^2-\pi\rho^2)=124\pi cm^2$

4. $$A = 2\eta\mu 50^\circ - \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu 20^\circ} = \frac{4\eta\mu 50\sigma\upsilon\nu 20-1}{2\sigma\upsilon\nu 20} =$$

$$= \frac{2[\eta\mu(50+20)+\eta\mu(50-20)]-1}{2\sigma\upsilon\nu 20} =$$

$$= \frac{2\eta\mu 70+2\eta\mu 30-1}{2\sigma\upsilon\nu 20} = \frac{2\sigma\upsilon\nu 20+2\cdot\frac{1}{2}-1}{2\sigma\upsilon\nu 20} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu 20}{2\sigma\upsilon\nu 20} = 1$$

5. $$\bar{x} = \frac{38+50+37+44+46+53+48+38+42+46+42}{11}$$

$$= \frac{484}{11} \Rightarrow \bar{x} = 44$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}} =$$

$$=\sqrt{\frac{1(-7)^2+2(-6)^2+2(-2)^2+1\cdot0^2+2\cdot2^2+1\cdot4^2+1\cdot6^2+1\cdot9^2}{11}}$$

$$=\sqrt{\frac{49+72+8+0+8+16+36+81}{11}}=\sqrt{\frac{270}{11}}$$

$\Rightarrow \sigma = 4{,}95$

6. ι) $\left.\begin{matrix} y=4+3x-x^2 \\ x=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=4 \Rightarrow A(4,0)$

$y=0 \Rightarrow 4+3x-x^2=0 \Rightarrow x=4\ ,\ x=-1 \Rightarrow$
$B(-1,0)\ ,\ \Gamma(4,0)$

ιι) $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\dfrac{0-4}{4-0}\Rightarrow \lambda_{A\Gamma}=-1$

ιιι) $E=\int_{-1}^{4}(4+3x-x^2)dx=$

$$\left.4x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{4}=\left(4\cdot4+\frac{3\cdot4^2}{2}-\frac{4^3}{3}\right)-$$

$$\left[4\cdot(-1)+\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right]=\frac{125}{6}\Rightarrow E=\frac{125}{6}$$

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΣΧΟΛ. ΕΤΟΥΣ 1996-97

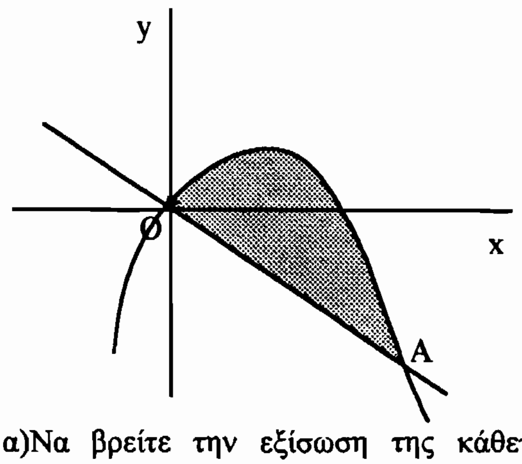
Επιμέλεια : Κ. Δεληγιάννης

<u>Μέρος Α΄</u>

Από τις 15 ερωτήσεις <u>να απαντήσετε στις 12.</u> Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $\psi=2\chi^3+\text{ημ}\chi$
2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\text{συν}x}{\text{ημ}x+\text{συν}x-1}$
3. Να βρείτε τον τέταρτο όρο του αναπτύγματος $(1+\chi)^{21}$, σε σειρά με αύξουσες δυνάμεις του χ.
4. Δίδεται ο κύκλος $\chi^2+\psi^2-8\chi+2\psi+4=0$. α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του κύκλου και την ακτίνα του. β) Αν Α(1,1), σημείο του κύκλου, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το Α και το κέντρο Κ.
5. Να βρείτε το ν αν $\dbinom{\nu}{2}=15$ και στη συνέχεια να βρείτε τις διατάξεις των ν ανά 4.
6. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη με εξίσωση $\psi=\chi^3$, τον άξονα Οχ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=3$.
7. Δίδεται η συνάρτηση $y=1+\text{εφ}x$. Να δείξετε ότι ισχύει $2(y-1)\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$
8. Να δείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\text{εφ}x)dx=\dfrac{\pi}{3}+\ln 2$
9. Με πόσους τρόπους μπορείτε να σχηματίσετε επιτροπή τριών (3) μαθητών του ΤΕΧΝΙΚΟΥ και δύο (2) το πολύ μαθητριών του ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ από ένα σύνολο που περιέχει πέντε (5) μαθητές του ΤΕΧΝΙΚΟΥ και οκτώ (8) μαθήτριες του ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ.
10. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $\text{τοξεφ}2+\text{τοξεφ}3=\dfrac{3\pi}{4}$
11. Αν ο τέταρτος όρος του αναπτύγματος του $\left(\alpha+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^7$ είναι ο 280α, να βρείτε την τιμή του β.
12. Δίδεται ο κύκλος $\chi^2+\psi^2-8\chi+6\psi+16=0$ Να δείξετε ότι το σημείο Τ(2,1) είναι εκτός του κύκλου, ότι η ευθεία $\chi=1$ είναι εφαπτομένη του, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.
13. Δίδεται η καμπύλη με εξίσωση $y=4x-x^2$.

    α) Να βρείτε το ακρότατο της και να την σχεδιάσετε δείχνοντας τις συντεταγμένες των σημείων τομής της με τους άξονες. β) Το χωρίο που ορίζεται από την καμπύλη, τον άξονα Οχ και την ευθεία $\chi=1$, στρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα Οχ. Να βρείτε τον όγκο που παράγεται.
14. Στο διπλανό σχήμα δίδεται η καμπύλη με εξίσωση $y=x-x^2$



α)Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο (0,0) αυτής. β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α στο οποίο η κάθετη ξανασυναντα την καμπύλη. γ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της καμπύλης και της καθέτου. (γραμμοσκιασμένο χωρίο).

15. (ι) Να δείξετε ότι
$2ημ3χ+ημχ+ημ5χ=4ημ3χσυν^2χ$
(ιι) Να λύσετε την εξίσωση
$2ημ3χ+ημχ+ημ5χ=2συν^2χ$

<u>Μέρος Β΄</u>

Από τις 6 ερωτήσεις **<u>να απαντήσετε τις 4</u>**. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίδεται η συνάρτηση $y=\frac{κx+1}{μx-2}$ Η καμπύλη, που παριστά η πιο πάνω συνάρτηση, έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την χ=2 και οριζόντια την ψ=2.
   α) Να βρείτε τις τιμές των κ και μ.
   β) Να κάμετε τη γραφική της παράσταση.
   γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτωμένης της καμπύλης στο σημείο Α, που η τετμημένη του είναι χ=1.
2. Δίδεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90°. Για το τρίγωνο ξέρουμε ότι ισχύει (ΑΒ)+(ΑΓ)=6cm. α) Να εκφράσετε το εμβαδό, Ε, του τριγώνου ως συνάρτηση ενός μόνο αγνώστου χ. β) Να βρείτε την τιμή του χ, έτσι ώστε το τρίγωνο να έχει μέγιστο εμβαδό.(Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας).
3. Δίδονται οι συναρτήσεις $ψ=χ^2$, ψ=2χ και ψ=4. Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο σημείο Α α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α. β) Το χωρίο, που περικλείεται από τις πιο πάνω καμπύλες, σρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των χ. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.
4. Δίδεται η συνάρτηση $y=αx^3+βx^4$, η οποία έχει ακρότατο το Α(1,1). α) Να βρείτε τις τιμές των α και β. β) Να βρείτε τα σημεία καμπής της, τις τομές με τους άξονες και άξονες και να την παραστήσετε γραφικά. γ) Στο ίδιο σχήμα να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{y}$.
5. Ένας κύκλος με κέντρο Κ(2,3) εφάπτεται στις ευθείες χ=1 και ψ=2. α) Να βρείτε την εξίσωση του. β) Να βρείτε την εξίσωση δεύτερου κύκλου, που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και τέμνει ορθογώνια τον προηγούμενο κύκλο.
6. Μια επιτροπή από έντεκα (11) άτομα είναι καλεσμένη σε συνεδρία. Να βρείτε : α) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθήσουν σε κυκλικό τραπέζι.
   β) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθήσουν στη μια πλευρά ορθογωνίου τραπεζιού, ώστε ο πρόεδρος να κάθεται στο <u>μέσο</u> της παράταξης, ανάμεσα στους αντιπρόεδρο και γραμματέα.

Λύσεις:
Μέρος Α΄

1. $y=2x^3+\eta\mu x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=6x^2+\sigma\upsilon\nu x$

2.

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}=\frac{e^0-\sigma\upsilon\nu 0}{\eta\mu 0+\sigma\upsilon\nu 0-1}=$$

$$\frac{1-1}{0+1-1}=\frac{0}{0}\ (\text{Απροσ.})$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=$$

$$\frac{2+0}{1-0}=2$$

3. $(1+x)^{21}$, Γενικός όρος του αναπτύγματος $(A+B)^{\nu}$ είναι ο

$$T_{K+1}=\binom{\nu}{K}A^{\nu-k}\cdot B^k$$

$$T_4=T_{3+1}=\binom{21}{3}\cdot 1^{21-3}\cdot x^3=$$

$$\frac{21\cdot 20\cdot 19}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3=1330x^3$$

4. $x^2+y^2-8x+2y+4=0$

(α)

$$\left.\begin{array}{l} 2g=-8\Rightarrow g=-4\\ 2f=2\ \Rightarrow f=1\\ c=4 \end{array}\right\}\Rightarrow K(-g,-f)=K(4,-1)$$

$$R=\sqrt{g^2+f^2-c}$$
$$R=\sqrt{16+1-4}=\sqrt{13}$$

(β)

A(1,1), K(4,-1)

$$\lambda_{AK}=\frac{y_K-y_A}{x_K-x_A}=\frac{-1-1}{4-1}=-\frac{2}{3}$$

ε: $y-y_1=\lambda(x-x_1)$, A(1,1) και $\lambda=-\dfrac{2}{3}$

ε: $y-1=-\dfrac{2}{3}(x-1) \Rightarrow$ ε: $3y-3=-2x+2$

ε: $2x+3y-5=0$

5.

$$\binom{\nu}{2}=15 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}=15\Leftrightarrow \nu^2-\nu-30=0$$

$$\Leftrightarrow(\nu-6)(\nu+5)=0\Leftrightarrow \nu=6,\ \nu=-5\ \alpha\pi o\rho\rho$$

$$\Delta^{\nu}_{4}=\Delta^{6}_{4}=\frac{6!}{(6-4)!}=\frac{2!3.4.5.6}{2!}=360$$

6.

$$E=\int_{\alpha}^{\beta} y\,dx$$

$$E=\int_1^3 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3=\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{81-1}{4}=20\ \tau.\mu.$$

7. y=1+εφx

$$\frac{dy}{dx}=\tau\varepsilon\mu^2 x,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2\tau\varepsilon\mu x.\tau\varepsilon\mu x\varepsilon\varphi x=$$

$2\tau\varepsilon\mu^2 x\varepsilon\varphi x$

$$A.M=2(y-1)\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{d^2y}{dx^2}=$$

$2(1+\varepsilon\varphi x-1).\tau\varepsilon\mu^2 x-2\tau\varepsilon\mu^2 x\varepsilon\varphi x=$

$2\varepsilon\varphi x.\tau\varepsilon\mu^2 x-2\tau\varepsilon\mu^2 x\varepsilon\varphi x=0=B.M$

8.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\varepsilon\phi x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\varepsilon\phi x dx=$$

$$[x]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx=[x]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx=$$

$$[x]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\ln|\sigma\upsilon\nu x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\left[x-\ln|\sigma\upsilon\nu x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$\left(\frac{\pi}{3}-\ln\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right|\right)-\left(0-\ln|\sigma\upsilon\nu 0|\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}-\ln\frac{1}{2}-0+\ln 1=\frac{\pi}{3}-\ln 2^{-1}=\frac{\pi}{3}+\ln 2$$

9.

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{2}+\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{1}+\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{0}=$$

$$=\frac{5.4.3}{1.2.3}\cdot\frac{8.7}{1.2}+\frac{5.4.3}{1.2.3}\cdot 8+\frac{5.4.3.}{1.2.3}\cdot 1=$$

$$10.28+10.8+10.1=10(28+8+1)=370$$

10.

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi 2+\tau o\varphi\varepsilon\varphi 3=\frac{3\pi}{4}$$

$$\tau o\varphi\varepsilon\varphi 2=\alpha \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha=2,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

$+$

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi 3=\beta \Rightarrow \varepsilon\varphi\beta=3,\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

$$0<\alpha+\beta<\pi$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}=\frac{2+3}{1-2.3}=\frac{5}{-5}=-1$$

Αφού

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=-1 \;\kappa\alpha\iota\; 0<\alpha+\beta<\pi \;\Rightarrow$$

$$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$$

11.

$$T_{K+1}=\binom{\nu}{K}A^{\nu-K}\cdot B^{K}$$

$$T_4=\binom{7}{3}\alpha^{7-3}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3=280\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{7.6.5}{1.2.3}\alpha^4\cdot\frac{\beta^3}{\alpha^3}=280\alpha \Rightarrow$$

$$35\beta^3=280 \Rightarrow \beta^3=8 \Rightarrow \beta=2$$

12.

$$((K): x^2+y^2-8x+6y+16=0,\quad T(2,1)$$

$$\Delta_K(T)=2^2+1^2-8.2+6.1+16=11>0$$

άρα το σημείο Τ(2,1) *βρίσκεται εκτός του κύκλου* (Κ).

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2-8x+6y+16=0\\ x=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$1+y^2-8+8y+16=0$$

$$y^2+6y+9=0$$

$$\Delta=6^2-4.9=0 \Rightarrow$$

η ευθεία $x=1$ *εφάπτεται του κύκλου* (Κ)

$$y^2+6y+9=0 \Rightarrow (y+3)^3=0 \Rightarrow y=-3$$

Το σημειο επαφής είναι το (1,-3)

13. $y=4x-x^2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=4-2x,\; \frac{dy}{dx}=0 \;\Rightarrow$

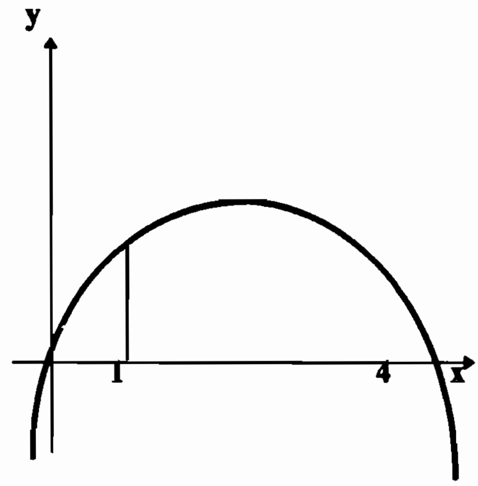
$4-2x=0 \;\Rightarrow x=2 \;\Rightarrow$

$y=4.2-2^2=8-4=4$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-2<0 \;\Rightarrow\;$ Max(2, 4)

$y=0 \;\Rightarrow\; x(4-x)=0 \;\Rightarrow\; x=0,\ x=4$

Σημεία τομής με τον άξονα x΄x (0,0), (4,0)



$$V_x=\pi\int_\alpha^\beta y^2dx$$

$$V_x=\pi\int_0^1\left(4x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^1(16x^2+x^4-8x^3)dx$$

$$=\pi\left[\frac{16x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-2x^4\right]_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{16}{3}+\frac{1}{5}-2\right)=\pi\left(\frac{80+3-30}{15}\right)$$

$$=\frac{53}{15}\pi\ \kappa.\mu.$$

14. (α) $y=x-x^2$

$y'=1-2x$

$\lambda_{\varepsilon\varphi}=y'\big|_{x=0}=1-2.0=1$

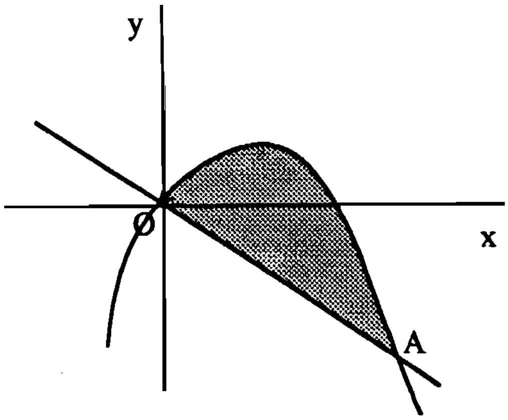
$y=0$

$$\lambda_K=-\frac{1}{\lambda_{\varepsilon\varphi}} \Rightarrow \lambda_K=-1$$

εξίσωση κάθετης:

$y-y_1=\lambda(x-x_1)$

$y-0=-1(x-0) \Rightarrow y=-x$



(β)

$$\left.\begin{array}{l} y=x-x^2 \\ y=-x \end{array}\right\} \Rightarrow -x=x-x^2 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow$$

$$x(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$x(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0,\ x=2 \\ y=0,\ y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A}(2,-2)$$

(γ)

$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}(y_K-y_E)dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}=\int_0^2(x-x^2+x)dx=\int_0^2(2x-x^2)dx$$

$$\mathrm{E}=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3} \quad \tau.\mu.$$

15. (i) ΑΜ=2ημ3x+ημx+ημ5x=

$$2\eta\mu x+2\eta\mu\frac{5x+x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{5x-x}{2}=$$

2ημ3x+2ημ3xσυν2x=

$2\eta\mu3x(1+\sigma\upsilon\nu2x)=2\eta\mu3x.2\sigma\upsilon\nu^2x=$

$4\eta\mu3x\sigma\upsilon\nu^2x$=Β.Μ.

(ii) $4\eta\mu3x\sigma\upsilon\nu^2x=2\sigma\upsilon\nu^2x \Rightarrow$

$4\eta\mu3x\sigma\upsilon\nu^2x-2\sigma\upsilon\nu^2x=0 \Rightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu^2x(2\eta\mu3x-1)=0 \Rightarrow$

συνx=0	$\eta\mu3x=\frac{1}{2}$
συνx=συν90°	ημ3x=ημ30°
x=360°±90°	3x=360°K+30°
K∈Z	ή

3x=360°K+150°

x=120°K+10°

ή

x=120°K+50°

K∈Z

Μέρος Β΄

1. $y=\dfrac{Kx+1}{\mu x-2}$

(α)

Κ.Ο x=2 ⇒ μ.2-2=0 ⇒ μ=1

Ο.Α y=2 ⇒

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{Kx+1}{\mu x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{K+\frac{1}{x}}{\mu-\frac{2}{x}}=\frac{K+0}{\mu-0}=$$

$$\frac{K}{\mu}=2 \Rightarrow \frac{K}{1}=2 \Rightarrow K=2$$

(β)

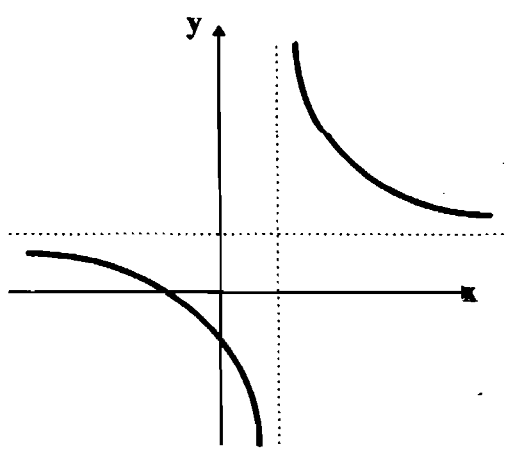
$$y'=\frac{2(x-2)-(2x+1).1}{(x-2)^2}$$

$$y'=\frac{-5}{(x-2)^2}<0\ \forall x\in R-\{2\} \Rightarrow$$

δεν έχει ακρότατα

$$x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \quad \left(0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \quad \left(-\frac{1}{2},0\right)$$



(γ)

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=\dfrac{2x+1}{x-2} \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{2+1}{1-2}=-3 \Rightarrow \mathrm{A}(1,-3)$$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}=y'\Big|_{\mathrm{A}(1,3)}=-\frac{5}{(1-2)^2}=-5$$

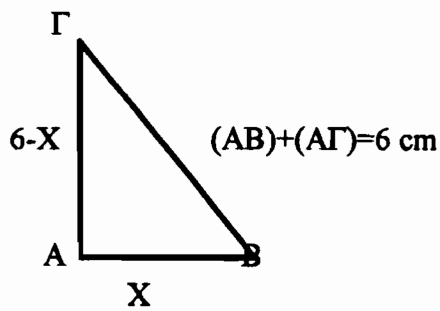
ε: $y-y_1=\lambda(x-x_1)$

ε: $y+3=-5(x+1)$

ε: $5x+y-2=0$

2.(α) Αν(ΑΒ)=x $\Rightarrow$ (ΑΓ)=6-x

$$\mathrm{E}=\frac{\beta.\upsilon}{2}=\frac{x.(6-x)}{2}=\frac{6x-x^2}{2}$$



(β)

$$\frac{dE}{dx}=\frac{6-2x}{2}=3-x$$

Για να είναι μέγιστο το εμβαδόν πρέπει

$$\frac{dE}{dx}=0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \frac{d^2E}{dx^2}<0$$

$$\frac{dE}{dx}=0 \Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3$$

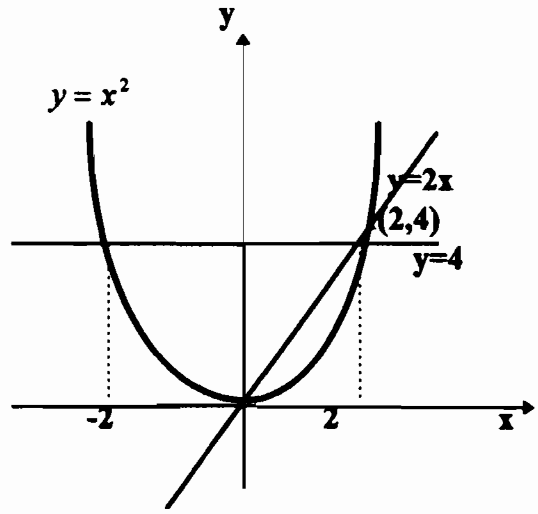
$$\frac{d^2E}{dx^2}=-1<0 \Rightarrow$$

Το Ε είναι μέγιστο.

