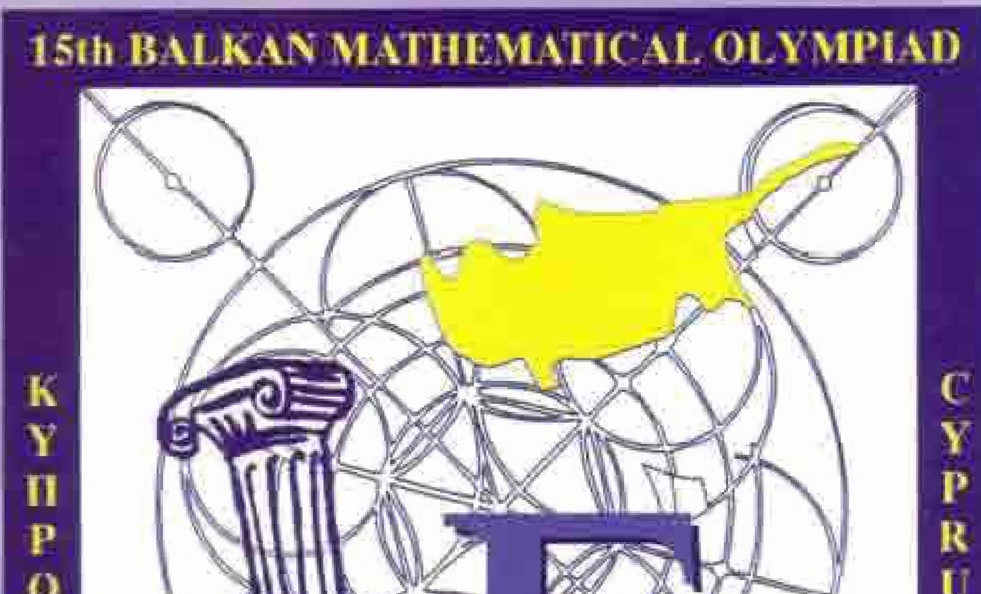
ΒΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ

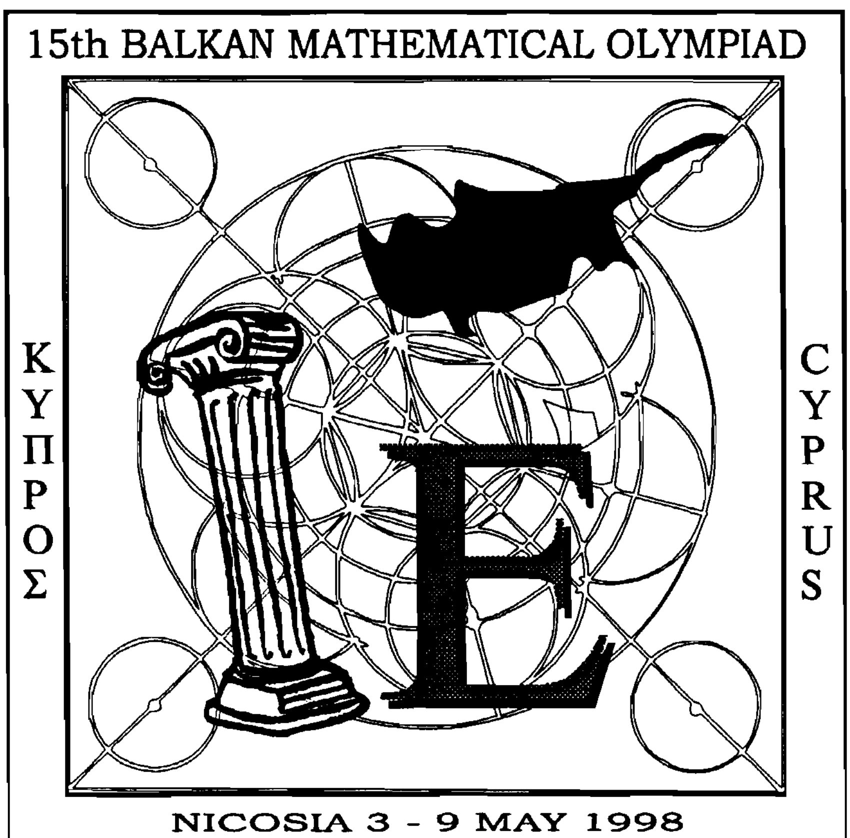


ΤΗΣ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΕ'
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1998
ΚΥ.Μ.Ε.

ΒΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ



ΤΗΣ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΕ'
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1998
ΚΥ.Μ.Ε.

Επιμέλεια έκδοσης
Γρηγόρης Μακρίδης
Ανδρέας Φιλίππου

Δακτυλογράφηση:
Georgiana's Typing & Copy Services

Ετήσια συνδρομή: £2.00
Ετήσια συνδρομή για το εξωτερικό: £6.00

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα έκδοση της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας η οποία είναι η 15η στη σειρά από το 1984 αποτελεί ακόμη ένα εργαλείο χρήσιμο για κάθε εκπαιδευτικό και μαθητή. Η έκδοση περιέχει όλους τους διαγωνισμούς που οργάνωσε η ΚΥ.Μ.Ε. κατά τη σχολική χρονιά 1997-98, τους διεθνείς διαγωνισμούς, όλες τις ενιαίες και απολυτήριες εξετάσεις, τις εισαγωγικές εξετάσεις για τα ανώτερα και ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα, ανακοινώσεις συνάδελφων Μαθηματικών και θέματα από εκδηλώσεις και συνέδρια.

Στόχος της ΚΥ.Μ.Ε. είναι η συνεχής βελτίωση της έκδοσης γι'αυτό φέτος το περιεχόμενο συμπεριλαμβάνει μεγαλύτερο αριθμό εξετάσεων με τις λύσεις τους ώστε μεγαλύτερος αριθμός μαθητών να μπορούν να βοηθηθούν. Η παρουσίαση άλλαξε από δίστηλη σε μονόστηλη για να μπορούν οι γραφικές παραστάσεις να παρουσιαστούν πιο βελτιωμένες.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία ενθαρρύνει τους συναδέλφους Μαθηματικούς να στέλνουν εργασίες τους οι οποίες θα είναι χρήσιμες για εκπαιδευτικούς και μαθητές και οι οποίες ανάλογα με το γενικό όγκο του περιεχομένου της έκδοσης αλλά και το θέμα της εργασίας δημοσιεύονται σε έκδοση του Μαθηματικού Βήματος.

Η έκδοση αυτή περιέχει σελίδα ανακοινώσεων για σεμινάρια και συνέδρια που πιθανόν να ενδιαφέρουν καθώς και έντυπα αιτήσεων για τακτικά και έκτακτα μέλη. Συμπεριλαμβάνει επίσης σελίδα αίτησης για μέλος της Αμερικάνικης Μαθηματικής Εταιρείας η οποία λόγω της συμφωνίας αμοιβαιότητας(reciprocity agreement) με την ΚΥ.Μ.Ε. μπορούν τα μέλη μας να επωφεληθούν εκπτώσεων. Οι σελίδες αυτές μπορούν να φωτοτυπηθούν και αφού συμπληρωθούν να σταλούν ταχυδρομικώς ανάλογα με την περίπτωση.

Τέλος σε ξεχωριστή σελίδα ανακοινώνουμε το νέο συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε. που εκλέγηκε στις 26 Σεπτεμβρίου 1998.

Δρ Γρηγόρης Μακρίδης
Πρόεδρος
Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Δεκέμβριος 1998

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Διοικητικό Συμβούλιο
της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας
Σεπτέμβριος 1998 – Σεπτέμβριο 2000

Πρόεδρος	:	Γρηγόρης Μακρίδης
Αντιπρόεδρος	:	Ανδρέας Σχοινής
Γενικός Γραμματέας	:	Σάββας Αντωνίου
Ταμίας	:	Μάριος Αντωνιάδης
Οργανωτικός Γραμματέας	:	Ανδρέας Αντωνίου
Βοηθός Ταμίας	:	Μάριος Ευσταθίου
Σύμβουλοι	:	Κλαίλια Σουρμελή-Σκοτεινού
		Αθανάσιος Γαγάτσης
		Χρίστος Παπαχριστοδούλου
		Ανδρέας Σαββίδης
		Ανδρέας Φαλάς
		Σάββας Ιωαννίδης
		Λοΐζος Λοΐζου
		Αλέξανδρος Δημητριάδης
		Ανδρέας Φιλίππου

Γραφεία: ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία, Κύπρος
Φαξ, Τηλ.: 00357-2-379122, Mob: 09-641843
e-mail: cms@cyearn.pi.ac.cy

Χαιρετισμός από τον Υπουργό Παιδείας και Πολιτισμού
κ. Λυκούργο Κάππα στη Τελετή Έναρξης
της 15ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας
8 Μαίου, 1998.

Με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση κηρύσσω την έναρξη των εργασιών της 15ης Βαλκανικής Ολυμπιάδας που έχουμε την τιμή να φιλοξενούμε στην Κύπρο και καλωσορίζω τους συνοδούς καθηγητές και τους μαθητές από τις φίλες βαλκανικές χώρες που συμμετάσχουν σ' αυτή. Η συμμετοχή σας στον καθιερωμένο αυτό ετήσιο θεσμό δίνει την ευκαιρία περαιτέρω σύσφιξης των φιλικών σχέσεων ανάμεσα στους μαθητές και τους καθηγητές των χωρών μελών και συμβάλλει στην αλληλοκατανόηση, τη συναντίληψη και τη συνεργασία μεταξύ τους, προϋποθέσεις απαραίτητες για την επικράτηση της πολυπόθητης ειρήνης στα Βαλκάνια αλλά και σ' ολόκληρο τον πλανήτη μας.

Μέσα από το διαγωνιστικό αυτό συναγωνισμό ενθαρρύνεται και προωθείται σημαντικά η ανέλιξη των παιδιών με ιδιαίτερη κλίση στα Μαθηματικά και καλλιεργούνται οι απαραίτητες εκείνες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες που προετοιμάζουν τη συμμετοχή των παιδιών αυτών στη διεθνή μαθηματική Ολυμπιάδα.

Τα Μαθηματικά, από την αρχαιότητα ως σήμερα αποτελούν βασικό μάθημα της ελληνικής παιδείας, που καλλιεργεί και επεκτείνει τη σκέψη και τη φαντασία, γι' αυτό τα Μαθηματικά έπαιξαν σημαντικότατο ρόλο στην κοινωνική αγωγή, αλλά και στην ανάπτυξη των επιστημών.

Ως γνήσιο δημιούργημα της ελληνικής διανόησης συνέτειναν στο να εκλείψουν οι δεισιδαιμονίες, τα δόγματα και οι δοξασίες. Ολόκληρο το οικοδόμημα της σύγχρονης μαθηματικής επιστήμης στηρίζεται πάνω στα γερά θεμέλια που έθεσαν οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι. Ο Θαλής ο Μιλήσιος έδωσε τα πρώτα στοιχεία των Μαθηματικών για να ακολουθήσει ο Πυθαγόρας, ο Πλάτωνας, ο Εύδοξος, ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης, ο Ερατοσθένης.

Οι Ελληνες μαθηματικοί εκτός από τις δυσκολίες από την επίλυση διαφόρων προβλημάτων αντιμετώπισαν με επιτυχία και το τεράστιο πρόβλημα δημιουργίας της μαθηματικής γλώσσας, με την οποία έπρεπε να καθορίζονται απόλυτα οι μαθηματικές έννοιες σε λέξεις. Η γεωμετρία των Ελλήνων, επίτευγμα του ελληνικού πολιτισμού επιδρά σε όλους τους μετέπειτα πολιτισμούς. Από αυτή διδάχτηκαν οι μεταγενέστεροι τη μαθηματική σκέψη και αυτή βοήθησε στην ανάπτυξη νέων επιστημών.

Η μαθηματική γλώσσα συνιστά ένα ιδεώδες μέσο για την έκφραση των φυσικών νόμων και οδηγεί συχνά στην ανακάλυψη νέων φυσικών φαινομένων. Έτσι χάρη σε μαθηματικούς υπολογισμούς ο Γάλλος αστρονόμος Leverrier ανακάλυψε το νέο πλανήτη Ποσειδώνα, προσδιορίζοντας επακριβώς τη θέση και την κίνησή του.

Η μαθηματική σκέψη διακρίνεται για την ακρίβεια, τη σαφήνεια, την ευκρίνεια του συλλογισμού και ιδιαίτερα για τη βεβαιότητα, σε αντίθεση με τις άλλες επιστήμες που τις χαρακτηρίζει η πιθανότητα γι' αυτό δίνει τη δυνατότητα στις επιστήμες να αντλούν από αυτή το υλικό για τη διατύπωση των θεωριών τους. Τα Μαθηματικά, ακόμη, συστηματοποιούν τη φυσική εμπειρία των αισθημάτων της πραγματικότητας συντονίζοντας φαινόμενα τελείως άσχετα εκ πρώτης όψεως.

Το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού δίνει ιδιαίτερη σημασία στα Μαθηματικά και επιδίωξή μας είναι η αναβάθμισή τους, η οποία επιδιώκεται με τον εκσυγχρονισμό και αναπροσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων όσο και με τη συγγραφή νέων σχολικών βιβλίων, καθώς και με τη διαρκή επιμόρφωση του διδακτικού προσωπικού. Για το λόγο αυτό αποδίδει την ανάλογη σημασία στους Παγκύπριους και τους Επαρχιακούς Διαγωνισμούς, που διοργανώνει η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, καθώς και στους Διεθνείς Διαγωνισμούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας και στους Διαγωνισμούς Μαθηματικής Βαλκανιάδας.

Τελειώνοντας, συγχαίρω θερμά τους διοργανωτές και εύχομαι στους συμμετέχοντες καλή διαμονή στην Κύπρο. Ελπίζω ότι στην επόμενη διοργάνωση θα είμαστε στην ευχάριστη θέση να σας φιλοξενήσουμε σ' ολόκληρη την Κύπρο που ενωμένη και αδιαίρετη να ευημερεί με όλους τους κατοίκους της.

Χαιρετισμός του Υπουργού Εσωτερικών κ. Ντίνου Μιχαηλίδη
στην τελετή λήξης της 15ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας
στο Intercollege, 8 Μαΐου 1998, 6.00 μ.μ.

Με ιδιαίτερη χαρά απευθύνω χαιρετισμό στην τελετή λήξης της 15ης Μαθηματικής Ολυμπιάδας , που φιλοξένησε και οργάνωσε φέτος η Κύπρος. Προς όλους τους μαθητές που πήραν μέρος στη Μαθηματική Ολυμπιάδα και ιδιαίτερα προς εκείνους που διακρίθηκαν σ' αυτή, εκφράζω τα θερμά μου συγχαρητήρια. Χαιρετίζω με ικανοποίηση την παρουσία μαθητών και συνοδών καθηγητών από τις φίλες Βαλκανικές χώρες, εκφράζοντας την πεποίθηση ότι η παραμονή τους στο νησί μας υπήρξε χρήσιμη, ευχάριστη και παραγωγική.

Θέλω, στο σημείο αυτό, να συγχαρώ θερμά όλους τους φορείς που εργάστηκαν για τη διοργάνωση της Ολυμπιάδας ή συνέβαλαν με το δικό τους τρόπο στην επιτυχή διεξαγωγή της. Συγχαρητήρια απευθύνω προς την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία και το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, προς το Intercollege, το Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Κύπρου και το Τμήμα Μέσης Εκπαίδευσης του Υπουργείου Παιδείας.

Η φετινή Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα αποτέλεσε ένα ακόμη βήμα στην εδραίωση του ωραίου αυτού ετήσιου θεσμού και συνέβαλε στην περαιτέρω προαγωγή των σκοπών και επιδιώξεών του. Μεταξύ άλλων, η διεξαγωγή της Ολυμπιάδας δημιούργησε ευγενή άμιλλα και συναγωνισμό ανάμεσα στους προικισμένους στα μαθηματικά μαθητές, δίνοντας τους ενθάρρυνση και κίνητρα για την παραπέρα πρόοδο και ανέλιξή τους. Επίσης, συνέβαλε στην οικοδόμηση φιλικών σχέσεων ανάμεσα στους μαθητές και τους καθηγητές των χωρών που συμμετείχαν, προάγοντας, έτσι, ένα ευρύτερο στόχο, εκείνο της εδραίωσης της συνεργασίας και της ειρήνης στην περιοχή των Βαλκανίων.

Ο διαγωνισμός έδωσε, εξάλλου, την ευκαιρία για ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα στις χώρες-μέλη πάνω σε ένα φάσμα θεμάτων γύρω από τα μαθηματικά, όπως είναι τα αναλυτικά προγράμματα και άλλα συναφή θέματα. Τέλος, ο διαγωνισμός συνέβαλε στην απόκτηση εμπειριών και στην καλύτερη προετοιμασία για συμμετοχή στην προσεχή Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.

Όλοι εσείς διακρίνεστε για την αγάπη σας προς τα μαθηματικά και για τη συνεχή προσπάθεια για καλλιέργεια της μαθηματικής γνώσης και σκέψης. Γι' αυτό δεν προτίθεμαι να αναφερθώ στη μεγάλη σημασία των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή του ανθρώπου, ούτε στο σημαντικότατο ρόλο που τα μαθηματικά διαδραματίζουν στην κοινωνική πρόοδο και στην ανάπτυξη των επιστημών.

Θέλω, μόνο, καταλήγοντας, να ευχηθώ σε όλους κάθε επιτυχία, συνεχή πρόοδο και επίτευξη των ευγενών στόχων και επιδιώξεών σας. Η δική μας ευχή είναι, επίσης, να έχουμε την ευκαιρία και τη μεγάλη χαρά να φιλοξενήσουμε μια νέα Μαθηματική Ολυμπιάδα κάτω από καλύτερες συνθήκες, με την πατρίδα μας ελεύθερη και ενωμένη, με μια Κύπρο γέφυρα ειρήνης, συνεργασίας και αλληλοκατανόησης για όλους τους λαούς της περιοχής.

Ομιλία του Προέδρου της ΚΥ.Μ.Ε κου Γλαύκου Αντωνιάδη
κατά την τελετή λήξης της 15ης Β.Μ.Ο.
8 Μαίου, 1998.

Είχαμε τη Δευτέρα 3 του Μάη αρχίσει το ουσιαστικό μέρος της 15ης Β.Μ.Ο. που δεν ήταν τίποτε άλλο από τη διαδικασία για την επιλογή των θεμάτων που θα έγραφαν οι μαθητές.

Απλά και εύκολα πράγματα θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί. Όμως τα πράγματα δεν είναι τόσον εύκολα όσο τα φαντάζεται κάποιος. Η αλήθεια είναι πως μπορέσαμε να καταλήξουμε στην επιλογή των θεμάτων, αφού είχαμε αρχίσει στις 8:30 το πρωί, μόλις στις 5 το απόγευμα. Είχαμε φυσικά διακόψει για φαγητό.

Οι συνάδελφοι αρχηγοί των διαφόρων αποστολών, όλοι ανεξαίρετα, εργάστηκαν με ζήλο αγάπη και υπευθυνότητα για το θέμα τους και με πλήρη κατανόηση των διαφόρων αναγκών που προέκυπταν. Χάρη στη σωστή δουλειά και προετοιμασία όλων, αλλά κυρίως χάρη στις μεγάλες ικανότητες και τη βαθιά γνώση των διαδικασιών που είχε ο συνάδελφος , αρχηγός της Κυπριακής αντιπροσωπείας, δρ. Γρηγόρης Μακρίδης, μπορέσαμε να καταλήξουμε στην επιλογή των θεμάτων, χωρίς την παραμικρή δυσαρέσκεια ή οποιανδήποτε άλλη αντιπαλότητα ανάμεσα στους φίλους αρχηγούς των αποστολών.

Μετά την επιλογή των θεμάτων χρειαστήκαμε άλλες 3 ώρες για τη μετάφραση και εκτύπωση στη γλώσσα της κάθε χώρας μέλους. Οι συνάδελφοι αρχηγοί των αποστολών εργάστηκαν με ζήλο και υπευθυνότητα και θεωρώ πως όλοι τους είναι άξιοι συγχαρητηρίων.

Ο διαγωνισμός έγινε την Τρίτη το απόγευμα με κάθε υπευθυνότητα και ακρίβεια στο προκαθορισμένο χρονοδιάγραμμα. Οι επιτηρητές συνάδελφοι, μαθηματικοί ή φοιτητές του μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου της Κύπρου ήσαν πολύ καλοί και ακριβείς στην ώρα τους και τους ευχαριστώ όλους.

Τα γραπτά φυλάχτηκαν και παραδόθηκαν για διόρθωση την Πέμπτη.

Διορθωτές ήσαν οι πανεπιστημιακοί δρες:
Γιώργος Σμυρλής, Γιώργος Κυριαζής, Νίκος Παπαδάτος, Νίκος Στυλιανόπουλος και οι καθηγητές μέσης Δημήτρης Ιωαννίδης, Παντελής Ζαμπυρίνης, Δημήτρης Καραντάνος, Θεόκλητος Παραγιός, Τηλέμαχος Ιωάννου και Μάριος Αντωνιάδης. Αυτοί οι άνθρωποι εργάστηκαν από τις 9 το πρωί μέχρι τις 4 το απόγευμα με μια μικρή διακοπή για φαγητό και έκαναν τόσο καλή δουλειά ώστε δεν υπήρξε παρά μόνο μια διαφωνία στη βαθμολόγηση. Γενικός υπεύθυνος-συντονιστής της ομάδας των διορθωτών ήταν ο καθηγητής του πανεπιστημίου Κύπρου Παντελής Δαμιανού. Τους ευχαριστώ όλους και τους εύχομαι κάθε καλόν.