3.(α)

$y=x^2$, $y=2x$, $y=4$

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,4)$$



(β)

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

$$V_x=\pi\int_{-2}^{0}\left(y_{E_1}^2-y_K^2\right)dx+\pi\int_{0}^{2}\left(y_{E_1}^2-y_{E_1}^2\right)dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{0}\left(16-x^4\right)dx+\pi\int_{0}^{2}\left(16-4x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[16x-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{0}+\pi\left[16x-\frac{4x^3}{3}\right]_{0}^{2}$$

$$=\pi\left[(0)-\left(-32+\frac{32}{5}\right)\right]+\pi\left(32-\frac{32}{3}\right)$$

$$=32\pi-\frac{32\pi}{5}+32\pi-\frac{32\pi}{3}=64\pi-\frac{256\pi}{15}$$

$$=\frac{960\pi-256\pi}{15}=\frac{704\pi}{15}\;\; \kappa.\mu.$$

4.(α) $y=\alpha x^3+\beta x^4$, $A(1,1)$ ακρότατο

$y'=3\alpha x^2+4\beta x^3$

$0 = 3\alpha.1^2 + 4\beta.1^3 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 3\alpha + 4\beta \\ A(1,1) \text{ σημειο τηό } y=\alpha x^3+\beta x^4 \\ 1 = \alpha + \beta \end{array}\right| \begin{array}{l} 1 \\ \\ -3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 0 = 3\alpha + 4\beta \\ \underline{-3 = -3\alpha - 3\beta} \\ -3 = \beta \end{array}$$

αρα $1 = \alpha - 3 \Rightarrow \alpha = 4$

οποτε η $y = 4x^3 - 3x^4$, $y' = 12x^2 - 12x^3$

(β)

$y''=24x-36x^2$

Για τα σημεία καμπής

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \Rightarrow 12x(2-3x)=0$$

$$x_1=0,\quad x_2=\frac{2}{3}$$

$$y_1=0,\quad y_2=\frac{16}{27}$$

x		0		2/3	
y''	-	0	+	0	-
y	∩		∪		∩

Για $y=0 \Rightarrow 0=x^3(4-3x) \Rightarrow x=0,\ x=\frac{4}{3}$

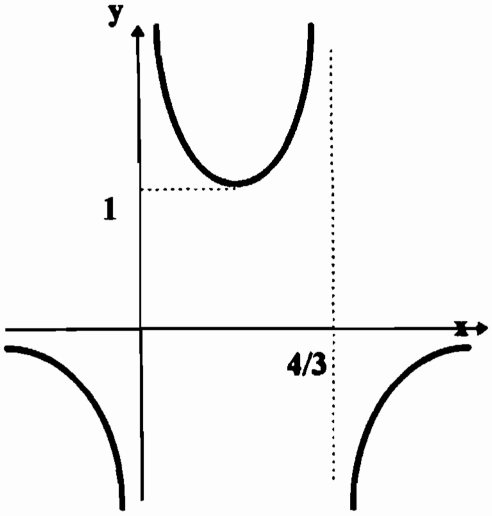
$(0,0), (\frac{4}{3},0)$

$y'=12x^2-12x^3=12x^2(1-x)$

$y'=0 \Rightarrow x=0$ (διπλή), $x=1$

(γ)

$$f(x)=\frac{1}{4x^3-3x^4}$$



5. $K(2,3)$, $x=1$, $y=2$ εφαπτομένη του κύκλου.

(α) Έστω $(K1)$: $x^2+y2+2g_1x+2f_1g+c_1=0$ η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου.

Ο (K_1) έχει κέντρο $K(2,3) \Rightarrow$

$-g_1=2$ και $-f_1=3$ άρα $g_1=-2$ και $f_1=-3$

οπότε έχω (K_1): $x^2+y^2-4x-6y+c_1=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} y^2-6y+c_1-3=0 \\ \Delta=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 36-4(c_1-3)=0 \Rightarrow$$

$$36-4c_1+12=0$$

$$\Rightarrow c_1=12 \Rightarrow (K_1): x^2+y^2-4x-6y+12=0$$

(β) Έστω (K_2): $x^2+y^2+2g_2x+2c_2y+c_2=0$

Αφού ο (K_2) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων τότε $-g_2=0$, $-f_2=0 \Rightarrow g_2=0, f_2=0$

Οι (K_2), (K_1) τέμνονται ορθογώνια

$2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$

$2.(-2).0+2(-3).0=12+c_2 \Rightarrow c_2=-12$

άρα (K_2): $x^2+y^2-12=0$

6. (α) $K_v=(v-1)! \Rightarrow K_{11}=(11-1)!=10!=$ 3628800

(β) Ο αντιπρόεδρος (Α) και ο γραμματέας (Γ) μετατίθενται μεταξύ τους κατά 2! τρόπους.

Ώστε μπορούν να καθήσουν κοντά $8!2!=80640$ τρόπους.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΙ - Α΄ ΚΑΙ Γ΄ Ομάδα

Επιμέλεια: Μαρία Φαλά

Από τα 6 ζητήματα να λυσετε μόνο 4.

ΖΗΤΗΜΑ 1°

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\sigma\upsilon\nu 255^\circ+\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{\eta\mu 255^\circ-\eta\mu 15^\circ}=$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους πίνακες ή υπολογιστική μηχανή.

(Μονάδες 6)

(β) Να βρεθούν οι λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης $2\sigma\upsilon\nu(2x-40^\circ)=\sqrt{3}$ στο διάστημα $[0^\circ, 360^\circ]$.

(Μονάδες 7)

(γ) Να δειχτεί η ταυτότητα: *στεμ2α+σφ2α=σφα.*

(Μονάδες 7)

(δ) Να δειχτεί ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)=$$

(Μονάδες 5)

ΖΗΤΗΜΑ 2°

(α) Να λυθεί η τριγωνομετρική εξίσωση συν2x-7$\eta\mu x$+3=0 στο διάστημα (0° , 720°).

(Μονάδες 7)

(β) Να δειχτεί ότι:

$$1+\varepsilon\varphi A\cdot\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\tau\varepsilon\mu A$$

(Μονάδες 6)

(γ) Αν $\varepsilon\varphi\, 2\alpha=\frac{3}{4}$ και 0<α<π να βρεθεί η εφα.

(Μονάδες 7)

(δ) Να δειχτεί ότι:

$$\frac{\eta\mu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}=1+\frac{1}{2}\eta\mu\, 2\theta$$

(Μονάδες 5)

ΖΗΤΗΜΑ 3°

(α) Ένα κομματι κυλινδρικής σωλήνας έχει μήκος 20 cm. Η εξωτερική διάμετρός της είναι 8 cm και το πάχος της σωλήνας 2 cm. Αν η σωλήνα είναι ανοιχτή στα δύο άκρα να βρεθεί το εμβαδό της ολικής επιφάνειας της σωλήνας και ο όγκος του μετάλλου της σωλήνας.

(Μονάδες 7)

(β) Η βάση ορθού πρίσματος είναι ο ρόμβος με διαγωνίους 12 cm και 16 cm. Αν το εμβαδό της ολικής επιφάνειας είναι, $E_{ολ}$=792 cm^2 να υπολογίσετε το ύψος και τον όγκο του πρίσματος.

(Μονάδες 8)

(γ) Κλειστό κιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι κατασκευα- σμένο από ξύλο ομοιόμορφου πάχους. Οι εξωτερικές διαστάσεις του είναι 6 dm, 5 dm, και 8 dm και το εμβαδό της ολικής εσωτερικής επιφάνειάς του είναι 108 dm^2.
Να βρεθεί το πάχος του ξύλου.

(Μονάδες 10)

ΖΗΤΗΜΑ 4°

(α) Κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης R και ύψος υ=2R και είναι εγγεγραμμένος σε σφαίρα. Αν E_1 είναι το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου και E_2 είναι το εμβαδό της επιφάνειας της σφαίρας, να δειχτεί ότι:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{3}{4}$$

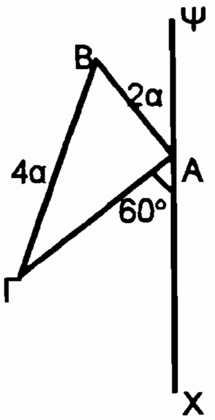
(Μονάδες 7)

(β) Ορθό πρίσμα έχει βάση ορθογώιο τρίγωνο με πλευρές x cm, x+1 cm, x+2 cm. Να βρεθούν οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 7 cm να βρεθεί ο όγκος του και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του.

(Μονάδες 8)

(γ) Ορθογώιο τρίγωνο ΑΒΓ, (Α=90°) έχει ΑΒ=2α, ΒΓ=4α. Το τρίγωνο περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα χΑψ και η ΑΓ σχηματίζει με τον άξονα γωνία $x\hat{A}\Gamma = 60^\circ$.

Να υπολογιστεί η επιφάνεια που παράγει το τρίγωνο ΑΒΓ κατά την περιστροφή του.



(Μονάδες 10)

ΖΗΤΗΜΑ 5^o

(α) Στο ανάπτυγμα $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ να βρεθεί ο όρος που είναι ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες 5)

(β) Κύκλος περνά από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(0, -1). Το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην ευθεία x-2y-4=0. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου αυτού. Αν επιπλέον ο κύκλος τέμνει ορθογώνια τον κύκλο x^2+y^2-κx+2y-2κ+6=0, να βρεθεί η τιμή του κ.

(Μονάδες 6)

(γ) Η καμπύλη με εξίσωση $y=\frac{\alpha}{x}+\beta x^2$ περνά από το σημείο Α(1,5) και η κλίση της καμπύλης στο Α είναι 4. Να υπολογιστούν τα α και β. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\int_1^2 y dx$.

(Μονάδες 6)

(δ) Να βρεθεί και να χαρακτηριστεί το τοπικό ακρότατο της καμπύλης με εξίσωση $y=x^2-2x-3$. Η καμπύλη να παρασταθεί γραφικά. Να δειχτεί ότι η ευθεία y=4x-8 περνά από το ακρότατο της καμπύλης. Να βρεθεί το άλλο σημείο που η ευθεία τέμνει την καμπύλη. Να τοποθετηθεί η ευθεία στο σχήμα και να βρεθεί το εμβαδό που περιορίζεται από την ευθεία, τον άξονα των x και την καμπύλη και βρίσκεται στο θετικό ημιεπίπεδο ως προς τον άξονα Ox.

(Μονάδες 8)

ΖΗΤΗΜΑ 6^o

(α) Αν $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ και x=συνθ με $0<\theta<\frac{\delta}{2}$

να δειχτεί ότι $\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{2}\,\varepsilon\varphi\theta\sqrt{\tau\varepsilon\mu\theta}$.

(Μονάδες 5)

(β) Αν $F(x)=\frac{x+9}{x^2+3x-4}$ να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
Στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int F(x)dx$.

(Μονάδες 8)

(γ) Αν η απόσταση του σημείου Α(4,0) από την ευθεία (συνθ).x+(ημθ). y=1 είναι ίση με 1, να βρείτε την τιμή της γωνίας θ, 0° < θ < 90°.

(Μονάδες 6)

(δ) Να υπολογιστεί το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x\,\eta\mu 2x\,dx.$$

(Μονάδες 6)

Λύσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1°

(α)

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu 255^\circ+\sigma\upsilon\nu 15^\circ}{\eta\mu 255^\circ-\eta\mu 15^\circ}=$$

$$\frac{2\sigma\upsilon\nu\frac{255^\circ+15^\circ}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{255^\circ-15^\circ}{2}}{2\eta\mu\frac{255^\circ-15^\circ}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{255^\circ+15^\circ}{2}}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu 120^\circ}{\eta\mu 120^\circ}=\sigma\phi 120^\circ$$

$$\Rightarrow A=\sigma\phi(180^\circ-60^\circ)=-\sigma\phi 60^\circ=-\varepsilon\phi 30^\circ$$

$$\Rightarrow A=-\sqrt{3}/3$$

(β)

$$2\sigma\upsilon\nu(2x-40^\circ)=\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(2x-40^\circ)=\sqrt{3}/2=\sigma\upsilon\nu 30^\circ$$

$$\Rightarrow 2x-40^\circ=360^\circ k\pm 30^\circ\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x=180^\circ k+20^\circ\pm 15^\circ\\ x\in[0^\circ\ 360^\circ]\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}x=5^\circ\quad x=35^\circ\\ x=185^\circ\\ x=215^\circ\end{array}$$

$k\in z$

(γ)

$$AM=\sigma\tau\varepsilon\mu 2\alpha+\sigma\phi 2\alpha=$$

$$\frac{1}{\eta\mu 2\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha}=$$

$$\frac{1+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1}{2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}=\sigma\phi\alpha=BM$$

(δ)

$$\Delta=\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\Delta=\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{3}-\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{3}$$

$$+\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}-\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\frac{4\pi}{3}$$

$$\Delta=\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\eta\mu\theta-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\theta\Rightarrow\Delta=0$$

ΖΗΤΗΜΑ 2°

(α)

$$\sigma\upsilon\nu 2x-7\eta\mu x+3=0\Rightarrow$$

$$1-2\eta\mu^2x-7\eta\mu x+3=0\Rightarrow$$

$$2\eta\mu^2x+7\eta\mu x-4=0$$

$$(2\eta\mu x-1)(\eta\mu x+4)=0\Rightarrow$$

(i) $\eta\mu x=-4<-1$ αδυνατον

(ii) $\eta\mu x=\frac{1}{2}=\eta\mu 30^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x=360^\circ K+30^\circ\\ \quad x=360^\circ K+180^\circ\text{-}30^\circ\\ \quad\Rightarrow x=360^\circ K+150^\circ\\ x\in(0^\circ,\ 720^\circ),\ K\in Z\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$x=30^\circ\quad x=390^\circ$$

$$x=150^\circ\quad x=510^\circ$$

(β)

$$AM=1+\varepsilon\phi A\cdot\varepsilon\phi\frac{A}{2}=$$

$$1+\frac{2\varepsilon\phi\frac{A}{2}}{1-\varepsilon\phi^2\frac{A}{2}}\cdot\varepsilon\phi\frac{A}{2}=\frac{1-\varepsilon\phi^2\frac{A}{2}+2\varepsilon\phi^2\frac{A}{2}}{1-\varepsilon\phi^2\frac{A}{2}}$$

$$AM=\frac{1+\varepsilon\phi^2\frac{A}{2}}{1-\varepsilon\phi^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu A}=\tau\varepsilon\mu A=BM$$

(γ)

$$\varepsilon\phi 2\alpha=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{2\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha}=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$8\varepsilon\phi\alpha=3-3\varepsilon\phi^2\alpha\Rightarrow$$

$$3\varepsilon\phi^2\alpha+8\varepsilon\phi A-3=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow(3\varepsilon\phi\alpha-1)(\varepsilon\phi\alpha+3)=0\\ \quad 0<\alpha<\pi\Rightarrow-\infty<\varepsilon\phi\alpha<0\\ \qquad\qquad 0<\varepsilon\phi\alpha<+\infty\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{l}\varepsilon\phi\alpha=\frac{1}{3}\\ \varepsilon\phi\alpha=-3\end{array}$$

(δ)

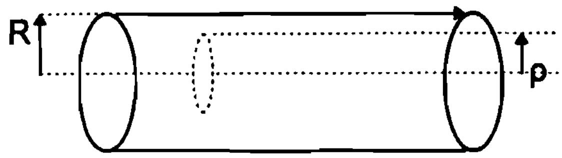
$$AM=\frac{\eta\mu^3\theta-\sigma\upsilon\nu^3\theta}{\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}=$$

$$\frac{(\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta)(\eta\mu^2\theta+\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)}{(\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

$$AM=1+\frac{1}{2}\eta\mu 2\theta=BM$$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 3°</u>

(α)



υ=20 cm
R=4cm
ρ=4-2=2cm

$E_{ολ}=E_{εξ}+E_{εσ}+2E_{στεφ}=2π.R.υ+2π.ρ.υ+$

$2π(R^2-ρ^2)$
$E_{ολ}=2.π.4.20+2.π.2.20+2π(16-4) \Rightarrow$
$E=264π$ cm
$V=V_{εξ}-V_{εσ}=π.R^2.υ-π.ρ^2.υ=π.υ(R^2-ρ^2)$
$V=π.20.(4^2-2^2) \Rightarrow V=240π\ cm^3$

(β)

$$\delta_1=12cm$$

$$\delta_2=16cm$$

$$\alpha^2=\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\delta_2}{2}\right)^2=6^2+8^2=100 \Rightarrow$$

$$\alpha=10cm$$

$$E_{ολ}=2E_{β}+E_{παρ}=792\,cm^2$$

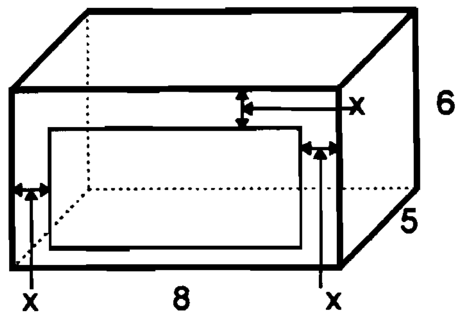
$$\Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 12+4\cdot 10\cdot\upsilon=792 \Rightarrow$$

$$40\upsilon=792-192=600$$

$$\Rightarrow \upsilon=15\,cm$$

$$V=E_{β}\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 12\cdot 15 \Rightarrow V=1440\,cm^3$$

(γ)



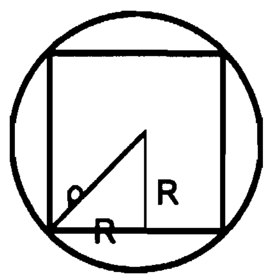
x=πλάτος ξύλου
$E_{ολ.εσ.}=108\ dm^2$
$\Rightarrow 2[(6-2x)(5-2x)+(5-2x)(8-2x)+(8-2x)(6-2x)]=108$
$30-22x+4x^2+40-26x+4x^2+48-28x+4x^2=54$
$12x^2-76x+64=0$
$3x^2-19x+16=0 \Rightarrow$
$(x-1)(3x-16)=0$
$\Rightarrow x=1$ dm $x=16/3$ dm>5 απορρίπτ.
$\Rightarrow x=1$ dm

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4°</u>

(α)

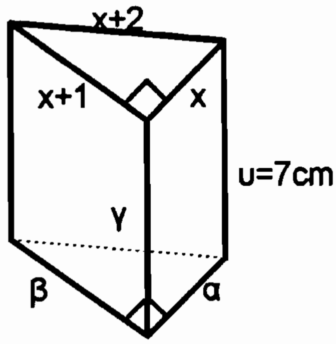
$E_1=2πR^2+2πRυ=2πR^2+2πR.2R=6πR^2$
$E_2=4πρ^2=4π.2R^2=8πR^2$

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{6δR^2}{8δR^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2}=\frac{3}{4}$$



$ρ^2=R^2+R^2=2R^2$

(β)



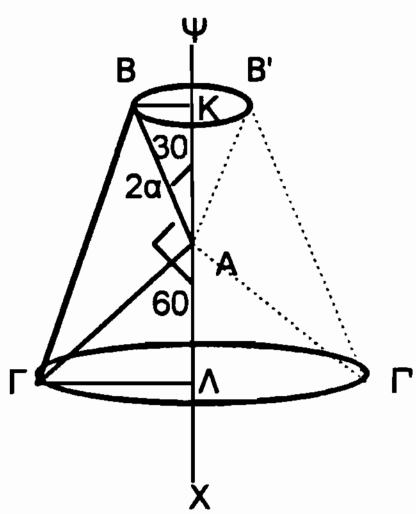
$(x+2)^2=x^2+(x+1)^2 \Rightarrow x^2+4x+4=$
x^2+x^2+2x+1
$\Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0$
$\Rightarrow x=-1$ απορρίπτεται
$x=3$ cm
$\alpha=3$ cm $\beta=4$ cm $\gamma=5$ cm

$V=E_\beta.u=\frac{1}{2}.\alpha.\beta.u$

$V=\frac{1}{2}.3.4.7 \Rightarrow V=42\ cm^3$

$E=2.\frac{1}{2}.\alpha.\beta+u.(\alpha+\beta+\gamma)=$
$3.4+7(3+4+5)$
$E=96\ cm^2$

(γ)



AB=2α

ΒΓ=4α

$\eta\mu 30^\circ=\frac{BK}{AB} \Rightarrow BK\frac{1}{2}AB=\alpha$

$A\Gamma=\sqrt{(B\Gamma)^2-(AB)^2}=\sqrt{16\alpha^2-4\alpha^2}=$
$2\alpha\sqrt{3}$

$\eta\mu 60^\circ=\frac{\Gamma\Lambda}{A\Gamma} \Rightarrow \Gamma\Lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot A\Gamma=3\alpha$

$E=E_{AB}+E_{A\Gamma}+E_{B\Gamma}=$
$\pi\cdot(BK)(AB)+\pi\cdot(\Gamma\Lambda)(\Gamma A)+$
$\pi(\Gamma\Lambda+BK)\cdot B\Gamma$

$E=\pi.\alpha.2\alpha+\pi.3\alpha.2\alpha\sqrt{3}+\pi.(3\alpha+\alpha).4\alpha=$
$2\alpha^2\pi+6\alpha^2\sqrt{3}\pi+16\alpha^2\pi$

$E=6(3+\sqrt{3})\alpha^2\pi$ κ.μ.