Ακόμη πρέπει να ευχαριστήσω το τμήμα μέσης εκπαίδευσης και το διευθυντή του φίλο Γιώργο Πουλλή, που έδωσαν άδεια στους πιο πάνω εκπαιδευτικούς μέσης καθώς και σε άλλους για να μας βοηθήσουν.

Το γεγονός είναι, πως εμείς στην ΚΥ.Μ.Ε. εργαζόμαστε και προσφέρουμε όσα και ό,τι μπορούμε. Όμως αν δεν είχαμε τη ηθική και υλική υποστήριξη του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού είναι πιθανόν ή μάλλον είναι βέβαιο πως δεν θα μπορούσαμε να αντεπεξέλθουμε στις διάφορες υποχρεώσεις μας. Γι αυτό και ευχαριστώ το γενικό διευθυντή του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού δρ. Ανδρέα Φυλακτού για την πολυσχιδή βοήθεια που πάντοτε μας προσφέρει.

Συνήθως μας ρωτούν πολλοί για το πόση επιτυχία έχει η Κυπριακή ομάδα στις διάφορες διοργανώσεις, δηλαδή στην Β.Μ.Ο ή τη Δ.Μ.Ο. Αναμένουν, αφελώς βέβαια, πως θα έπρεπε να έχουμε επιτυχίες και μάλιστα μεγάλες. Δυστυχώς τα πράγματα δεν είναι έτσι. Συνήθως η απόδοση των παιδιών μας είναι συγκριτικά πολύ καλή, όμως αυτό το συγκριτικά, υποδεικνύει πως σε απόλυτους αριθμούς δεν έπρεπε να παίρνουμε ούτε καν χάλκινο μετάλλιο. Πρέπει να υπάρχουν κάποιες, πολύ ειδικές συνθήκες για να έχουμε επιτυχίες, πράγμα που συνέβηκε φέτος που έχουμε εξασφαλίσει 2 αργυρά μετάλλια ένα χάλκινο και ένα ειδικό έπαινο.

Οι κύριοι λόγοι για τους οποίους δεν είναι δυνατό να συναγωνιστούμε τις άλλες χώρες είναι:

α. Μικρός πληθυσμός
β. Αναλυτικό πρόγραμμα μαθηματικών στα σχολεία μας (Λίγες περίοδες μαθηματικών που έχουν μικρή ή καθόλου σχέση με τα θέματα των Β.Μ.Ο ή των Δ.Μ.Ο.
γ. Οι μαθητές μας την εποχή αυτή, Μάιο- Ιούνιο βρίσκονται υπό την πίεση των εισαγωγικών ή άλλων εξετάσεων που είναι καθοριστικές για το μέλλον τους.

Έτσι δείχνουν μικρό ή καθόλου ενδιαφέρον για να προετοιμαστούν για την Β.Μ.Ο. ή τη Δ.Μ.Ο. Φέτος κατά καλή μας τύχη τρεις μαθητές μας έχουν εξασφαλίσει θέση αλλού και δεν θα παρακαθίσουν στις εισαγωγικές εξετάσεις, γι' αυτό και μπόρεσαν να παρακολουθήσουν βοηθητικά μαθήματα πάνω στα θέματα της Βαλκανιάδας και γι' αυτό και πήραμε τα βραβεία που πήραμε. Ελπίζουμε και ευχόμαστε πως με την προετοιμασία και τα μαθήματα που θα τους δοθούν κατά τη διάρκεια του καλοκαιρινού μαθηματικού σχολείου θα μπορέσουν να αποδώσουν εξίσου καλά και στη Δ.Μ.Ο.

Την πιο μεγάλη επιτυχία στη Β.Μ.Ο. είχε φέτος η ομάδα της Βουλγαρίας. Τα παιδιά που πήραν μέρος, καθώς και τους συνοδούς καθηγητές, συγχαίρω με όλη μου τη ψυχή και εύχομαι στα παιδια μια καλή και αποδοτική σταδιοδρομία.

Εξαιρετική ήταν επίσης η απόδοση των ομάδων της Γιουγκοσλαβίας, της Ρουμανίας της Μολδαβίας και της Ελλάδας. Πολύ καλή της Αλβανίας και της Πρώην Γιουγκοσλαβικής Δημακρατίας της Μακεδονίας. Κάποια παιδιά δεν μπόρεσαν να διακριθούν. Σίγουρα όλοι ήθελαν να διακριθούν όμως *"ου το νικάν αλλά το εν αγωνίζεσθαι»*. Απλώς και μόνον ,το ότι τα παιδιά αυτά έφθασαν μέχρι τη Βαλκανιάδα δείχνει τη μεγάλη τους ικανότητα και το ενδιαφέρον τους για το μάθημα. Όλα τα απιδιά που πήραν μέρος στη 15η Β.Μ.Ο. είναι άξια συγχαρητηρίων. Το ίδια φυσικά ισχύει για τους καθηγητές τους που τους προετοίμασαν.

Στη 15η Β.Μ.Ο. είχε, σύμφωνα με τους κανονισμούς , και μετά από συνεννόηση με το Υ. Εξωτερικών, προσκληθεί να πάρει μέρος και η Τουρκία. Δυστυχώς δεν ήλθε και χθες μόλις, πήραμε δια μέσου της Ε.Μ.Ε. FAX από τον πρόεδρο της Τουρκικής Μαθηματικής Εταιρείας στο οποίο αναφέρει πως η κυβέρνηση τους, τους είπε πως δεν είχαν πάρει επίσημη πρόσκληση για να πάρουν μέρος στη 15η Β.Μ.Ο. Να μου επιτρέψετε να μη σχολιάσω τη δικαιολογία αυτή.

Η 16η Β.Μ.Ο. θα οργανωθεί από το F.Y.R.O.M. και η 17η από τη Δημοκρατία της Μολδαβίας. Επίσημη αναφορά και πρόσκληση για συμμετοχή θα γίνει από τον αρχηγό της ομάδας του F.Y.R.O.M.

Ευχαριστώ το Intercollege για την οικονομική και την τεχνική βοήθεια που μας πρόσφερε και την υπεύθυνη των δημοσίων σχέσεων του , κ Βούλα Μακρίδου για την τόσο πολύτιμη βοήθειά της.

Ευχαριστώ τον εξοχώτατο Υπουργό Εσωτερικών κ. Ντίνο Μιχαηλίδη για την καλωσύνη του να έλθει εδώ να παρευρεθεί και να χαιρετίσει τη μικρή αυτή τελετή για τη λήξη της Βαλκανιάδας Μαθηματικών

Ευχαριστώ τέλος όλους εσάς που είχατε την υπομονή να με ακούσετε.

ΜΑΙΟΣ 1998

Ομιλία του Προέδρου της ΚΥ.Μ.Ε κου Γλαύκου Αντωνιάδη κατά την τελετή απονομής βραβείων σε όσους διακρίθηκαν στους διαγωνισμούς της ΚΥ.Μ.Ε. Ιούνιος, 1998.

Εδώ σήμερα, έχουμε μαζευτεί όλοι μας για να βραβεύσουμε να επαινέσουμε και να συγχαρούμε τους μαθητές μας που διακρίνονται στα Μαθηματικά .

Εδώ σήμερα έχουμε μπροστά μας παιδιά από όλη την Κύπρο που στο μέλλον, να είσαστε βέβαιοι, θα αποτελέσουν, μαζί με άλλους βέβαια, την ηγέτιδα τάξη του τόπου μας.

Αυτά τα παιδιά έχουν κουραστεί, έχουν μελετήσει, και έχουν διακριθεί στα Μαθηματικά και πιστεύουμε πως θα συνεχίσουν να ξεχωρίζουν και να μαζεύουν διακρίσεις και επαίνους.

Ξέρουμε όλοι μας βέβαια, πως τα μαθηματικά είναι εντελώς απαραίτητα για τη σωστή κατανόηση πάρα πολλών θεμάτων, είτε επιστημονικών, είτε της καθημερινής ζωής.

Ξέρουμε όλοι μας βέβαια, πως τα μαθηματικά χαίρουν παγκόσμιας εκτίμησης και πως μια καλή επίδοση σε αυτά θα έχει πολύ καλή επίδραση στην μετέπειτα πορεία όσων διακρίνονται σε αυτά. Όμως, γιατί πάντα υπάρχει ένα *όμως* , "ουκ επ' άρτω μόνον ζήσεται άνθρωπος". Δεν μπορούν δηλαδή τα Μαθηματικά και μόνον να γεμίσουν τη ζωή κάποιου όπως έλεγε κάποιος παλιός καθηγητής των μαθηματικών εμείς χρησιμοποιούμε συνήθως μόνον 6 γράμματα του αλφαβήτου τα α,β,γ, και χ,ψ,ω, (στη γεωμετρία χρησιμοποιούμε αρκετά παραπάνω όμως αυτό δεν αλλάζει τα πράγματα). Το αλφάβητο , έλεγε έχει 24 γράμματα και αν εμείς επιμένουμε μόνο στα 6 τότε αυτό πιθανό να σημαίνει πως έχουμε χάσει το τραίνο. Αυτό που λέω, πιθανόν να ακούγεται λίγο παράξενα, θα προσπαθήσω λοιπόν, να τα ξεκαθαρίσω σε συντομία.

Τρέφουμε όλοι μας εδώ στην αίθουσα αυτή πολύ μεγάλη εκτίμηση στα μαθηματικά. Δεν πρέπει όμως να είμαστε μονόπλευροι και να ζούμε με παρωπίδες. Βρισκόμαστε σε ένα κόσμο σε διαρκή εξέλιξη και πρέπει να μπορούμε να επικοινωνούμε με τους συνανθρώπους μας και να αντιλαμβανόμαστε τι γίνεται γύρω μας. Σίγουρα τα μαθηματικά θα μας βοηθήσουν να ξεχωρίσουμε το ουσιώδες από το επουσιώδες, το άξιον λόγου από το μη άξιον, και κυρίως θα μας μάθουν να βγάζουμε λογικά συμπεράσματα, μέσα από λογικά δεδομένα βέβαια. Για να γίνουν όμως όλ' αυτά, πρέπει να ξέρουμε πάρα πολύ καλά τη γλώσσα μας, έτσι ώστε να μπορούμε να επικοινωνούμε σωστά με τους γύρω μας, να μπορούμε τόσο να ενημερωνόμαστε, όσο και να είμαστε σε θέση να κάνουμε τους άλλους κοινωνούς των δικών μας σκέψεων, επιθυμιών και τοποθετήσεων. Η πρώτη μας δηλαδή φροντίδα θα πρέπει να είναι η πολύ καλή μάθηση της μητρικής μας γλώσσας , έτσι ώστε να μπορούμε πάντοτε να την χρησιμοποιούμε σωστά σαν όργανο αλληλοενημέρωσης και επικοινωνίας. Η καλή γνώση της Νέας Ελληνικής θα μας βοηθήσει στη σωστή κατανόηση πολλών προβλημάτων που θα εμφανίζονται κατά την πορεία μας, μέσα στον κόσμο.

Είναι φανερό πως μια γλώσσα δεν μπορεί να γίνει κτήμα κάποιου μέσα από τη γραμματική και το συντακτικό παρά μόνο μέσα από το συνεχές διάβασμα κειμένων λογοτεχνίας. Το πρόβλημα της σωστής μάθησης της γλώσσας είναι πολύ οξύ για μας τους Κυπρίους που έχουμε μπροστά μας τα Κυπριακά τα Νέα την καθαρεύουσα και τις διάφορες μορφές των πιο παλιών Ελληνικών. Οι περισσότεροι νομίζουν πως αν αλλάξουμε τις καταλήξεις ις-εως σε η-ης, τάξις τάξεως, σε τάξη τάξης τότε μπορούν αυτόματα να γράφουν δημοτική αντί καθαρεύουσα και ακούμε καθημερινά αμέτρητες φορές να κακοποιείται άγρια η γλώσσα μας. Αυτό μου θυμίζει κάτι που μας είπε ο συνάδελφος ταμίας της Ε.Μ.Ε. κ Αδάμ . Αυτός κατάγεται από τη Νάξο όπου και χρησιμοποιούν πολλά τσ ,τζ κλπ. Είπε λοιπόν ο δάσκαλος στα παιδιά να αντικαθιστούν αυτά τα τσ , τζ με το κ για να μιλούν έτσι όπως τους Αθηναίους. Όμως ο δάσκαλος δεν κατάλαβε τι του είπε μια μικρή όταν του ανάφερε πως " κύριε, μπήκε η **κακίκα** μας στο διπλανό περιβόλι και έκανε ζημιές". Κατσίκα ήθελε βέβαια να πει η μικρή που την μετέτρεψε σε κακίκα για να μιλήσει όπως τους Αθηναίους. Έτσι ακριβώς θα καταντήσουμε και μείς με τα διάφορα Αγλαγγιά , Λακκιά κλπ.

Είναι πίστη μου βαθιά πως χωρίς καλή γνώση των Νέων Ελληνικών, μιλώ φυσικά για μας τους Έλληνες είναι αδύνατο να έχει κάποιος μια σωστή μαθηματική παιδεία. Γιατί στο κάτω-κάτω πως θα αντιλαμβάνεται τι μελετά;

Αν τώρα κάποιος από μας θελήσει να προχωρήσει σε πιο βαθιά μελέτη της επιστήμης του, τότε , είτε το θέλουμε είτε όχι , θα πρέπει αυτός ο κάποιος να κάνει κτήμα του την Αγγλική γλώσσα .

Μετά τον δεύτερο μεγάλο πόλεμο, έχει, η Αγγλική γλώσσα επικρατήσει σε όλο τον κόσμο. Πραγματοποίησε η Αγγλική το όνειρο της "Εσπεράντο" της παγκόσμιας γλώσσας που ονειρεύονταν διάφοροι ιδεαλιστές στη διάρκεια του μεσοπολέμου. Είναι δε η Αγγλική όχι μόνο ένα μέσο συνεννόησης για όλο τον κόσμο παρά και, κυρίως, η γλώσσα στην οποίαν υπάρχουν γραμμένα κατευθείαν στην Αγγλική είτε είναι μεταφρασμένα σε αυτήν τα περισσότερα επιστημονικά συγγράμματα. Ώστε αν κάποιος θελήσει να μάθει καινούρια, πρωτάκουστα πράγματα που αφορούν τη επιστήμη του, αυτό θα το επιτύχει δια μέσου της Αγγλικής. Θυμάμαι στις αρχές της δεκαετίας του 70 που οι Σουηδοί αποφάσισαν πως η μετεκπαίδευση σε ιατρικά θέματα στη χώρα τους θα γινόταν στην Αγγλική γιατί μόνο σ' αυτήν υπήρχαν γραμμένες όλε οι νεώτερες ανακαλύψεις. Και αν διερωτηθούμε γιατί να είναι όλα γραμμένα στην Αγγλική, ιδού η απάντηση. Αυτό συμβαίνει όχι μόνο γιατί σήμερα την έχουν για μητρική τους γλώσσα περίπου μισό δισεκατομμύριο άνθρωποι όχι μόνο γιατί αυτή είναι η δεύτερη γλώσσα μετά τη μητρική για άλλο ένα δισεκατομμύριο ανθρώπους, παρά, κυρίως, γιατί το επιστημονικά προηγμένο δυναμικό του πλανήτη μας είναι σε αυτήν που μορφώθηκε και είναι σε αυτήν που γράφει. Ώστε, αν κάποιος από εμάς εδώ θέλει να βγάλει λογικά συμπεράσματα είναι φανερό πως θα παραδεχτεί πως η καλή γνώση της Αγγλικής είναι εντελώς απαραίτητη για ένα μέλλοντα σοβαρό μελετητή και επιστήμονα.

Τώρα θα ήθελα να μιλήσω και πάλιν για το, κατά τη γνώμη μου, πιο σοβαρό πρόβλημα που έχουμε στη Μέση Εκπαίδευση του τόπου μας και εστιάσω τη συζήτηση στα μαθηματικά.

Σίγουρα το πιο σοβαρό μας πρόβλημα είναι ***η δυσαρμονία που υπάρχει ανάμεσα στις ικανότητες των μαθητών και στην ύλη που επιλέγουν να μάθουν.*** Όλοι όσοι διδάσκουμε σε τμήματα με επιλεγόμενο μάθημα τα μαθηματικά , έχουμε άγρια ταλαιπωρηθεί από τη σωρεία των μαθητών που σχεδόν δεν καταλαβαίνουν τι τους λέμε και που συνωστίζονται στα τμήματα με επιλεγόμενα μαθηματικά και που προσπαθούν βγάλουν κουτσα -στραβά το Λύκειο. Αυτό συμβαίνει σε πιο μικρό βαθμό στα τμήματα θετικής κατεύθυνσης και σε αρκετά πιο μεγάλο βαθμό στα τμήματα οικονομική κατεύθυνσης. Στα τμήματα αυτά η κατάσταση είναι σχεδόν τραγική. Το αναλυτικό πρόγραμμα έχει σχεδιαστεί για πού ικανούς έως ικανούς μαθητές. Δυστυχώς το επιλέγουν και από μέτριοι έως άσχετοι. Γιατί λένε έχουν το δημοκρατικό δικαίωμα της επιλογής. Όμως αυτό το κατά παρεξήγηση δημοκρατικό δικαίωμα της επιλογής εμποδίζει το δημοκρατικό δικαίωμα της μάθησης των άλλων μαθητών.

Κατά τη χρονιά που πέρασε αφαιρέθηκε αρκετή ύλη από τα μαθηματικά επιλογής και μπήκε ύλη της Β γυμνασίου, και δεν πρόκειται για κανένα κακόγουστο αστείο, αυτή είναι η πραγματικότητα. Λυπούμαι πολύ γι' αυτό που έγινε. Πιστεύω πως η λύση δεν βρίσκεται στην αφαίρεση ύλης. **ΟΧΙ.** Η λύση βρίσκεται στο να βρούμε τρόπους να εμποδίζουμε τους άσχετους από του να εγγράφονται σε τμήματα που δεν μπορούν να παρακολουθήσουν την ύλη τους. Και τρόποι υπάρχουν αρκετοί αρκεί να είμαστε έτοιμοι να τους εφαρμόσουμε χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη μας τις φωνές αυτών που κατά σύστημα επαγγέλλονται τον φτηνό συνήγορο του κάθε άσχετου. Γιατί αν συνεχίσουμε την αφαίρεση ύλης και άλλης ύλης είναι πού πιθανόν να μην διδάσκουμε καθόλου μαθηματικά γιατί οι άσχετοι θα είναι πάντοτε άσχετοι και αυτοί που "τείνουν εύηκοον ους" στις φωνασκίες τους θα συνεχίσουν πάντοτε να το κάνουν. Αυτά όμως δεν είναι σοβαρά πράγματα και δεν περιποιούν τιμή σε κανένα.

Πρέπει, είναι απαραίτητο, να παίρνουν ενισχυμένα μαθηματικά μόνον όσοι μπορούν, οι άλλοι ας παίρνουν μαθηματικά σε πιο χαμηλό επίπεδο τώρα που τους δίνεται η ευκαιρία με το Ενιαίο Λύκειο που ευχόμαστε να πάει μπροστά.

Η Μέση Εκπαίδευση είναι ένας ζωντανός οργανισμός με μεγάλο δυναμισμό και πολλές προοπτικές. Αφού είναι ζωντανός οργανισμός είναι φυσικό να παρουσιάζει σκαμπανεβάσματα, προβλήματα και κάποιες φορές δύσκολες καταστάσεις. Η Μέση Εκπαίδευση ή μάλλον η Εκπαίδευση γενικότερα είναι υπόθεση όλων μας και δεν είναι λογικό σήμερα να υποστηρίζουμε το Α και αύριο το Ω απλώς και μόνον γιατί σήμερα είμαστε κυβέρνηση και αύριο αντιπολίτευση ή το αντίστροφο. Η Εκπαίδευση είναι πολύ σοβαρή υπόθεση και συμβάλλει τα μέγιστα στο μέλλον του τόπου. Θα έπρεπε για την εκπαιδευτική πολιτική να υπάρχει ενα ελάχιστο πρόγραμμα κοινής αποδοχής από όλα τα κόμματα και να σταματήσουν τα θέματα που την αφορούν να αποτελούν πεδίο κομματικής διαπάλης και επίδειξης φτηνού λαικισμού. Θα έπρεπε όλα τα κόμματα να δώσουν τα χέρια και να πουν "θέλουμε να προσφέρουμε το καλύτερο είδος εκπαίδευσης στον Κύπριο μαθητή" και να κάτσουν κάτω μακριά από τη δημοσιότητα να οργανωθούν, να συζητήσουν, και όταν είναι μακριά από τη δημοσιότητα είναι βέβαιο πως θα βρουν κοινό έδαφος, και να μπορέσουν έτσι να αποφασίσουν τι πρέπει να γίνει για το καλό όλων μας. Ο κόμπος έφτασε στο χτένι και με δεδομένη τη σημερινή κατάσταση της ημικατεχόμενης πατρίδας μας πρέπει να παρθεί μια κοινή πολιτική για την εκπαίδευση . Ο καθένας πρέπει να σκεφτεί και να αναλάβει τις ευθύνες του.

Η ΚΥ.Μ.Ε. έχει να επιδείξει μεγάλο και πολύπλευρο έργο. Από χρόνο σε χρόνο οι δραστηριότητές μας επεκτείνονται και οι υποχρεώσεις μας μεγαλώνουν. Ζούμε και υπάρχουμε χάρη στην εθελοντική προσφορά, που χωρίς σκέψη για κόπο ή κούραση, προσφέρουν κάποια από τα μέλη μας και χάρη στη βοήθεια του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού και άλλων που μας βοηθούν υλικά και ηθικά.

Φέτος εκτός των άλλων υποχρεώσεων μας είχαμε και τη διοργανώσει της 15ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας η οποία και κύλησε άψογα χάρη στις οργανωτικές ικανότητες του συνάδελφου οργανωτικού μας γραμματέα δρ. Γρηγόρη Μακρίδη τον οποίον και ευχαριστώ. Στην 15η Β.Μ.Ο. διακρίθηκαν δυο μαθητές μας με αργυρό μετάλλιο, οι Εύης Ιερωνύμου και Δημήτρης Χριστοφίδης και ένας με χάλκινο ο Θεμιστοκλής Χαραλάμπους. Και τους τρεις μαθητές συγχαίρω ολόψυχα και στους τρεις καθώς και σε όλους τους άλλους εύχομαι κάθε επιτυχία στη ζωή τους.

Ευχαριστώ επίσης το Intercollege για την εν γένει προσφορά του. Ευχαριστώ το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο και το διευθυντή του φίλο δρ. Άδωνη Κωνσταντινίδη σε συνεργασία με το οποίο οργανώσαμε τη 15η Β.Μ.Ο. Ευχαριστώ το Υ.Π και Π και το γενικό διευθυντή του δρ. Ανδρέα Φυλακτού για τη βοήθεια που πάντοτε μας προσφέρει Τέλος ευχαριστώ τον Υπουργό Παιδείας και Πολιτισμού κ. Λυκούργο Κάππα για την αγάπη με την οποία μας περιβάλλει.

Ευχαριστώ επίσης όλους εκείνους που μας βοηθούν οικονομικά στη βράβευση των διαφόρων διαγωνισμών που διενεργούμε. Δηλαδή:

Την Τράπεζα Κύπρου που βραβεύει τους μαθητές που διακρίνονται στον Παγκύπριο διαγωνισμό για τις Β και Γ Λυκείου καθώς και την οικογένεια Μορφάκη από τη Λάρνακα που δίνει βραβεία για τον ίδιο διαγωνισμό.

Την Κ.Ε.Ο. που βραβεύει τους μαθητές της Γ Γυμνασίου που διακρίνονται στον παγκύπριο διαγωνισμό για την τάξη αυτή.
Την οικογένεια της μακαριστής συναδέλφου Ελένης Κανίκλη, την κα Ανδρούλλα Σκώττη , και τη συνάδελφο κα Μαρούλλα Χριστοδουλίδου που βραβεύουν επίσης μαθητές μας που διακρίνονται.

Τέλος ευχαριστώ τους συναδέλφους που μας έχουν τόσο βοηθήσει και όλους εσάς που είχατε την υπομονή να με ακούσετε.

ΙΟΥΝΙΟΣ 1998

Φωτογραφία απο την οργάνωση της 15ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας στη Κύπρο

Φωτογραφία απο τη συμμετοχή της Κυπριακής ομάδας στη 2η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 ετών που έγινε στην Ελλάδα.

Επιτυχία της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας σε διεθνείς διαγωνισμούς κατα το έτος 1998

Διεθνής Ολυμπιάδα Μαθηματικών (Taiwan)

- Εύης Ιερωνύμου (*χάλκινο μετάλλιο*)
- Δημήτρης Χριστοφίδης (*επαινο*)
- Θεμιστοκλής Χαραλάμπους (*έπαινο*)

Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές Λυκείων (Κύπρος)

- Εύης Ιερωνύμου (*αργυρό μετάλλιο*)
- Δημήτρης Χριστοφίδης (*αργυρό μετάλλιο*)
- Θεμιστοκλής Χαραλάμπους (*χάλκινο μετάλλιο*)
- Χριστόφορος Σωκράτους (*έπαινο*)

Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 ετών (Ελλάδα)

- Μαρίνα Λεμονάρη (*αργυρό μετάλλιο*)
- Κωνσταντίνος Ζαμπυρίνης (*αργυρό μετάλλιο*)
- Χριστίνα Σαββίδου (*χάλκινο μετάλλιο*)
- Αναστασία Τσακμάκη (*χάλκινο μετάλλιο*)
- Κωνσταντία Μιχαηλίδου (*χάλκινο μετάλλιο*)

Δραστηριότητες εντός του 1999
που ενδιαφέρουν Εκπαιδευτικούς, Φοιτητές και Μαθητές

11-15 Μαρτίου 1999
Eighth European MAVI Workshop on Mathematical Belief Research
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Φαξ: 2-339064
Email: ekyza@ucy.ac.cy

27 Ιουνίου – 2 Ιουλίου 1999
Καλοκαιρινό Μαθηματικό Σχολείο Αγρός
Τηλ: 2-778632 και 2-379122
Φαξ: 2-379122
Email: cms@cyearn.pi.ac.cy

22-23 Ιουλίου 1999
Innovative Uses of Technology for Mathematics Education
University of Haifa, Faculty of Education, Haifa 31905, Israel
Email: pmepre@construct.haifa.ac.il

25-30 Ιουλίου 1999
International Conference for the Psychology of Mathematics Education
Technion – Israel Institute of Technology, Ισραήλ
Φαξ: 972-4-8258071
Email: joop@tx.technion.ac.il

22 – 27 Αυγούστου 1999
International Symposium on Elementary Mathematics Teaching
Πραγα, Τσεχία
Theme: "How the world of mathematics emerges from everyday experiences of children"
Email: jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

Νοέμβριος 1999
16ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας
Τόπος και χρόνος θα ανακοινωθούν αργότερα.

3-5 Ιανουαρίου 2000
Β΄ Μεσογειακό Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Κύπρος
Τόπος και λεπτομέρειες θα ανακοινωθούν αργότερα.
Τηλ: 2-305935, 09-641843
Email: cms@cyearn.pi.ac.cy

ΑΡΙΣΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Επιμέλεια
Χαράλαμπος Λουγκρίδης, Β.Δ.
Λανίτειο Λύκειο Β΄

Πρώτοι οι αρχαίοι Έλληνες έδωκαν στους φυσικούς αριθμούς και άλλα ονόματα με βάση το άθροισμα των διαιρετών τους.

Οι Πυθαγόρειοι παρατήρησαν ότι υπάρχουν αριθμοί που ισούνται με το άθροισμα των γνησίων διαιρετών τους, όπως συμβαίνει π.χ. με το 6, ή το 28, ή το 496. (Γνήσιοι διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού α είναι οι διαιρέτες του α, που είναι μικρότεροι του).

Ο Ευκλείδης ανακάλυψε σχετικό θεώρημα για τη μορφή των τελείων «Αν $2^{\nu-1}$ είναι πρώτος αριθμός τότε ο $2^{\nu-1}\cdot(2^{\nu-1})$ είναι τέλειος».

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (1-2αι.μ.Χ.) ονόμασε <u>υπερτέλειο</u> τον άρτιο αριθμό που είναι μεγαλύτερος από το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του (π.χ. $4>1+2$, $8>1+2+4$ κ.α) και <u>ελλιπή</u> τον άρτιο αριθμό που είναι μικρότερος από το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του (π.χ. $12<1+2+3+4+6$, $18<1+2+3+6+9$).[1]

Υπερτέλειοι είναι οι αριθμοί που είναι των μορφών:[2]

1. 2^ν, $\nu\varepsilon N$, $\nu>2$
2. Κάθε άρτιος (πλην του τελείου 6) που αναλύεται σε γινόμενο δύο μόνο πρώτων παραγόντων (π.χ. 10=2.5, 14=2.7, 22=2.11).
3. Κάθε άρτιος α που αναλύεται σε γινόμενο τριών πρώτων παραγόντων, δηλ. $\alpha=2.\nu.\mu$ με $\nu\neq\mu$, ν, μ πρώτοι και για τους οποίους ισχύει επί πλέον η σχέση: $\nu\mu>3(\nu+\mu+1)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Για ν=5 και μ=11 έχουμε νμ=55 και $3(\nu+\mu+1)=51$, ισχύει δηλ. 55>51 άρα ο αριθμός α=2.5.11=110 είναι υπερτέλειος. Το επιβεβαιώνουμε βρίσκοντας το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του. Είναι $\Sigma=1+2+5+11+10+22+55=106$, οπότε $\alpha>\Sigma$.

Για τους ελλιπείς ισχύουν οι εξής δύο προτάσεις:[2]

1. Κάθε άρτιος αριθμός α μεγαλύτερος του 6 που είναι πολλαπλάσιο του 3 είναι ελλιπής.
   Η πρόταση αυτή μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:
   Κάθε αριθμός μεγαλύτερος του 6 που είναι πολλαπλάσιο του 6 είναι ελλιπής.
   <u>Απόδειξη</u>
   Ο α είναι της μορφής $\alpha=2.3.\nu$, $\nu\varepsilon N$ $\nu>1$. Οι γνήσιοι διαιρέτες του α είναι οι: 1, 2, 3, ν, 2ν, 3ν.
   Τότε $\Sigma=1+2+3+\nu+2\nu+3\nu = 6+6\nu = \alpha+6$, $\Rightarrow \alpha=\Sigma-6$, $\Rightarrow \alpha<\Sigma$ άρα ο α είναι ελλιπής.
   π.χ. οι αριθμοί: 12, 18, 24, 30, 36, 6ν $\nu\varepsilon N$ $\nu>1$ είναι ελλιπείς.
2. Κάθε άρτιος αριθμός α που αναλύεται σε γινόμενο 3 πρώτων παραγόντων (δηλ. της μορφής $\alpha=2.\nu.\mu.$ με $\nu\varepsilon N$, $\mu\varepsilon N$, $\nu\neq\mu$ και ν, μ πρώτοι) είναι ελλιπής αν ισχύει επί πλέον: $\nu\mu<3(\nu+\mu+1)$.

Παραδείγματα

α) Για ν=3 και μ=7 έχουμε νμ=21, 3(ν+μ+1)=33, ισχύει 21<33 άρα ο άρτιος αριθμός α=2.3.7 = 42 είναι ελλιπής.

β) Για ν=5 και μ=7 έχουμε νμ=35, 3(ν+μ+1)=39, ισχύει 35<39 άρα ο άρτιος α=2.5.7-70 είναι ελλιπής.

Σημαντική παρατήρηση

Ανάμεσα στους ελλιπείς αριθμούς βρήκα τον αριθμό 120, που έχει άθροισμα γνησίων διαιρετών το 240 που είναι διπλάσιο του 120.

Ονομάζω αυτόν τον αριθμό «άριστον».

Ορισμός: Άριστος λέγεται ο ελλιπής αριθμός που ισούται με το μισό του αθροίσματος των γνησίων διαιρετών του.

Γνήσιοι διαιρέτες του 120 είναι οι πιο κάτω 15 αριθμοί.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 60, 40, 30, 24, 20, 15, 12 για τους οποίους ισχύει.

Σ=1+2+3+4+5+6+8+10+12+15+20+24+30+40+60=240=2.120

Υπάρχει και δεύτερος άριστος αριθμός, ο 672, που έχει γνήσιους διαιρέτες τους πιο κάτω 23 αριθμούς, το άθροισμα των οποίων είναι 1344, διπλάσιο δηλ. του 672.

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 21, 24,

336, 224, 168, 112, 96, 84, 56, 48, 42, 32, 28

Ο συνάδελφος Γεώργιος Ιωάννου, καθηγητής του μαθήματος των Η.Υ. κατάρτισε πρόγραμμα στη γλώσσα Borland C++, με τη βοήθεια του οποίου μπορούμε να βρούμε τους αρίστους αριθμούς, αν υπάρχουν που είναι μεγαλύτεροι από κάποιο φυσικό αριθμό ν και μικρότεροι από κάποιον άλλο μ, δηλ. εκείνους που βρίσκονται σε δεδομένο διάστημα. Επισυνάπτεται το σχετικό πρόγραμμα.

Με αυτό βεβαιώνεται η ύπαρξη των αρίστων αριθμών 120 και 672. Συγχρόνως διαπιστώνεται ότι μέχρι τον αριθμό 100000 δεν υπάρχουν άλλοι άριστοι αριθμοί.

Για τους τέλειους αριθμούς ισχύει η πρόταση:[3] Το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των διαιρετών του τελείου αριθμού τ (συμπεριλαμβανομένου του τ) ισούται με 2. π.χ. για τον τέλειο 6 ισχύει:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$$

Το ίδιο ισχύει και για τους τέλειους 28, 496, κλπ.

Εξετάζω κατά πόσο και για τους αρίστους αριθμούς ισχύει κάτι ανάλογο.

Πράγματι για τον άριστον αριθμό α=120 ελέγχουμε ότι για τους 16 διαιρέτες του ισχύει:

$$(1+\frac{1}{120})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{60})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{40})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{30})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{24})+(\frac{1}{6}+\frac{1}{20})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{15})+(\frac{1}{10}+\frac{1}{12})=$$

$$=\frac{121+62+43+34+29+26+23+22}{120}=\frac{360}{120}=3$$

Το ίδιο ισχύει και για τους διαιρέτες του αρίστου αριθμού 672

$$(1+\frac{1}{672})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{336})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{224})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{168})+(\frac{1}{6}+\frac{1}{112})+(\frac{1}{7}+\frac{1}{96})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{84})$$

$$+(\frac{1}{12}+\frac{1}{56})+(\frac{1}{14}+\frac{1}{48})+(\frac{1}{16}+\frac{1}{42})+(\frac{1}{21}+\frac{1}{32})+(\frac{1}{24}+\frac{1}{48})=$$

$$=\frac{673+338+227+172+118+103+92+6+62+58+53+52}{672}=\frac{2016}{672}=3$$

Είναι πλέον εύλογο το ερώτημα: Μήπως και για τους πιθανούς άλλους αρίστους αριθμούς ισχύει το ίδιο; Ή κι αν ακόμη δεν υπάρχουν άλλοι άριστοι μήπως θα μπορούσαμε να αποδείξουμε θεωρητικά την πρόταση που δείξαμε πιο πάνω ότι ισχύει για τους αρίστους 120 και 672; Ο προβληματισμός αυτός μας οδηγεί στο να διατυπώσουμε και στη συνέχεια να αποδείξουμε το θεώρημα:

«Το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των διαιρετών ενός αρίστου αριθμού α ισούται με το 3».

Απόδειξη

Έστω ο άριστος αριθμός α και 1, X_1, X_2, ……, X_ν, ……, $X_{2\nu}$, α όλοι οι διαιρέτες του κατά τάξη μεγέθους. Παρατηρούμεν ότι:

$1\cdot\alpha=X_1\cdot X_{2\nu} = X2\cdot X_{2\nu-1}= \dots = X_\nu\cdot X_{\nu+1}$. Ισχύει τότε:

$$X_{2\nu}=\frac{\alpha}{X_1},X_{2\nu-1}=\frac{\alpha}{X_2},\dots\dots$$

Για τους γνήσιους διαιρέτες του α ισχύει λόγω ορισμού:

$1+X_1+X_{2\nu}+X_2+X_{2\nu-1}+X_3+X_{2\nu-2}+\dots\dots X_\nu+X_{\nu+1}=2\alpha$ ή

$$1+X_1+\frac{\alpha}{X_1}+X_2+\frac{\alpha}{X_2}+\dots\dots+X_\nu+\frac{\alpha}{X_\nu}=2\alpha,\ \text{οπότε:}$$

$$1+\alpha+X_1+\frac{\alpha}{X_1}+X_2+\frac{\alpha}{X_2}+\dots\dots X_\nu+\frac{\alpha}{X_\nu}3\alpha$$

Τα αντίστροφα όλων των διαιρετών του α έχουν άθροισμα:

$$A=1+\frac{1}{\alpha}+(\frac{1}{X_1}+\frac{X_1}{\alpha})+(\frac{1}{X_2}+\frac{X_2}{\alpha})+\dots\dots\dots+(\frac{1}{X_\nu}+\frac{X_\nu}{\alpha})$$

Παρατηρούμεν ότι το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι το α, άρα:

$$A=\frac{(\alpha+1)+(X_1+\frac{\alpha}{X_1})+(X_2+\frac{\alpha}{X_2})+\dots\dots\dots+(X_\nu+\frac{\alpha}{X_\nu})}{\alpha}\Rightarrow$$

$$A=\frac{\alpha+[1+X_1+\frac{\alpha}{X_1}+X_2+\frac{\alpha}{X_2}+\dots\dots\dots+X_\nu+\frac{\alpha}{X_\nu}]}{\alpha}=\frac{\alpha+2\alpha}{\alpha}=3$$

Μια δεύτερη παρατήρηση είναι ότι ο άριστος 120 είναι πολλαπλάσιο του πρώτου τελείου και ο άριστος 672 είναι πολλαπλάσιον τόσο του πρώτου και του δεύτερου τελείου όσο και του γινομένου τους. Με αφορμή την ύπαρξη των τελείων αριθμών βρήκαμε τους αρίστους α=120 και α=672.

Κάμνοντας ανάλογες σκέψεις ερευνούμε κατά πόσον υπάρχει φυσικός αριθμός ρ που το άρθροισμα των γνησίων διαιρετών του να είναι τριπλάσιο του αριθμού ρ.

Πράγματι, ελέγχοντας με παραλλαγή του πιο πάνω προγράμματος βρίσκουμε στο διάστημα [1, 100000] δύο τέτοιους αριθμούς τους ρ=30240 και ρ=32760, τους οποίους ονομάζω τριστέλειους.

Διατυπώνουμε και για τους τριστέλειους αριθμούς το θεώρημα: «Το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των διαιρετών ενός τριστέλειου αριθμού ισούται με 4».
Η απόδειξη είναι ανάλογη της προηγούμενης.

Τα πιο πάνω με οδηγούν στο να διατυπώσω με άλλον τρόπο τους ορισμούς για τον τέλειο, τον άριστο και τον τριστέλειο αριθμό και τις αντίστοιχες προτάσεις για το άθροισμα των αντιστρόφων των διαιρετών τους.

α) Τέλειος λέγεται ο φυσικός αριθμός τ που το άθροισμα όλων των διαιρετών του, συμπεριλαμβανομένου του τ είναι διπλάσιο του τ.
β) Άριστος λέγεται ο φυσικός αριθμός α που το άθροισμα όλων των διαιρετών του, συμπεριλαμβανομένου του α είναι τριπλάσιο του α. Το άθροισμα των αντιστρόφων των διαιρετών του α ισούται με 3.
γ) Τριστέλειος λέγεται ο φυσικός αριθμός ρ που το άθροισμα όλων των διαιρετών του, (και του ρ) είναι τετραπλάσιο του ρ. Το άθροισμα των αντιστρόφων των διαιρετών του ρ ισούται με 4.

Παραπομπές

1. Άρθρο Ιωάννη Φάκα, «Μαθηματικό Βήμα», Τεύχος Θ/1992.
3. Άρθρο Δ. Τσιμπουράκη, «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β», Τεύχος 1/1985.