ΖΗΤΗΜΑ 5°

(α)

$f(x)=\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$

$T_{K+1}=\binom{12}{K}\cdot(x^2)^{12-K}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^K=$

$\binom{12}{K}x^{24-2K}\cdot x^{-K}=\binom{12}{K}x^{24-3K}$

όρος ανεξάρτητος του x $\Rightarrow$

$24-3K=0 \Rightarrow K=8 \Rightarrow T_9=\binom{12}{8}=495$

(β)

$$\left.\begin{matrix}(K_1)x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c=0\\ (0,0)\in(K_1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow c_1=0$$

$$\left.\begin{matrix}(K_1)x^2+y^2+2g_1x+2f_1y=0\\ A(0,-1)\in(K_1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$0+1+0-2f_1=0\Rightarrow f_1=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{matrix}(\varepsilon)x-2y-4=0\\ K_1(-g_1,-f_1)\in(\varepsilon)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-g_1+2f_1-4=0\\ f_1=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$-g_1+1-4=0\Rightarrow g_1=-3\Rightarrow K_1\left(3,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{matrix}(K_1)x^2+y^2-6x+y=0\\ (K_2)x^2+y^2-Kx+2y-2K+6=0\\ (K_1)(K_2)\ \textit{τεμνονται ορθογωνια}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$$

$$2(-3)\left(-\frac{K}{2}\right)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot1=0-2K+6$$

$$\Rightarrow 3K+1=-2K+6\Rightarrow 5K=5\Rightarrow K=1$$

Σημείωση: Ο κύκλος (K_2) είναι φανταστικός

(γ)

$$\left.\begin{matrix}y=\frac{\alpha}{x}+\beta x^2\\ A(1,5)\end{matrix}\right\}\Rightarrow 5=\alpha+\beta$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha}{x^2}+2\beta x\Rightarrow\lambda=\left.\frac{dy}{dx}\right|_A\Rightarrow$$

$$\frac{-\alpha}{1^2}+2\beta\cdot i=4\Rightarrow\left.\begin{matrix}2\beta-\alpha=4\\ \beta+\alpha=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}\beta=3\\ \alpha=2\end{matrix}$$

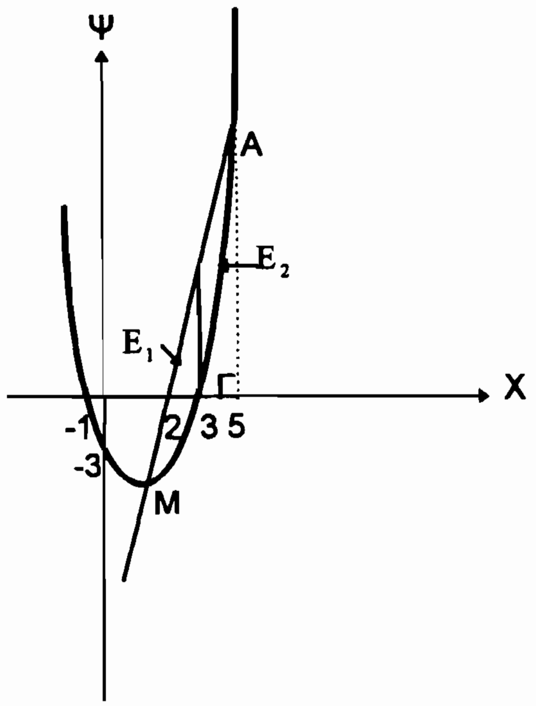
$$\Rightarrow y=\frac{2}{x}+3x^2\Rightarrow I=\int_1^2 ydx=$$

$$\int_1^2\left(\frac{2}{x}+3x^2\right)dx=\left(2\ln x+x^3\right)_1^2$$

$$I=\left(2\ln2+2^3\right)-\left(0+1^3\right)\Rightarrow$$

$$I=2\ln2+7$$

(δ)



$y=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$
$y=0\Rightarrow x=3,\ x=-1\Rightarrow(3,0)(-1,0)$
$x=0\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$

$y'=2x-2=2(x-1)\Rightarrow$ ρίζα: $x=1$
$y''=2>0\Rightarrow$ τοπικό ελάχιστο
$y(1)=1-2,1-3=4$
min $(1,-4)$

$$\left.\begin{matrix}y=4x-8\\ (1,-4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow -4=4-8 \text{ την επαληθεύει}$$

$\Rightarrow(1,-4)\in y=4x-8$

$$\left.\begin{array}{l} y=4x-8 \\ y=x^2-2x-3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2x-3=4x-8$$

$$\Rightarrow x^2-6x+5=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-1)$$

$$\Rightarrow x=1 \quad x=5 \Rightarrow y(5)=12$$

$$y=-4 \quad \Rightarrow A(5,12)$$

$4x-8=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow B(2,0) \quad \Delta(3,4)$

$$E=E_1+E_2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4+$$

$$\int_3^5\left[4x-8-\left(x^2-2x-3\right)\right]dx=$$

$$2+\int_3^5\left(-x^2+6x-5\right)dx$$

$$E=2+\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right)_3^5=$$

$$2+\left(-\frac{125}{3}+75-25\right)-\left(-9+27-15\right)$$

$$E=2+\frac{-125+150}{3}-3=\frac{25}{3}-\frac{3}{3}\Rightarrow$$

$$E=\frac{22}{3}\ \tau.\mu.$$

Διαφορετικά,

$$y=x^2-2x-3=x^2-2x+1-4=$$

$$(x-1)^2-4 \Rightarrow y+4 \Rightarrow$$

$$x-1=\ \pm\sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1\pm\sqrt{y+4} \\ x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1+\sqrt{y+4}$$

$$y=4x-8 \Rightarrow x\frac{y+8}{4}$$

$$E=\int_0^{12}\left[\left(1+\sqrt{y+4}\right)-\left(\frac{y+8}{4}\right)\right]dy=$$

$$\left[y+\frac{2}{3}(y+4)^{\frac{3}{2}}-\frac{y^2}{8}-2y\right]_0^{12}$$

$$E=\left(12+\frac{2}{3}\cdot 16^{\frac{3}{2}}-\frac{144}{8}-2\cdot 12\right)-$$

$$\left(0\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-0-0\right)=$$

$$12+\frac{128}{3}-18-24-\frac{16}{3}$$

$$E=\frac{112}{3}-30 \Rightarrow E=\frac{22}{3}\ \tau.\mu.$$

ΖΗΤΗΜΑ 6°

(α)

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}},\ x=\sigma\upsilon\nu\theta,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta>0$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cdot(-\eta\mu\theta)=$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu\theta}}\cdot\eta\mu\theta \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon\varphi\theta\cdot\sqrt{\tau\varepsilon\mu\theta}$$

(β)

$$F(x)=\frac{x+9}{x^2+3x-4}=\frac{x+9}{(x+4)(x-1)}=$$

$$\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-1} \Rightarrow$$

$$x+9=A(x-1)+B(x+4)$$

$$x=1 \Rightarrow 10=0+5B \Rightarrow B=2$$

$$x=-4 \Rightarrow 5=-5A+0 \Rightarrow A=-$$

$$F(x)=-\frac{1}{x+4}+\frac{2}{x-1}$$

$$I=\int F(x)dx=\int\left(\frac{-1}{x+4}+\frac{2}{x-1}\right)dx=$$

$$-ln|x+4|+2\ln|x-1|+K$$

$$I=\ln(x-1)^2-\ln|x+4|+K \quad \text{ή}$$

$$I=ln\frac{(x-1)^2}{|x+4|}+K$$

(γ)

$$\left.\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu\theta\cdot x+\eta\mu\theta\cdot y=1 \\ A(4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$d=\frac{|Ax_A+By_A+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}\Rightarrow$$

$$\frac{|\sigma\upsilon\nu\theta\cdot 4+\eta\mu\theta\cdot 0-1|}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta}}=1$$

$$\Rightarrow\frac{|4\sigma\upsilon\nu\theta-1|}{1}=1\Rightarrow$$

$(i) 4\sigma\upsilon\nu\theta-1<0\Rightarrow 4\sigma\upsilon\nu\theta-1=-1$

$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=0$ *απορριπτεται*

$(ii) 4\sigma\upsilon\nu\theta-1>0\Rightarrow 4\sigma\upsilon\nu\theta-1=1$

$$\left.\begin{array}{c}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu 60^\circ\\ 0^\circ<\theta<90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

(δ)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x\cdot\eta\mu 2x dx=$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x\cdot\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x d\eta\mu x$$

$$I=\frac{2}{3}\eta\mu^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}(1-0)\Rightarrow I=\frac{2}{3}$$

Διαφορετικά,

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sigma\upsilon\nu(x-2x)-\sigma\upsilon\nu(x+2x)]dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sigma\upsilon\nu(-x)-\sigma\upsilon\nu 3x]dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 3x)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(\eta\mu x-\frac{\eta\mu 3x}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow I=\frac{2}{3}$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.)
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΙ - Β΄ ΚΑΙ Δ΄ ΟΜΑΔΑ

Επιμέλεια: Μαρία Φαλά

Από τα 6 ζητήματα να λύσετε τα 4.

ΖΗΤΗΜΑ 1°

(α)Να βρείτε τη λύση της εξίσωσης

$$\eta\mu 2x = \frac{1}{2} \quad \gamma\iota\alpha \quad 0° \le x \le 360°$$

(Μονάδες 7)

(β)Να βρείτε την ακριβή τιμή της παράστασης

$$2\eta\mu 15° \cdot \sigma\upsilon\nu 15° + \frac{\varepsilon\varphi 40° + \varepsilon\varphi 5°}{1 - \varepsilon\varphi 40° \cdot \varepsilon\varphi 5°}$$

χωρίς να χρησιμοποιήσετε πίνακες ή υπολογιστική μηχανή.

(Μονάδες 8)

(γ)Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

$$\sigma\upsilon\nu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 30° + \frac{1}{2} = \eta\mu 30° \cdot \eta\mu 3x$$

(Μονάδες 10)

ΖΗΤΗΜΑ 2°

(α)Να δείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta} = 2\tau\varepsilon\mu 2\theta \eta\mu\theta$$

(Μονάδες 7)

(β)Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}$$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} = 4$$ για 0°≤ θ ≤ 360° στο διάστημα 0°≤θ≤360°.

(Μονάδες 8)

(γ)Αν $\frac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu(A+B)} = \frac{2}{3}$ να δείξετε ότι εφΑ.σφΒ=5

(Μονάδες 10)

ΖΗΤΗΜΑ 3°

(α)Μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας η βάση είναι η ίδια με τη βάση κύβου και η κορυφή της είναι το κέντρο της απέναντι έδρας του κύβου. Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας αν γνωρίζετε ότι η διαγώνιος μιας έδρας του κύβου είναι ίση με $6\sqrt{2}$ cm.

(Μονάδες 8)

(β)Το εμβαδό της κυρτής επιφάνειας κώνου είναι 65π cm^2 και της ολικής επιφάνειας 90π cm^2. Να βρείτε την ακτίνα της βάσης του και τον όγκο του.

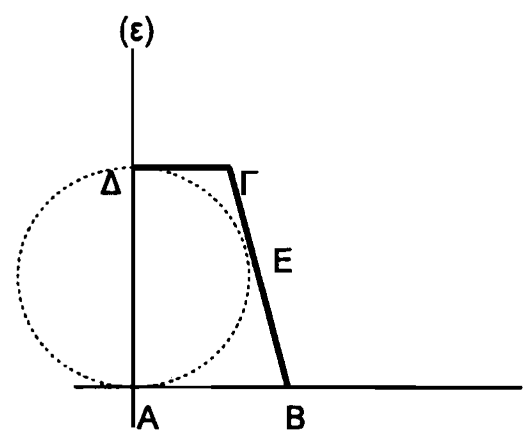
(Μονάδες 7)

(γ)΄Ενας κόλουρος κώνος έχει ακτίνες βάσεων R και ρ και ύψος υ. Να δείξετε ότι, η διαφορά μεταξύ των όγκων του κόλουρου κώνου και του κυλίνδρου που έχει το ίδιο ύψος και ακτίνα τη <u>μέση</u> τομή του κολούρου κώνου, είναι ίση με

$$\frac{\pi\upsilon}{12}(R-\rho)^2.$$

(Μονάδες 10)

ΖΗΤΗΜΑ 4°



(α)Στο σχήμα δίνεται το ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με (ΑΒ)=8 cm, (ΒΓ)=10 cm και (ΔΓ)=2 cm και (ΔΕΑ) ημικύκλιο.

Το σκιασμένο μέρος στρέφεται γύρω από την ευθεία (ε), ολόκληρη στροφή. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδό του στερεού που παράγεται.

(το εμβαδό συμπεριλαμβάνει και την εσωτερική επιφάνεια).

(Μονάδες 8)

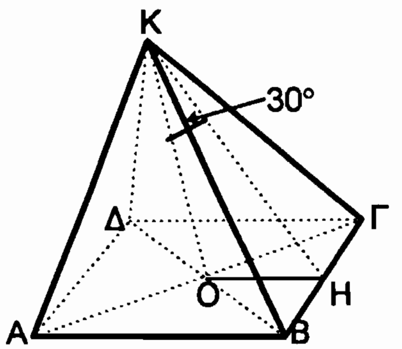
(β)Ο όγκος σφαίρας είναι $\frac{400δ}{3}$ cm^3.

(i)Να βρείτε την ακτίνα και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας.

(ii)Να βρείτε τον όγκο κυλίνδρου εγγεγραμμένου στη σφαίρα αν έχει ύψος 16 cm.

(Μονάδες 7)

(γ)Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας Κ.ΑΒΓΔ το απόστημα (ΚΗ)=8 cm και η γωνία $\left(O\hat{K}H\right)=30^o$ (πιο κάτω σχήμα). Να βρείτε.



(i) την πλευρά της βάσης και το ύψος.

(ii) την πλευρά τομής της με επίπεδο παράλληλο προς τη βάση, που περνά από το μέσο του ύψους και

(iii)τον όγκο της κόλουρης πυραμίδας που ακοπόπτεται.

(Μονάδες 10)

ΖΗΤΗΜΑ 5°

(α)Να βρείτε τις παραγώγους των

(i) $y=\frac{x^3}{x+1}$ (ii) $y=x.ημ^3x$

(Μονάδες 7)

(β)Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου, που ορίζεται από την καμπύλη $y=-2x^2+8x-6$ και τον άξονα Ox.

(Μονάδες 8)

(γ)Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{δ}{2}}(çi\ x+συνx)^2dx$.

(Μονάδες 10)

ΖΗΤΗΜΑ 6°

(α)Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

(i) $\int ημ^2xdx$

(ii) $\int ημ3x\cdot ημxdx$

(Μονάδες 7)

(β) Δίνεται η συνάρτηση $y=αx^2-x^3$.
Η καμπύλη που παριστά περνά από το σημείο Τ(-1,4)

(i) Να βρείτε την τιμή του α.

(ii) Να βρείτε τα ακρότατα της καμπύλης και να τα χαρακτηρίσετε και

(iii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου, που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα Ox.

(Μονάδες 8)

(γ) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y=(x-1)(x-5)$.

(i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του ελάχιστου της καμπύλης και

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α(4,-3)

(iii)Αν η εφαπτομένη συναντά τους άξονες στα σημεία Β και Γ, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΟΒΓ, όπου η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 10)

Λύσεις

ΖΗΤΗΜΑ 1°

(α)

$$ημ2x=\frac{1}{2}=ημ30^o \Rightarrow$$

$$(i)\,2x=360^oK+30^o \Rightarrow x=180^oK+15^o$$

$$\Rightarrow x=15^o,\ x=195^o$$

$$0\le x\le 360^o\ (ii)\,2x=360^oK+180^o-30^o$$

$$\Rightarrow x=75^o,\ x=255^o$$

(β)

$$B=2ημ15^o.συν15^o+\frac{εφ\ 40^o+εφ\ 5^o}{1-εφ\ 40^o.εφ\ 5^o}=$$

$$ημ(2.15^o)+εφ(40^o+5^o)=ημ30^o+εφ45^o$$

$$B=\frac{1}{2}+1 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$$

(γ)$\sigma\upsilon\nu 3x.\sigma\upsilon\nu 30°+\frac{1}{2}=\eta\mu 30°.\eta\mu 3x \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 3x.\sigma\upsilon\nu 30°-\eta\mu 30°.\eta\mu 3x=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu(3x+30°)=-\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu 120° \Rightarrow$

$3x+30°=360°K\pm 120°$

$\Rightarrow x=120°K-10\pm 40° \quad K=0, \pm1, \pm2, \ldots$

ZHTHMA 2°

(α)

$$A'M=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)(\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta)}$$

$$A'M=\frac{2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta}=\frac{2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\, 2\theta}=$$

$$2\tau\epsilon\mu 2\theta\cdot\eta\mu\theta = B'M$$

(β)

$$B=\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}=$$

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta+1-\sigma\upsilon\nu\theta}{(1-\sigma\upsilon\nu\theta)(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}=$$

$$\frac{2}{1-\sigma\upsilon\nu^2\theta} \Rightarrow B=\frac{2}{\eta\mu^2\theta}$$

$$\frac{2}{\eta\mu^2\theta}=4 \Rightarrow \eta\mu^2\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\eta\mu\, 45°$$

$(i)\ \eta\mu\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=45°,\ \theta=135°$

$(ii)\ \eta\mu\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta=225°,\ \theta=315°$

(γ)

$$\frac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu(A+B)}=\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{\eta\mu A\cdot\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A\cdot\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu B\cdot\sigma\upsilon\nu A}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B-3\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A=$$

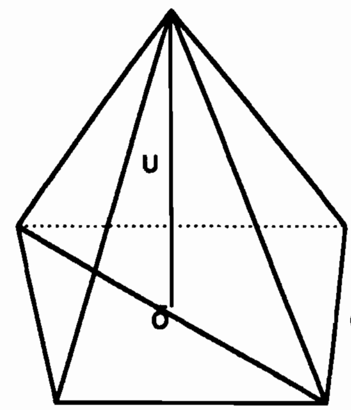
$$2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B+2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A$$

$$\Rightarrow \eta\mu A\sigma\upsilon\nu B=5\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A$$

$$\Rightarrow \frac{\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A}=5 \Rightarrow \epsilon\phi A\cdot\sigma\phi B=5$$

ZHTHMA 3°

(α)

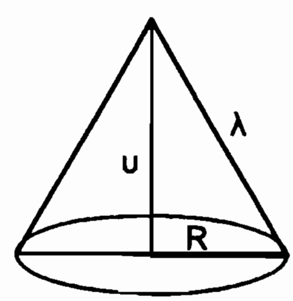


$$\left.\begin{array}{l}\delta=6\sqrt{2}\,cm\\ \delta=\sqrt{\alpha^2+\alpha^2}=\alpha\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}\alpha=6\,cm\\ \upsilon=\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\upsilon=6\,cm$

$$V=\frac{1}{2}\cdot\alpha^2\cdot\upsilon=\frac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 6 \Rightarrow V=72\ cm^3$$

(β)



$E_\kappa=65\pi cm^2 \Rightarrow \pi R\lambda=65\pi \Rightarrow R\lambda=65cm^2$

$E_{o\lambda}=E_\beta+E_\kappa=90\pi cm^2 \Rightarrow E_\beta=90\pi-65\pi$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\pi R^2=25\pi \Rightarrow R=5\ cm\\ 5\lambda=65 \Rightarrow \lambda=13\ cm\\ \upsilon^2+R^2=\lambda^2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

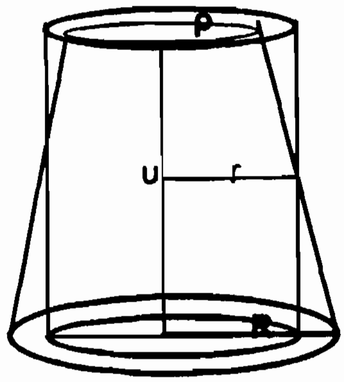
$\upsilon^2=13^2-5^2=144$

$\Rightarrow \upsilon=12\,cm$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot\upsilon=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 5^2\cdot 12 \Rightarrow$$

$V=100\pi\, cm^3$

(γ)



$r=(R+\rho)/2$

$\delta=V_{\kappa o\lambda.\kappa\omega\nu.}-V_{\kappa\upsilon\lambda.}=$

$\frac{1}{3}\pi\cdot\upsilon\left(R^2+R\cdot\rho+\rho^2\right)-\pi\cdot r^2\cdot\upsilon$

$=\frac{1}{3}\pi\cdot\upsilon\left(R^2+R\rho+\rho^2\right)-\pi\left(\frac{R+\rho}{2}\right)^2\cdot\upsilon$

$=\frac{1}{12}\cdot\pi\cdot\upsilon\left(4R^2+4R\rho+4\rho^2-3R^2-\right.$

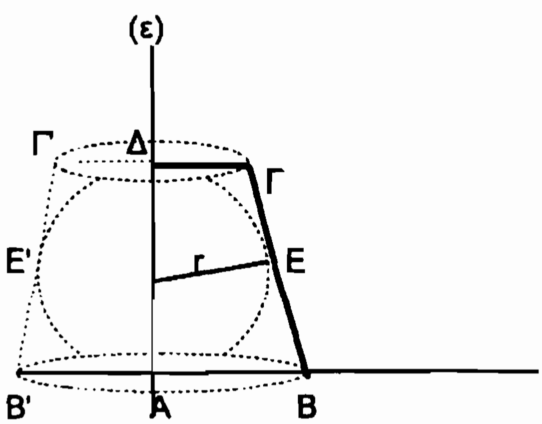
$\left.3\cdot 2R\rho-3\rho^2\right)$

$=\frac{1}{12}\pi\cdot\upsilon\left(R^2-2R\rho+\rho^2\right)$

$\delta=\frac{\pi\cdot\upsilon}{12}\cdot(R-\rho)^2$

<u>**ΖΗΤΗΜΑ 4°**</u>

(α)



$B\Gamma=\lambda=10$ cm $\quad \lambda^2=(R-\rho)^2+\upsilon^2$

$\Delta\Gamma=\rho=2$ cm $\quad 10^2=(8-2)^2+\upsilon^2$

$AB=R=8$ cm $\quad \upsilon^2=100-36=64 \Rightarrow \upsilon=8$ cm

$A\Delta=\upsilon \quad r=\frac{\upsilon}{2} \Rightarrow r=4$ cm

$V=V_{\kappa\omega\lambda.\kappa\omega\nu.}-V_{\sigma\varphi.}=$

$\frac{1}{3}.\pi.\upsilon.(R^2+R.\rho+\rho^2)-\frac{4}{3}\pi r^2$

$V=\frac{\pi}{3}.8(64+16+4)-\frac{4}{3}\pi.64$

$V=224\pi-\frac{256}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad V=\frac{416}{3}\pi$ cm^3

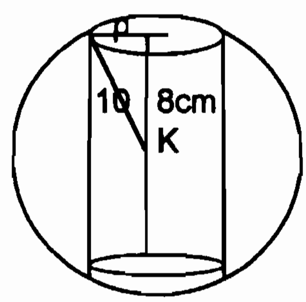
$E=E_{\Delta\Gamma}+E_{\Gamma B}+E_{AB}+E_{\sigma\varphi}=$

$\pi\rho^2+\pi(R+\rho)\lambda+\pi R^2+4\pi R^2$

$E=\pi.4+\pi.10.10+\pi.64+4.\pi.16$

$\Rightarrow E=332\pi$ cm^2

(β)



$$\left.\begin{aligned} V&=\frac{4000}{3}\pi\ cm^3\\ V&=\frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4000}{3}\Rightarrow$$

$R^3=1000 \Rightarrow R=10\,cm$

$E=4\pi R^2=4\pi\cdot 10^2 \Rightarrow E=400\pi\ cm^2$

$R^2=\left(\frac{\upsilon}{2}\right)^2+\rho^2 \Rightarrow \rho^2=10^2-8^2=36$

$\Rightarrow \rho=6\,cm$

$V=\pi\cdot\rho^2\cdot\upsilon=\pi\cdot 36\cdot 16 \Rightarrow V=576\pi\ cm^3$

(γ)(i)

$$\left.\begin{array}{l} KH = 8\,cm \\ (O\hat{K}H) = 30^\circ \\ OHK\ ορθογωνιο \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{OH} = \frac{1}{2}\mathrm{KH} \Rightarrow \\ \mathrm{OH} = 4\,cm \\ \mathrm{B\Gamma} = 2\mathrm{OH} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\mathrm{B\Gamma} = 8\ cm$

$$\upsilon = (\mathrm{KO}) = \sqrt{(\mathrm{KO})^2 - (\mathrm{OH})^2} = \sqrt{64-16}$$

$$= \sqrt{48} \Rightarrow \upsilon = 4\sqrt{3}\,cm$$

πλευρά τομής = $\frac{1}{2}$. πλευρά βάσης $\Rightarrow$

π.τ.= $\frac{1}{2}$ΒΓ $\Rightarrow$ π.τ.=4 cm

$$= \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(B + \sqrt{B \cdot \beta} + \beta\right) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot \left(8^2 + \sqrt{8^2 \cdot 4^2} + 4^2\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 112 \Rightarrow V = \frac{112}{\sqrt{3}}\,cm^3$$

ΖΗΤΗΜΑ 5^{o}

(α)(i)

$$y = \frac{x^3}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3x^2 \cdot (x+1) - x^3 \cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{3x^3 + 3x^2 - x^3}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$$

(ii) $y = x\eta\mu^3 x \Rightarrow y' = 1.\eta\mu^3 x + x.3\eta\mu^2 x.\sigma\upsilon\nu x$

$\Rightarrow y' = \eta\mu^2 x(\eta\mu x + 3x\sigma\upsilon\nu x)$

(β) $y = -2x^2 + 8x - 6 = -2(x-3)(x-1)$

$\Rightarrow$ *ρίζες:* $x=1$, $x=3$

$$E = \int_1^3 y dx = \int_1^3 \left(-2x^2 + 8x - 6\right) dx =$$

$$\left. -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right|_1^3$$

$$E = \left(-\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) -$$

$$\left(-\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1\right) =$$

$$(-18 + 36 - 18) - \left(-\frac{2}{3} - 2\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{8}{3}\tau.\mu.$$

(γ)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x\right) dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) dx =$$

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} dx + 2\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \eta\mu x d\eta\mu x$$

$$I = x + \eta\mu^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) - (0 - 0)$$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = \frac{\pi}{2} + 1$$

ΖΗΤΗΜΑ 6^{o}

(α)

$$I_{(i)} = \int \eta\mu^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 - \sigma\upsilon\nu 2x) dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{\eta\mu\ 2x}{2}\right) + K \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}_{(i)} = \frac{x}{2} - \frac{\eta\mu\ 2x}{4} + 1$$

$$I_{(ii)} = \int \eta\mu\ 3x \cdot \eta\mu\ x dx =$$

$$\frac{1}{2}\int (\sigma\upsilon\nu\ 2x - \sigma\upsilon\nu\ 4x) dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\eta\mu\ 2x}{2} - \frac{\eta\mu\ 4x}{4}\right) + c$$

$$I_{(ii)} = \frac{\eta\mu\ 2x}{4} - \frac{\eta\mu\ 4x}{8} + c$$

(β)

$$\left.\begin{array}{l} y=\alpha x^2-x^3 \\ T(-1,4) \end{array}\right\} \Rightarrow 4=\alpha(-1)^2-(-1)^3 \Rightarrow \alpha=3$$

$$\Rightarrow y=3x^2-x^3 \Rightarrow \text{ριζες:x=0}$$

$$\text{x=3}$$

$$\Rightarrow y'=6x-3x^2=3x(2-x) \Rightarrow$$

$$\text{ριζες :} x=0, \text{ x=2}$$

$$E=\int_0^3 y dx=\int_0^3 (3x^2-x^3)dx=\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)_0^3$$

$$E=\left(27-\frac{8}{4}\right)-(0-0) \Rightarrow \text{E}=\frac{27}{4} \text{ τ.μ.}$$

(γ)(i)

y=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5

y'=2x-6=2(x-3) $\Rightarrow$ ρίζα: x=3

y''=2>0 $\Rightarrow$ τοπικό ελάχιστο:

y(3)=(3)(3-5) $\Rightarrow$ min(3,-4)

(ii)

A(4,-3)

$$\left.\begin{array}{l} y'(4)=2.(4-3) \Rightarrow \lambda_{\varphi}=2 \\ (\varphi)\, y-y_A=\lambda\,(x-x_A) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y+3=2(x-4) \Rightarrow (\varphi)\, y=2x-1$$

(iii)

$$\left.\begin{array}{l} y=2x-11 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{B}(0,-11) \\ \Gamma\left(\frac{11}{2},0\right) \end{array}$$

$$E=\frac{1}{2}|\mathrm{OB}|\cdot|\mathrm{O\Gamma}|=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot\frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow E=\frac{121}{4} \,\tau.\mu.$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ & ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄

Επιμέλεια: Μαρία Φαλά

Να απαντήσετε και στα 20 θέματα.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. α) Πόσες λέξεις με τέσσερα γράμματα μπορείτε να κάμετε με τα γράμματα της λέξης ΖΗΔΡΟΣ, χωρίς επανάληψη γραμμάτων;
β) Πόσες από τις πιο πάνω λέξεις δεν έχουν το γράμμα Ρ;
γ) Αν πάρουμε στην τύχη μια από τις λέξεις της ερώτησης α), ποια είναι η πιθανότητα η λέξη αυτή να αρχίζει από Η και να τελειώνει σε Σ;

2. Να δείξετε ότι $\int_{-\ln 2}^{0} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \frac{\pi}{3}$

3. Αν ο πέμπτος όρος του αναπτύγματος $\left(1+\frac{\alpha}{\beta x}\right)^8$ είναι ο $\frac{35x^{-4}}{8}$, να βρείτε τις τιμές των α και β , δεδομένου ότι α+β=3 και α, β θετικοί αριθμοί.

4. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό y=u . x, όπου u συνάρτηση του x ή με άλλο τρόπο, να βρείτε την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2y}{x}$$
για την οποία όταν x=2 είναι y=-2.

5. α) Αν Α, Β δύο τετραγωνικοί νxν πίνακες, να δείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα
$(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$
β) Αν όμως $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ να δείξετε ότι γι' αυτούς τους πίνακες ισχύει $(A+B)^2=A^2+B^2$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

6. α) Να δείξετε ότι
$$\text{συν}\left(\text{τοξημ}\frac{2x}{x^2+2}\right) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad x>1$$
β) Στη συνέχεια να υπολογίσετε το
$$\int \text{συν}\left(\text{τοξημ}\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

7. Να δείξετε ότι:
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(k+1)!}{(k+2)!} - \frac{(k+2)!}{(k+3)!}\right] = \frac{1}{3}$$

8. Αν γνωρίζετε ότι το κατά Maclaurin ανάπτυγμα της συνάρτησης f(x) = τοξεφx είναι
$$\text{τοξεφ}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots + (-1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1} + \ldots,$$
να δείξετε ότι $\pi = 4\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{2\nu-1}$
όπου π=3,14159...

9. Μια παραβολή έχει εστία Ε(2,0) και διευθετούσα x=-2
α) Να δείξετε ότι η παραβολή αυτή έχει εξίσωση $y^2=8x$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο Β(2,4) αυτής.
β) Αν το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή, τον άξονα Οx και την πιο πάνω εφαπτομένη, στραφεί ολόκληρη στροφή γύρω από τον Οx, να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

10. Δίδονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 και το επίπεδο Π
$\varepsilon_1 : \vec{r} = 2\vec{i} + 7\vec{k} + \mu(3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$
$\varepsilon_2 : \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-3}$
Π : 10x-11y+2z=48
α) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2

β) Να δείξετε ότι η ε_2 είναι παράλληλη του Π, και να βρείτε την απόστασή της από αυτό.

11. Δίδεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x=t^2$, $y=t^3$. Να βρείτε το μήκος του τόξου της καμπύλης στο διάστημα $0 \le t \le 1$.

12. Δίδονται οι συναρτήσεις $y_1 = f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$ και $y_2 = \dfrac{1}{f(x)}$

α) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις y_1, y_2 στους ίδιους άξονες συντεταγμένων.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β στα οποία τέμνονται οι καμπύλες y_1, y_2 και

γ)Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την y_2 και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

13. α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(2,0,3), Β(2,2,1), Γ(5,3,2) και Δ(5,1,4) είναι παραλληλόγραμμο και να βρείτε το εμβαδό του.

β)Τα διανύσματα

$\vec{AB}$, $\vec{A\Delta}$, *και* $\vec{AE}$ όπου Ε(5, -5, 4) είναι οι τρεις ακμές παραλληλεπιπέδου. Να βρείτε τον όγκο του.

14. α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t), ώστε $\int f(t)dt = -\ln(1-t)+c$

β) Στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

15. Δίδεται η υπερβολή xy=4 και τα σημεία της $A\left(2t, \dfrac{2}{t}\right)$ *και* $B\left(2\rho, \dfrac{2}{\rho}\right)$

α) Αν η χορδή ΑΒ περνά από το σημείο Γ(1,2), να δείξετε ότι ισχύει η σχέση 2(t+ρ)=1+2tρ.

β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκονται τα μέσα των χορδών ΑΒ, που περνούν από το Γ.

16. Δίδεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις x=ημt και $y=\text{συν}t+\ln\left(\varepsilon\phi\dfrac{t}{2}\right)$

Να βρείτε το εμβαδόν, Α, της επιφάνειας του στερεού που παράγεται όταν το τμήμα της πιο πάνω καμπύλης, από $t=\dfrac{\pi}{3}$ μέχρι $t=\dfrac{\pi}{2}$, να στραφεί ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα των y . (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο

$$A=2\pi \int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \text{).}$$

17. Δίδονται οι καμπύλες ρ_1=4συνθ και ρ_2=4ημθ. Αφού βρείτε τα σημεία τομής των να κάμετε τις γραφικές τους παραστάσεις και να βρείτε το εμβαδό του κοινού μέρους των.

18. α) Να δείξετε ότι, αν y=artanhx τότε ισχύει $y=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

β) Να κάμετε τη γραφική παράσταση της καμπύλης y, δίνοντας το πεδίο ορισμού της, τυχόν ακρότατα, μονοτονία, σημεία καμπής και κοίλα-κυρτά.

19. Ο πίνακας $M=\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\beta} \end{pmatrix}$, β>1, ορίζει ένα μετασχηματισμό φ.

α)Με το μετασχηματισμό φ να μετασχηματίσετε την υπερβολή xy=1 και τις ευθείες x=1, x=β και y=0.

β) Το χωρίο που πρικλείεται από την καμπύλη xy=1, x=1, x=β και y=0, σε ποιο χωρίο μετασχηματίστηκε με το μετασχητισμό φ;

γ) Να δείξετε ότι τα δύο αυτά χωρία έχουν το ίδιο εμβαδό.

20. Δύο νομίσματα είναι το μεν ένα χρυσό το δε άλλο ασημένιο. Το πρώτο νόμισμα είναι κανονικό. Το δεύτερο έχει ατέλειες και έτσι η πιθανότηta του να φέρει ΓΡΑΜΜΑΤΑ είναι τα $\dfrac{4}{3}$ της πιθανότητας να φέρει ΚΟΡΩΝΑ.

α) Αν ρίξουμε το ασημένιο στον αέρα, να δείξετε ότι η πιθανότητα να φέρει ΚΟΡΩΝΑ είναι $\frac{3}{7}$.

β) Αν στην τύχη πάρουμε ένα από τα δύο νομίσματα και το ρίξουμε στον αέρα, ποια η πιθανότητα να φέρει ΓΡΑΜΜΑΤΑ;

γ) Δεδομένου ότι το νόμισμα που ρίξαμε έφερε ΓΡΑΜΜΑΤΑ, ποια η πιθανότητα να ήταν το ασημένιο.

Λύσεις

1. (α) ΖΗΔΡΟΣ $\Rightarrow$

$$\alpha = \binom{6}{4} \cdot 4! = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 24 \Rightarrow \alpha = 360$$

(β) ΖΗΔΟΣ $\Rightarrow$

$$\beta = \binom{5}{4} \cdot 4! = 5 \cdot 24 \Rightarrow \beta = 120$$

(γ) Η-ΖΔΡΟ-Σ $\Rightarrow$

$$\gamma = \binom{4}{2} \cdot 2! = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \Rightarrow \gamma = 12$$

$$\text{P} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{12}{360} \Rightarrow \text{P} = \frac{1}{30}$$

2.

$$\text{I} = \int_{-\ln 2}^{0} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int_{-\ln 2}^{0} \frac{de^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} =$$

$$\text{τοξημ}e^x \Big|_{-\ln 2}^{0} \text{τοξημ}e^{0} - \text{τοξημ}\, e^{\ln\frac{1}{2}}$$

$$\text{I} = \text{τοξημ}1 - \text{τοξημ}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{I} = \frac{\pi}{3}$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί και με την αντικατάσταση $u \equiv e^x$.

3.

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta\chi}\right)^8 = \sum_{\kappa=1}^{8} \binom{8}{K}\left(\frac{\alpha}{\beta x}\right)^K \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} {}_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4}\left(\dfrac{\alpha}{\beta\chi}\right)^4 \\ {}_5 = \dfrac{35}{8}\chi^{-4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 \cdot \chi^{-4} = \frac{35}{8}\chi^{-4} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha}{\beta} = \pm\dfrac{1}{2} \\ \alpha, \beta > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha = \beta \\ \alpha + \beta = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{array}$$

4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2y}{x} = 3 + \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} \cdot y = 3$$

$$\Rightarrow I(x) = e^{\int \frac{-2}{x} dx}$$

$$I(x) = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^3} \cdot y = \frac{3}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot y = \int \frac{3}{x^2} \cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} \cdot y = -\dfrac{3}{x} + K \\ x = 2, y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot (-2) = -\frac{3}{2} + K \Rightarrow$$

$$K = 1 \Rightarrow y = x(x-3)$$

5. (α) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) =$
$A^2 + AB + B^2 =$
$A^2 + AB + BA + B^2$

(β)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A.B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} \\ B.A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A \cdot B + B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A+B)^2 = A^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + B^2 \Rightarrow$$

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2$$

6. (α)

$$\sigma\upsilon\nu\left(\tau o\xi\eta\mu\frac{2x}{x^2+1}\right)=\frac{x^2-1}{x^2+1}\ \Big\rangle 0,\ x\rangle 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\left(\tau o\xi\eta\mu\frac{2x}{x^2+1}\right)+\eta\mu^2\left(\tau o\xi\eta\mu\frac{2x}{x^2+1}\right)=1$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\left(\tau o\xi\eta\mu\frac{2x}{x^2+1}\right)=1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\tau o\xi\eta\mu\frac{2x}{x^2+1}\right)=\sqrt{\frac{\left(x^2+1\right)^2-(2x)^2}{\left(x^2+1\right)^2}}=$$

$$\frac{\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

(β)

$$I=\int\sigma\upsilon\nu\left(\tau o\xi\eta\mu\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx=$$

$$\int\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)dx\ \Rightarrow I=x-2\tau o\xi\varepsilon\varphi x+K$$

7.

$$S=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[\frac{(\kappa+1)!}{(\kappa+2)!}-\frac{(\kappa+2)!}{(\kappa+3)!}\right]=$$

$$=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa+2}-\frac{1}{\kappa+3}$$

$$S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa+2}-\frac{1}{\kappa+3}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{5}\\ \vdots\\ \frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}\\ \frac{1}{\nu+2}-\frac{1}{\nu+3}\end{array}\right]+$$

$$S_\nu=\frac{1}{3}-\frac{1}{\nu+3}$$

$$S=\lim_{\nu\to\infty}S_\nu$$

$$S=\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\nu+3}\right)$$

$$S=\frac{1}{3}-0\Rightarrow S=\frac{1}{3}$$

8.

$$f(x)=\tau o\xi\varepsilon\varphi x=$$

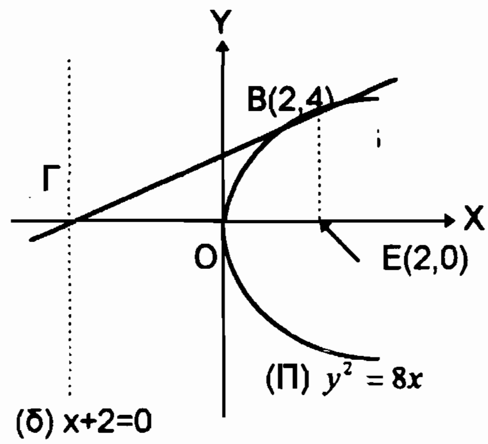
$$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\dots+(-1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}\cdots$$

$$f(1)=\tau o\xi\varepsilon\varphi 1=$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots+\frac{(-1)^{\nu+1}}{2\nu-1}+\dots=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{2\nu-1}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\pi}{4}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{2\nu-1}\ \Rightarrow\pi=4\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{2\nu-1}$$

9.



(α)

$$\left.\begin{array}{r}E(2,0)\\ (\delta)x+2=0\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{c}(\pi)y^2=4\alpha x\\ \alpha=2\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$(\pi)y^2=8x\Rightarrow 2y\cdot\frac{dy}{dx}=8\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{4}{y}$$

$$\lambda_\Phi=\frac{4}{y_B}=\frac{4}{4}=1$$

$$(\Phi)\ y-y_B=\lambda_\Phi(x-x_B)\Rightarrow y-4=1\cdot(x-2)$$

$$(\Phi)\ y=x+2\ \Rightarrow\Gamma(-2,0)$$

(β)

$$V=V_{\Gamma EB}-V_{OEB}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(EB)^2\cdot(\Gamma E)-\pi\int_0^2 y^2dx=$$

$$\frac{\pi}{3}\cdot 4^2\cdot 4-\pi\int_0^2 8x\,dx$$

$$V=\frac{64}{3}\pi-\pi\cdot 4x^2\Big|_0^2=\frac{64}{3}\pi-\pi\cdot 4(2^2-0^2)$$

$$=\frac{64}{3}\pi-16\pi$$

$$V=\frac{16}{3}\pi \quad \kappa.\mu.$$

10.

$$\varepsilon_1: \vec{r}=2\vec{i}+7\vec{k}+\mu(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}) \Rightarrow$$

$$x=2+3\mu,\ y=\mu,\ z=7+2\mu$$

$$\varepsilon_2: \frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{-3}=\lambda \Rightarrow$$

$$x=5\lambda+1,\ y=4\lambda+2,\ z=-3\lambda$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2+3\mu,\ y=\mu,\ z=7+2\mu \\ x=5\lambda+1,\ y=4\lambda+2,\ z=-3\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow$$

(α)

$$\left.\begin{array}{l} 2+3\mu=5\lambda+1 \\ \mu=4\lambda+2 \\ 7+2\mu=-3\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow \lambda=-1,\ \mu=-2 \Rightarrow \Sigma.T.(-4,-2,3)$$

(β)

$$\left.\begin{array}{l} \Pi: 10x-11y+2z=48 \Rightarrow \vec{n}=10\vec{i}-11\vec{j}+2\vec{k} \\ \varepsilon_2: \frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{-3} \Rightarrow \vec{\varepsilon}_2=5\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\vec{n}\cdot\vec{\varepsilon}_2=(10\vec{i}-11\vec{j}+2\vec{k})(5\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k})=$$

$$10\cdot5-11\cdot4+2\cdot(-3)$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{n}\cdot\varepsilon_2=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{\varepsilon}_2 \\ \vec{n}\perp\Pi \end{array}\right\}\Rightarrow \varepsilon_2 // \Pi$$

$$\left.\begin{array}{l} d=\dfrac{|Ax+By+\Gamma z+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \\ (-4,-2,3)\in\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$d=\frac{|10\cdot(-4)-11\cdot(-2)+2\cdot3-4\cdot8|}{\sqrt{10^2+11^2+2^2}}=$$

$$\frac{|-60|}{\sqrt{225}} \Rightarrow d=4$$

11. $x=t^2$, $y=t^3$, $0\le t\le 1$

$$S=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(3t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t\cdot\sqrt{4+9t^2}\,\mathrm{d}t$$

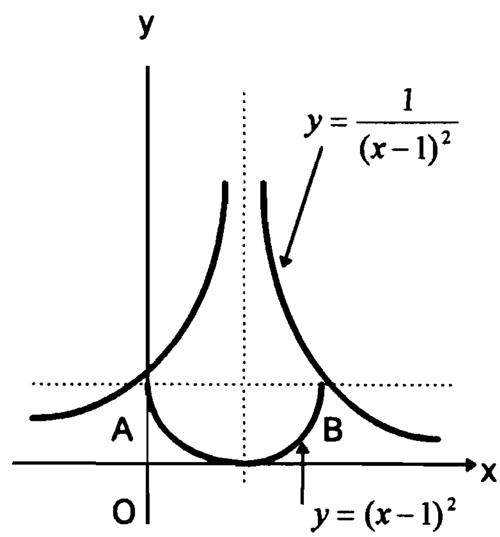
$$S=\frac{1}{18}\int_0^1\left(4+9t^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(4+9t^2\right)=$$

$$\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\left(4+9t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$S=\frac{1}{27}\cdot\left(13^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right) \Rightarrow$$

$$S=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

12.



$$\left.\begin{array}{l} y_2=(x-1)^2 \\ \\ y_1=\dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (x-1)=\dfrac{1}{(x-1)^2}\Rightarrow(x-1)^4= \\ x-1=\pm1 \Rightarrow x=1\pm1 \\ A(0,1) \qquad B(2,1) \end{array}$$

$y_2((1)=0) \Rightarrow min(1,0)$

$\left(y_2=(x-1)^2 \text{ Θεμελιωδηό παραβολη}\right)$

$y_1=\dfrac{1}{y_2} \Rightarrow x=1$ K.A.

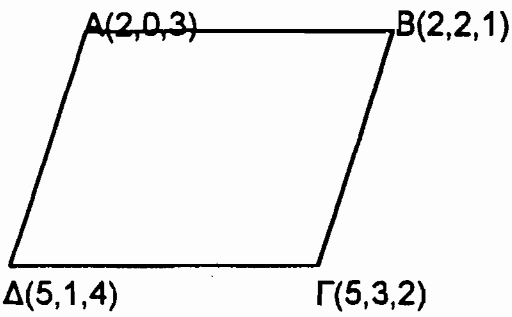
$y=0$ O.A.

$$E=\int_0^2 (y_{AB}-y_2)dx=\int_0^2\left[1-(x-1)^2\right]dx=$$

$$\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$$

$$E=x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\left(4-\frac{8}{3}\right)-(0-0)\Rightarrow E=\frac{4}{3}\ \tau.\mu.$$

13.



$$\left.\begin{aligned}\vec{A\Delta}&=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\\ \vec{A\Gamma}&=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{A\Delta}=\vec{B\Gamma}$$

$\Rightarrow \mathrm{AB\Gamma\Delta}$ #

$\vec{\Delta\Gamma}=2\vec{j}-2\vec{k}$

$$E=\left|\vec{A\Delta}\times\vec{\Gamma\Delta}\right|=\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&1\\0&-2&2\end{vmatrix}\right|$$

$$\left|4\vec{j}-6\vec{j}-6\vec{k}\right|=\sqrt{4^2+(-6)^2+(-6)^2}$$

$E=\sqrt{88}\ \tau.\mu.$

$E(5,-5,4)\Rightarrow \vec{AE}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$

$$V=\left|\vec{AB}\times\vec{A\Delta}\cdot\vec{AE}\right|=\left|\begin{vmatrix}0&2&-2\\3&1&1\\3&-5&1\end{vmatrix}\right|=$$

$$\left|(0+6+30)-(-6+6+0)\right|$$

$V=36\ \kappa.\mu.$

14.(α)

$$\int f(t)dt=-ln(1-t)+c \Rightarrow$$

$$f(t)=\left[-\ln(1+t)+c\right]' \Rightarrow f(t)=\frac{1}{1-t}$$

(β)

$$I=\int_0^x f(t)dt=-\ln(1-t)\Big|_0^x=$$

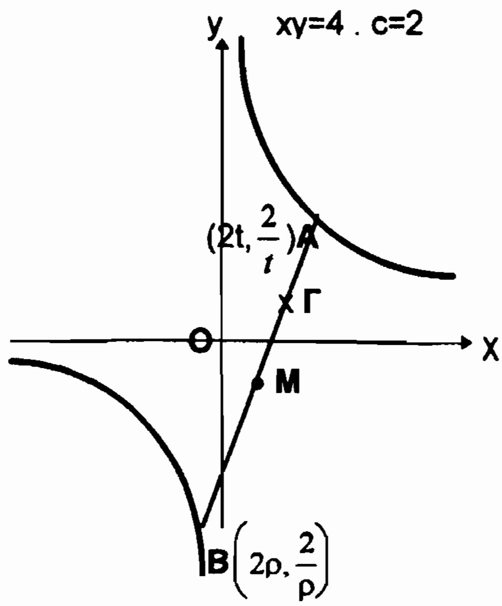
$$-\ln(1-x)+\ln 1=-\ln(1-x)+0$$

$$I=-\left[(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}(-x)^k+\dots\right]$$

$$I=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^k}{k}+\dots\Rightarrow$$

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$$

15.



$$\text{Εξισωση χορδη } \delta(AB): \left.\begin{matrix} x+tpy=c(t+p) \\ \Gamma(1,2)\in(AB)\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB) 1+tp.2=2(t+p)$$

$$\Rightarrow (AB) 2(t+p)=1+2tp$$

$$\left.\begin{matrix} x_M=\frac{1}{2}(2t+2p)=t+p \\ y_M=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{t}+\frac{2}{p}\right)=\frac{t+p}{tp}\end{matrix}\right\}\Rightarrow M\left(t+p,\ \frac{t+p}{tp}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} x=t+p \\ y=\frac{t+p}{tp} \\ 2(t+p)=1+2tp\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2x=1+2\cdot\frac{x}{y}\Rightarrow$$

$\gamma.\tau.$M. $y\dfrac{2x}{2x-1}$ $(\kappa\alpha\rho\tau.\mu o\rho\varphi\eta)$

16.