Χαράλαμπος Λουγκρίδης, Μαθηματικός Β.Δ.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΡΙΣΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πρόγραμμα γραμμένο στη γλώσσα Borland C++

```
#include <iostream.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
/*********************************/
/** Function to find the prime numbers***/
/*********************************/

long int insprim(long int a)
{
long int x;
if (a<2)return(0);
for (x=2;x<a;x++)
  if (!(a%x))
     return(0);
 return(1);
}
int main () /*start of main program */
{
char stop;
long int (*pf), max,min,I,j,sum, divi;
int num=0,x,root;

cout<<"\n";
cout<< "-------> Give the min number : ";
cin>>min;
cout<< "-------> Give the max number : ";
cin>>max;

cout<<"............Process run................."<<"\n";

/****************************/
/** To find the aristoi numbers ****/
/**when sum==I*2              ***/
/****************************/

for (i=min;i<=max;i++)
 {
  x=isprim(i);
  if (x==0)
   {
      sum=0;root=sqrt(i);
      for (j=1; j<=root; j++)
        {
        if (i%j==0)
         {sum+=j;)
         if (j>1)
          {divi=i/j;sum+=divi;}
         }
        }
      if (sum==i*2)
        {
         pf[num]=I;num++;
        }
    }
  }

/*****************************/
```

```
/** To output the aristoi numbers ****/
/** the sum of their dividend       ****/
/** and their dividend              ****/

for (i=0;i<num;i++)
  {
  sum=0;
  for (j=1; j<=pf[I]/2; j++)
    {
    if (pf[I]%j==0)
          {
          sum+=j;cout<<j<<",";
          }
    }
  cout<<"\n";
  cout<<"number= "<<pf[i]<<"\n";
  cout<<"Sum   = "<<sum<<"\n";
 }
cout<<"---------------------------------------"<<"\n";
cout<<"\n";
cout<<"***end of program***";

delete [] pf;
return EXIT_ SUCCESS;
}/*end main program*/
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Μεταξύ των αριθμών **1** και **100000** που έγινε η δοκιμή με το πρόγραμμα βρέθηκαν 2 άριστοι αριθμοί.

αριθμοί	άθροισμα	διαιρέτες
120	240	1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60
672	1344	1,2,3,4,6,7,8,12,14,16,21,24,28,32,42,48,56,84,96,112,168,224,336

ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ – ΠΟΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Επιμέλεια
Αλέξανδρος Μπάρος
Μαθηματικός

Η Τριγωνομετρία σε σχέση με την Γεωμετρία και Άλγεβρα

Η Τριγωνομετρία μπορεί να θεωρηθεί σαν επέκταση της Γεωμετρίας, γιατί με την επινόηση των τριγωνομετρικών αριθμών κατορθώνει να συνδέσει ετεροειδή στοιχεία του τριγώνου. Έτσι πετυχαίνει την λύση προβλημάτων, τα οποία η Γεωμετρία ήταν αδύνατο να λύσει. Θα πρέπει όμως να γνωρίζουμε ότι η Τριγωνομετρία πολλές φορές, για να πετύχει αυτό που επιδιώκει, χρησιμοποιεί γνώσεις από την Γεωμετρία.

Οι σχέσεις που βρίσκουμε στη Γεωμετρία μεταξύ των μηκών, των πλευρών τριγώνου, των μέτρων των γωνιών του κτλ., είναι αλγεβρικές σχέσεις. Αυτό σημαίνει ότι κατά τις πράξεις χρησιμοποιούμε όλες τις αλγεβρικές μας γνώσεις. Από την άποψη αυτή η Τριγωνομετρία μπορεί να θεωρηθεί σαν εφαρμογή της Άλγεβρας.

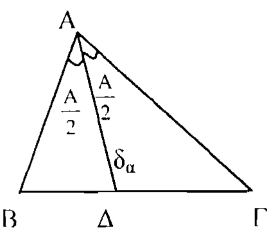
Το αξιοθαύμαστο γνωστικό πεδίο που λέγεται επιστήμη των Μαθηματικών σου δίνει την δυνατότητα να ελίσσεσαι στον τρόπο αντιμετώπισης ορισμένων θεμάτων. Αυτό φαίνεται μέσα από τους οκτώ διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους προσέγγισα την άσκηση συνδυάζοντας Τριγωνομετρία και Γεωμετρία και τους οποίους παρουσιάζω πιο κάτω.

ΕΝΑ ΘΕΜΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΛΥΜΕΝΟ ΜΕ 8 ΤΡΟΠΟΥΣ

Δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει η σχέση: $\delta_\alpha = \dfrac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{B-\Gamma}{2}}$

ΘΕΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ 1989

1ος Τρόπος

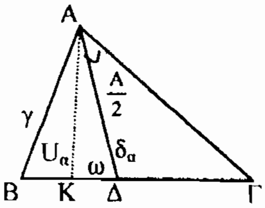


$$(AB\Gamma)=(AB\Delta)+(A\Delta\Gamma) \Rightarrow \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\delta_\alpha\gamma\eta\mu\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\beta\cdot\delta_\alpha\eta\mu\frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\beta\gamma 2\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \delta_\alpha\eta\mu\frac{A}{2}(\beta+\gamma) \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$\delta_\alpha = \frac{2.2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2R2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{2R\eta\mu B\cdot\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

2ος Τρόπος



$$\overset{\Delta}{AK\Delta}: \eta\mu\omega = \frac{U_\alpha}{\delta_\alpha} \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{U_\alpha}{\eta\mu\omega} \quad (1)$$

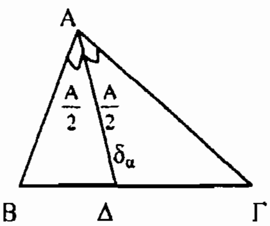
$$\hat{\omega} = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{180 - \hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\omega} = 90^\circ + \frac{\hat{\Gamma} - \hat{B}}{2} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma - B}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B - \Gamma}{2} \quad (2)$$

$$U_\alpha = \gamma\eta\mu B \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{\gamma\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}} = \frac{2R\eta\mu\Gamma.\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

3ος Τρόπος

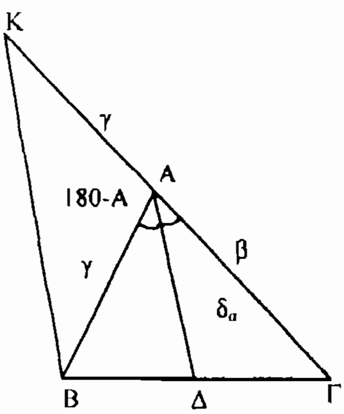


$$\text{Θεώρημα διχοτόμων} \Rightarrow \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\Delta\Gamma} = \frac{\beta+\gamma}{B} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma} \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}: (\text{Θ. Ημιτόνων}): \Rightarrow \frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\frac{A}{2}} = \frac{\delta_\alpha}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \delta_\alpha = \frac{\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}.\eta\mu\Gamma}{\eta\mu\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \delta_\alpha = \frac{2R\eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

4ος Τρόπος



φέρω AK=γ

θεωρ. Διχοτ. $\Rightarrow \Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma} (1)$

$$\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma} \Rightarrow \delta_\alpha^2 = (\Delta\Gamma)^2 + (A\Gamma)^2 - 2(\Delta\Gamma)\cdot(A\Gamma)\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow$$

$$\delta_\alpha^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{(\beta+\gamma)^2} + \beta^2 - \frac{2\alpha\beta}{\beta+\gamma}\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow$$

$$\delta_\alpha^2 = \frac{\beta^2(\alpha^2 + (\beta+\gamma)^2 - 2\alpha(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu\Gamma}{(\beta+\gamma)^2}$$

$$\text{αλλά } \overset{\Delta}{BK\Gamma}: (BK)^2 = \alpha^2 + (\beta+\gamma)^2 - 2\alpha(\beta+\gamma).\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

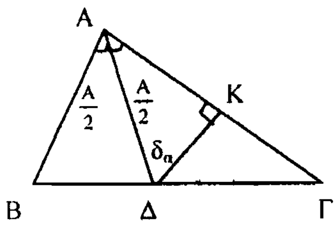
$$\Rightarrow \delta_\alpha^2 = \frac{\beta^2(BK)^2}{(\beta+\gamma)^2}$$

$$\overset{\Delta}{AKB} \Rightarrow (BK)^2 = \gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma\gamma\sigma\upsilon\nu(180 - A) \Rightarrow (BK)^2 = 2\gamma^2(1 + \sigma\upsilon\nu A)$$

$$= 4\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} \quad (2)$$

$$\delta_\alpha^2 = \frac{\beta^2(\beta\kappa)^2}{(\beta+\gamma)^2} \overset{(2)}{=} \frac{\beta^2 4\gamma^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}}{(\beta+\gamma)^2} \Rightarrow \delta\alpha = \frac{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\beta+\gamma} = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B\_\Gamma}{2}}$$

5ος Τρόπος



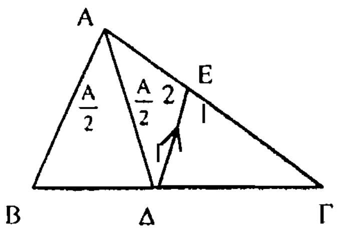
φέρω $\Delta K \perp A\Gamma$

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{(\Delta K)}{\delta_\alpha}\Leftrightarrow \delta_\alpha=\frac{(\Delta K)}{\eta\mu\frac{A}{2}}=\frac{\eta\mu\Gamma(\Delta\Gamma)}{\eta\mu\frac{A}{2}}\Rightarrow\delta_\alpha=\frac{\eta\mu\Gamma\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}}{\eta\mu\frac{A}{2}}$$

$$\Delta\Gamma=\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}\qquad\Rightarrow\delta_\alpha=\frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

(Θ. Διχοτ.)

6ος Τρόπος



φέρω ΔΕ//ΑΒ τότε $\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{A}}{2}\Leftrightarrow AE=\Delta E=X,\ \hat{E}_1=\hat{A}$

$$A\hat{\Delta}E:\delta_\alpha^2=x^2+x^2-2x.x\sigma\upsilon\nu\ (180-A)\Rightarrow\delta_\alpha^2=2x^2(1+\sigma\upsilon\nu\ A)$$

$$\delta_\alpha^2=2x^2\cdot2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}\Rightarrow$$

$$\delta_\alpha=2x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\Rightarrow$$

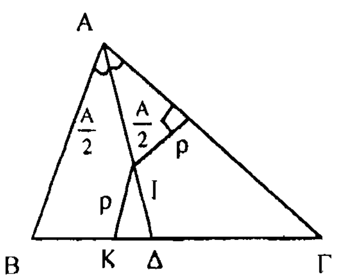
αλλά $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}\approx\overset{\Delta}{AB\Gamma}\Rightarrow$

$$\delta_\alpha=2\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$

$$\frac{x}{\gamma}=\frac{\beta-x}{\beta}\Leftrightarrow x=\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\ (1)$$

$$\delta_\alpha=\frac{2R\eta\mu B\cdot\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

7ος Τρόπος



Ι: έγκεντρο (σημείο τομής εσωτ. Διχοτόμων)
ρ: ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{P}{AI}\Rightarrow AI=\frac{P}{\eta\mu\frac{A}{2}}\ (1)$$

$$\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\hat{\Gamma}=\frac{180-\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}+\hat{\Gamma}=90^\circ+\frac{\hat{\Gamma}-\hat{B}}{2}\Rightarrow$$

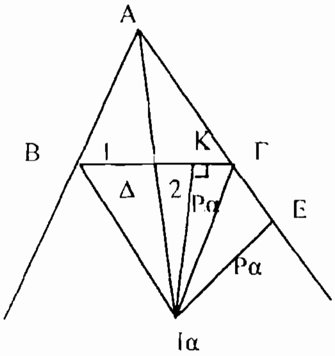
$$\eta\mu\hat{\Delta}_1=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\Leftrightarrow\frac{P}{I\Delta}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\Leftrightarrow I\Delta=\frac{\rho}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\ (2)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow\delta_\alpha=AI+I\Delta=\rho\left(\frac{1}{\eta\mu\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\right)$$

$$\delta_\alpha=4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\left(\frac{1}{\eta\mu\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\right)\Rightarrow$$

$$\delta_\alpha=\frac{2R\eta\mu B\cdot\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

8ος Τρόπος



I_α: παράκεντρο

P_α: ακτίνα παρεγγεγραμμένου κύκλου

$$AI_\alpha E:\ \eta\mu\frac{A}{2}=\frac{I\alpha}{AI\alpha}\Rightarrow AI\alpha=\frac{I\alpha}{\eta\mu\frac{A}{2}}\quad (1)$$

$$K\overset{\Delta}{\Delta}I_\alpha:\ \eta\mu\hat{\Delta}_1=\eta\mu\hat{\Delta}_2=\frac{I\alpha}{\Delta I_\alpha}\Rightarrow \Delta I_\alpha=\frac{P_\alpha}{\eta\mu\Delta_1}=\frac{P_\alpha}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\quad (2)$$

$$\delta_\alpha=AI_\alpha-\Delta I_\alpha=I_\alpha\left(\frac{1}{\eta\mu\frac{A}{2}}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\right)\Rightarrow$$

$$\delta_\alpha=4R\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\left(\frac{1}{\eta\mu\frac{A}{2}}-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\right)\Rightarrow \delta_\alpha=\frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

<u>*Επιμέλεια*</u>
Χαράλαμπος Λουγκρίδης, Β.Δ.
Λανίτειο Λύκειο Β΄

Ως γνωστόν αριθμητικό τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που τα μέτρα των πλευρών και το εμβαδόν του εκφράζονται με ακέραιους αριθμούς.

Ας είναι ν-1, ν, ν+1 φυσικοί αριθμοί που εκφράζουν τα μήκη των πλευρών του ζητούμενου τριγώνου. Αν τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε:

$$\tau=\frac{\nu-1+\nu+\nu+1}{2}=\frac{3\nu}{2}$$

$$\tau-\alpha=\frac{\nu+2}{2},\quad \tau-\beta=\frac{\nu}{2},\quad \tau-\gamma=\frac{\nu-2}{2}$$

Από τον τύπο του Ήρωνα: $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ έχουμε:

$$E=\sqrt{\frac{3\nu}{2}.\frac{\nu+2}{2}.\frac{\nu}{2}.\frac{\nu-2}{2}}=\frac{\nu}{4}\sqrt{3(\nu^2-4)}\quad (1)$$

Για να είναι το τρίγωνο αριθμητικό θα πρέπει και το εμβαδόν του Ε να είναι φυσικός αριθμός, για κάθε $\nu\varepsilon N$ $\nu>2$.

Αν ν περιττός $\Rightarrow$ ν^2 περιττός $\Rightarrow$ ν^2-4 περιττός $\Rightarrow$ $3(\nu^2-4)$ περιττός $\Rightarrow$ $\sqrt{3(\nu^2-4)}$ δεν είναι άρτιος άρα και το Ε όπως δίνεται από την (1) δεν είναι ακέραιος.

Ώστε το ν αποκλείεται να είναι περιττός, άρα είναι άρτιος. Στην παράσταση $A=\sqrt{3(\nu^2-4)}$ δίνω στο ν άρτιες τιμές, τέτοιες που να προκύπτει Α ακέραιος, οπότε για:

α. ν =4 $\Rightarrow$ Α=6 $\Rightarrow$ Ε=6. Έχω έτσι την Πυθαγόρεια τριάδα (3, 4, 5), που ορίζει αριθμητικό τρίγωνο.
β. ν=14 $\Rightarrow$ Α=24 $\Rightarrow$Ε=84. Προκύπτει τότε η Ηρώνεια τριάδα (13, 14, 15) που ορίζει αριθμητικό τρίγωνο.
γ. ν=52 $\Rightarrow$ Ε=1170 με αντίστοιχη Η.Τ. (51, 52, 53).
δ. ν=194 $\Rightarrow$ Ε=16 296 με αντίστοιχη Η.Τ. (193, 194, 195).

Τα πιο πάνω αριθμ. Τριγ. Ανακάλυψε το 1792 ο Ιάπων Genkei, όπως αναφέρεται στο περιοδικό «Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» 1974-75, Τεύχος 4, σελ. 17, σε άρθρο Παρ. Μαρουσάκη).

Συνεχίζω να δοκιμάζω οπότε για ν=724 βρίσκω Ε=226 974 και αντίστοιχη Η.Τ. με διαδοχικούς ακεραίους την (723, 724, 725). Διαπιστώνουμε ότι το τρίγωνο αυτό είναι οξυγώνιο, αφού ισχύει: $725^2 < 723^2 + 724^2$, με το νόμο δε των συνημιτόνων βρίσκουμε ότι η μεγαλύτερη γωνία του είναι 89° 59° 59,8°.

Σημαντική παρατήρηση είναι ότι αποκλείεται η εύρεση αριθμητικού τριγώνου, που τα μέτρα των πλευρών του να είναι διαδοχικοί ακέραιοι και δύο από αυτούς να είναι άρτιοι.

Με πρόγραμμα στους Η.Υ. που επισυνάπτεται, γραμμένο στη γλώσσα Foxpro 2:6 for Windows από το συνάδελφο κ. Ανδρέα Πολυδώρου, βρίσκουμε πλήθος αριθμητικών τριγώνων, των οποίων τα μέτρα των πλευρών είναι διαδοχικοί ακέραιοι. Σημειώνουμε τα 10 πρώτα αριθμητικά τρίγωνα. Στο πρώτο, οι πλευρές αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα.

ν	**Εμβαδόν**	**Ηρώνεια Τριάδα**		
4	6	3	4	5
14	84	13	14	15
52	1170	51	52	53
194	16296	193	194	195
724	226974	723	724	725
2702	3161340	2701	2702	2703
10084	44031786	10083	10084	10085
37634	613283664	37633	37634	37635
140452	8541939510	140451	140452	140453
524174	118973869476	524173	524174	524175

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΗΡΩΝΕΙΩΝ ΤΡΙΑΔΩΝ ΜΕ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

Πρόγραμμα (γραμμένο στη γλώσσα Foxpro 2.6 for Windows)

```
*Κατασκευή Ηρωνείων τριάδων με στοιχεία διαδοχικούς αριθμούς
FOR ν=2  to 1000000 STEP 2
        E=ν*SQRT(3*(ν^2-4))/4
        IF  E=INT(E)
                ?ν,",",E,",",ν-1,",",ν+1
        ENDIF
NEXT ν
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει μόνο μέρος των τριάδων που βρέθηκαν.

N	**Εμβαδό αριθμητικού Τριγώνου**	**Ηρώνεια τριάδα**		
		ν-1	**ν**	**ν+1**
4	6	3	4	5
14	84	13	14	15
52	1170	51	52	53
194	16296	193	194	195
724	226974	723	724	725
2702	3161340	2701	2702	2703
10084	44031786	10083	10084	10085
37634	613283664	37633	37634	37635
140452	8541939510	140451	140452	140453
524174	118973869476	524173	524174	524175
577656	144490473176	577655	577656	577657
598352	155029422782	598351	598352	598353
644396	179806881097	644395	644396	644397
678246	199193479705	678245	678246	678247
828332	297104694861	828331	828332	828333
833862	301084918527	833861	833862	833863
892892	345222028207	892891	892892	892893
903574	353531476923	903573	903574	903575
923274	369115130175	923273	923274	923275
925012	370506106000	925011	925012	925013
926508	371705496590	926507	926508	926509
934176	377883602704	934175	934176	934177
949096	390050574705	949095	949096	949097
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ «ΟΝΟΥΦΡΙΟΣ ΚΛΗΡΙΔΗΣ»

Ημερομηνία εξέτασης:
13 Δεκεμβρίου, 1997

Επιμέλεια
Σάββας Αντωνίου

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις:

1. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{3^\nu - 2^\nu}{3^\nu + 2^\nu}$ $\quad \forall \ \nu \epsilon N^*$

   α) Να δείξετε ότι: $\alpha_\nu + 1 = \dfrac{2}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^\nu}$

   β) Να δείξετε ότι: $\dfrac{1}{\alpha_1+1} + \dfrac{1}{\alpha_2+1} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_\nu+1} = \dfrac{\nu}{2} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^\nu + 1$

2. Αν χ, ψ, z είναι αντίστοιχα οι αποστάσεις του κέντρου Ο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ από τις κορυφές Α, Β, Γ του τριγώνου να δείξετε ότι:

   α) $\dfrac{\chi^2}{\beta \cdot \gamma} = \varepsilon\varphi\dfrac{B}{2}\varepsilon\varphi\dfrac{\Gamma}{2}$

   β) $\alpha\chi^2 + \beta\psi^2 + \gamma z^2 = \alpha\beta\gamma$
   (α, β, γ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου).

3. Δίνεται το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ σε κύκλο. Αν οι πλευρές του ΑΒ, ΓΔ τέμνονται στο Ζ και ΑΔ, ΒΓ στο Ε, να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ΑΕΒ και ΑΖΔ τέμνονται κάθετα.

4. Δίνεται ημα+ημβ=χ και συνα-συνβ=ψ

   α) Να βρείτε το συν(α+β) συναρτήσει των χ, ψ

   β) Να δείξετε ότι $\chi^2 - 2 \leq 2 - \psi^2$

5. Αν α, β, γεR: α≠β≠γ≠α, να λύσετε στο R το σύστημα
   $\chi+\psi+z=1, \quad \dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{z}=1, \quad \alpha\chi+\beta\psi+\gamma z=1$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α. $$\alpha_\nu + 1 = \frac{3^\nu - 2^\nu}{3^\nu + 2^\nu} + 1 = \frac{3^\nu - 2^\nu + 3^\nu + 2^\nu}{3^\nu + 2^\nu} = \frac{2\cdot 3^\nu}{3^\nu\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^\nu\right]} = \frac{2}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^\nu}$$

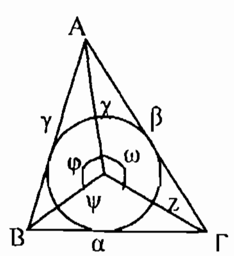
β. $$\frac{1}{\alpha_\nu + 1} = \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^\nu}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$$

$$\frac{1}{\alpha_1+1} + \frac{1}{\alpha_2+1} + .. + \frac{1}{\alpha_\nu+1} = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^1\right] + \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right] + \ldots + \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^\nu\right] =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\right)}_{\nu\text{-προσθετέοι}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^\nu\right] =$$

$$= \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^\nu}{1-\frac{2}{3}}\right] = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^\nu}{\frac{1}{3}} = \frac{\nu}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^\nu + 1$$

2.



α) Από τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ έχουμε ότι

$$\frac{\chi}{\eta\mu\frac{B}{2}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\phi} \quad (1), \quad \frac{\chi}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}} = \frac{\beta}{\eta\mu\omega} \quad (2)$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \phi = 180 \Rightarrow 90^0 - \frac{\Gamma}{2} + \phi = 180^0$$

$$\Rightarrow \varphi = 90 + \frac{\Gamma}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \quad (3)$$

για το ίδιο λόγο $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$ (4)

$$(1), (2), (3), (4), \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\chi}{\eta\mu\frac{B}{2}} = \dfrac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} \\[2ex] \dfrac{\chi}{\eta\mu\frac{\Gamma}{2}} = \dfrac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\chi^2}{\beta\cdot\gamma} = \frac{\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\chi^2}{\beta\cdot\gamma} = \varepsilon\phi\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}$$

β) $\alpha\chi^2+\beta\psi^2+\gamma Z^2=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \dfrac{\chi^2}{\alpha\cdot\beta}+\dfrac{\psi^2}{\alpha\cdot\gamma}+\dfrac{Z^2}{\alpha\cdot\beta}=1$

Αρκεί να δείξω ότι

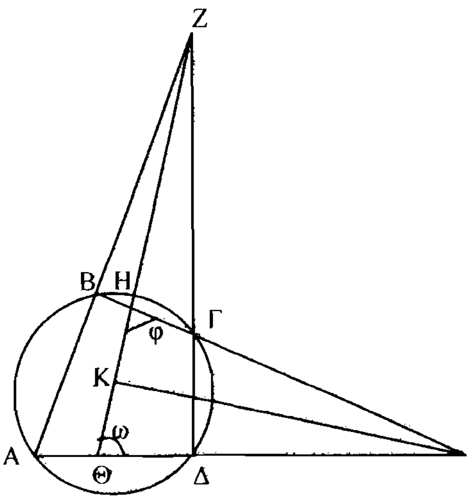
$$\varepsilon\phi\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\phi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\phi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{B}{2}=1$$

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=90-\frac{\Gamma}{2}\Rightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\sigma\phi\frac{\Gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon\phi\frac{A}{2}+\varepsilon\phi\frac{B}{2}}{1-\varepsilon\phi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{B}{2}}=\frac{1}{\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}}\Rightarrow \varepsilon\phi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\phi\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}=1-\varepsilon\phi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon\phi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{B}{2}+\varepsilon\phi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\phi\frac{B}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\Gamma}{2}=1$$

3.