$$x=\eta\mu t\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\sigma\upsilon\nu t$$

$$y=\sigma\upsilon\nu t+ln\left(\varepsilon\phi\frac{t}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt}=-\eta\mu t+\frac{\frac{1}{2}\cdot\tau\varepsilon\mu^2\frac{t}{2}}{\varepsilon\phi\frac{t}{2}}=-\eta\mu t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\eta\mu\frac{t}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\eta\mu t+\frac{1}{\eta\mu t}=\frac{1-\eta\mu^2 t}{\eta\mu t}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 t}{\eta\mu t}$$

$$A=2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=$$

$$2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu t.\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 t+\frac{\sigma\upsilon\nu^4 t}{\eta\mu^2 t}}dt$$

$$A=2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu t.\sigma\upsilon\nu t+\sqrt{1+\sigma\phi^2 t}\ dt=$$

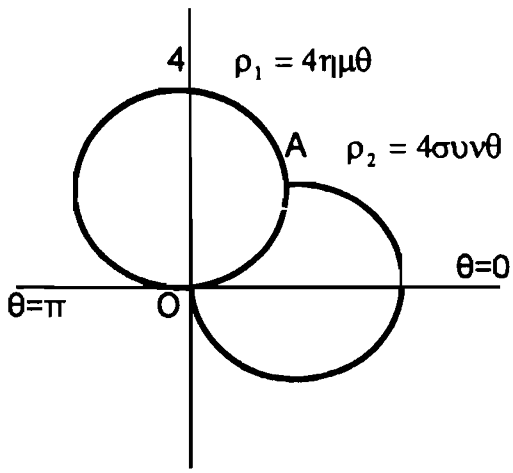
$$2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu t.\sigma\upsilon\nu t.\sigma\tau\varepsilon\mu t dt$$

$$A=2\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu t dt=2\pi.\eta\mu t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$2\pi\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}-\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow$$

$$A=\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\ \tau.\mu.$$

17.



$$\left.\begin{matrix}\rho_1=4\eta\mu\theta \\ \rho_2=4\sigma\upsilon\nu\theta\end{matrix}\right\}\Rightarrow 4\eta\mu\theta=4\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Rightarrow\varepsilon\phi\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow A\left(2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$$

κοινο σημειο των δυο καμπυλων ειναι και ο πολοδ Ï

$$E=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\eta\mu\theta)^2 d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}16\eta\mu^2\theta d\theta=$$

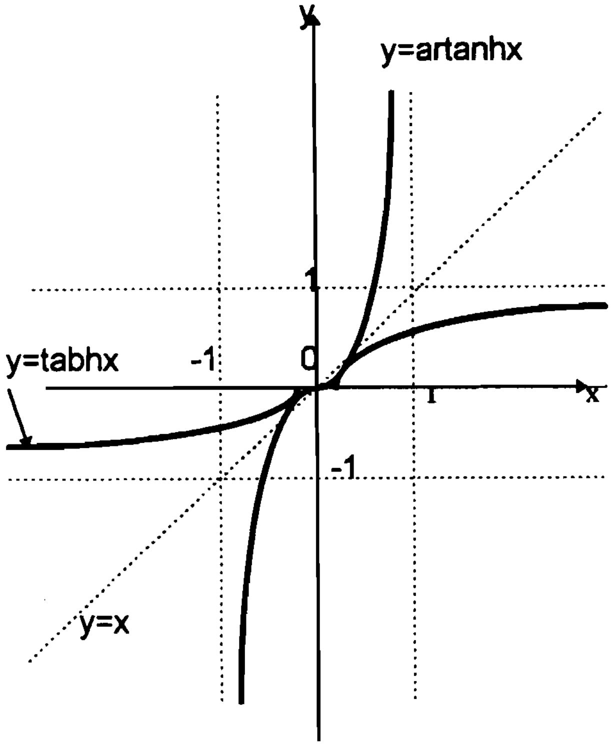
$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sigma\upsilon\nu 2\theta)d\theta$$

$$E=8\left(\theta-\frac{\eta\mu 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$8\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-(0-0)\right]\Rightarrow E=(2\pi-4)\tau.\mu.$$

Σημ.:Η κοινή χορδή των 2 ίσων κύκλων ΟΑ χωρίζει το γραμμοσκιασμένο χωρίο σε 2 ίσα κυκλικά τμήματα.

18.



$y = artanhx \Leftrightarrow x = tanhy \Rightarrow$

$$x = \frac{e^{y}-e^{-y}}{e^{y}+e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Rightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow 2y = ln\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}$$

Η γραφική παράσταση της y=artanhx έγινε με την βοήθεια της ανιστροφής της y=tanhx που είναι θεμελιώδης.

y=x άξονας συμμετρίας των δύο καμπύλων

0(0,0) σημείο καμπής

x=± Κ.Α. της y=artanhx

$x \in (-1,1)$, $y \in (-\infty,+\infty)$ αύξουσα.

στρέφει τα κοίλα και κυρτά όπως φαίνεται στο σχήμα

Σημ.: Η άσκηση μπορεί να μελετηθεί και με τις παραγώγους και με πίνακα.

19.

$$l = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{vmatrix} = 1-0 \Rightarrow$$

$$|M| = 1$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & -0 \\ -0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(α)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta}x' \\ \beta x \end{pmatrix}$$

$$(y) xy = 1 \Rightarrow \frac{1}{\beta}x' \cdot \beta \cdot y' \Rightarrow (y')\; x'y' = 1$$

$$x = 1 \;\Rightarrow \frac{1}{\beta}x' = 1 \;\Rightarrow x' = \beta$$

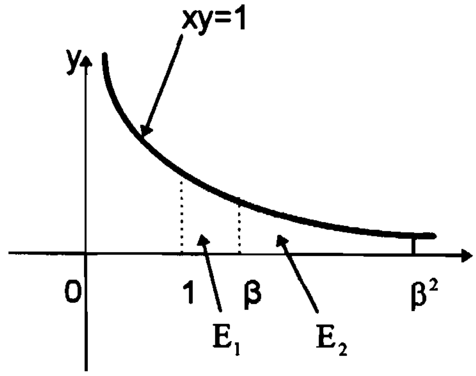
$$x = \beta \;\Rightarrow \frac{1}{\beta} \cdot x' = \beta \;\Rightarrow x' = \beta^{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow \beta y = 0 \;\Rightarrow y' = 0$$

(β)

Το χωρίο μετασχηματίστηκε στο χωρίο που περικλείεται από την (y') (παραμένει η ίδια) και τις ευθείες x' =β, x'=β, x'=β², y'=0.

(γ)



$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \int_1^{\beta} \frac{1}{x}dx = lnx \Big|_1^{\beta} = ln\beta - ln1 = ln\beta \\ E_2 = \int_{\beta}^{\beta^2} \frac{1}{x}dx = lnx \Big|_{\beta}^{\beta^2} = ln\beta^2 - ln\beta = ln\beta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$E_1 = E_2$$

20.(α)

$$\left.\begin{array}{l}P(K)+P(\Gamma)=1\\ P(\Gamma)=\dfrac{4}{3}P(K)\end{array}\right\}\Rightarrow P(K)+\frac{4}{3}P(K)=1\Rightarrow$$

$$P(K)=\frac{3}{7}$$

(β)

$$P_{\beta}=P_{x}\cdot P(\Gamma)+P_{A}\cdot P(\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right)=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{7}\ \Rightarrow P_{\beta}=\frac{15}{28}$$

(γ)

$$P_{\gamma}=P\left(A/\Gamma_{\beta}\right)=\frac{P(A\cap\Gamma)}{P\left(\Gamma_{\beta}\right)}=\frac{P_{A}\cdot P(\Gamma)}{P_{\beta}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{15}{28}}\Rightarrow P_{\gamma}=\frac{8}{15}$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ & ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄

Επιμέλεια: Μαρία Φαλά

Από τα 10 ζητήματα να απαντήσετε μόνο στα 8.
Κάθε ζήτημα βαθμολογείται με 12,5 μονάδες.

1. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ και σημείο P(ασυνθ, βημθ) πάνω σ' αυτή.
i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο P είναι βχσυνθ+αψημθ=αβ.

ii) Αν P βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και διαφέρει από τις κορυφές της έλλειψης, η εφαπτομένη της καμπύλης τέμνει τους άξονες Οx και Οψ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Το τρίγωνο ΟΜΝ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα Οx και παράγει κώνο όγκου V. Να βρείτε το ημθ έτσι ώστε το V να είναι ελάχιστο.
(Δίδεται: $V_{κώνου}=\frac{\pi}{3}R^2\cdot\upsilon$).

2. Για ένα τετραγωνικό πίνακα Α ορίζουμε A^2=A.A και $A^3=A^2$.A

Ας είναι $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ *και* $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\-2&-1&-2\end{pmatrix}$

i) Να δείξετε ότι: $A^3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$

ii) Αν $A^3=\lambda A+\mu I$ όπου λ, $\mu \in R$ να υπολογιστούν οι τιμές των λ και μ.
iii) Δείξετε ότι $\mu=|A|$, οπου $|A|$ η τιμή της ορίζουσας του Α.
iv) Χρησιμοποιώντας τις τιμές των λ και μ που βρέθηκαν στο (ii) και τη σχέση $-\frac{1}{\mu}A(\lambda I-A^2)=I$ να υπολογίσετε τον πίνακα A^{-1}.

3. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και δύο σημεία $A(t^2, 2t)$, $B(p^2, 2p)$ πάνω σ' αυτή έτσι ώστε η γωνία ΑΟΒ να είναι ορθή (Ο είναι η αρχή των αξόνων). Ας είναι Μ το ίχνος της καθέτου από το Ο πάνω στην ΑΒ και Γ σημείο τέτοιο ώστε το ΟΑΓΒ να είναι ορθογώνιο.
i) Να δείξετε ότι pt=-4.
ii) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης (κ_1) πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ, καθώς το Α διαγράφει την παροβολή $y^2=4x$.
iii) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης (κ_2) πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Γ, καθώς το Α διαγράφει την παραβολή $y^2=4x$.
iv) Να εξετάσετε αν οι καμπύλες (κ_1) και (κ_2) τέμνονται, και αν ναι, να βρείτε τα σημεία τομής τους.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}(x^2+3x+1)$
i) Να βρείτε:
α) αν έχει οριζόντια ή οριζόντιες ασύμπτωτες και ποιες είναι.
β) το διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι αύξουσα.
γ) τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα της.
ii) Να κάμετε τη γραφική της παράσταση.
iii) Αν g(x)=f(x)+α, όπου $\alpha \in R$, να βρείτε το πεδίο των τιμών του α για το οποίο η καμπύλη που αντιστοιχεί στην y=g(x) δεν τέμνει τον άξονα Οx.

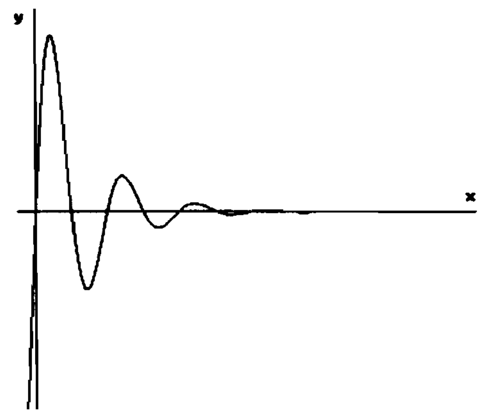
5. i) Να βρείτε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ κατά τις ανιούσες δυνάμεις του x μέχρι και τον όρο x^8.
ii) Χρησιμοποιώντας αυτό το ανάπτυγμα να βρείτε μια προσέγγιση του $\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx$
iii) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $1+x^4 = x^4 t^2$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε (με ακρίβεια) το ολοκλήρωμα

$$\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

6. Δίνεται η συνάρτηση y=ημx, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$. Να σχεδιάσετε την καμπύλη (κ) που αντιστοιχεί σ' αυτή.
Ας είναι (α): το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη (κ) και τις ευθείες
$y=\dfrac{1}{2}$, $\kappa\alpha\iota$ $x=\dfrac{\pi}{2}$.
(β) το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη (κ) και τις ευθείες
$x=\dfrac{\pi}{3}$ $\kappa\alpha\iota$ $y=0$.
(γ) το κοινό μέρος των α και β.

i) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2 και E_3 και των χωρίων α, β και γ αντίστοιχα.
ii) Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου οι πιθανότητες είναι $P(A)=E_1$, $P(B)=E_2$ και $P(A\cap B)=E_3$.
iii) Να ελέγξετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.
Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A')$, $P(A/B)$ και $P(A\cap B')$.
iv) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά χρησιμοποιώντας εμβαδά τις πιθανότητες $P(A\cup B)$ και $P(A')$.

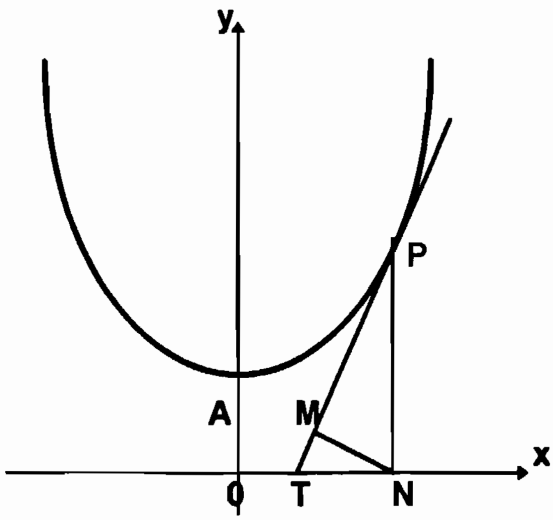
7. i) Να βρείτε το: $I(x)=\int e^{-2x}\eta\mu x dx$.
ii) Δίνεται η γραφική παράσταση της $y=e^{-2x}\eta\mu x$, $x \ge 0$



Θεωρούμε τα εμβαδά E_0 , E_1 , E_2 ... των χωρίων α_0 , α_1 , α_2 ... όπου α_κ χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα Ox, $\kappa\pi \le x \le (\kappa+1)\pi$, κ=0, 1, 2, ... Να βρείτε το εμβαδό E_κ
iii) Να βρείτε το $\sum_{\kappa=0}^{\infty} E_\kappa$

8. Ο άξονας ορθού κυκλικού κυλίνδρου έχει εξισώσεις 2x=y+4=z+5.
Το σημείο Α(4, -2, 0) βρίσκεται στην περιφέρεια της κάτω βάσης του κυλίνδρου και το σημείο Β(5, 6, 5) βρίσκεται στο επίπεδο της άνω βάσης του κυλίνδρου. Δείξετε ότι το Β είναι το κέντρο της άνω βάσης του κυλίνδρου.
Να βρεθεί το κέντρο της κάτω βάσης του κυλίνδρου και ο όγκος του κυλίνδρου.
Να δειχτεί ότι το σημείο Γ(7, 7, 3) βρίσκεται στην περιφέρεια της άνω βάσης του κυλίνδρου και να βρεθεί το συνημίτονο της οξείας γωνίας των ΑΓ και του άξονα του κυλίνδρου.

9. Στο σχήμα η ΤΡ εφάπτεται στο σημείο P(x, y) μιας καμπύλης που τέμνει τον άξονα των y στο Α, η PN είναι κάθετη από το P στον άξονα Ox και η NM είναι κάθετη από το Ν στη PT. Η καμπύλη έχει την ιδιότητα ότι ΟΑ=ΜΝ=c, c σταθερό, για όλες τις δυνατές θέσεις του P. (P στο πρώτο τεταρτημόριο).



Να δειχτεί ότι η κλίση της καμπύλης στο P πληρεί τη σχέση

$$c\cdot\frac{dy}{dx}=\sqrt{y^2-c^2}$$

Λύοντας τη διαφορική εξίσωση να δειχτεί ότι η καμπύλη έχει εξίσωση

$$y=c.\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

Να δειχτεί επίσης ότι για κάθε θέση του P, (με P διάφορα του A) το εμβαδό, που περικλείεται από τι ΟΑ, ΟΝ, PN και το τόξο AP της καμπύλης, είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου PMN.

10. Δίνονται η συνάρτηση

$$y=f(x)=\frac{1}{x},\ x>0\ \ \textit{και}\ \ \alpha>1$$

i) Να βρείτε τον όγκο που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα Ox του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη της y=f(x), τον άξονα Ox και τις ευθείες x=1 και x=α.

ii) Ας είναι $A_\kappa(\kappa,\ 0)$, κ=1, 2, 3, ... μια ακολουθία σημείων στον άξονα Ox , και $B_\kappa(\kappa,\ f(\kappa))$, κ=1, 2, 3, ... μια ακολουθία σημείων πάνω στην καμπύλη.
Ας είναι Γ_κ σημεία έτσι ώστε $A_\kappa A_{\kappa+1}B_{\kappa+1}\Gamma_\kappa$ ορθογώνια και Δ_κ σημεία έτσι ώστε $A_\kappa A_{\kappa+1}\Delta_{\kappa+1}B_\kappa$ ορθογώνια, κ=1, 2, 3, ... Από την πλήρη περιστροφή των ορθογωνίων $A_\kappa A_{\kappa+1}B_{\kappa+1}\Gamma_\kappa$ και $A_\kappa A_{\kappa+1}\Delta_{\kappa+1}B_\kappa$ γύρω από τον άξονα Ox παράγονται κύλινδροι με όγκους U_κ και V_κ αντίστοιχα.
Να βρείτε τους όρκους U_κ και V_κ συναρτήσει του κ.

iii) Χρησιμοποιώντας τους όγκους των πιο πάνω στερεών, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι

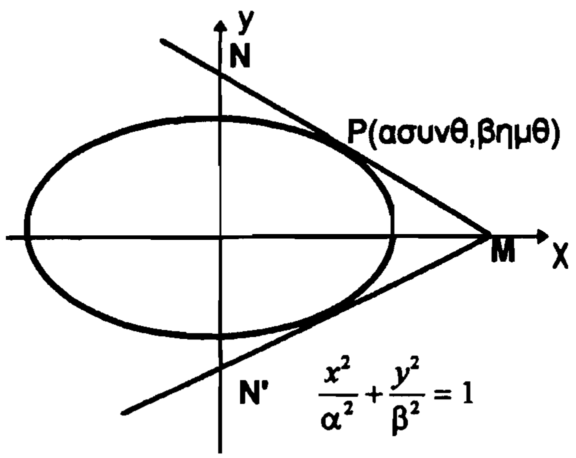
$$\sum_{\theta=2}^{i}\frac{1}{\theta^2}<1-\frac{1}{i}\ \ \textit{για καθε}\ \ i\geq 2$$

iv) Θεωρώντας γνωστό ότι η σειρά $\sum_{\theta=1}^{\infty}\frac{1}{\theta^2}$ συγκλίνει , να δείξετε ότι:

$$1<\sum_{\theta=1}^{\infty}\frac{1}{\theta^2}<2.$$

Λύσεις

1.



$$\frac{2x}{\alpha}+\frac{2y}{\beta^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x}{y}\Rightarrow$$

$$\lambda\phi=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\beta\eta\mu\theta}$$

$$\Rightarrow \lambda_\phi=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sigma\phi\theta$$

$$(\phi_P)\, y-y_P(x-x_P)\Rightarrow$$

$$y-\beta\eta\mu\theta=-\frac{\beta}{\alpha}\sigma\phi\theta(x-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)$$

$$\Rightarrow \alpha y\eta\mu\theta-\alpha\beta\eta\mu^2\theta=-\beta x\sigma\upsilon\nu\theta+\alpha\beta\sigma\upsilon\nu^2\theta$$

$$\Rightarrow (\phi)\beta\, x\sigma\upsilon\nu\theta+\alpha\, y\eta\mu\theta=\alpha\beta$$

$$x_N=0\Rightarrow y_N=\frac{\beta}{\eta\mu\theta}\Rightarrow N\left(0,\ \frac{\beta}{\eta\mu\theta}\right)$$

$$y_M=0\Rightarrow x_M=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow M\left(\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta},\ 0\right)$$

$$V_{NMN'}=\frac{1}{3}\Pi\cdot(ON)^2\cdot(Ί\ Ί\ )\Rightarrow$$

$$V_{(\theta)}=\frac{\Pi}{3}\cdot\frac{\alpha\beta^2}{\eta\mu^2\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$\gamma\iota\alpha\ V_{min}\Rightarrow U_{(\theta)}\equiv\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu\theta$ max

$$U'_{(\theta)}=2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^3\theta=$$

$$\eta\mu\theta(2\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta)$$

$U'_{(\theta)}=\eta\mu\theta(2-3\eta\mu^2\theta)$ ρίζό:

$\eta\mu\theta=0\Rightarrow\theta=0$ ç Đ ,

(απορριπτεται 0< è< $\frac{Đ}{2}$)

$$\eta\mu^2\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\eta\mu\theta=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow\eta\mu\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

2.

$$A^3=A^2\cdot A=$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\-2&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\-2&-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\-2&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&-1&-1\\1&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\-2&-1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$A^3=\lambda A+\mu I\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\\-2&-1&-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\-2&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+\mu&-\lambda&0\\\lambda&\lambda+\mu&\lambda\\-2\lambda&-\lambda&-2\lambda+\mu\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda=1,\ \ \mu=-1$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\-2&-1&-2\end{vmatrix}=(-2+2-0)-(-0+2-1)$$

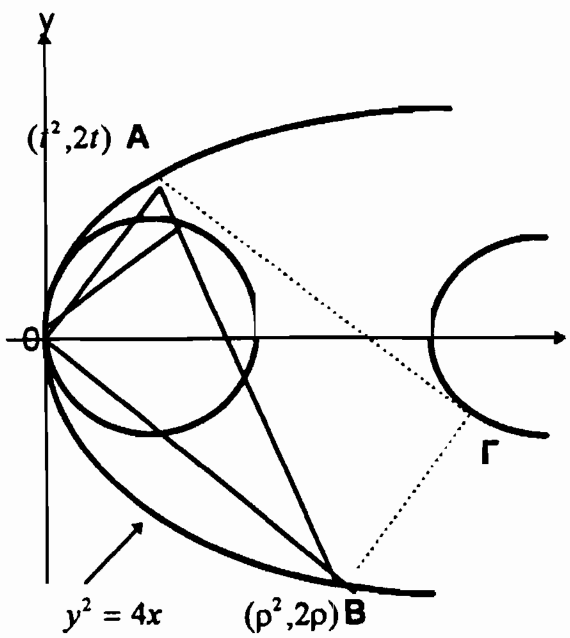
$\Rightarrow |A| = -1 = \mu$

$-\dfrac{1}{\mu}\cdot A\left(\lambda I - A^2\right)= I \Rightarrow A\left(I - A^2\right) = I$

$\Rightarrow A^{-1}\cdot A\left(I-A^2\right)=A^{-1} \Rightarrow A^{-1}=I-A^2=$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&-1&-1\\1&3&3\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$$

3.



$A\hat{O}B=90^\circ \Rightarrow OA\perp OB \Rightarrow$

$\lambda_{OA}\cdot\lambda_{OB}=-1 \Rightarrow$

$\dfrac{2t}{t^2}\cdot\dfrac{2p}{p^2}=-1 \Rightarrow \dfrac{4}{pt}=-1$

$\Rightarrow pt=-4$

εξίσωση της (AB):

$$\left.\begin{aligned}&2x-(p+t)y+2pt=0\\&OM\perp AB \Rightarrow \lambda_{OM}=-\frac{p+t}{2}\Rightarrow\\&(OM):\ y=-\frac{p+t}{2}x\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$2x+(p+t)\cdot\dfrac{p+t}{2}x+2\cdot(-4)=0 \Rightarrow$

$x=\dfrac{16}{4+(p+t)^2}=\dfrac{16}{4+\left(\dfrac{-2y}{x}\right)^2}$

$\Rightarrow x=\dfrac{4x^2}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow$ γ.τ.Μ. $x^2+y^2-4x=0$

καρτεσιανη εξισωση κυκλου.