<u>Απόδειξη</u>

Πρέπει να δείξω ότι ΕΚ⊥ΗΘ

Επειδή η ΕΚ είναι διχοτόμος της $\hat{E}$ αρκεί να δείξω ότι το τρίγωνο ΕΗΘ είναι ισοσκελές.

$$\left.\begin{array}{l} \omega=A+\dfrac{\hat{Z}}{2} \quad (1) \\ \phi=\hat{\Gamma}_1+\dfrac{\hat{Z}}{2} \quad (2) \\ \Gamma_1=A \text{ (απέναντι εξωτ.) } (3) \end{array}\right\} \Rightarrow \omega=\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow H\hat{E}\Theta \text{ ισοσκελές} \\ \text{ΕΚ διχοτόμος} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΕΚ ύψος} \Rightarrow \text{ΕΚ}\perp\text{ΗΘ}$$

4. α) $\left.\begin{array}{l} (\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)^2=\chi^2 \\ (\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta)^2=\psi^2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta+2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=\chi^2 \\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\psi^2 \end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2+2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\chi^2+\psi^2$$

$$\Rightarrow 1-(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)=\frac{\chi^2+\psi^2}{2}$$

$$\Rightarrow 1-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\frac{\chi^2+\psi^2}{2}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=1-\frac{\chi^2+\psi^2}{2}$$

β) Αφού συν(α+β)≥ -1 $\Rightarrow 1-\frac{\chi^2+\psi^2}{2} \geq -1 \Rightarrow 2-\chi^2-\psi^2 \geq -2$

$\Rightarrow \chi^2-2 \leq 2-\psi^2$

5. $\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \chi\psi+\psi z+z\chi=\chi\psi z \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\chi\psi(1-z)+z(\chi+\psi)=0\\ \chi+\psi=1-z\end{array}\right\} \Rightarrow \chi\psi\,(1-z)+z(1-z)=0 \Rightarrow (\chi\psi+z)\,(1-z)=0$$

$\chi\psi+z=0$ ή $1-z=0$ επομένως το αρχικό μας διασπάτε σε δύο συστήματα:

α) $\chi+\psi+z=1$ (1)
$1-z=0$ (2)
$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma z=1$ (3)

β) $\chi+\psi+z=1$
$\chi\psi+z=0$ (1)
$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma z=1$ (2)

Λύση του α) $1-z=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow$ (1) $\chi=-\psi \Rightarrow$ (3) $-\alpha\psi+\beta\psi+\gamma=1$

$\Rightarrow (\beta-\alpha)\psi=1-\gamma \Rightarrow \psi=\frac{1-\gamma}{\beta-\alpha},\ \chi=\frac{1-\gamma}{\alpha-\beta},\ z\neq 1$

Λύση του β) $\chi\psi+z+0 \Rightarrow z=-\chi\psi \Rightarrow$ (1) $\chi+\psi-\chi\psi=1 \Rightarrow (1-\chi)(\psi-1)=0$

$$\Rightarrow 1-\chi=0 \text{ ή } \psi-1=0 \Rightarrow \begin{cases}\chi+\psi+z=1,\ 1-\chi=0,\ \alpha\chi+\beta\psi+\gamma z=1\\ \chi+\psi+z=1,\ \psi-1=0,\ \alpha\chi+\beta\psi+\gamma z=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\chi=1, \psi=\frac{1-\alpha}{\gamma-\beta}, z=\frac{1-\alpha}{\beta-\gamma}\right), \quad \left(\chi=\frac{1-\beta}{\alpha-\gamma}, \psi=1, z=\frac{1-\beta}{\gamma-\alpha}\right)$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΛΕΜΕΣΟΥ
ΓΙΑ ΤΗΝ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
«ΠΑΝΙΚΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ»

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης:*</u>
13 Δεκεμβρίου, 1997
9.00 π.μ.

<u>*Επιμέλεια*</u>
Μάριος Ευσταθίου
Χρίστος Παπαχριστοδούλου

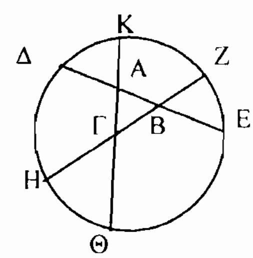
Να λυθούν **όλες** οι ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

1. α) Σε αριθμητική πρόοδο έχουμε: $\alpha_1=100$ και $\alpha_{31}=400$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\alpha_{30}}+\sqrt{\alpha_{31}}}=1$$

β) Να δειχθεί ότι: $\eta\mu\frac{\pi}{24}\cdot\eta\mu\frac{5\pi}{24}\cdot\eta\mu\frac{7\pi}{24}\cdot\eta\mu\frac{11\pi}{4}=\frac{1}{16}$ (χωρίς την χρήση υπολογιστικής)

2. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.
Να δείξετε ότι: (ΑΔ)+(ΒΖ)+(ΓΘ)=(ΑΚ)+(ΒΕ)+(ΓΗ)



3. α) Αν $\varepsilon\varphi(x+\frac{\pi}{12})=\kappa.\varepsilon\varphi(x-\frac{\pi}{12})$ $\kappa\neq 1$ να δείξετε ότι: $\eta\mu 2x=\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}$

β) Σε αριθμητική πρόοδο $\alpha_1=1$ και $\frac{\Sigma_\nu}{\Sigma_\kappa}=\frac{\nu^2}{\kappa^2}$, $\nu\neq\kappa$. Να αποδειχθεί ότι: $\Sigma_\lambda=\lambda^2$

4. Δίδεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha=3+2\sqrt{2}$ μ. Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τεταρτοκύκλιο μέσα στο τετράγωνο. Στη συνέχεια γράφουμε κύκλο μέσα στο τετράγωνο που να εφάπτεται των πλευρών ΓΒ και ΓΔ, στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα και εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου στο Ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου ΔΕΗ.

5. Αν $\kappa\in N$ (Ν το σύνολο των φυσικών) να αποδειχθεί ότι:
α) Ο αριθμός $\kappa^2+4\kappa$ βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών.
β) Με τη βοήθεια του πιο πάνω ή άλλως πως να δειχθεί ότι η εξίσωση $x+\frac{1}{x}=\kappa+2$ δεν έχει ρητές ρίζες.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α) $$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\alpha_{30}}+\sqrt{\alpha_{31}}}=1$$

$\alpha_1=100$, $\alpha_{31}=400$

$\alpha_{31}=\alpha_1+30\delta \Rightarrow 400=100+30\delta \Rightarrow \delta=10$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\alpha_{30}}+\sqrt{\alpha_{31}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1}}{(\sqrt{\alpha_2}+\sqrt{\alpha_1})(\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1})}+\frac{\sqrt{\alpha_3}-\sqrt{\alpha_2}}{(\sqrt{\alpha_3}+\sqrt{\alpha_2})(\sqrt{\alpha_3}-\sqrt{\alpha_2}}+\ldots+\frac{\sqrt{\alpha_{31}}-\sqrt{\alpha_{30}}}{(\sqrt{\alpha_{31}}+\sqrt{\alpha_{30}})(\sqrt{\alpha_{31}}-\sqrt{\alpha_{30}})}=$$

$$\frac{\sqrt{\alpha_2}-\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_3}-\sqrt{\alpha_2}+\ldots+\sqrt{\alpha_{31}}-\sqrt{\alpha_{30}}}{\delta}=\frac{\sqrt{\alpha_{31}}-\sqrt{\alpha_1}}{\delta}=2$$

$$=\frac{\sqrt{400}-\sqrt{100}}{10}=\frac{20-10}{10}=1$$

β) Α΄ μέλος:

$$\frac{1}{4}\cdot(2\eta\mu\frac{\pi}{24}\cdot\eta\mu\frac{11\pi}{24})\cdot(2\eta\mu\frac{5\pi}{24}\cdot\eta\mu\frac{7\pi}{24})=$$

$$=\frac{1}{4}(\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi}{24}-\sigma\upsilon\nu\frac{12\pi}{24})\cdot(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{24}-\sigma\upsilon\nu\frac{12\pi}{24})=$$

$$=\frac{1}{4}(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2})\cdot(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(2\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12})=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2})=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

2. Έστω α η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου. Από τις δυνάμεις σημείου στα Α, Β, Γ έχουμε:

(ΑΔ)[α+(ΒΕ)]=(ΑΚ)[α+(ΓΘ)]

(ΒΖ)[α+(ΓΗ)]=(ΒΕ)[α+(ΑΔ)] +

(ΓΘ)[α+(ΑΚ)]=(ΓΗ)[α+(ΒΖ)]

α[(ΑΔ)+(ΒΖ)+(ΓΘ)]+(ΑΔ)(ΒΕ)+(ΒΖ)(ΓΗ)+(ΓΘ)(ΑΚ) =

= α[(ΑΚ)+(ΒΕ)+(ΓΗ)]+ (ΑΚ)(ΓΘ)+(ΒΕ)(ΑΔ)+(ΓΗ)(ΒΖ) ⇒

(ΑΔ)+(ΒΖ)+(ΓΘ)=(ΑΚ)+(ΒΕ)+(ΓΗ) ο.ε.δ.

3. α) $\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\kappa\cdot\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\Rightarrow$

$\left[\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\neq 0 \text{ γιατί αν } x=\frac{\pi}{12} \quad \varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\neq 0\right]$

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}=\kappa\Rightarrow\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}=\frac{\dfrac{\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}+1}{2\left[\dfrac{\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}-1\right]}=$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{12}\right)}{2\left[\varepsilon\varphi\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]}=\frac{\eta\mu\left[\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]}{2\eta\mu\left[\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]}=$$

$$=\frac{\eta\mu 2x}{2\eta\mu\frac{\pi}{6}}=\frac{\eta\mu 2x}{2\cdot\frac{1}{2}}=\eta\mu 2x$$

β) $\frac{\Sigma_\nu}{\Sigma_\kappa}=\frac{\nu^2}{\kappa^2}\Rightarrow\frac{[2\alpha_1+(\nu-1)\delta]\nu}{[2\alpha_1+(\kappa-1)\delta]\kappa}=\frac{\nu^2}{\kappa^2}\Rightarrow$

$[2+(\nu-1)\delta]\kappa=[2+(\kappa-1\delta]\nu\Rightarrow 2\kappa+\nu\delta\kappa-\delta\kappa=2\nu+\nu\kappa\delta-\delta\nu\Rightarrow$

$2\kappa-2\nu-\delta\kappa+\delta\nu=0\Rightarrow 2(\kappa-\nu)-\delta(\kappa-\nu)=0\Rightarrow(\kappa-\nu)(2-\delta)=0,\kappa\neq\nu$

$\delta=2,\Sigma_\lambda=\frac{[2\cdot 1\cdot+(\lambda-1)2]\lambda}{2}=\lambda^2$

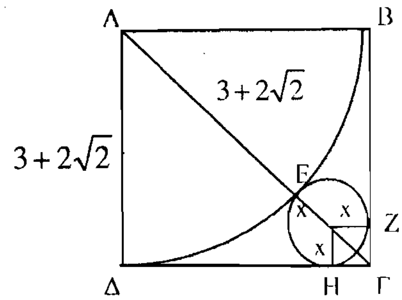
4. Έστω x η ακτίνα του μικρότερου κύκλου Π.Θ.

$(ΑΓ)^2 = (3+2\sqrt{2})^2 + (3+2\sqrt{2})^2$

$(ΑΓ)^2 = 2(3+2\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

$(ΑΓ) = \sqrt{2}(3+2\sqrt{2}) = (3\sqrt{2}+4)\ μ$

$(ΓΟ)^2 = 2x^2 \Rightarrow (ΓΟ) = \sqrt{2}\ x$



$$Ε_{σκιασμ.} = \frac{Ε_{τετρ.} - Ε_{τεταρτοκυκλίου} - Ε_{κυκλου} - Ε_{καμπ.τριγ.ΖΓΗ}}{2} =$$

$$= \frac{(3+2\sqrt{2})^2 - \frac{\pi(3+2\sqrt{2})^2}{4} - \pi.1^2 - (1^2 - \frac{\pi.1^2}{4})}{2} =$$

$$= \frac{4(3+2\sqrt{2})^2 - \pi(3+2\sqrt{2})^2 - 4\pi - 4 + \pi}{8} =$$

$$= \frac{(4-\pi)(9+12\sqrt{2}+8) - 3\pi - 4}{8} =$$

$$= \frac{68+48\sqrt{2} - 17\pi - 12\sqrt{2}\pi - 3\pi - 4}{8} = \frac{16+12\sqrt{2} - 5\pi - 3\sqrt{2}\pi}{2} = 8+6\sqrt{2} - \frac{5\pi + 3\sqrt{2}\pi}{2}$$

$$= 8+6\sqrt{2} - \frac{(5+3\sqrt{2})\pi}{2}\ μ^2$$

5. α) $κ^2 + 4κ < κ^2 + 4κ + 4 = (κ+2)^2$ (1)

$κ^2 + 2κ + 1 < κ^2 + 4κ$ (2) $(1 < 2κ \quad \forall κ \in N)$

(1) και (2) $\Rightarrow (κ+1)^2 < κ^2 + 4κ < (κ+2)^2$

β) $x + \frac{1}{x} = κ + 2 \Rightarrow x^2 - (κ+2)x + 1 = 0$ (3)

Για να έχει ρητές ρίζες η (3) πρέπει η διακρίνουσα της Δ να είναι τέλειο τετράγωνο, όμως $Δ = (κ+2)^2 - 4 = κ^2 + 4κ$ που όπως αποδείχθει πιο πάνω είναι μεταξύ των τετραγώνων 2 διαδοχικών φυσικών άρα δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
«ΙΣΑΑΚ ΚΑΙ ΣΟΛΩΜΟΥ»
ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΠΑΡΧΙΕΣ ΛΑΡΝΑΚΑΣ-ΑΜΜΟΧΩΣΤΟΥ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης:
13 Δεκεμβρίου, 1997
Χρόνος: 3 ώρες

Επιμέλεια
Ανδρέας Σαββίδης

Να απαντήσετε σε **όλες** τις ερωτήσεις:

1. α) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu 2A - \sigma\upsilon\nu 2\Gamma < \sigma\upsilon\nu 2B - 1$
να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

   β) Αν σε τρίγωνο ισχύει: $\frac{1}{\upsilon_\alpha^2} = \frac{1}{\upsilon_\beta^2} + \frac{1}{\upsilon_\gamma^2}$
να δείξετε ότι: $A=90^0$

2. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $50^2-49^2+48^2-47^2+\ldots+2^2-1$

3. Κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Κ και Μ είναι τα μέσα ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΜ, συναρτήσει του R.

4. Να υπολογίσετε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει:
$$\chi + y + z = 5$$
$$\chi y + yz + z\chi = 3$$
όταν οι χ, y, είναι επίσης πραγματικοί αριθμοί.

5. Αν f(n) είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας:
$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6\ldots.$$

   α. Να βρείτε τον τύπο της f (n) για n άρτιο και n περιττό.
   β. Να δείξετε ότι: f (α+β) – f (α-β) = αβ όπου α. β θετικοί ακέραιοι και α>β.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α) $\sigma\upsilon\nu 2A - \sigma\upsilon\nu 2\Gamma < \sigma\upsilon\nu 2\beta - 1$

$1 - 2\eta\mu^2 A - (1 - 2\eta\mu^2\Gamma) < 1 - 2\eta\mu^2 B - 1$

$-2\eta\mu^2 A + 2\eta\mu^2\Gamma < -2\eta\mu^2 B$

$\eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma < \eta\mu^2 A$

$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow$ Αμβλυγώνιο

β) $\dfrac{1}{\upsilon_\alpha^{\ 2}} = \dfrac{1}{\upsilon_\beta^{\ 2}} + \dfrac{1}{\upsilon_\gamma^{\ 2}}$ Επειδή $2E = \alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta = \gamma\upsilon_\gamma$

$$\frac{1}{\frac{4E^2}{\alpha^2}} = \frac{1}{\frac{4E^2}{\beta^2}} + \frac{1}{\frac{4E^2}{\gamma^2}} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{4E^2} = \frac{\beta^2}{4E^2} + \frac{\gamma^2}{4E^2} \Rightarrow$$

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow$ ορθογώνιο

2. $50^2-49^2+48^2-47^2+\ldots+2^2-1$

$= (50-49)(50+49) + (48-47)(48+47)+\ldots+(2-1)(2+1)$

$= 99 + 95 + 91 +\ldots+3$

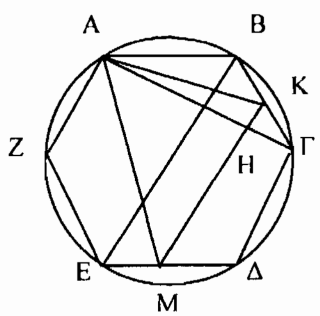
Άθροισμα όρων Α.Π. με $\alpha_\nu=99$, $\alpha_1=3$ και $\delta=4$

$\alpha_\nu=\alpha_1 + (\nu-1)\delta$

$99-3=(\nu-1)4 \Rightarrow \nu-1=\dfrac{96}{4}=24 \Rightarrow \nu=25$

$\Sigma_{25}=\dfrac{3+99}{2}.25 = 1275$

3.



ΒΓΔΕ ισοσκελές τραπέζιο

$(\overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Delta E} \Rightarrow \Gamma\Delta // BE$ και $B\Gamma=\Delta E=R)$

ΚΜ διάμεσος τραπεζίου

$KM=\dfrac{BE+\Gamma\Delta}{2} = \dfrac{2R+R}{2} = \dfrac{3R}{2}$

$AH= A\Gamma - H\Gamma = \lambda_3 - \dfrac{\alpha_6}{2} = R\sqrt{3} - \dfrac{R\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R\sqrt{3}}{4}$

$(AKM)=\dfrac{1}{2}(KM)\cdot(AH) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3R}{2}\cdot\dfrac{3R\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9R^2\sqrt{3}}{16}$

4. $\chi+y+z=5 \quad (1) \qquad \chi, y, z \in R$

$\chi y+yz+\chi z=3 \quad (2)$

$(1) \Rightarrow y=5-z-\chi$

$(2) \Rightarrow \chi(5-z-\chi)+(5-z-\chi)z+\chi z=3$

$5\chi-\chi z-\chi^2+5z-z^2-\chi z+\chi z-3=0$

$\chi^2-5\chi+\chi z-5z+z^2+3=0$

$\chi^2-\chi(5-z)+z^2-5z+3=0$

Αφού $\chi\in R \Rightarrow \Delta\geq 0 \Rightarrow \Delta=(5-z)^2-4(z^2-5z+3)\geq 0$

$\Rightarrow -3z^2+10z-13\geq 0$

$\Rightarrow 3z^2-10z+13\leq 0$

$(3z-13)(z+1)\leq 0$

$-1\leq z\leq \frac{13}{3}$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει ο z είναι $\frac{13}{3}$ και συμβαίνει όταν $\chi=y=\frac{1}{3}$

5. α) i) Αν n άρτιος (δηλαδή n=2κ), τελευταίος $\frac{n}{2}$,προηγούμενος $\frac{n}{2}-1$

$f(n)=0+1+1+\ldots+(\frac{n}{2}-1)+(\frac{n}{2}-1)+\frac{n}{2}$

$=[0+1+2+\ldots+\frac{n}{2}-1]+[1+2+\ldots+\frac{n}{2}]=\frac{1}{2}(\frac{n}{2}-1)\frac{n}{2}+\frac{1}{2}(1+\frac{n}{2})\frac{n}{2}$

$=\frac{n}{4}\left[\frac{n}{2}-1+1+\frac{n}{2}\right]=\frac{n^2}{4}$

Αν n περιττός (δηλαδή n=2κ+1), τελευταίος $\frac{n-1}{2}$, προηγούμενος $\frac{n-1}{2}$

$f(n)=0+1+1+\ldots+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}=(0+1+2+\ldots+\frac{n-1}{2})+(1+2+\ldots\frac{n-1}{2})$

$=2(1+2+\ldots+\frac{n-1}{2})=2.\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}+1)\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{4}$

Ώστε: $f(n)=\begin{cases}\frac{n^2}{4}, & \text{αν } n\text{-}2κ\\ \frac{n^2-1}{4}, & \text{αν } n=2κ+1\end{cases}$

β) Επειδή η διαφορά των α+β και α-β είναι 2β που είναι άρτιος τότε: α+β και α-β είναι άρτιοι και οι δύο ή περιττοί και οι δύο.

i) Άρτιοι και οι δύο:

$f(\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}=\alpha\beta$

ii) Περιττοί και οι δύο

$f(\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta)=\frac{(\alpha+\beta)^2-1}{4}-\frac{(\alpha-\beta)^2-1}{4}=\alpha\beta$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
«ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΑΠΑΒΕΡΚΙΟΥ»
ΓΙΑ ΤΗΝ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΕΙΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΠΑΡΧΙΑ ΠΑΦΟΥ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης:
13 Δεκεμβρίου, 1997
9.00π.μ. – 12.00 μ.

Επιμέλεια
Αλέξανδρος Δημητριάδης

Να λυθούν οι ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Σε κάθε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ να αποδείξετε ότι:
   ι) κάθε διαγώνιος χωρίζει το πεντάγωνο σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο.
   ιι) από τα σχήματα, στα οποία χωρίζεται το πεντάγωνο με δυο διαγώνιες του που δεν έχουν κοινό άκρο, το ένα είναι ρόμβος.
   ιιι) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της ΑΓ με τη ΒΔ, τότε είναι $(ΑΖ)^2 = (ΑΓ)\cdot(ΖΓ)$

   β) Αν $|\chi| < 2$ και $\nu \in N$, να δειχθεί ότι: $(2+\chi)^\nu + (2-\chi)^\nu < 2^{2\nu+1}$

2. α) Ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ η μια κορυφή του είναι Α(1,3) και η μια διαγώνιος του βρίσκεται στην ευθεία ε: $2\chi-3\psi=0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

   β) Αν $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, να δειχτεί ότι:
$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma = 1$$

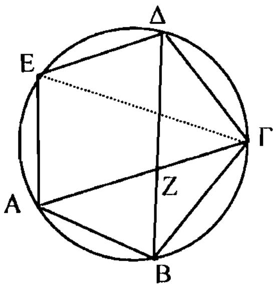
3. Δίνεται κύκλος (Κ,ρ) και ευθεία (ε) που δεν τέμνει τον κύκλο. Από σημείο Μ της (ε) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ και την ΚΓ κάθετη πάνω στην (ε). Αν η ΑΒ τέμνει τη ΚΓ στο Ν, να δείξετε ότι $(ΚΝ).(ΚΓ)=\rho^2$

4. Αν οι συντελεστές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ είναι πραγματικοί αριθμοί και τέτοιοι ώστε: $|\alpha|+|\gamma|<|\beta|$ και $\gamma\neq 0$, να δείξετε ότι:
   α) οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι πραγματικές και άνισες.
   β) δεν είναι δυνατόν και οι δυο ρίζες της εξίσωσης αυτής να είναι ακέραιοι αριθμοί.

5. Αν η ισότητα: $\dfrac{(\eta\mu\chi)^{2\nu+2}}{\alpha^\nu} + \dfrac{(\sigma\upsilon\nu\chi)^{2\nu+2}}{\beta^\nu} = \dfrac{1}{(\alpha+\beta)^\nu}$ με $\alpha,\beta \in R^+ - \{0\}$
ισχύει για ν=1, τότε να δείξετε ότι ισχύει για κάθε $\nu \in N$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α)



ι)Φέρνω τη διαγώνιο ΑΓ

Επειδή $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} A\Gamma // E\Delta \\ AE = \Gamma\Delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ΑΓΔΕ ισοσκελές τραπέζιο

$B A = B\Gamma \Rightarrow B\hat{A}\Gamma$: ισοσκελές

ιι) Θα αποδείξω ότι το ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.

ι) $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} AZ // E\Delta \text{ και } AE // Z\Delta \Rightarrow AZ\Delta E: \# \\ AE = E\Delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ΑΖΔΕ: ρόμβος

ιιι) Τα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{BZ\Gamma}$ έχουν: $\left.\begin{matrix} \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{BZ\Gamma}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BZ} = \frac{B\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow (B\Gamma)^2 = (A\Gamma)\cdot(Z\Gamma) \Rightarrow (B\Gamma = AZ) \Rightarrow (AZ)^2 = (A\Gamma)\cdot(Z\Gamma)$$

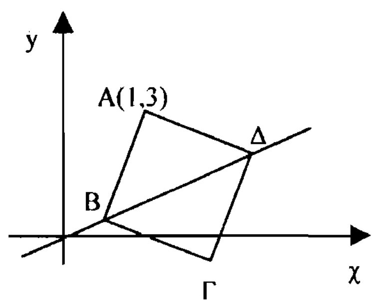
β) $|\chi|<2 \Leftrightarrow -2<\chi<2 \Rightarrow 0<\chi+2<4 \Rightarrow (2+\chi)^\nu<4^\nu=2^{2\nu}$ (1)

$|\chi|<2 \Leftrightarrow -2<\chi<+2 \Rightarrow 2>-\chi>-2 \Rightarrow -2<-\chi<2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<2-\chi<4 \Rightarrow (2-\chi)^\nu<4^\nu - 2^{2\nu}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow (2+\chi)^\nu + (2-\chi)^\nu < 2.2^{2\nu} \Rightarrow (2+\chi)^\nu + (2-\chi)^\nu < 2^{2\nu+1}$

2. α)



Το Α(1,3) δεν επαληθεύει την ε: 2χ-3y=0

$\Rightarrow \varepsilon \equiv B\Delta$: $2\chi-3y=0$ με $\lambda_1=\lambda_{B\Delta}=\frac{2}{3}$

Αν $\lambda_{AB}=\lambda$, επειδή $\Delta\hat{B}A = 45^\circ$, θα είναι:

$$\varepsilon\varphi 45^\circ = \frac{\lambda - \frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}\lambda} \Rightarrow \lambda - \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}\lambda \Rightarrow \frac{1}{3}\lambda = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda=5 \Rightarrow AB: y-3=5(\chi-1) \Rightarrow \boxed{AB: 5\chi-y-2}=0$

$\lambda_{AB}=5 \Rightarrow \lambda_{A\Delta}=-\frac{1}{5} \Rightarrow A\Delta: y-3=-\frac{1}{5}(\chi-1) \Rightarrow \boxed{A\Delta: \chi+5y-16}=0$

$\left.AB: 5\chi-y=2\right\} \Rightarrow B(\frac{6}{13}, \frac{4}{13})$

ΒΔ: 2χ-3y=0

$$\left.\begin{aligned} &ΑΔ: χ+5y=16 \\ &ΒΔ: 2χ-3y=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Δ(\frac{48}{13},\frac{32}{13})$$

$$ΒΓ//ΑΔ \Rightarrow ΒΓ: y-\frac{4}{13}=-\frac{1}{5}(χ-\frac{6}{13}) \Rightarrow \boxed{ΒΓ: χ+5y-2=0}$$

$$ΔΓ//ΑΒ \Rightarrow ΔΓ: y-\frac{32}{13}=-5(χ-\frac{48}{13}) \Rightarrow \boxed{ΔΓ: 5χ-y-16=0}$$

β) $α+β+γ=π \Rightarrow συν^2α+συν^2β+συν^2γ+2συνα\cdot συνβ\cdot συνγ=1$

$α+β+γ=π \Rightarrow α=π-(β+γ) \Rightarrow συνα=συν[π-(β+γ)]=-συν(β+γ)$

Άρα:

$συν^2α+συν^2β+συν^2γ+2συνα.συνβ.συνγ=$

$συν^2(β+γ)+συν^2β+συν^2γ-2συν(β+γ).συνβ.συνγ=$

$=συν^2β+συν^2γ-συν(β+γ)[2συνβ\cdot συνγ-συν(β+γ)]=$

$=συν^2β+συν^2γ-συν(β+γ)(συνβ\cdot συνγ+ημβ\cdot ημγ)=$

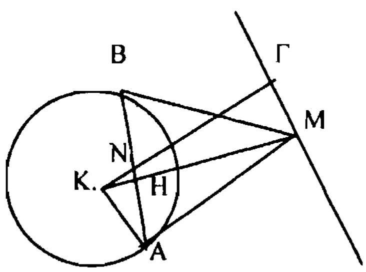
$=συν^2β+συν^2γ-(συνβ\cdot συνγ-ημβ\cdot ημγ)\cdot(συνβ\cdot συνγ+ημβ\cdot ημγ)=$

$=συν^2β+συν^2γ-συν^2β\cdot συν^2γ+ημ^2β\cdot ημ^2γ=$

$=συν^2β+συν^2γ-συν^2β\cdot συν^2γ+(1-συν^2β)\cdot(1-συν^2γ)=$

$=\cancel{συν^2β}+\cancel{συν^2γ}-\cancel{συν^2β\cdot συν^2γ}+1-\cancel{συν^2β}-\cancel{συν^2γ}+\cancel{συν^2β\cdot συν^2γ}=1$

3.



Φέρνουμε την ΚΜ και είναι ΚΜ⊥ΑΒ και ΜΗ μέσο⊥ΑΒ.

$Ν\hat{Γ}Μ+Ν\hat{Η}Μ=180^0 \Rightarrow ΓΝΗΜ$: εγγράψιμο $\Rightarrow (ΚΝ)\cdot(ΚΓ)=(ΚΗ)\cdot(ΚΜ)$ (1)

$\overset{\Delta}{ΚΑΜ}$: ορθογώνιο και ΑΗ: ύψος $\Rightarrow (ΚΑ)^2=(ΚΗ)\cdot(ΚΜ)$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow (ΚΝ)\cdot(ΚΓ)=(ΚΑ)^2 \Rightarrow \boxed{(ΚΝ)\cdot(ΚΓ)=ρ^2}$

4. α) $αχ^2+βχ+γ=0$

$|α|+|γ|<|β| \Rightarrow α^2+γ^2+2|αγ|<β^2$ (1)

ι) Αν $α\cdot γ>0 \Rightarrow α^2+γ^2+2αγ<β^2 \Rightarrow (α-γ)^2<β^2-4αγ \Rightarrow β^2-4αγ>0$

$\Rightarrow χ_1 \neq χ_2 \in R$

ιι) Αν $α\cdot γ<0 \Rightarrow -4αγ>0 \Rightarrow χ_1 \neq χ_2 \in R$

β. $|\alpha|+|\gamma|<|\beta| \Rightarrow 1+\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|<\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \Rightarrow 1+|\chi_1\cdot\chi_2|<|\chi_1+\chi_2| \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+|\chi_1|\cdot|\chi_2|<|\chi_1|+|\chi_2| \Rightarrow 1-|\chi_1|-|\chi_2|(1-|\chi_1|)<0 \Rightarrow (1-|\chi_1|)\cdot(1-|\chi_2|)<0$ (2)

Έστω χ_1, χ_2 και οι 2 ακέραιοι $\Rightarrow |\chi_1|, |\chi_2|$: φυσικοί $\Rightarrow |\chi_1|\geq 1, |\chi_2|\geq 1 \Rightarrow$ $(1-|\chi_1|)\cdot(1-|\chi_2|>0$, άτοπο από την (2). Άρα δεν είναι δυνατόν να είναι και οι δυο ρίζες χ_1, χ_2 ακέραιοι αριθμοί.

5. Η $\frac{(\eta\mu\chi)^{2\nu+2}}{\alpha^\nu}+\frac{(\sigma\upsilon\nu\chi)^{2\nu+2}}{\beta^\nu}=\frac{1}{(\alpha+\beta)^\nu}$ ισχύει για ν=1 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\eta\mu^4\chi}{\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu^4\chi}{\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta} \Rightarrow \beta(\alpha+\beta)\eta\mu^4\chi+\alpha(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu^4\chi=\alpha.\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta(\alpha+\beta)\eta\mu^4\chi+\alpha(\alpha+\beta)(1-\eta\mu^2\chi)^2=\alpha.\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta(\alpha+\beta)\eta\mu^4\chi+\alpha(\alpha+\beta)-2\alpha(\alpha+\beta)\eta\mu^2\chi+\alpha(\alpha+\beta)\eta\mu^4\chi=\alpha.\beta$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2\eta\mu^4\chi-2\alpha(\alpha+\beta)\eta\mu^2\chi+\alpha^2=0$$

$$\Rightarrow [(\alpha+\beta)\eta\mu^2\chi-\alpha]^2=0 \Rightarrow \boxed{\eta\mu^2\chi=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\chi=1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha+\beta-\alpha}{\alpha+\beta} \Rightarrow \boxed{\sigma\upsilon\nu^2\chi=\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

<u>Άρα</u>:

$$\frac{(\eta\mu\chi)^{2\nu+2}}{\alpha^\nu}+\frac{(\sigma\upsilon\nu\chi)^{2\nu+2}}{\beta^\nu}=\frac{\alpha^{\nu+1}}{(\alpha+\beta)^{\nu+1}\cdot\alpha^\nu}+\frac{\beta^{\nu+1}}{(\alpha+\beta)^{\nu+1}\cdot\beta^\nu}=$$

$$=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)^{\nu+1}}+\frac{\beta}{(\alpha+\beta)^{\nu+1}}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^{\nu+1}}=\frac{1}{(\alpha+\beta)^\nu}$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΓΙΑ ΤΗΝ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
«ΕΥΑΓΟΡΑΣ ΠΑΛΛΗΚΑΡΙΔΗΣ»

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης*</u>
23 Μαίου 1998
Διάρκεια 2,5 ώρες

<u>*Επιμέλεια*</u>
Αλέξανδρος Δημητριάδης
Ευθύβουλος Λιασίδης

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ</u>

α) Να απαντήσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.
β) Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
γ) Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι)
δ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

1. α) Να γίνουν οι πράξεις και να απλοποιηθεί η παράσταση:
$$\frac{2\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{2\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{2\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$
β) Να υπολογίσετε τους αριθμούς, α, β, γ που ικανοποιούν τη σχέση:
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha+4\beta-10\gamma+30=0$$

2. α) Να διαιρέσετε το πολυώνυμο $f(\nu)=\nu^5-3\nu^4+\nu^3+2\nu^2-8\nu+3$ με το πολυώνυμο $g(\nu)=\nu^4+2\nu-1$. Στη συνέχεια, αν ν είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης διαιρείται πάντα με τον αριθμό 6.
β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{1}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)^2}$ γίνεται τέλειο τετράγωνο.

3. α) Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα, θα βασίλευσε κατά το $\frac{1}{8}$ της ζωής του ενώ, αν πέθαινε 9 χρόνια αργότερα, θα βασίλευε κατά το μισό της ζωής του. Σε ποια ηλικία πέθανε και πόσα χρόνια βασίλευσε ο Μέγας Αλέξανδρος;
β) Να λυθεί ως προς χ και να διερευνηθεί η εξίσωση:
$$\frac{1}{\beta^2(3\beta\chi-1)}+\frac{1}{\alpha\beta^2(3\beta\chi-1)(3\alpha\chi-1)}=\frac{1}{\alpha^2\beta(3\beta\chi-1)(3\alpha\chi-1)}+\frac{1}{\alpha^3(3\alpha\chi-1)}$$

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $A=45^\circ$. Από το μέσο Μ της ΑΒ φέρνουμε κάθετη πάνω στην ΑΒ που τέμνει της ΑΔ και ΒΓ (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΕΑΖΒ είναι τετράγωνο.

5. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σχηματίζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΑΒ (Ε εσωτερικό του τετραγώνου). Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ο, να δειχθεί ότι $BO\perp\Gamma E$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α)

$$\frac{2\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{2\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{2\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\frac{2\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\frac{2\gamma\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=$$

$$\frac{2\beta\gamma(\beta-\gamma)-2\gamma\alpha(\alpha-\gamma)+2\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(-\gamma)}=\frac{2\beta^2\gamma-2\beta\gamma^2-2\alpha^2\gamma+2\alpha\gamma^2+2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=$$

$$\frac{2\alpha^2(\beta-\gamma)+2\beta\gamma(\beta-\gamma)-2\alpha(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}=\frac{(\beta-\gamma)(2\alpha^2+2\beta\gamma-2\alpha\beta-2\alpha\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}=$$

$$\frac{2(\beta-\gamma)[\beta(\gamma-\alpha)-\alpha(\gamma-\alpha)]}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}=\frac{2(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}=2$$

β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha+4\beta-10\gamma+30=0\Rightarrow(\alpha-1)^2+(\beta+2)^2+(\gamma-5)^2=0$
$\Rightarrow\alpha=1,\beta=-2,\gamma=5$

2. α)

$$\begin{array}{l|l}
\nu^5-3\nu^4+\nu^3+2\nu^2-8\nu+3 & \nu^4+2\nu\ -1 \\ \cline{2-2}
\underline{-\nu^2-2\nu^2+\nu} & \nu-3 \\
\quad -3\nu^4+\nu^3-7\nu+3 & \\
\quad \underline{3\nu^4+6\nu-3} & \\
\quad\quad \nu^3-\nu &
\end{array}$$

$\upsilon(\nu)=\nu^3-\nu=(\nu-1).\nu.(\nu+1)$: Γινόμενο 3 διαδοχικών φυσικών αριθμών $\Rightarrow$ διαιρείται πάντα με το 6.

β) $$\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{1}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)^2}$$

Θέτω: $\frac{1}{\alpha-\beta}=x,\ \frac{1}{\beta-\gamma}=y,\ \frac{1}{\gamma-\alpha}=\omega$ και η παράσταση γίνεται:
$x^2+y^2+\omega^2=(x+y+\omega)^2-2xy-2x\omega-2y\omega=(x+y+\omega)^2-2(xy+x\omega+y\omega)$

Αλλά:
$$xy+x\omega+y\omega=\frac{1}{\alpha-\beta}.\frac{1}{\beta-\gamma}+\frac{1}{\beta-\gamma}.\frac{1}{\gamma-\alpha}+\frac{1}{\alpha-\beta}.\frac{1}{\gamma-\alpha}=\frac{\gamma-\alpha+\alpha-\beta+\beta-\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=0$$

3. α) Έστω ότι έζησε x χρόνια και βασίλεψε y χρόνια. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} y-9=\frac{1}{8}(x-9) \Rightarrow 8(y-9)=x-9 \\ y+9=\frac{1}{2}(x+9) \Rightarrow 2(y+9)=x+9 \end{array}\right\} \Rightarrow 6y-90=-18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y=72 \Rightarrow \boxed{y=12} \text{ και } \boxed{x=33}$$

β) $$\frac{1}{\beta^2(3\beta\chi-1)}+\frac{1}{\alpha\beta^2(3\beta\chi-1)(3\alpha\chi-1)}=\frac{1}{\alpha^2\beta(3\beta\chi-1)(3\alpha\chi-1)}+\frac{1}{\alpha^3(3\alpha\chi-1)}$$

$\alpha^3(3\alpha x-1)+\alpha^2\beta=\alpha\beta^2+\beta^3(3\beta x-1)$

$3(\alpha^4-\beta^4)x=\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+\alpha^3-\beta^3$

$3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)x=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)$

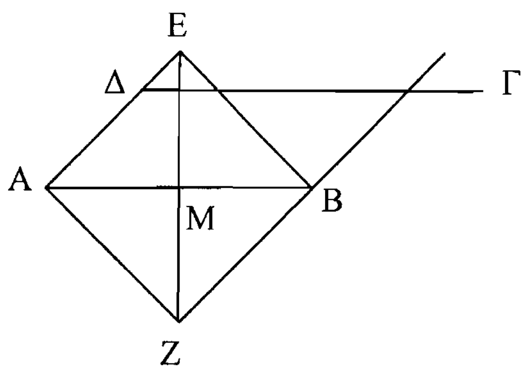
$3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)x=\alpha-\beta$

ι) Αν $\alpha\neq\pm\beta \Rightarrow$ υπάρχει μια λύση: $x=\dfrac{1}{3(\alpha+\beta)}$

ιι) Αν $\alpha=\beta \Rightarrow$ είναι αόριστη

ιιι) Αν $\alpha=-\beta \Rightarrow$ είναι αδύνατη

4.



Δ	Ζ
ΑΒΓΔ:# $\hat{A}=45^O$ ΑΜ=ΜΒ ΕΜ⊥ΑΒ	ΕΑΖΒ: τετράγωνο

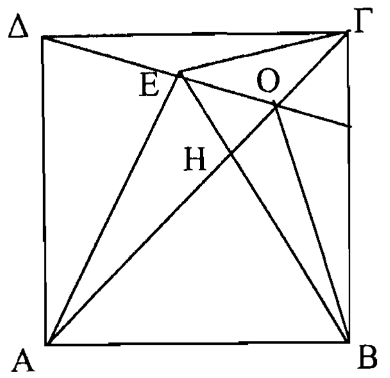
$\hat{A}_1=45^0 \Rightarrow \hat{B}_1=45^0$ και τα $\overset{\Delta}{AME}, \overset{\Delta}{BMZ}$ είναι ισοσκελή. Άρα,

$$\left.\begin{array}{l} AM=ME \\ BM=MZ \end{array}\right\} \overset{AM=MB}{\Rightarrow} AM=ME=MB=MZ$$

Άρα: ΑΒ, ΕΖ: διχοτομούνται ⇒ ΕΑΖΒ: # με:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ι) } AB=EZ \Rightarrow EAZB\text{: ορθογώνιο} \\ \text{ιι) } AB\perp EZ \Rightarrow EAZB\text{: ρόμβος} \end{array}\right\} \Rightarrow EAZB\text{: τετράγωνο}$$

5.



Δ	Ζ
ΑΒΓΔ: τετράγωνο ΕΑΒ: ισόπλευρο	ΒΟ⊥ΓΕ

$$\text{Το } \overset{\triangle}{B E\Gamma} : \text{ ισοσκελές με } E\hat{B}\Gamma = 30^\circ \Rightarrow \left.\begin{array}{r} B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Gamma}E = 75^\circ \\ B\hat{\Gamma}O = 45^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O\hat{\Gamma}E : 30 \quad (1)$$

$$\text{Το } \overset{\triangle}{A\Delta E} : \text{ ισοσκελές με } \Delta\hat{A}E = 30^\circ \Rightarrow A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta = 75^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} E\hat{\Delta}\Gamma = 15^\circ \\ E\hat{\Gamma}\Delta = 15^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma\hat{E}O = 30^\circ \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1), (2) \Rightarrow OE = O\Gamma \\ \text{Επίσης} \quad BE = B\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow BO\text{: μέσο } \perp E\Gamma$$

<u>Σημείωση</u>: Η άσκηση μπορεί να λυθεί και με άλλους τρόπους.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 1998

Επιμέλεια
Ανδρέας Σαββίδης

Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.