Για το Γ ε χουμε: $\vec{o\eta}=\vec{\varepsilon\delta}\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}t^2&=x_\Gamma-p^2\\2t&=y_\Gamma-2p\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$x_\Gamma=p^2+t^2=(p+t)^2=\left(\dfrac{y_\Gamma}{4}\right)^2-2\cdot(-4)=$

$\dfrac{y_\Gamma^{\,2}}{4}+8$

$y_\Gamma=2(p+t)$

$\Rightarrow$ γ.τΓ $y^2=4(x-8)$

καρτεσιανη εξισωση παραβολης

$$\left.\begin{aligned}&\text{γ.τ..Μ}\quad x^2+y^2-4x=0\\&\text{γ.τ.Γ}\quad y^2=4x-32\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$x^2+4x-32-4x=0 \Rightarrow x^2=32$

$\Rightarrow x=\pm4\sqrt{2} \Rightarrow y^2=4\left(\pm4\sqrt{2}-8\right)=$

$16\left(\pm\sqrt{2}-2\right)\langle\ 0$

$\Rightarrow$ αδύνατο $\Rightarrow$ οι δυο γ.τ. δεν τέμνονται.

Στο πιο πάνω συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και με άλλο τρόπο όπως φαίνεται και από τα σχήματα των δυο γ.τ.

4.

4.

$f(x)=e^{-x}\cdot\left(x^2+3x+1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^{-\infty}(+\infty+\infty+1)=0.\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{e^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ *απροσδιοριστο*

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(e^x\right)'}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{e^x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ *απρ.*

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=\dfrac{2}{+\infty}=0^+$

$y=0^+$ Ο.Α.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)\cdot(+\infty)\Rightarrow$

∄ ο.α. προς τα αριστερά

$f'(x)=-e^{-x}\left(x\ \ +3x+1\right)+e^{-x}(3x+3)=$

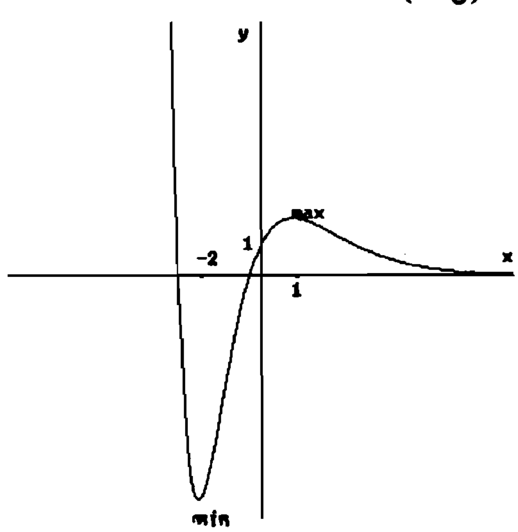
$-e^{-x}\left(x^2+x-2\right)$

$f'(x)=-e^{-x}(x+2)(x-1)$

ρίζες: $x=-2$, $x=1$

X	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘	∪	↗	∩	↘	

$Min(-2,-e^2)$ $Max\left(1,\ \dfrac{5}{e}\right)$



f(x) αύξουσα στο διάστημα [-2,1]

g(x)=f(x)+α > 0

πρέπει α > -f(x)

$\Rightarrow \alpha > -y_{min}=-(-e^2)$

$\Rightarrow \alpha > e^2$

Αν $\alpha=e^2$ *τότε η καμπύλη εφάπτεται του άξονα των x.*

5. (i)

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}=\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}=$

$1-\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot\dfrac{\left(x^4\right)^2}{2!}+,,,,$

$f(x)=1-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{3}{16}x^8+,,,,$

(ii)

$I=\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx\approx$

$\int x^{-11}\left(1-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{3}{8}x^8\right)dx$

$I\approx\int\left(x^{-11}-\dfrac{1}{2}x^{-7}+\dfrac{3}{8}\cdot x^{-3}\right)dx\Rightarrow$

$I\approx -\dfrac{1}{10x^{10}}+\dfrac{1}{12x^6}-\dfrac{1}{16x^2}+K$

(iii)

$I_A=\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx$

$1+x^4\equiv x^4t^2\Rightarrow t^2=1+x^{-4}$

$\Rightarrow 2tdt=-4x^{-5}dx$

$I_A=\int x^{-11}\left(x^4t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{2t}{-4x^{-5}}dt=$

$-\dfrac{1}{2}\int x^{-6}\cdot x^{-2}\cdot t^{-1}\cdot tdt$

$I_A=-\dfrac{1}{2}\int x^{-8}dt=-\dfrac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt$

$I_A=-\dfrac{1}{2}\left(\int t^4-2t^2+1\right)dt=$

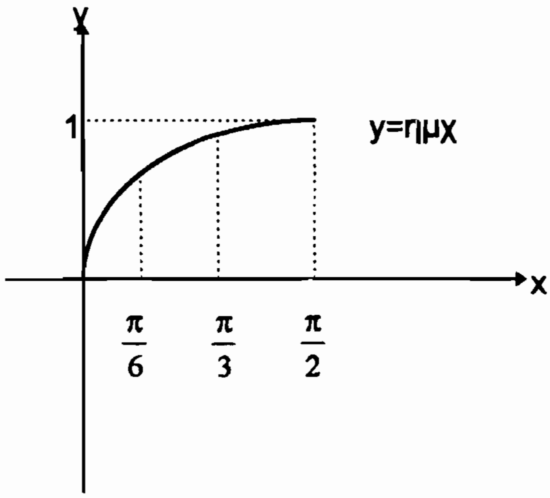
$-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}t^5-\dfrac{2}{3}t^3+t\right)+A$

$$I_A = -\frac{1}{10}\left(1+x^{-4}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\left(1+x^{-4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(1+x^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} + A$$

$$I_A = -\frac{\sqrt{1+x^4}}{30}\left[\frac{3\left(1+x^4\right)^2}{x^{10}} - \frac{10\left(1+x^4\right)}{x^6} + \frac{15}{x^2}\right] + A$$

$$I_A = -\frac{\sqrt{1+x^4}}{30x^{10}}\left(3-4x^4+8x^8\right)+A$$

6.



(i)

$$E_1 = E_\alpha = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\eta\mu x - \frac{1}{2}\right]dx$$

$$E_1 = -\sigma\upsilon\nu x - \frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}$$

$$E_1 = -(-1) - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$$

$$E_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

$$E_2 = E_\beta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+1 \Rightarrow$$

$$E_2 = \frac{1}{2}$$

$$E_3 = E_\gamma = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right)dx = -\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$E_3 = -\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow$$

$$E_3 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{12}$$

(ii)

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - E_1 \Rightarrow$$

$$P(A') = 1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P\left(A/B = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\right) = \frac{E_3}{E_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{12}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P(A/B) = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6}$$

$$P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B) = E_1 - E_3$$

$$\Rightarrow P(A\cap B') = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{12}$$

(iii)

$$P(A)\cdot P(B) = E_1 \cdot E_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} \neq E_3 = P(A\cap B) \Rightarrow$$

$$P(A)P(B) \neq P(A\cap B) \Rightarrow$$

Α,Β όχι ανεξάρτητα

(iv)

ισχύει η σχέση

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) =$$

$$E_1 + E_2 - E_3$$

από το σχήμα έχουμε:

$$P(A\cup B) = E_\alpha + E_\beta - E_\gamma$$

δηλαδή το εμβαδό που ορίζεται από την

(ω)y=ημx και τις ευθείες

$x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{3},\ y=0$

και την (u)y=ημx και τις ευθείες

$x=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{1}{2}$

Παρόμοια: $P(A')=1-P(A)=$ $E(\eta\mu x)-E_{\alpha}=\ldots$ (σχήμα)

$0\le x<\frac{\pi}{2}$

7.(i)

$I(x)=\int e^{-2x}\eta\mu x\,dx=-\int e^{-2x}d\sigma\upsilon\nu x$

$I(x)=-e^{-2x}\sigma\upsilon\nu x+\int \sigma\upsilon\nu x\,de^{-2x}=$

$-e^{-2x}\sigma\upsilon\nu x-2\int e^{-2x}\sigma\upsilon\nu x\,dx$

$I(x)=-e^{-2x}\sigma\upsilon\nu x-2\int e^{-2x}d\eta\mu x=$

$-e^{-2x}\sigma\upsilon\nu x-2e^{-2x}\eta\mu x+2\int \eta\mu x\,de^{-2x}$

$I(x)=-2^{-2x}\sigma\upsilon\nu x-2e^{-2x}\eta\mu x$

$-4\int e^{-2x}\eta\mu x\,dx \Rightarrow$

$5I(x)=-e^{-2x}(\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x)+c \Rightarrow$

$I(x)=-\frac{e^{-2x}}{5}(\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x)+K$

(ii)

$E_{\kappa}=\int_{\kappa\pi}^{(\kappa+\pi)}\left|e^{-2x}-2x\eta\mu x\right|dx=$

$(-1)^{\kappa}\left[-\frac{e^{-2x}}{5}(\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x)\right]_{\kappa\pi}^{(\kappa+1)\pi}$

$E_{\kappa}=(-1)^{\kappa+1}\left[\frac{e^{-2(\kappa+1)\pi}}{5}(-1)^{\kappa+1}+0-\right.$

$\left.\frac{e^{-2\kappa\pi}}{5}(-1)^{\kappa}-0\right]$

$E_{\kappa}=\frac{e^{-2\kappa\pi}}{5}\cdot e^{-2\pi}-\frac{e^{-2\kappa\pi}}{5}(-1) \Rightarrow$

$E_{\kappa}=\frac{1+e^{-2\pi}}{5e^{2\kappa\pi}}$

(iii)

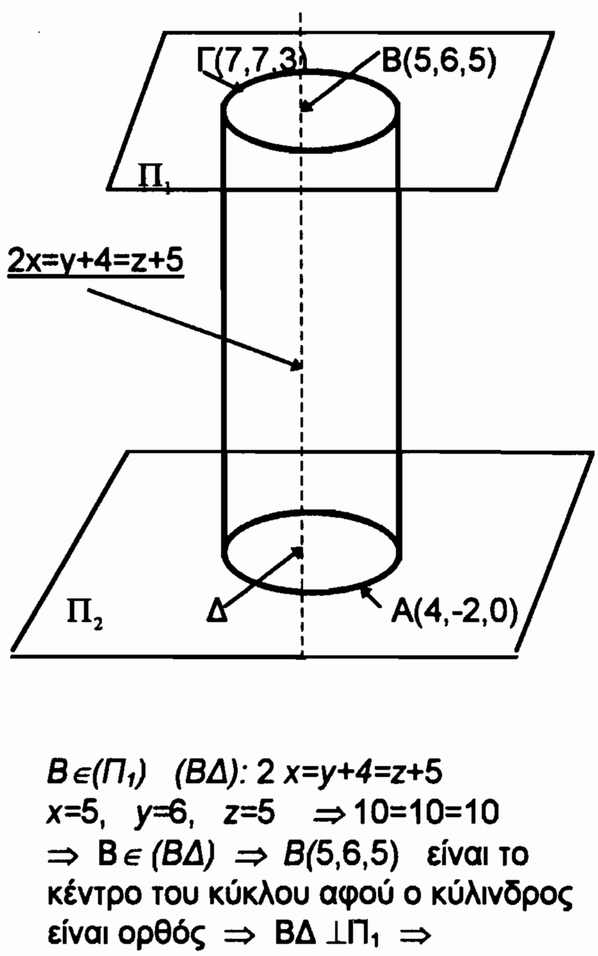
$E=\sum_{\kappa=0}^{\infty}E_{\kappa}=\sum_{\kappa=0}^{\infty}=\frac{1+e^{-2\pi}}{5e^{2\kappa\pi}}=$

$\frac{1+e^{-2\pi}}{5}\sum_{\kappa=0}^{\infty}=\frac{1}{\left(e^{2\pi}\right)^{\kappa}}$

$E=\frac{e^{2\pi}}{5e^{2\pi}}\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{2\pi}+1}{5\left(e^{2\pi}-1\right)}$

$E=\frac{e^{2\pi}+1}{5\left(e^{2\pi}-1\right)}$

8.



$B\in(\Pi_1)$ (ΒΔ): $2x=y+4=z+5$

$x=5,\ y=6,\ z=5 \Rightarrow 10=10=10$

$\Rightarrow B\in(B\Delta) \Rightarrow B(5,6,5)$ είναι το κέντρο του κύκλου αφού ο κύλινδρος είναι ορθός $\Rightarrow B\Delta\perp\Pi_1 \Rightarrow$

$\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\quad(\vec{n}\perp\Pi_2)$

η εξίσωση του (Π_2)

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+2z=P \\ A(4,-2,0)\in\Pi_2 \end{array}\right\}\Rightarrow P=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (\Pi_2)\quad x+2y+2z=0 \\ x=\frac{y+4}{2}=\frac{z+5}{2}\equiv\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Delta(2,0,-1)$

Βρίσκω την ακτίνα της βάσης

$R=(A\Delta)=\sqrt{(2-4)^2+(0+2)^2(-1-0)^2}$

$=\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad R=3$

$(B\Gamma)=\sqrt{(7-5)^2+(7-6)^2(3-5)^2}=\sqrt{9}=3$

$\Rightarrow \Gamma \in (B, R)$

Βρίσκω και το ύψος του κυλίνδρου:

$\upsilon=(\Delta B)=\sqrt{(5-2)^2+(6-0)^2(5+1)^2}=$

$\sqrt{9+36+36}=9$

$\Rightarrow V=\pi.R^2.u=\pi.3^2.9 \Rightarrow V=81\pi$ κ.μ.

για το διάνυσμα ΑΓ έχουμε:

$\vec{A\Gamma}=(7-4)\vec{i}+(7+2)\vec{j}+(3-0)\vec{k} \Rightarrow$

$\vec{A\Gamma}=3\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k}$

$$\sigma\upsilon\nu\phi=\frac{\vec{A\Gamma}\cdot\vec{n}}{|\vec{A\Gamma}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{(3\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})}{\sqrt{9+81+9}\sqrt{1+4+4}}=$$

$$\frac{3+18+6}{\sqrt{99}\cdot\sqrt{9}}=\frac{27}{3\cdot\sqrt{11}\cdot 3}$$

$$\sigma\upsilon\nu\phi=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

9. Από το σχήμα έχουμε

$$\varepsilon\phi\, N\hat{T}P=\frac{dy}{dx}=\frac{PN}{NT}=\frac{PM}{NM}\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{PN^2-NM^2}}{NM}=\frac{\sqrt{y^2-c^2}}{c}\Rightarrow$$

$$c\cdot\frac{dy}{dx}=\sqrt{y^2-c^2}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}=\int dx \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2-1}}=\int dx$$

$$\Rightarrow c\cosh^{-1}\left(\frac{y}{c}\right)=x+k \Rightarrow$$

$$y=c\cdot\cosh\left(\frac{x+k}{c}\right) \Rightarrow y(0)=c$$

$$c=c\cosh(0+k) \Rightarrow k=0 \Rightarrow$$

$$y=c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$E_{OAPN}=\int_0^x c\cdot\cosh\frac{x}{c}dx=c^2\cdot\sinh\frac{x}{c}\Big|_0^x$$

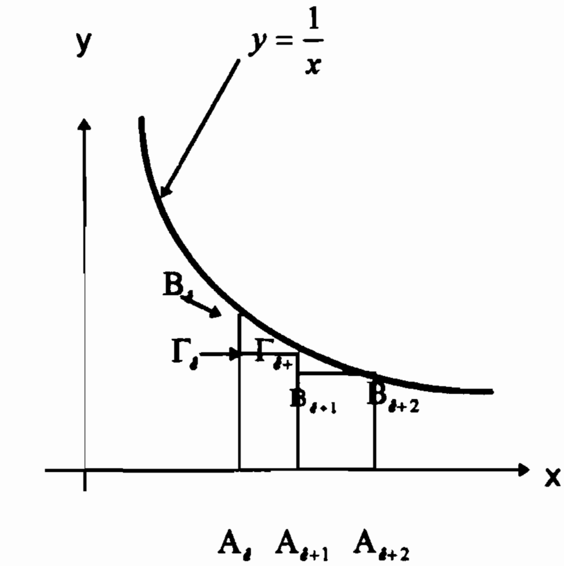
$$E_{OAPN}=c^2\left(\sinh\frac{x}{c}-0\right)\Rightarrow E_{OAPN}=c^2\cdot\sinh\frac{x}{c}$$

$$E_{PMN}=\frac{1}{2}\cdot(PM)\cdot(NM)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{9^2-c^2}\cdot c=$$

$$\frac{c}{2}\sqrt{c^2\cosh^2\left(\frac{x}{c}\right)-c^2}$$

$$E_{PMN}=\frac{c^2}{2}\cdot\sinh\frac{x}{c}\Rightarrow E_{OAPN}=2\cdot E_{PMN}$$

10.



$$V=\pi\int_{1}^{\alpha}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\pi}{x}\Big|_{1}^{\alpha}$$

$$V=\pi\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$E_{A_{\kappa}A_{\kappa+1}A_{\ell+1}\Gamma_{\kappa}}=E_{A_{\kappa+1}A_{\kappa+2}\Delta_{\ell+2}B_{\kappa+1}}$$

$$V_{\kappa}=\pi\cdot\left(A_{\kappa+1}B_{\kappa+1}\right)^2\cdot\left(A_{\kappa}A_{\kappa+1}\right)=$$

$$\pi\cdot\frac{1}{(\kappa+1)^2}\cdot 1\Rightarrow V_{\kappa}=\frac{\pi}{(\kappa+1)^2}$$

$$U_{\kappa}=\pi\cdot\left(A_{\kappa}B_{\kappa}\right)^2\cdot\left(A_{\kappa}A_{\kappa+1}\right)=$$

$$\pi\cdot\frac{1}{\kappa^2}\cdot 1\Rightarrow U_{\kappa}=\frac{\pi}{\kappa^2}$$

αν V ο όγκος του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τις ευθείες y=0, x=1, x=ν και με τη βοήθεια της σχέσης (ε) έχουμε:

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu-1}U_{\kappa}<V<\sum_{\kappa=1}^{\nu-1}V_{\kappa}\Rightarrow$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\frac{\pi}{(\kappa+1)^2}<\pi\left(1-\frac{1}{\nu}\right)<\sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\frac{\pi}{\kappa^2}\Rightarrow$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\frac{1}{(\kappa+1)^2}<1-\frac{1}{\nu}<\sum_{\kappa=1}^{\nu-1}\frac{1}{\kappa^2}\Rightarrow$$

$$\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2}<1-\frac{1}{\nu}<\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{1}{(\kappa-1)^2}\Rightarrow$$

$$\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2}<1-\frac{1}{\nu}$$

$$\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2}=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2}-1<\frac{1}{\nu}\Rightarrow\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2}<2-\frac{1}{\nu}$$

$$\kappa\alpha\iota\quad 1-\frac{1}{\nu}<\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2}<2-\frac{1}{\nu}\Rightarrow$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)<\lim_{\nu\to+\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2}<\lim_{\nu\to+\infty}\left(2-\frac{1}{\nu}\right)\Rightarrow$$

$$1<\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa^2}<2$$

14η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
ΚΑΛΑΜΠΑΚΑ - ΕΛΛΑΔΑ 1997

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μακρίδης, Σάββας Αντωνίου

1. Έστω O εσωτερικό σημείο κυρτού τετραπλεύρου ABCD που ικανοποιεί
$OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=2.S(ABCD)$,
όπου S(ABCD) συμβολίζει το εμβαδό του τετραπλεύρου ABCD.

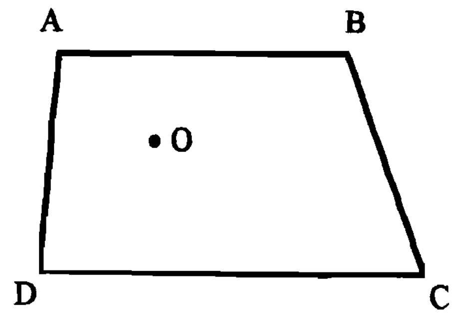
2. Έστω S σύνολο με n στοιχεία ($n\geq 2$) και έστω $A_1, A_2, \ldots A_m$ ($m\geq 2$) δοθέντα υποσύνολα του S. Αν για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά στοιχεί x και y του S, υπάρχει υποσύνολο A_i τέτοιο ώστε είτε $x\in A_i$ και $y\notin A_i$ ή $x\notin A_i$ και $y\in A_i$, να δειχθεί ότι $2^m\geq n$.

3. Θεωρούμε τρεις κύκλους C_1, C_2 και Γ, όπου οι C_1, C_2 εφάπτονται εσωτερικά του Γ στα σημεία B, C αντίστοιχα και, επίσης, εφάπτονται εξωτερικά μεταξύ τους στο σημείο D. Έστω A ένα από τα δύο σημεία στα οποία, η κοινή εφαπτομένη στο σημείο D των κύκλων C_1, C_2, τέμνει τον κύκλο Γ. Ακόμη, έστω, K, L τα σημεία τομής των ευθειών AB, AC με τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα και έστω M,N τα σημεία τομής της BC με τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα. Δείξετε ότι οι ευθείες AD, KM, LN διέρχονται από το ίδιο σημείο P.

4. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:R\to R$ τέτοιες ώστε
$$f(xf(x)+f(y)) = (f(x))^2+y$$
για κάθε $x, y \in R$.

__Λύσεις__

1.



Έστω S_1, S_2, S_3, S_4 τα εμβαδά των τριγώνων OAB, OBC, OCD και ODA αντίστοιχα. Τότε
$$S_1=\frac{1}{2}(OA)(OB)\eta\mu\varphi \leq \frac{1}{2}(OA)(OB)\leq \frac{1}{2}\frac{(OA)^2+(OB)^2}{2} \quad (1)$$
όπου $\varphi=\angle AOB$, με την ισότητα να ισχύει όταν OA=OB και $OA\perp OB$. Παρομοίως:
$$S_2 \leq \frac{OB^2+OC^2}{4} \quad (2)$$
$$S_3 \leq \frac{OC^2+OD^2}{4} \quad (3)$$
$$S_4 \leq \frac{OD^2+OA^2}{4} \quad (4)$$
$$\Rightarrow S=S_1+S_2+S_3+S_4 \leq \frac{OA^2+OB^2+OC^2+OD^2}{2} = S$$
Όπως είδαμε πιο πάνω η ισότητα ισχύει μόνο όταν OA=OB=OC=OD και $OA\perp OB$, $OB\perp OC$, $OC\perp OD$, $OD\perp OA$. Έτσι, συνεπάγεται ότι το ABCD είναι τετράγωνο με το O να είναι το κέντρο.