1. Δίνεται η εξίσωση: $(x-1)^2-(2x-3).\varepsilon\varphi\alpha=0$ (ε), με $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

   α) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (ε), να δείξετε ότι: $\left(x_1-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x_2-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$

   β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η (ε) έχει ρίζες πραγματικές.

2. α) Δίνεται η ευθεία ε_1: $\psi=\frac{1}{2}x+\kappa$ $(\kappa\in R)$ η οποία τέμνει τον άξονα των ψ στο Α. Η ευθεία ε_2, παράλληλη της ε_1, τέμνει τον άξονα των x στο Β, έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να είναι κάθετη στις ε_1, ε_2. Να βρείτε, συναρτήσει του κ, την εξίσωση της ε_2.

   β) Το ΑΒΓΔ είναι τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο με πλευρές ΑΒ=2, ΒΓ=3, ΓΔ=4, ΔΑ=6. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ του τετραπλεύρου.

3. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\nu^4-\nu^2$ είναι διαιρετός με 12 για κάθε θετικό ακέραιο $\nu>1$.

4. Σε κύκλο (Ο,R) με διάμετρο ΑΒ, να πάρετε σημείο Γ. Να φέρετε τη ΓΔ κάθετη στην ΑΒ. Ο κύκλος (Γ,ΓΔ) τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στα σημεία Ε και Ζ. Όταν προεκτείνετε την ΓΔ τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο Ν και τον κύκλο (Γ,ΓΔ) στο Μ. Να δείξετε ότι:

   α) ΔΝ = ΓΜ και

   β) η ΕΖ διχοτομεί τη ΓΔ

5. Μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει η σχέση: $\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}$ $(\lambda\in R)$. Αν η γωνία των $\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι 60° και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}, |\vec{\gamma}|=2, |\vec{\beta}|=4$, να υπολογίσετε:

   α) το λ και

   β) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $(x-1)^2-(2x-3)\varepsilon\varphi\alpha=0 \Leftrightarrow x^2-2(1+\varepsilon\varphi\alpha)x+1+3\varepsilon\varphi\alpha=0$

α) $(x_1-\frac{3}{2})\cdot(x_2-\frac{3}{2})=x_1x_2-\frac{3}{2}(x_1+x_2)+\frac{9}{4}=1+3\varepsilon\varphi\alpha-\frac{3}{2}\cdot 2(1+\varepsilon\varphi\alpha)+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}$

β) $x_1,x_2\in R \Leftrightarrow \Delta\geq 0$

$\Delta=4(1+\varepsilon\varphi\alpha)^2-4(1+3\varepsilon\varphi\alpha)$

$=4(1+2\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi^2\alpha-1-3\varepsilon\varphi\alpha)$

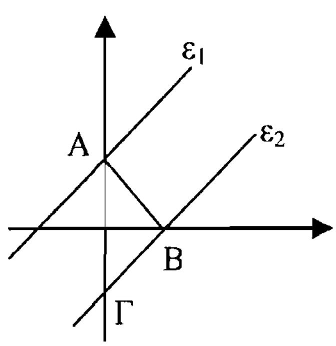
$=4(\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi\alpha)\geq 0 \Rightarrow$

$\varepsilon\varphi\alpha(\varepsilon\varphi\alpha-1)\geq 0$

$$\begin{cases}\varepsilon\varphi\alpha\leq 0 \text{ ή } \varepsilon\varphi\alpha\geq 1\\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ ή $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

2. α)



<u>Α΄ τρόπος</u>

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{1}{2}$

Η (ε_2) έχει εξίσωση $y=\frac{1}{2}x+\mu$

Συντεταγμένες του Α(0,Κ)

Συντεταγμένες του Β (-2μ, 0)

$\lambda_{AB}=\frac{\kappa}{2\mu}$ $\quad AB\perp\varepsilon_1,\varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_{AB}=-2$

Άρα $\frac{\kappa}{2\mu}=-2 \Rightarrow \mu=-\frac{\kappa}{4}$

Άρα εξίσωση (ε_2): $y=\frac{1}{2}x-\frac{\kappa}{4}$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Συντεταγμένες Γ (0, μ)

Επειδή ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο, εφαρμογή πυθαγόρειου θεωρήματος:

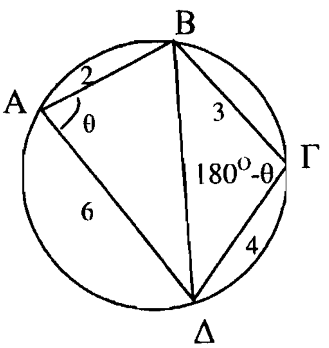
$(A\Gamma)^2=(AB)^2+(B\Gamma)^2$

$(\kappa-\mu)^2=(2\mu)^2+\kappa^2+(2\mu)^2+\mu^2 \Rightarrow \kappa^2-2\kappa\mu+\mu^2=4\mu^2+4\mu^2+\mu^2+\kappa^2 \Rightarrow -2\kappa\mu=8\mu^2$

[$\mu\neq 0$. Η ε_1 τέμνει τον yy΄ στο Α $\Rightarrow \kappa\neq 0$ οπότε και $\mu\neq 0$]

Άρα: $\mu=-\frac{\kappa}{4}$

β)



Νόμος συνημιτόνων στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ

$$\left.\begin{aligned} B\Delta^2 &= 4 + 36 - 24\text{συν}\theta \\ B\Delta^2 &= 9+16-24\text{συν}(180^o-\theta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$40-24\text{συν}\theta = 25+24\text{συν}\theta$$

$$15 = 48\text{συν}\theta \Rightarrow \text{συν}\theta = \frac{5}{16}$$

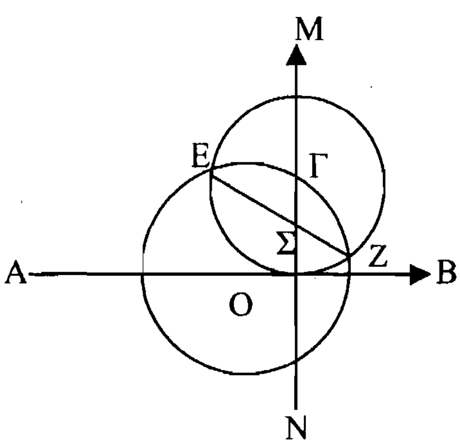
Άρα: $B\Delta^2 = 40-24\cdot\frac{5}{16} = \frac{65}{2}$

$B\Delta = \sqrt{\frac{65}{2}}$

3. $\Gamma = \nu^4 - \nu^2 = (\nu-1)\,\nu^2\,(\nu+1)$

Επειδή για κάθε 3 διαδοχικούς αριθμούς ο ένας διαιρείται με το 3 άρα ο Γ διαιρείται με το 3. Έστω ότι ο ν είναι άρτιος, τότε ο ν^2 διαιρείται με το 4, άρα ο Γ διαιρείται με το 4.
Οπότε ο Γ διαιρείται με $3\cdot 4 = 12$. Έστω ότι ο ν είναι περιττός τότε οι αριθμοί ν-1 και ν+1 είναι άρτιοι οπότε ο καθένας διαιρείται με το 2 και το γινόμενο τους με το 4.
Οπότε ο Γ διαιρείται με το 12.

4.



α) ΓΜ=ΓΔ ακτίνες του (Γ, ΓΔ)

ΓΔ=ΔΝ ΓΝ χορδή του (Ο, R) και ΑΒ⊥ΓΔ ⇒ ΔΝ=ΓΜ

β) Σ το σημείο τομής της ΕΖ και ΜΝ
$\Sigma\Gamma \cdot \Sigma N = \Sigma E \cdot \Sigma Z$ δύναμη του Σ προς τον κύκλο (O,R)
$\Sigma M \cdot \Sigma\Delta = \Sigma E \cdot \Sigma Z$ δύναμη του Σ προς τον κύκλο (Γ, ΓΔ)

Οπότε
$\Sigma\Gamma \cdot \Sigma N = \Sigma M \cdot \Sigma\Delta$
$\Sigma\Gamma(\Sigma\Delta+\Delta N)= \Sigma\Delta(\Sigma\Gamma+\Gamma M)$
$\Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Delta + \Sigma\Gamma \cdot \Delta N = \Sigma\Delta \cdot \Sigma\Gamma + \Sigma\Delta \cdot \Gamma M$
Από (α) ΔΝ=ΓΜ
Άρα ΣΓ=ΣΔ

Έτσι η ΕΖ διχοτομεί την ΓΔ.

5. α) $\vec{\beta}-\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha}$ Υψώνω στο τετράγωνο

$$\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)^2 = \lambda^2\left|\vec{\alpha}\right|^2$$

$$\Rightarrow \left|\vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\gamma}\right|^2 - 2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = \lambda^2\left|\vec{\alpha}\right|^2$$

$$16+4-2\left|\vec{\beta}\right|\cdot\left|\vec{\gamma}\right|\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 3\lambda^2$$

$$16+4-2\cdot 4\cdot 2\frac{1}{2} = 3\lambda^2$$

$$12 = 3\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

β) Γωνία διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$, έστω θ
$\vec{\beta}-\vec{\gamma} = \pm 2\vec{\alpha}$ Πολλαπλασιάζω εσωτερικά με το $\vec{\gamma}$

$$\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\vec{\gamma} = \pm 2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$$

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} - \left|\vec{\gamma}\right|^2 = \pm 2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\gamma}\right|\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\left|\vec{\beta}\right|\left|\vec{\gamma}\right|\sigma\upsilon\nu\, 60^\circ - \left|\vec{\gamma}\right|^2 = \pm 2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\gamma}\right|\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$4\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - 4 = \pm 2\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\gamma}\right|\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$0 = \pm 2\sqrt{3}\cdot 2\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

Ώστε η γωνιά των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\gamma}$ είναι ορθή.

ΚΥ.Μ.Ε.
ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ «ΖΗΝΩΝ»

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης:
Σάββατο 7 Φεβρουαρίου, 1998
9.00π.μ. – 11.00π.μ.

Επιμέλεια
Σάββας Ιωαννίδης

Να λυθούν και οι **πέντε** ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Θεωρούμε επτά ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη όχι μικρότερα από 1 και όχι μεγαλύτερα από 10. Να δείξετε ότι τρία τουλάχιστον από αυτά είναι πλευρές τριγώνου.

2. Δίδεται η πολυωνυμική συνάρτηση:
$f(x) = x^{\nu} - 13.x^{\nu-1} - 10.x^{\nu-2} + 4.x^{\nu-3} + x^3 - 14x^2 + 4x + 14$
Να βρεθεί η τιμή $f(7 - 3\sqrt{5})$

3. Δίδεται ευθεία xy και δύο σημεία Α και Β εκατέρωθεν αυτής. Ζητείται σημείο Μ της xy τέτοιο ώστε $x\hat{M}A + y\hat{M}B = 120^0$.

4. Να βρείτε τους ακεραίους αριθμούς λ με λ≠3 για τους οποίους ισχύει η πρόταση: Ο αριθμός λ-3 διαιρεί τον αριθμό λ^3-3.

5. Να βρεθεί μεταξύ ποιων διαδοχικών ακεραίων αριθμών βρίσκεται το άθροισμα:
$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Ας είναι α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7 τα δοθέντα τμήματα έτσι ώστε:
$1\leq \alpha_1\leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha_5 \leq \alpha_6 \leq \alpha_7 \leq 10$
Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν τρία τμήματα που να είναι πλευρές τριγώνου θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_3 \geq \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_4 \geq \alpha_2+\alpha_3 \\ \alpha_5 \geq \alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_6 \geq \alpha_4+\alpha_5 \\ \alpha_7 \geq \alpha_5+\alpha_6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\alpha_3 \geq 1+1=2$, $\alpha_4 \geq 1+2=3$
$\alpha_5 \geq 2+3=5$, $\alpha_6 \geq 3+5=8$
και $\alpha_7 \geq 5+8=13 >10$

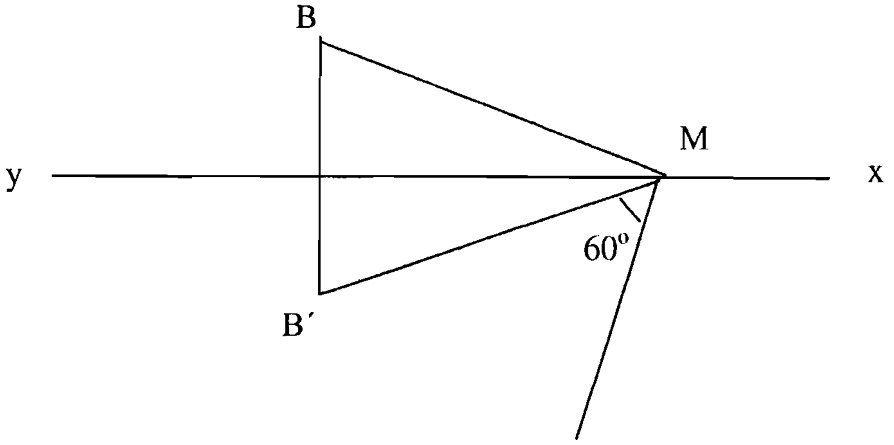
Αλλά αυτό είναι άτοπο διότι το $\alpha_7 \leq 10$.
Άρα τρία τουλάχιστο από τα δοθέντα ευθύγραμμα τμήματα είναι πλευρές τριγώνου.

2. Σχηματίζουμε το τριώνυμο g(x) που έχει ρίζες τις συζυγείς παραστάσεις:
$x_1 = 7-3\sqrt{5}$ και $x_2 = 7+3\sqrt{5}$
$g(x) = (x-7+3\sqrt{5}).(x-7-3\sqrt{5}) \Rightarrow$
$g(x) = (x-7)^2 - 45 \Rightarrow$
$g(x) = x^2 - 14x + 4$

Το πολυώνυμο f(x) γράφεται ως εξής:
$f(x) = x^\nu - 14x^{\nu-1} + x^{\nu-1} + 4x^{\nu-2} - 14x^{\nu-2} + 4x^{\nu-3} + x^3 - 14x^2 + 4x + 14$
$\Rightarrow f(x) = x^\nu - 14x^{\nu-1} + 4x^{\nu-2} + x^{\nu-1} - 14x^{\nu-2} + 4x^{\nu-3} + x^3 - 14x^2 + 4x + 14$
$\Rightarrow f(x) = x^{\nu-2}\cdot(x^2-14x+4) + x^{\nu-3}(x^2-14x+4) + x(x^2-14x+4) + 14$
$\Rightarrow f(x) = g(x)\cdot(x^{\nu-2} + x^{\nu-3} + x) + 14$

Αλλά $g(7-3\sqrt{5}) = 0$
$\Rightarrow f(7-3\sqrt{5}) = 14$

3. <u>Ανάλυση</u>: Έστω Μ το άγνωστο σημείο της ευθείας xy: $x\hat{M}A + y\hat{M}B = 120^0$

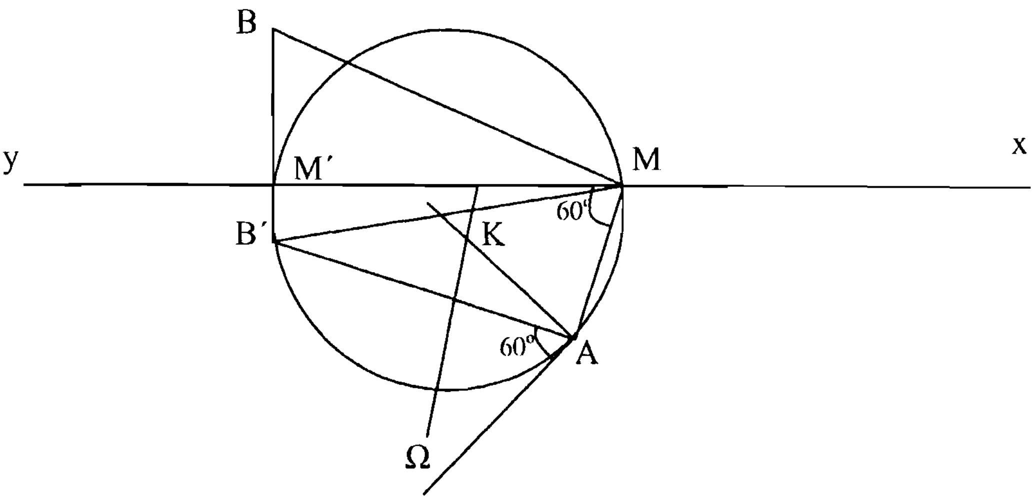


Βρίσκουμε το συμμετρικό Β΄ του σημείου Β ως προς την xy.

Τότε είναι $y\hat{M}B = y\hat{M}B' = 120^0$ ΜΒ΄ $\Rightarrow x\hat{M}A + y\hat{M}B' = 120^0 \Rightarrow A\hat{M}B' = 60^0$.

Άρα το σημείο Μ βρίσκεται πάνω σε τόξο που βλέπει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ΄ υπό γωνία 60°.

<u>Σύνθεση – Κατασκευή</u>



Βρίσκουμε πρώτα το συμμετρικό Β΄ του σημείου Β ως προς την ευθεία xy. Φέραμε τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ΄ και την κάθετη επί την ευθεία ΑΩ στο σημείο Α όπου Β΄ΑΩ= 60°. Η τομή των δύο ευθείων είναι το κέντρο Κ του τόξου με άκρα Β΄ και Α που δέχεται γωνία 60°. Γράφουμε το τόξο και η τομή αυτού με τη xy μας δίδει το ζητούμενο σημείο Μ. το Μ΄ δίνει δεύτερη λύση του προβλήματος.

<u>Απόδειξη</u>: Είναι προφανής από την ανάλυση και σύνθεση του προβλήματος.

<u>Διερεύνηση</u>: Το πρόβλημα δεν έχει πάντοτε λύση.

4. Θέτουμε λ-3=α, οπότε η συνθήκη $(\lambda-3)|(\lambda^3-3)$ γίνεται
$\alpha \mid (\alpha+3)^3-3 \Rightarrow \alpha \mid \alpha^3+9\alpha^2+27\alpha+24$
το οποίος ισοδυναμεί με την $\alpha \mid 24$

Θα πρέπει λοιπόν
$\alpha\in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

Οι αντίστοιχες τιμές για το $\lambda\neq 3$ είναι
$\lambda= -21, -9, -5, -1, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15, 27$

5. Έχουμε κατά σειρά $(1+\frac{1}{\nu})^2 = 1+2\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}$

και $(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\nu})^3 = 1+2\cdot\frac{1}{\nu}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\nu^2}+\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{\nu^3}$

Τότε προφανώς $(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\nu})^3 > (1+\frac{1}{\nu})^2 \quad \forall\nu\in N$

$$\Rightarrow 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\nu} > (1+\frac{1}{\nu})^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\nu} > \frac{(\nu+1)^{\frac{2}{3}}}{\nu^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow \nu^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\cdot\nu^{-\frac{1}{3}} > (\nu+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\nu}} > \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(\nu+1)^2}-\sqrt[3]{\nu^2}\right] \quad (1)$$

Με ανάλογο τρόπο έχουμε:

$$(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\nu})^3 = 1-2\cdot\frac{1}{\nu}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\nu^2}-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{\nu^3} > 1-2\cdot\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2} = (1-\frac{1}{\nu})^2$$

διότι:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\nu^2}-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{\nu^3} = \frac{1}{3\nu^2}(1-\frac{8}{9\nu}) > 0$$

$$\forall\nu\in N \Rightarrow (1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\nu})^3 > (1-\frac{1}{\nu})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\nu} > (1-\frac{1}{\nu})^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\nu} > \frac{(\nu-1)^{\frac{2}{3}}}{\nu^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow \nu^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\nu^{-\frac{1}{3}} > (\nu-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\nu}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{\nu^2}-\sqrt[3]{(\nu-1)^2}] \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν μετά από διαδοχικές αντικαταστάσεις του ν= 4, 5, 6, …1000000 τα εξής:

Σχέση (1)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \frac{3}{2}[\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{4^2}]$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} > \frac{3}{2}[\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{5^2}]$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6}} > \frac{3}{2}[\sqrt[3]{7^2} - \sqrt[3]{6^2}]$$

………………………

$$\frac{1}{\sqrt[3]{999999}} > \frac{3}{2}[\sqrt[3]{1000000^2} - \sqrt[3]{999999^2}]$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{100000}} > \frac{3}{2}[\sqrt[3]{1000001^2} - \sqrt[3]{100000^2}]$$

Με πρόσθεση των ανισοτήτων κατά μέλη έχουμε

$$\sum_{\kappa=4}^{10^6}\frac{1}{\sqrt[3]{\kappa}} > \frac{3}{2}[\sqrt[3]{1000001^2} - \sqrt[3]{16}]$$

$$> \frac{3}{2}[\sqrt[3]{1000000^2} - \sqrt[3]{\frac{27.16}{8}}]$$

$$= \frac{3}{2}.10000 - \sqrt[3]{54}$$

$$> 15000 - \sqrt[3]{64}$$

$$= 15000 - 4 = 14996 \quad (3)$$

Σχέση (2)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{3^2}]$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{4^2}]$$

....

$$\frac{1}{\sqrt[3]{999999}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{999999^2} - \sqrt[3]{999998^2}]$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}} < \frac{3}{2}[\sqrt[3]{1000000^2} - \sqrt[3]{999999^2}]$$

Με πρόσθεση των ανισοτήτων κατά μέλη έχουμε

$$\sum_{\kappa=4}^{10^6} \frac{1}{\sqrt[3]{\kappa}} > \frac{3}{2}[\sqrt[3]{10^{12}} - \sqrt[3]{9}]$$

$$> \frac{3}{2}[10000 - \sqrt[3]{8}]$$

$$= \frac{3}{2}[10000 - 2]$$

$$= 14997 \quad (4)$$

Εκ των σχέσεων (3) και (4) προκύπτει

$$14996 < \sum_{\kappa=4}^{10^6} \frac{1}{\sqrt[3]{\kappa}} < 14997$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ
«ΜΙΧΑΗΛ ΓΙΩΡΓΑΛΛΑΣ»
1998

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης*</u>
21 Μαρτίου, 1998
10:00 – 14:30
<u>*Τόπος:*</u> Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Λ/σια.