2. Ορίζουμε ότι το υποσύνολο A_i διαχωρίζει τα x και y. Κάθε στοιχείο του S ανήκει σε ακριβώς ένα από τα 2^m ξένα μεταξύ της σύνολα,

$S_1=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap...\cap\overline{A}_m$

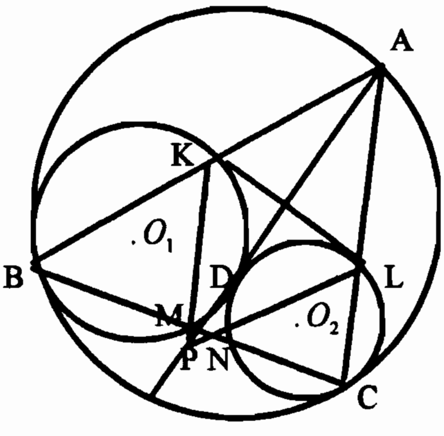
$S_2=A_1\cap\overline{A}_2\cap...\cap\overline{A}_m$

$S_m=A_1\cap A_2\cap...\cap\overline{A}_m$

$S_{2m}=A_1\cap A_2\cap...\cap A_m$

(Μερικά μπορεί να είναι κενά. Αν δύο στοιχεία x και y ανήκουν στο ίδιο S_i τότε υπάρχει A_κ ($1\le\kappa\le m$) που να τα διαχωρίζει. Έτσι, $2^m\ge n$.

3.



Θα δείξουμε ότι το AKPL είναι παραλληλόγραμμο και ότι AD είναι μια από τις διαγωνίους του. Πρώτα θα δείξουμε ότι το KL είναι εξωτερική εφαπτομένη των C_1 και C_2, δηλ. θα δείξουμε ότι $O_1\hat{K}L=O_2\hat{L}K=90^\circ$.

Έχουμε:

$AK.AB=AD^2=AL.AC$, έτσι τα τρίγωνα AKL, ACB είναι όμοια.

Έτσι $A\hat{K}L=A\hat{C}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B=\frac{1}{2}K\hat{O}_1B$

εφόσον C_1,Γ εφάπτονται στο B.

(O, O_1, O_2 είναι τα κέντρα των κύκλων Γ, C_1, C_2 αντίστοιχα). Εφόσον $KO_1=O_1B$

έχουμε

$$B\hat{K}O_1=K\hat{B}O_1=\frac{1}{2}\left(180^\circ-K\hat{O}_1B\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(180^\circ-2A\hat{K}L\right)=90^\circ-A\hat{K}L.$$

Έτσι,

$$O_1\hat{K}L=180^\circ-A\hat{K}L-B\hat{K}O_1=$$

$$180^\circ-A\hat{K}L-\left(90^\circ-A\hat{K}L\right)=90^\circ.$$

Παρομοίως βρίσκουμε ότι $O_2\hat{L}K=90^\circ$

Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι BMK, LKA είναι όμοια τρίγωνα.

Έχουμε $K\hat{M}B=\hat{u}$ (χορδή-εφαπτομένη) και έχουμε δείξει ότι $A\hat{L}K=\hat{B}$. Επειδή έχουμε επίσης $\hat{c}=\hat{u}$ (AKL≈ACB) συμπεραίνουμε ότι $K\hat{M}B=\hat{c}$, έτσι KM//AC. Παρομοίως, LN//AB.

Έτσι, το τετράπλευρο AKPL είναι παραλληλόγραμμο.

Η KL είναι μία διαγώνιος του AKPL και έτσι, εφόσον AD περνά από το μέσο της κοινής εφαπτομένης KL συνεπάγεται ότι η AD είναι η άλλη διαγώνιος του AKPL. Επομένως αυτή (AD) θα περνά από το P.

4. Έχουμε $f\big(f(y)\big)=\big(f(0)\big)^2+y$. Έστω $\alpha=f\left(-f^2(0)\right)$. Τότε $f(\alpha)=0$ και

$\left(f\left(f\left(-f^2(0)\right)\right)=\left(f(0)\right)^2+\left(-f^2(0)\right)=0\right)$ και

$f(0)=f\big(\alpha f(\alpha)+f(\alpha)\big)=\big(f(\alpha)\big)^2+\alpha=\alpha$

δηλ. $f(0)=f\left(-\left(f(0)\right)^2\right)$

Συνεπάγεται f(0)=0

Έχουμε $f\big(f(y)\big)=y$ και

$f\big(xf(x)\big)=\big(f(x)\big)^2$

Έτσι,

$x^2=f^2\big(f(x)\big)=f\Big(f(x)f\big(f(x)\big)\Big)=$

$f\big(xf(x)\big)=\big(f(x)\big)^2$

δηλ. *f(x)=ε(x).x όπου ε(x)*=±1

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση έχουμε *ε(x)=ε(y)* ∀ *x* και *y*. Έτσι, *f(x)≡x αν f(x)≡-x.*

$f\left(\varepsilon(x)x^2+\varepsilon(y)y\right)=x^2+y\Rightarrow$

$\left|\varepsilon(x)x^2+\varepsilon(y)y\right|=\left|x^2+y\right|$

εφοσον $f^2(z)=z^2$

η οποία για x≠0, y≠0 δίδει ε(x)=ε(y).

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ
ΓΙΑ ΑΠΟΦΟΙΤΟΥΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄

Επιμέλεια: Κωνσταντίνος Δεληγιάννης

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\varepsilon\varphi x - x}{x - 2\eta\mu x}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $y=e^{-x}.\eta\mu x$.
Να βρεθεί η δευτέρα παράγωγος $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.
Στη συνέχεια να δειχτεί ότι:
$\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 4\left(e^{-2x} - y^2\right)$.

3. Να λυθεί στο διάστημα [0,2π] η εξίσωση
συν2θ-3συνθ+2=0.

4. Αν $\int_0^\alpha \dfrac{1}{(x+1)(2x+1)}dx = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ να υπολογιστεί η τιμή του α.

5. Να βρεθούν οι τιμές του x στα σημεία όπου η ευθεία y=3 τέμνει την καμπύλη με εξίσωση $y=4x-x^2$.
Στη συνέχεια να υπολογιστεί το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης και της ευθείας y=3.

6. ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο του οποίου οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ είναι (1, 2), (7, -1), (-1, -2) αντίστοιχα.
(i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ΑΔ και ΓΔ.
(ii) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ.
(iii) Να υπολογιστεί το εμβαδό του ΑΒΓΔ.

7. Οι παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης είναι:
x=α(t-ημt)
y=α(1-συνt)
(i) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ συναρτήσεις του t.
(ii) Να δειχτεί ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο με παράμετρο $t=t_1$ σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\omega = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t_1}{2}$.

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$\int e^x\left(x - \dfrac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$.

9. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ(3,2) και τέμνει ορθογώνια τον κύκλο
$x^2+y^2-2x+6y-15=0$.
Να βρεθεί επίσης η εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο τη διάκεντρο των δύο κύκλων.

10. Να βρεθεί η γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης
συν2x-ημ2x=$\sqrt{2}$.

11. Δείξετε ότι $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 3x\,\eta\mu x\,dx = \dfrac{1}{8}\left(3-\sqrt{2}\right)$

12. Στο ανάπτυγμα $\left(x^3 - \dfrac{\lambda}{2x}\right)^8$
ο συντελεστής του x^8 είναι 70.
Να βρεθεί η τιμή του λ, λ>0.

13. Να βρεθούν οι λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης

5ημx+ημ3x=συνx που βρίσκονται μεταξύ 0° και 180°, $0 \le x \le 180°$.

14. Μια καμπύλη έχει εξίσωση y=xημ2x. Να βρεθεί η κλίση της καμπύλης στο σημείο για το οποίο $x = \frac{\pi}{3}$.

15. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που εφάπτεται του άξονα των y στο σημείο Α(0,2) και τέμνει ορθογώνια τον κύκλο.
$x^2+y^2-6x-2y-6=0$.

16. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει βάση τετράγωνο με πλευρά y και το ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι x. Να εκφράσετε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου συναρτήσει των x, y. Στη συνέχεια θεωρώντας ότι το εμβαδό είναι σταθερό να δείξετε ότι:

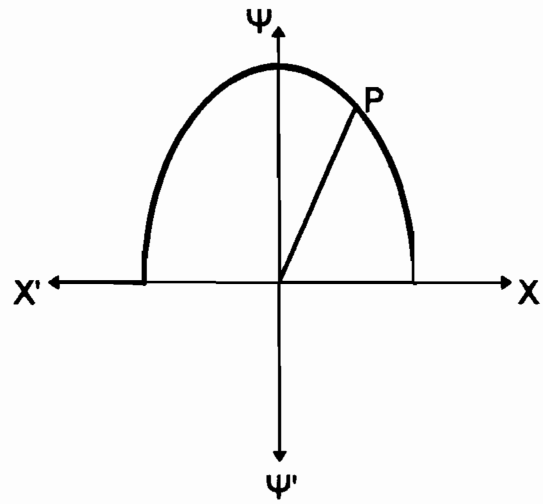
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+y}.$$

(Το εμβαδό ολικής επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο: $E_{ολ}=2(αβ+βγ+γα)$ όπου α, β, γ οι διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου).

17. Ένα εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 7 ερωτήσεις, σε κάθε μια των οποίων ένας εξεταζόμενος πρέπει να επιλέξει μια από 3 δυνατές απαντήσεις. Ανάλογα με την απάντηση που επιλέγει, ο εξεταζόμενος βαθμολογείται με 1, 2 ή 3 βαθμούς για κάθε μια των επτά ερωτήσεων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους ένας εξεταζόμενος μπορεί να πάρει ακριβώς 18 βαθμούς απαντώντας και στις 7 ερωτήσεις;

18. Να βρεθεί η κλίση της καμπύλης με εξίσωση $xy^3-2x^2y^2+x^4-1=0$ στο σημείο της Α(1, 2).

19. Το σχήμα δείχνει το τμήμα της καμπύλης με εξίσωση $y = 5-\frac{1}{2}x^2$ για την οποία $y \ge 0$. Το σημείο P(x,y) βρίσκεται στην καμπύλη και 0 είναι η αρχή των αξόνων.



(i) Να δειχτεί ότι $(OP)^2 = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 25$

(ii) Θέτοντας $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 + 25$ να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες $f'(x)=0$.

(iii) Στη συνέχεια να βρεθεί η ελαχίστη απόσταση του 0 από την καμπύλη.

20. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο
$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$
(i) Να δειχτεί ότι ο άξονας των x είναι οριζοντία ασύμπτωση της γραφικής παράστασής της.

(ii) Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.

(iii) Να γίνει γραφική παράσταση της συνάρτησης.

(iv) Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα Ox και την ευθεία x=1 στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα Ox. Με χρήση της αντικατάστασης x=εφθ να δειχτεί ότι ο όγκος που παράγεται δίνεται από τη σχέση $V = 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} ημ^2θ\, dθ$

Λύσεις:

1

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\varepsilon\phi x - x}{x-2\eta\mu x}=\frac{0-0}{0-0}=$$

$$\frac{0}{0}(\text{Απροσδ.})K.Hosp.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2\varepsilon\phi x - x)'}{(x-2\eta\mu x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\tau\varepsilon\mu^2 x-1}{1-2\sigma\upsilon\nu x}=\frac{2-1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$$

2.

$$y=e^{-x}\eta\mu x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-e^{-x}\eta\mu x+e^{-x}\sigma\upsilon\nu x=$$

$$e^{-x}(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-e^{-x}(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+e^{-x}(-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-x}(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=$$

$$-2e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$$

$$A.M.=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left(-2e^{-x}\sigma\upsilon\nu x\right)^2$$

$$=4e^{-2x}\sigma\upsilon\nu^2 x=4e^{-2x}(1-\eta\mu^2 x)$$

$$=4(e^{-2x}-e^{-2x}\eta\mu^2 x)$$

$$=4(e^{-2x}-y^2)=B.M.$$

3. συν2θ-3συνθ+2=0, [0, 2π]

$2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1-3\sigma\upsilon\nu\theta+2=0$

$2\sigma\upsilon\nu^2\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta+1=0$

$-1\leq\sigma\upsilon\nu\theta=\omega\leq 1$

$2\omega^2-3\omega+1=0$

$$\omega_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}\begin{cases}\omega_1=1\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=1\\ \omega_2=\frac{1}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$\sigma\upsilon\nu\theta=1=\sigma\upsilon\nu 0 \qquad \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$\theta=2\kappa\pi,\ \kappa\in z \qquad \theta=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$\kappa=0\Rightarrow\theta=0 \qquad \kappa=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3},$

$\theta=-\frac{\pi}{3}(\alpha\pi o\rho\rho.)$

$\kappa=1\Rightarrow\theta=2\pi \qquad \kappa=1\Rightarrow\theta=2\pi+\frac{\pi}{3}(\alpha\pi o\rho.),$

$\theta=\frac{5\pi}{3}$

Λύσεις στο [0,2π] είναι οι:

$0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ 2\pi$

4.

$$\int_0^{\alpha}\frac{1}{(x+1)(2x+1)}dx=ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{1}{(x+1)(2x+1)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}$$

$$1\equiv A(2x+1)+B(x+1)$$

$$x=-1\Rightarrow 1=A(-2+1)\Rightarrow A=-1$$

$$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow 1=B\left(-\frac{1}{2}+1\right)\Rightarrow B=2$$

$$\int_0^{\alpha}\frac{1}{(x+1)(2x+1)}=\int_0^{\alpha}\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{2x1}\right)dx=$$

$$\left[-ln|x+1|+ln|2x+1|\right]_0^{\alpha}$$

$$=\left[ln\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|\right]_0^{\alpha}=ln\left|\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\right|-ln\left|\frac{1}{1}\right|=ln\left|\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\right|$$

$$ln\left|\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\right|=ln\frac{3}{2}\Rightarrow\left|\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\right|=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}=\pm\frac{3}{2}$$

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}=\frac{3}{2}\quad\eta'\quad\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}=-\frac{3}{2}$$

$4\alpha+2=3\alpha+3 \qquad 4\alpha+2=-3\alpha-3$

$\alpha=1 \qquad 7\alpha=-5\Rightarrow\alpha=\frac{-5}{7}$

5.

$$\left.\begin{aligned} y&=3\\ y&=4x-x^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow 3=4x-x^2\Rightarrow$$

$$x^2-4x+3=0\Rightarrow(x-3)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=3,\ x=1\Rightarrow A(3,3),B(1,3)$$

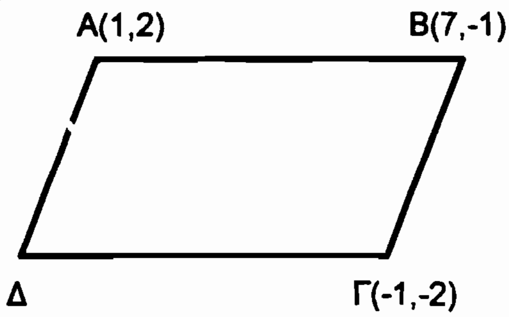
$$E=\int_{\alpha}^{\beta}(y_K-y_E)dx\Rightarrow E\int_{1}^{3}\left(4x-x^2-3\right)dx=$$

$$\left[2x^2-\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^3=$$

$$(18-9-9)-\left(2-\frac{1}{3}-3\right)=$$

$$-2+3\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\ \tau.\mu..$$

6.



(i)

$$\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{-2+1}{-1-7}=\frac{1}{8}$$

$$\lambda_{\mathrm{A\Delta}}=\lambda_{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{1}{8}(\mathrm{A\Delta}//\mathrm{B\Gamma})$$

$$\mathrm{A\Delta}{:}\,y-y_1=\lambda(x-x_1)$$

$$\mathrm{A\Delta}{:}\,y-2=\frac{1}{8}(x-1)\Rightarrow$$

$$\mathrm{A\Delta}{:}\,x-8y+15=0$$

$$\lambda_{\mathrm{AB}}=\frac{-1-2}{7-1}=-\frac{1}{2},\ \lambda_{\Gamma\Delta}=\lambda_{\mathrm{AB}}=$$

$$-\frac{1}{2}(\Gamma\Delta//\mathrm{AB})$$

$$\Gamma\Delta{:}\,y+2=-\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow\Gamma\Delta{:}\,x+2y+5=0$$

(ii)

$$\left.\begin{aligned} x+2y+5&=0\\ x-8y+15&=0\end{aligned}\right|\begin{aligned}1\\-1\end{aligned}\Rightarrow$$

$$\begin{array}{rl} x+2y+5=0 & \qquad x+2(1)+5=0\\ -x+8y-15=0 & \qquad x=-7\\ \hline 10y=10 & \\ y=1 & \qquad \Delta(-7,1)\end{array}$$

(iii)

$$\mathrm{E}_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}}=2\cdot\mathrm{E}_{\mathrm{AB\Gamma}}=2\cdot\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 7 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 7 & -1 & 1 & 7 & -1\\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2\end{array}\right.=$$

$$-1-2-14-1+2-14=-30$$

$$\mathrm{E}_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}}=|-30|=30\ \tau.\mu..$$

7.

$$x=\alpha(t-\eta\mu t)\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)$$

$$y=\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)\Rightarrow\frac{dy}{dt}=\alpha\eta\mu t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\alpha\,\eta\mu t}{\alpha(1-\sigma\upsilon\nu t)}=\frac{\eta\mu t}{1-\sigma\upsilon\nu t}=$$

$$\frac{2\eta\mu\frac{t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}}{1-\left(1-2\eta\mu^2\frac{t}{2}\right)}=\frac{2\eta\mu\frac{t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}}{2\eta\mu^2\frac{t}{2}}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}}{\eta\mu\frac{t}{2}}=\sigma\phi\frac{t}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{\varepsilon\phi}&=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=t_1}=\sigma\phi\frac{t_1}{2}\\ \lambda_{\varepsilon\phi}&=\varepsilon\phi\omega\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varepsilon\phi\omega=\sigma\phi\frac{t_1}{2}=$$

$$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t_1}{2}\right)\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{2}-\frac{t_1}{2}$$

8.

$$\int e^{x}\left(x-\frac{e^{-x}}{x^{2}}\right)dx=\int e^{x}\cdot x dx-\int\frac{e^{x}\cdot e^{-x}}{x^{2}}dx$$

$$=\int xe^{x}dx-\int\frac{1}{x^{2}}dx=\int xde^{x}-\int x^{-2}dx=$$

$$=x\cdot e^{x}-\int e^{x}dx-\frac{x^{-1}}{-1}c=xe^{x}-e^{x}+\frac{1}{x}+c$$

$$=e^{x}(x-1)+\frac{1}{x}+c$$

9. Έστω (K_1): $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου. Αφού K(3,2) τότε $g_1=-3$ και $f_1=-2$, άρα
(K_1): $x^2+y^2-6x-4y+c_1=0$
Οι κύκλοι

$$\left.\begin{array}{l}(K_1): x^2+y^2-4y+c_1=0\\ (K_2): x^2+y^2-2x+6y-15=0\end{array}\right\}\text{τέμνονται}$$

ορθογώνια
$\Rightarrow 2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$
$\Rightarrow 2(-3).(-1)+2(-2).3=c_1-15$
$\Rightarrow 6-12+15=c_1 \Rightarrow c_1=9$
Άρα ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση
(K_1): $x^2+y^2-6x-4y+9=0$
Έστω (K): $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$
η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου.
$K_1(3, 2)$, $K_2(1, -3)$ και $K(-g, -f)$ το κέντρο
του ζητούμενου κύκλου

$$-g=\frac{3+1}{2}\Rightarrow -g=2\Rightarrow g=-2$$

$$-f=\frac{-3+2}{2}\Rightarrow -f=-\frac{1}{2}\Rightarrow f=\frac{1}{2}$$

Ο ζητούμενος κύκλος γίνεται:
(K): $x^2+y^2-4x+y+c=0$
K(3, 2) σημείο του (K) $\Rightarrow$
$9+4-12+2+c=0 \Rightarrow c=-3$
Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι:
(K): $x^2+y^2-4x+y-3=0$

10. συν2x-ημ2x=$\sqrt{2}$
συν2x-εφ45°ημ2x=$\sqrt{2}$
συν2x.συν45°-ημ45°ημ2x=$\sqrt{2}$.συν45°
συν(2x+45°)=$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$=1=ημ90°
2x+45°=360°K+90° $\Rightarrow$
x=180°K+22,5°, K∈Z

11.

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\eta\mu 3x\eta\mu x dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}[\sigma\upsilon\nu(3x-x)-\sigma\upsilon\nu(3x+x)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}(\text{vxq}\ \ 2x-\text{vxq}\ \ 4x)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\text{kp}\ \ 2x}{2}-\frac{\text{kp}\ \ x}{4}\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\text{kp}\ \ \frac{\text{s}}{2}}{2}-\frac{\text{kps}}{4}\right)-\left(\frac{\text{kp}\ \ \frac{\text{s}}{4}}{2}-\frac{\text{kp}\ \ \frac{\text{s}}{2}}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(3-\sqrt{2}\right)$$

12.

$$\left(x^{3}-\frac{\lambda}{2x}\right)^{8},\ T_{K+1}=\binom{\nu}{K}A^{\nu-K}\cdot B^{K}$$

$$T_{K+1}=\binom{8}{K}\left(x^{3}\right)^{8-K}\cdot\left(-\frac{\lambda}{2x}\right)^{K}=$$

$$\binom{8}{K}\cdot x^{24-3K}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^{K}\cdot x^{-K}=$$

$$\binom{8}{K}x^{24-4K}\cdot\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^{K}$$

$$24-4K=8\Rightarrow 4K=16\Rightarrow K=4$$

$$T_{5}=\binom{8}{4}x^{8}\cdot\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^{4}$$

$$\binom{8}{4}\cdot\frac{\lambda^4}{16}=70\Rightarrow\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{\lambda^4}{16}=70$$

$$70\cdot\lambda^4=70\cdot16\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda=\pm2\\ \lambda>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lambda=2$$

13. ημ5x+ημ3x=συνx, $0° \le x \le 180°$

$$2\eta\mu\frac{5x+3x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{5x-3x}{2}-\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow$$

$$2\eta\mu4x\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x-1)=0$$

$$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x=0=\sigma\upsilon\nu90°$$

$$x=360°K\pm90°,\ K\in Z$$

$$\eta\mu4x=\frac{1}{2}=\eta\mu30°$$

$$4x=360°K+30°$$

$$x=90°K+7{,}5°,\ K\in Z$$

$$\acute{\eta}\ 4x=360°K+150°$$

$$x=90°K+37{,}5°,\ K\in Z$$

Γενική λύση

x=360°K±90°, x=90°K+7,5°

x=90°K+37,5° K∈Z

Για K=0 x=90°, x=-90°(απορρίπτεται),

x=7,5°, x=37,5°

K_1=1 x=450° (απορρίπτεται)

x=270°(απορρίπτεται)

x=97,5°,

x=127,5°

14. y=xημ2x

y΄=ημ2x+x.2συν2x

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}=y'\Big|x=\frac{\pi}{3}=\eta\mu\frac{2\pi}{3}+2.\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\Rightarrow\ \eta\ \kappa\lambda\iota\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \kappa\alpha\mu\pi\upsilon\lambda\eta\varsigma$$

$$\varepsilon\iota\nu\alpha\iota\ \ \lambda_{\kappa\alpha\mu\pi\upsilon\lambda\eta\varsigma}=\lambda_{\varepsilon\varphi}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$$

15. Έστω (K_1) $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ ο ζητούμενος κύκλος. Εφάπτεται του άξονα των y ⇒ x=0 εφαπτομένη του

(K_1) ⇒

$$\left.\begin{matrix}y^2+2f_1y+c_1=0\\ \Delta=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow4f_1^2-4c_1\Rightarrow$$

$$c_1=f_1^2\quad(1)$$

A(0, 2) σημείο του (K_1) ⇒

$4+4f_1+c_1=0$ (2)

(K_1) $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$ τέμνονται

(K_2) $x^2+y^2-6x-2y-6=0$

ορθογώνια

$\Rightarrow 2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$

$\Rightarrow 2g_1(-3)+2f_1(-1)=c_1-6$

$\Rightarrow -6g_1-2f_1=c_1-6$ (3)

Από (1) και (2) ⇒ $4+4f_1+f_1^2=0$

$\Rightarrow(f_1+2)^2=0 \Rightarrow f_1=-2 \Rightarrow c_1=4$

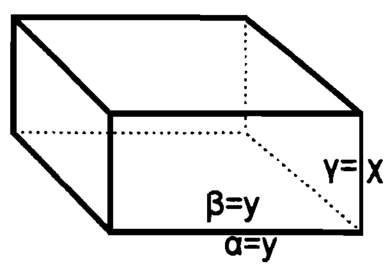
και από την (3) έχουμε:

$-6g_1-2(-2)=4-6 \Rightarrow -6g_1=-6 \Rightarrow g_1=1$

Ο ζητούμενος κύκλος θα έχει εξίσωση:

(K_1): $x^2+y^2+2x-4y+4=0$

16.



α΄ τρόπος:

$E_{o\lambda}=2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$

$E_{o\lambda}=2(y^2+yx+yx)$

$E_{o\lambda}=2y^2+4yx$

β΄ τρόπος:

$E_{o\lambda}=E_{\pi\alpha\rho.}+E_\beta$

$=\Pi_\beta .u+2y^2$

$E_{o\lambda}=4y.x+2y^2$

$$\frac{dE_{o\lambda}}{dx}=4\frac{dy}{dx}\cdot x+4y+4y\frac{dy}{dx}$$

$$0=\frac{dy}{dx}(4x+4y)+4y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4y}{4(x+y)}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+y}$$

17. Για να πάρει 18 βαθμούς απαντώντας και στις 7 ερωτήσεις πρέπει να πάρει 4 ερωτήσεις των 3 βαθμών και 3 των 2 βαθμών ή 5 των 3 βαθμών, 1 των 2 βαθμών και 1 του 1 βαθμού.

Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε:

$$\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{3}=\frac{7!}{3!4!}\cdot 1=\frac{5.6.7}{1.2.3}=35 \text{ τρόπους}$$

Στη δεύτερη περίπτωση θα έχουμε:

$$\binom{7}{5}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}=\frac{7!}{2!5!}\cdot 2\cdot 1=$$

$$\frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot 2=42\tau\rho o\pi o\upsilon\grave{\delta}$$

Άρα ένας εξεταζόμενος έχει 35+42=77 τρόπους για να πάρει 18 απαντώντας και τις 7 ερωτήσεις.

18. $xy^3-2x^2y^2+x^4-1=0$, $A(1, 2)$

$$y^3+3xy^2\cdot\frac{dy}{dx}-4xy^2-4x^2y\cdot\frac{dy}{dx}+4x^3=0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3xy^2-4x^2y\right)=4xy^2-y^3-4x^3$$

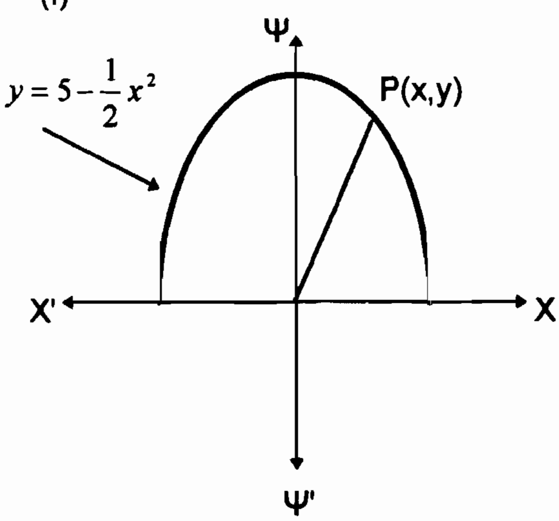
$$\frac{dy}{dx}=\frac{4xy^2-y^3-4x^3}{3xy^2-4x^2y}\Rightarrow$$

$$\lambda=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,\,y=2}=\frac{4.1.2^2-2^3-4.1^3}{3.1.2^2-4.1^2.2}$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{16-8-4}{12-8}=\frac{4}{4}\Rightarrow\lambda=1$$

19.

(i)



$(OP)^2=(x-0)^2+(y-0)^2$

$(OP)^2=x^2+y^2$

$(OP)^2=x^2+\left(5-\frac{1}{2}x^2\right)^2$

$(OP)^2=x^2+25+\frac{1}{4}x^4-5x^2$

$(OP)^2=\frac{1}{4}x^4-4x^2+25$

(ii)

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-4x^2+25$

$f'(x)=x^3-8x$

$f'(x)=0\Rightarrow x(x^2-8)=0$

$x=0,\ x=\pm 2\sqrt{2}$

(iii)

$$(OP)=\sqrt{\frac{1}{4}x^4-4x^2+25}=g(x)$$

$$g'(x)=\frac{x^3-8x}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^4-4x^2+25}}$$

$$g'(x)=0\Rightarrow x^3-8x=0\Rightarrow x=0,\ x=\pm 2\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		0		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
g(x)		↘		↗		↘		↗	

$$(OP)_{min}=g\left(2\sqrt{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}\right)^4-4\left(2\sqrt{2}\right)^2+25}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 16\cdot 4-32+25}$$

$$(OP)_{min}=\sqrt{9}=3$$

20.

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$$

(i)

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2+1}=\frac{\pm\infty}{+\infty}(\mathrm{A}\pi\rho o\sigma.)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{4}{\pm\infty}}{1+\frac{1}{(\pm\infty)^2}}=\frac{0}{1+0}=0\Rightarrow$$

$y=0$ O.A.

Η ευθεία y=0 είναι ο άξονας των x ⇒ ο άξονας των x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f(x).

(ii)

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{4(x^2+1)-2x\cdot 4x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$\frac{4-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

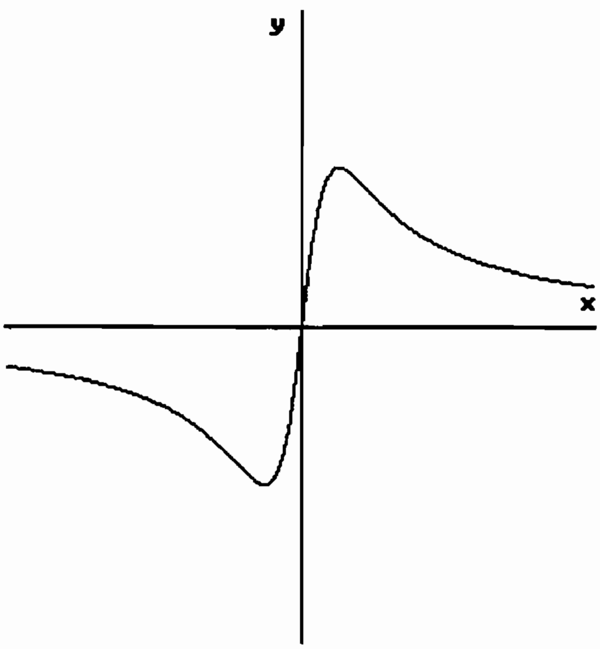
$$f'(x)=0\Rightarrow 4-4x^2=0\Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘	∪	↗	∩	↘	

$$y_{min}=\frac{4(-1)}{1+1}=-2,\ \ y_{max}=\frac{4}{2}=2$$

$$min(-1,\,-2),\qquad max(1,\,2)$$

(iii) Για x=0 $\Rightarrow$ y=0 (0,0)



(iv)

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2dx \Rightarrow\ V=\pi\int_0^1\frac{16x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$\left.\begin{aligned}
&x=\varepsilon\varphi\theta\\
&dx=\tau\varepsilon\mu^2\theta d\theta\\
&x^2+1=\varepsilon\varphi^2\theta+1=\tau\varepsilon\mu^2\theta\\
&x=0\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta=0\Rightarrow\theta=0\\
&x=1\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}\right\}$$

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{16\varepsilon\varphi^2\theta\cdot\tau\varepsilon\mu^2\theta d\theta}{\left(\tau\varepsilon\mu^2\theta\right)^2}$$

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{16\,\dfrac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}d\theta$$

$$V=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\eta\mu^2\theta d\theta$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ
ΓΙΑ ΑΠΟΦΟΙΤΟΥΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄

Επιμέλεια: Κωνσταντίνος Δεληγιάννης

Να απαντήσετε στα 5 από τα 7 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 20 μονάδες.

1. Να βρείτε την εξίσωση κύκλου του οποίου το κέντρο βρίσκεται πάνω στην ευθεία y=x , έχει ακτίνα $R=2\sqrt{2}$, και περνά από την αρχή των αξόνων Ο. Αν ο κύκλος αυτός τέμνει επίσης τον άξονα των x στο Α και τον άξονα των y στο Β να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου αυτού στα σημεία Α και Β. Να δείξετε ότι αυτές οι εφαπτομένες είναι παράλληλες προς την y=x.

2. Δίνονται οι καμπύλες $y=x^2$ και $y=8-x^2$.
(α) Να κάμετε τις γραφικές τους παραστάσεις στους ίδιους άξονες. (Να βρείτε τα ακρότατα, τα σημεία τομής τους με τους άξονες και τα σημεία τομής των δυο καμπύλων).

(β) Αν το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες αυτές και τον άξονα των y και που βρίσκεται στο α΄ τεταρτημόριο, περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των y να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

3. Δίνεται η $y=\dfrac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}$, $0<x\leq\dfrac{\pi}{2}$
(α) Να δείξετε ότι η πιο πάνω συνάρτηση ισούται με $y=\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ και να βρείτε το $\int y dx$.
(β) Να δείξετε ότι $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}$ και να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{\eta\mu x}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $y=\dfrac{Kx^2+8}{Kx^2-8}$
(α) Αν οι κατακόρυφες ασύμπτωτοι είναι x=±2 να βρείτε την τιμή του Κ.
(β) Αφού βρείτε την τιμή του Κ να κάμετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης (ασύμπτωτες, ακρότατα, σημεία τομής με τους άξονες).
(γ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την πιο πάνω καμπύλη και την ευθεία y=-3.

5. Δίνεται το διώνυμο $\left(\alpha+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^8$
(α) Ποιος όρος του αναπτύγματος είναι ανεξάρτητος του α;
(β) Αν ο όρος αυτός είναι ο 1120 να βρείτε την τιμή του β (β>0).
(γ) Αν T_4 ο τέταρτος όρος του αναπτύγματος $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int\frac{T_4\cdot e^x}{56x}dx$$

6. Αν $y=\eta\mu\left(2\tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{1}{x}\right)$,
(α) Να δείξετε ότι $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$
(β) Να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της y στο σημείο (1,1) και την εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

7. Από 4 μαθητές της Α΄ Τεχνικής Λευκωσίας και 4 μαθητές της Α΄ Τεχνικής Λεμεσού θα σταλεί αντιπροσωπεία 5 μαθητών στην Ελλάδα. Πόσες τέτοιες

αντιπροσωπείες μπορούν να σχηματιστούν αν κάθε Τεχνική Σχολή πρέπει οπωσδήποτε να αντιπροσωπευτεί τουλάχιστο με 1 (ένα) μαθητή.

Λύσεις:

1. Έστω Κ: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ η ζητούμενη εξίσωση

Το Κ(α, β) βρίσκεται πάνω στην y=x

$\Rightarrow \beta=\alpha \qquad (1)$

(0, 0) είναι σημείο του κύκλου $\Rightarrow$

$\alpha^2+\beta^2= R^2 \qquad (2)$

$R=2\sqrt{2} \qquad (3)$

Από (1), (2) και (3) $\Rightarrow$

$\alpha^2+\alpha^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 2\alpha^2=8 \Rightarrow \alpha=\pm 2$

Από (1) και $\alpha=\pm2 \Rightarrow \beta=\pm2$

Ώστε η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου είναι:

K_1: $(x-2)^2+(y-2)^2=8 \Rightarrow K_1$: $x^2+y^2-4x-4y=0$

ή

ή

K_2: $(x+2)^2+(y+2)^2=8 \Rightarrow$

K_2: $x^2+y^2+4x+4y=0$

Ο K_1 βρίσκεται προφανώς στο α΄ τεταρτημόριο και ο K_2 στο γ΄ τεταρτημόριο.

Ο K_1 τέμνει τον x΄x στο Α $\Rightarrow x^2+0-4x-0=0$

$\Rightarrow x=0,\ x=4 \Rightarrow$ Α(4, 0)

Ο K_1 τέμνει τον y΄y στο Β $\Rightarrow y^2-4y=0 \Rightarrow$

y=0, y=4 $\Rightarrow$ Β(0, 4)

Εξίσ. εφαπτ. στο (x_1,y_1):

$x_1x+y_1y+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$ του κύκλου $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

Εξίσ. εφαπτ. στο Α:

ε_1 : $4x+0y=2(x+4)-2(y+0)=0$

ε_1 : $2x-2y-8=0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon1}=-\dfrac{2}{-2}=1$

Εξίσ. εφαπτ. στο Β:

ε_1 : $0x+4y-2(x+0)-2(y+4)=0$

ε_2 : $-2x+2y-8=0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon2}=-\dfrac{-2}{2}=1$

Η ευθεία ε:y=x έχει κλίση λ=1

Επειδή $\lambda_{\varepsilon1}=\lambda_{\varepsilon2}=\lambda=1 \Rightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon$

2. $y=x^2$ και $y=8-x^2$

(α) $y=x^2$

$x=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0)$

$y'=2x,\ y'=0 \Rightarrow x=0$

x	-∞	0	+∞
y'	-	0	+
y	↘	∪ min(0,0)	↗

$y=8-x^2$

$x=0 \Rightarrow y=8 \quad (0,8)$

$y=0 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$

$(-2\sqrt{2},0),(2\sqrt{2},0)$

$y'=-2x,\ y'=0 \Rightarrow x=0$

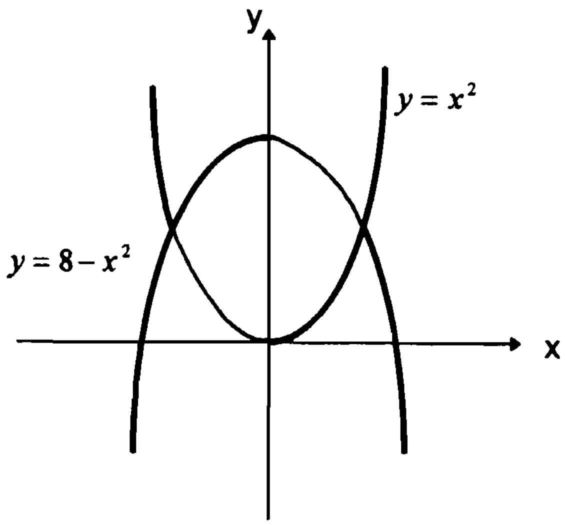
x	-∞	0	+∞
y'	+	0	-
y	↗	max(0,8)	↘

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=8x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=8-x^2 \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow$$

$$x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

(2,4),(-2,4) τα κοινά σημεία των δύο καμπύλων

(β)



$$V_y=\pi\int_0^4 x_1^2dy+\pi\int_4^8 x_2^2dy$$

$$=\pi\int_0^4 ydy+\pi\int_4^8(8-y)dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4+\pi\left[8y-\frac{y^2}{2}\right]_4^8$$

$$=\pi\left(\frac{16}{2}-0\right)+\pi\left[\left(64-\frac{64}{2}\right)-\left(32-\frac{16}{2}\right)\right]$$

$$=8\pi+8\pi=16\pi \quad \kappa.\mu.$$

3.

$$y=\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}},\quad 0<x\le\frac{\pi}{2}$$

(α)

$$y=\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}\cdot\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}=$$

$$\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\sqrt{(1-\sigma\upsilon\nu x)}}=\frac{\sqrt{\eta\mu^2 x}}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\int y dx=\int\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx=\int\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx=$$

$$ln|1-\sigma\upsilon\nu x|+c=ln(1-\sigma\upsilon\nu x)+c,$$

$$\left(1-\sigma\upsilon\nu x>0 \;\delta\iota o\tau\iota\; 0<x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

(β)

$$y=\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sigma\upsilon\nu x(1-\sigma\upsilon\nu x)-\eta\mu x.\eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu x}{(1-\sigma\upsilon\nu x)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2}=$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}$$

(Είναι φανερόν οτι $(\alpha-\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$
οπότε $(1-\sigma\upsilon\nu x)^2=(\sigma\upsilon\nu x-1)^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[(\sigma\upsilon\nu x-1)^{-1}\right]'=$$

$$-(\sigma\upsilon\nu x-1)^{-2}\cdot(-\eta\mu x)=$$

$$\frac{\eta\mu x}{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2}=\frac{1}{\eta\mu x}\Rightarrow$$

$$\eta\mu^2 x=\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x+1$$

$$\sigma\upsilon\nu x-1\neq 0,\ \eta\mu x\neq 0 \qquad\Rightarrow$$

$$1-\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x+2\sigma\upsilon\nu x-1=0\Rightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x-1)=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x-1\neq 0$$

$$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x=0$$

$$x=360^\circ K\pm 90^\circ$$

$$K\in Z$$

4. $y=\dfrac{Kx^2+8}{Kx^2-8}$

(α)

Κ.Α x=±2 ⇒ Κ.4-8=0 ⇒ Κ=2

$$\Rightarrow y=\frac{2x^2+8}{2x^2-8}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

x=0 ⇒ y=-1 , (0,-1) Το σημείο τομής με τον άξονα y΄y

y=0 ⇒ $x^2+4=0$ (ρίζες φανταστικές) ⇒ δεν τέμνει τον άξονα x΄x

x=±2 Κ.Α.

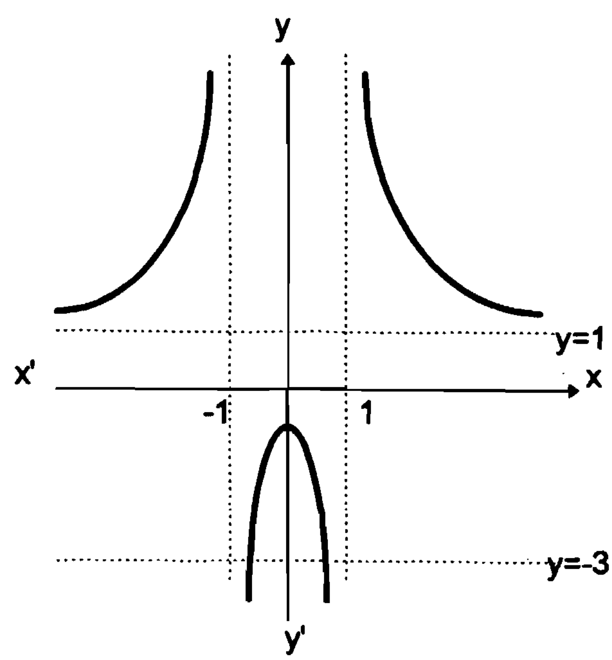
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1+0}{1-0}=1\Rightarrow$$

$y=1$ Ο.Α

$$y'=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+4)}{(x^2-4)^2}=\frac{-16x}{(x^2-4)^2}$$

$y'=0\Rightarrow x=0$

X		-2		0		2	
y'	+	‖	+	0	-	‖	-
y	↗		↗	∩	↘		↘



(γ)

$$\frac{x^2+4}{x^2-4}=-3 \Rightarrow x^2+4=-3x^2+12 \Rightarrow$$

$$4x^2=8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Τα σημεία τομής των y=-3 και

$y=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

είναι τα

$(\sqrt{2},-3)$, $(-\sqrt{2},-3)$

$$E=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(y_E-y_K)dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}3dx-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{x^2+4}{x^2-4}dx$$

$$=[3x]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1+\frac{8}{x^2-4}\right)dx$$

$$=[3x]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}-[x]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{8}{(x-2)(x+2)}dx$$

$$=[2x]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$=[2x]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}+\left[2ln|x-2|-2ln|x+2|\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)+\left(2ln\left|\sqrt{2}-2\right|-2ln\left|\sqrt{2}+2\right|\right)-$$
$$\left(2ln\left|-\sqrt{2}-2\right|-2ln\left|-\sqrt{2}+2\right|\right)$$

$$=4\sqrt{2}+2ln\left|2-\sqrt{2}\right|-2ln\left|2+\sqrt{2}\right|-$$
$$2ln\left|2+\sqrt{2}\right|+2ln\left|2-\sqrt{2}\right|$$

$$=\left(4\sqrt{2}+4ln\left|2-\sqrt{2}\right|-4ln\left|2+\sqrt{2}\right|\right)\ \tau.\mu.$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+4 & x^2-4 \\ \hline -x^2+4 & 1 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$\frac{8}{(x-2)(x+2)}\equiv\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$8\equiv A(x+2)+B(x-2)$$

$$x=2\Rightarrow 8=4A\Rightarrow A=2$$

$$x=-2\Rightarrow 8=-4B\Rightarrow B=-2$$

5. $\left(\alpha+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^8$

(α)

$$T_{K+1}=\binom{\nu}{K}A^{\nu-K}\cdot B^K$$

$$T_{K+1}=\binom{8}{K}\alpha^{8-K}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^K=$$

$$\binom{8}{K}\alpha^{8-K}\cdot\beta^K\cdot\alpha^{-K}=\binom{8}{K}\beta^K\cdot\alpha^{8-2K}$$

$$\alpha^{8-2K}=\alpha^0\Rightarrow 8-2K=0\Rightarrow K=4\Rightarrow$$

ο 5ος όρος είναι ανεξάρτητος του α.

(β)

$$\binom{8}{4}\beta^4=1120\Rightarrow\frac{8!}{4!4!}\beta^4=1120\Rightarrow$$

$$70\beta^4=1120\Rightarrow\beta^4=16\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta=\pm2\\ \beta>0\end{array}\right\}\Rightarrow\beta=2$$

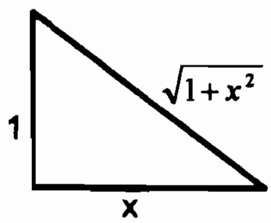
(γ)

$$T_4=T_{3+1}=\binom{8}{3}x^5\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot x^2=56x^2$$

$$\int\frac{56x^2.e^x}{56x}dx=\int x.e^x.dx=\int x.de^x=$$

$$x.e^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c$$

6. $y=\eta\mu\left(2\tau o\xi\varepsilon\phi\dfrac{1}{x}\right)$



(α)

$$\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{1}{x}=\alpha\Rightarrow\varepsilon\phi\alpha=\frac{1}{x}$$

$$y=\eta\mu 2\alpha=2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha=$$

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}=\frac{dy}{dx}\bigg|_{\substack{x=1\\ y=1}}=\frac{2-2}{(1+1)^2}=\frac{0}{4}=0$$

εξίσωση εφαπτομένης στο (1,1):

ε: $y-y_1=\lambda(x-x_1)$

ε: $y-1=0(x-1)$

ε: $y=1$

7.

Α΄Τεχν.Σχ.Ν/σίας	Α΄Τεχν.Σχ.Ν/σού
4	1
3	2
2	3
4	1

Το πλήθος των αντιπροσωπειών Ν είναι ίσο με:

$$N=\binom{4}{4}\cdot\binom{4}{1}+\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}+\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{4}$$

$$=2\binom{4}{4}\binom{4}{1}+2\binom{4}{3}\binom{4}{2}$$

$$=2\cdot 1\cdot 4+2\cdot\frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{4!}{2!2!}$$

$$=8+2\cdot\frac{3!4}{1.3!}\cdot\frac{2!3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 2!}$$

$$=8+\frac{\cancel{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 4}{\cancel{2}}=8+48=56$$