<u>*Επιμέλεια*</u>
Γρηγόρης Μακρίδης

ΘΕΜΑΤΑ

1. Τα εννιά ψηφία 1, 2, 3,.....,9 γράφονται με τυχαία σειρά για δημιουργία εννιαψήφιου αριθμού χωρίς επανάληψη ψηφίων. Το πρόβλημα μελετά όλες τις τριάδες συνεχόμενων ψηφίων (δηλαδή τριψήφιων αριθμών) που προκύπτουν από κάθε πιθανό εννιαψήφιο αριθμό. Να βρεθεί ο αριθμός των εννιαψήφιων αριθμών των οποίων το άθροισμα όλων των τριψήφιων αριθμών που προκύπτουν από όλες τις δυνατές τριάδες συνεχόμενων ψηφίων είναι μέγιστο. Να υπολογιστεί το μέγιστο άθροισμα.

2. Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι αριθμοί p ώστε ο αριθμός p^2+11 να έχει ακριβώς έξι διαφορετικούς διαιρέτες (συμπεριλαμβανομένων των 1 και του εαυτού του).

3. Η ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...$ ικανοποιεί τη σχέση
$$\alpha_{m+n} + \alpha_{m-n} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{2m} + \alpha_{2n} + 2\right)$$
για όλους τους μη-αρνητικούς ακέραιους m και n με $m \geq n$.
Αν $\alpha_1 = 2$ να βρεθεί το α_{1998}.

4. Να υπολογιστεί το άθροισμα
$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{τοξεφ}\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

5. Τα Α και Β είναι σταθερά σημεία πάνω στη περιφέρεια κύκλου με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ. Η ΑΒ έχει μήκος $\frac{3\rho}{2}$. Η ΧΥ είναι μεταβλητή διάμετρος του κύκλου(δηλαδή τα Χ και Υ κινούνται πάνω στην περιφέρεια ώστε η ΧΥ να είναι πάντα διάμετρος). Να αποδειχθεί ότι ο Γεωμετρικός Τόπος του σημείου τομής των ευθειών ΑΧ και ΒΥ είναι κύκλος και να υπολογιστεί η ακτίνα του.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α β γ δ ε ζ η θ ι

$\xleftrightarrow{1}$

$\quad\xleftrightarrow{2}$

$\quad\quad\xleftrightarrow{3}$

$\quad\quad\quad\xleftrightarrow{4}$

$\quad\quad\quad\quad\xleftrightarrow{5}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\xleftrightarrow{6}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\xleftrightarrow{7}$

$$\begin{array}{rcll}
 & & 100\alpha & \text{(το α εμφανίζεται μόνο ως 100δες)} \\
10\beta+100\beta & = & 110\beta & \text{(το β εμφανίζεται ως 10δες και 100δες)} \\
\gamma+10\gamma+100\gamma & = & 111\gamma & \text{(το γ εμφανίζεται ως 1δες,10δες και 100δες)} \\
\delta+10\delta+100\delta & = & 111\delta & \\
\varepsilon+10\varepsilon+100\varepsilon & = & 111\varepsilon & \\
\zeta+10\zeta+100\zeta & = & 111\zeta & \\
\eta+10\eta+100\eta & = & 111\eta & \\
\theta+100\theta & = & 110\theta & \\
\iota & = & \iota & \\
\hline
\end{array}$$

$$100\alpha+110\beta+111(\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)+110\theta+\iota$$

Για μέγιστη τιμή είναι φανερό ότι τα γ,δ,ε,ζ,η θα πρέπει να έχουν τα πιό μεγάλα ψηφία, δηλαδή 5,6,7,8,9. Το β θα πρέπει να είναι το πιό μεγάλο από αυτά που έμειναν, δηλαδή το 4. Το α το επόμενο πιό μεγάλο, δηλαδή το 3. Παρόμοια, το θ=2 και το ι=1. Έτσι α εννιαψήφιος αριθμός είναι ο :

34(56789)21

διατάξεις των 5 ψηφίων ανα 5 =5! = 120

Το μέγιστο άθροισμα είναι=300+440+3885+22+1=4648.

2. Για $p \neq 3$ και $p^2 \equiv 1(\text{mod}3) \Rightarrow 3/p^2+11$

Παρόμοια για $p \neq 2$ και $p^2 \equiv 1(\text{mod}4) \Rightarrow 4/p^2+11$

$\Rightarrow$ για $p \neq 2$ και $p \neq 3$ έχουμε $12/p^2+11$

Εφόσον το 12 έχει 6 διαιρέτες (1,2,3,4,6,12) και $p^2+11>12$ για $p>1$

$\Rightarrow p^2+11$ πρέπει να έχει περισσότερους από 6 διαιρέτες.

Άρα οι μόνες περιπτώσεις που μένουν να ελέγξουμε είναι για p=2 και 3

Αν $p=2 \Rightarrow p^2+11=15$ με διαιρέτες (1,3,5,15)

Αν $p=3 \Rightarrow p^2+11=20$ έχει διαιρέτες (1,2,4,5,10,20), δηλαδή 6 διαιρέτες και έτσι το p=3 είναι η μόνη λύση.

3. $$\alpha_{m+n} + \alpha_{m-n} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{2m} + \alpha_{2n} + 2\right)$$

Για όλους τους μη-αρνητικούς ακέραιους m και n με $m \geq n$.
Αν $\alpha_1 = 2$ να βρεθεί το α_{1998} .

Για m=n $\quad \alpha_{2m} + \alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_{2m} + \alpha_{2m} + 2)$

$$\alpha_{2m} + \alpha_{2m} + 2 = 2(\alpha_{2m} + \alpha_0) = \ldots\ldots = 2 \cdot 2(2\alpha_m - 1) = 4(2\alpha_m - 1)$$

m=m, n=0 $\quad \alpha_m + \alpha_m = \frac{1}{2}(\alpha_{2m} + \alpha_0 + 2) = \frac{1}{2}(\alpha_{2m} + \alpha_0) + 1$

$$\alpha_{2m} + \alpha_0 = 2(\alpha_m + \alpha_m - 1) = 2(2\alpha_m - 1)$$

$$\Rightarrow 2\alpha_{2m} + 2 = 8\alpha_m - 4 \Rightarrow 2\alpha_{2m} = 8\alpha_m - 6$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{2m} = 4\alpha_m - 3}$$

m=0 $\quad \alpha_0 = 4\alpha_0 - 3 \Rightarrow 3\alpha_0 = 3 \Rightarrow \alpha_0 = 1$

m=1 $\quad \alpha_2 = 4\alpha_1 - 3 = 5 \Rightarrow \alpha_2 = 5$

$$\alpha_4 = 4\alpha_2 - 3 = 20 - 3 = 17 \Rightarrow \alpha_4 = 17$$

m=2, n=1 $\quad \alpha_3 + \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\alpha_4 + \alpha_2 + 2\right)$

$$\alpha_3 + 2 = \frac{1}{2}\left(17 + 5 + 2\right) = 12 \Rightarrow \alpha_3 = 10$$

;;; προφανώς $\alpha_n = n^2 + 1$ το οποίο μπορεί εύκολα να να αποδειχθεί με επαγωγή.

Έτσι $\alpha_{1998} = 1998^2 + 1$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{τοξεφ}\left(\frac{2}{n^2}\right)$

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{2}{n^2}\right) = \text{τοξεφ}\left[\frac{(n+1)-(n-1)}{1+(n^2-1)}\right] = \text{τοξεφ}\left[\text{εφ}(\text{τοξεφ}(n+1) - \text{τοξεφ}(n-1)\right]$$

$$= \text{τοξεφ}\,(n+1) - \text{τοξεφ}\,(n-1)$$

n=1 τοξεφ(2)-τοξεφ(0)

n=2 τοξεφ(3)-τοξεφ(1)

n=3 τοξεφ(4)-τοξεφ(2)

n=4 τοξεφ(5)-τοξεφ(3)

…..

…..

n=κ-2 τοξεφ(κ-1)-τοξεφ(κ-3)

n=κ-1 τοξεφ(κ)-τοξεφ(κ-2)

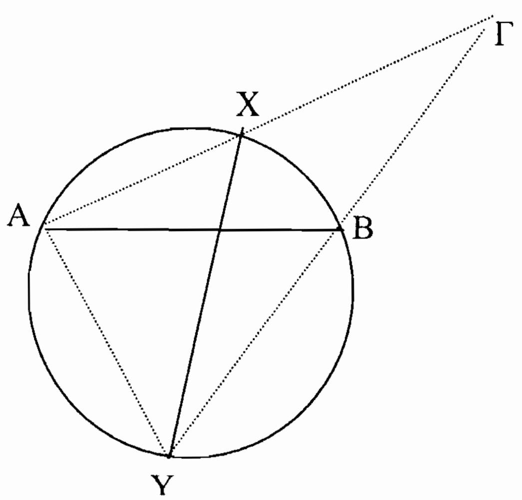
n=κ τοξεφ(κ+1)-τοξεφ(κ-1)

-τοξεφ(0)-τοξεφ(1)+τοξεφ(κ)+τοξεφ(κ+1)

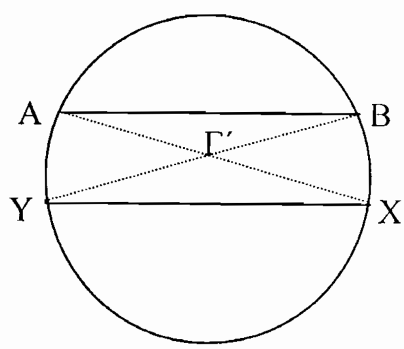
$\kappa \to \infty$

$$-0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

5.



Σχ. 1



Σχ. 2

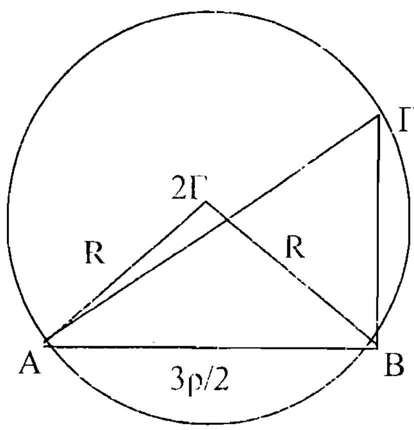
Στα σχήματα 1 και 2 βλέπουμε δύο περιπτώσεις της μεταβλητής διαμέτρου ΧΥ. Σε κάθε περίπτωση ∠ΧΑΥ=90 και η ∠ΑΥΒ είναι σταθερή. Στο σχ 1, ∠ΑΓΒ η οποία είναι η συμπληρωματική της ∠ΑΥΒ είναι και αυτή σταθερή.
Παρόμοια στο σχ2, ∠ΑΓ΄Υ είναι σταθερή εφ'όσον είναι συμπληρωματική της ∠ΑΥΒ. Εφ'όσον η ∠ΑΓ'Β είναι παραπληρωματική της ∠ΑΓ΄Υ θα είναι και αυτή σταθερή. Στο σχ1, ο Γ.Τ. του Γ ώστε η ∠ΑΓΒ να είναι σταθερή είναι τόξο κύκλου με εγγεγραμμένη γωνία Γ και χορδή ΑΒ.

Στο σχ2, το τρίγωνο με σταθερή βάση ΑΒ και σταθερή ∠ΑΓ΄Β έχει τη κορυφή του Γ΄ σε κυκλικό τόξο με εγγεγραμμένη γωνία Γ΄ και χορδή ΑΒ.

Τα τρίγωνα ΑΓΥ και ΑΓ΄Υ είναι όμοια. (ορθογώνια και ∠ΑΥΒ=∠ΑΥΒ στα σχ 1και2) άρα οι γωνίες ∠ΑΓΒ και ∠ΑΓ΄Β είναι παραπληρωματικές. Γι'αυτό τα Γ και Γ' ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Εύρεση ακτίνας Γ.Τ.

∠Γ σταθερή, ΑΒ=σταθερή



Νόμο των ημιτόνων

$$\frac{AB}{\eta\mu\Gamma} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\eta\mu\Gamma} = \frac{3\rho}{4\eta\mu\Gamma} = \qquad = \frac{3\rho}{4\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\rho}{\sqrt{7}}$$

Έστω η γωνία ∠ΑΥΒ = φ στο σχ 1. Τότε η $\Gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$ όπως δείξαμε προειγουμένως.

Στο σχ1 μπορούμε έυκολα να δούμε ότι $\eta\mu\varphi = \frac{3\rho/4}{\rho} = \frac{3}{4}$

15η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
3-9 Μαΐου, 1998, Λευκωσία - Κύπρος

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης

Επιμέλει

α
Τρίτη, 5 Μαΐου 1998
15:00 – 19:30

Γρηγόρης Μακρίδης
Σάββας Αντωνίου

ΘΕΜΑΤΑ

1. Θεωρούμε την πεπερασμένη ακολουθία $\left[\dfrac{\kappa^2}{1998}\right]$, με κ=1, 2, ..., 1997, όπου [χ] συμβολίζει το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού χ. Πόσοι όροι της ακολουθίας αυτής είναι διαφορετικοί;

2. Έστω n ακέραιος αριθμός με $n \geq 2$ και $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2n+1}$ πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε την ανισότητα :
$$\sqrt[n]{\alpha_1} - \sqrt[n]{\alpha_2} + \sqrt[n]{\alpha_3} - \ldots - \sqrt[n]{\alpha_{2n}} + \sqrt[n]{\alpha_{2n+1}} < \sqrt[n]{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots - \alpha_{2n} + \alpha_{2n+1}}.$$

3. Έστω S το σύνολο που περιέχει τα σημεία του τριγώνου ΑΒΓ εκτός από ένα εσωτερικό του σημείο Τ. Να αποδείξετε ότι το S μπορεί να παρασταθεί σαν ένωση ξένων μεταξύ τους ανά δύο κλειστών τμημάτων(κλειστό τμήμα είναι αυτό που περιέχει τα άκρα του).

4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $y^2 = x^5 - 4$ δεν έχει ακέραιες λύσεις.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Πρώτα θα δείξουμε ότι:

$$\left\{\left[\frac{\kappa^2}{1998}\right] : 1 \le \kappa \le 999\right\} = \{0,1,2,....,499\}$$

Ο μέγιστος όρος είναι $\left[\dfrac{999^2}{1998}\right] = 499$, ενώ η διαφορά μεταξύ οποιονδήποτε δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας $\left(\dfrac{\kappa^2}{1998}\right)$ για $1\le \kappa \le 999$ είναι μικρότερη της και έτσι δεν υπάρχουν κενά στις τιμές των όρων της αρχικής ακολουθίας.

Οι υπόλοιποι όροι είναι όλοι διαφορετικοί εφόσον για $1000 \le \kappa \le 1997$, έχουμε $\dfrac{\kappa^2}{1997} - \dfrac{(\kappa-1)^2}{1998} > 1$.

Έτσι, υπάρχουν ακριβώς 500+998=1498 διαφορετικοί όροι.

2. Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο κ ένα πιο γενικό αποτέλεσμα. Για κάθε πραγματικό αριθμό $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{2\kappa+1}$ ισχύει η ανισότητα:

$$\sqrt[n]{\alpha_1} - \sqrt[n]{\alpha_2} + \sqrt[n]{\alpha_3} - \ldots - \sqrt[n]{\alpha_{2\kappa}} + \sqrt[n]{\alpha_{2\kappa+1}} < \sqrt[n]{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots - \alpha_{2\kappa} + \alpha_{2\kappa+1}}$$

Τότε το πρόβλημα γίνεται η ειδική περίπτωση για κ=n.
Για κ=1 έχουμε να αποδείξουμε: αν $0<\alpha<\beta<\gamma$ τότε

(1) $\sqrt[n]{\alpha} - \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} < \sqrt[n]{\alpha - \beta + \gamma}$

Θέτω $t=\beta-\alpha$. Έτσι, η ανισότητα (1) γίνεται:

(2) $\sqrt[n]{\alpha + t} - \sqrt[n]{\alpha} > \sqrt[n]{\gamma} - \sqrt[n]{\gamma - t}$

Η συνάρτηση $f:(0,\infty) \to R$, $f(x)=\sqrt[n]{x+t} - \sqrt[n]{x}$ είναι φθίνουσα επειδή

$$f(x) = \frac{t}{\sqrt[n]{(x+t)^{n-1}} + \sqrt[n]{(x+t)^{n-2}}\,x + \ldots + \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

και από το $\alpha<\gamma-t$ έχουμε $f(\alpha)>f(\gamma-t)$.

[Από τη (2)]

Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για κ-1 και έστω $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{2\kappa+1}$. Ισχύει η ανισότητα:

(3) $\sqrt[n]{\alpha_1}-\sqrt[n]{\alpha_2}+\ldots+\sqrt[n]{\alpha_{2\kappa-1}}-\sqrt[n]{\alpha_{2\kappa}}+\sqrt[n]{\alpha_{2\kappa+1}}<\sqrt[n]{\alpha_1-\alpha_2+\ldots+\alpha_{2\kappa-1}}-\sqrt[n]{\alpha_{2\kappa}}+\sqrt[n]{\alpha_{2\kappa+1}}$

Θέτω $\alpha=\alpha_1-\alpha_2+\ldots+\alpha_{2\kappa-1}$, $\beta=\alpha_{2\kappa}$, $\gamma=\alpha_{2\kappa+1}$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $0<\alpha<\beta<\gamma$.

Με χρήση της (1) έχουμε:

(4) $\sqrt[n]{\alpha_1-\alpha_2+\ldots+\alpha_{2\kappa-1}}-\sqrt[n]{\alpha_{2\kappa}}+\sqrt[n]{\alpha_{2\kappa+1}}<\sqrt[n]{\alpha_1-\alpha_2+\ldots+\alpha_{2\kappa+1}}$

Από τα (3) και (4) το αποτέλεσμα είναι φανερό.

3. Συμβολίζουμε με Α, Β, Γ τα σημεία τομής των ΑΤ, ΒΤ, ΓΤ με τις ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε την οικογένεια ευθειών από το Α. Μερικές από αυτές τέμνουν τη ΤΓ, και παίρνουμε το πρώτο σύνολο «μπλε» ευθυγράμμων τμημάτων με άκρα στα ΤΓ και Α, Β. Τώρα, χρησιμοποιώντας την οικογένεια ευθειών από το Β, οι οποίες τέμνουν την ΤΑ, ορίζουμε το δεύτερο σύνολο «κόκκινων» ευθυγράμμων τμημάτων με άκρα στα ΤΑ και Β,Γ. Τέλος, οι ευθείες από το Γ μας δίδει το τρίτο σύνολο «μαύρων» ευθυγράμμων τμημάτων με τα άκρα ΤΒ και Γ, Α. Είναι εύκολο τώρα να ελεγχθεί ότι η ένωση των κόκκινων, μπλε και μαύρων συνόλων ευθυγράμμων τμημάτων ικανοποιεί την προϋπόθεση του προβλήματος.

4. Θα είναι αρκετό να θεωρήσουμε την περίπτωση που τα χ και ψ είναι ετερόσημα. Αν χ και ψ είναι άρτιοι, τότε $\left(\frac{\psi}{2}\right)^2+1=8\left(\frac{\chi}{2}\right)^5$ και έτσι $\left(\frac{\psi}{2}\right)^2\equiv-1(\bmod 4)$, το οποίο είναι αδύνατο.

Έστω τώρα ότι τα χ και ψ είναι περιττοί. Η εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή: $\psi^2+36=\chi^5+32$ και $\psi^2+6^2=(\chi+2)\,(\chi^4-2\chi^3+4\chi^2-8\chi+16)$.

Επειδή το χ δεν διαιρείται με το 2, τότε $A=\chi^4-2\chi^3+4\chi^2-8\chi+16\equiv 3(\bmod 4)$. Από το τελευταίο συνεπάγεται ότι το Α έχει πρώτο διαιρετή ρ της μορφής 4κ+3.
Έχουμε $\rho\,|\,\psi^2+6^2\Rightarrow\rho\,|\,\psi$ και $\rho\,|\,6\Rightarrow\rho=3$.

Από την άλλη έχουμε $A\equiv\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1\equiv\pm1(\bmod 3)$ για όλα τα χ, το οποίο είναι άτοπο.

ΔΕΥΤΕΡΗ ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΝΕΩΝ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15,5 ΕΤΩΝ

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης*</u>
Πέμπτη, 18 Ιουνίου, 1998
<u>*Διάρκεια:*</u> 4,5 ώρες
<u>*Τόπος:*</u> Αθήνα - Ελλάς

<u>*Επιμέλεια*</u>
Αλέξανδρος Δημητριάδης

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</u>

1. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\underbrace{11...111}_{1997}\underbrace{22...222}_{1998}5$ είναι τέλειο τετράγωνο.

2. Θεωρούμε κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ με ΑΒ=ΑΕ=ΓΔ=1, $A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{E}A = 90^0$ και ΒΓ+ΔΕ=1. Να βρείτε το εμβαδό του πενταγώνου.

3. Να βρείτε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (χ,ψ) που ικανοποιούν την εξίσωση : $\chi^{\psi} = \psi^{\chi-\psi}$.

4. Χρησιμοποιώντας μόνο τρία ψηφία, μπορεί καποιος να γράψει 16 τριψήφιους αριθμούς έτσι ώστε ανά δύο να δίνουν διαφορετικά υπόλοιπα διαιρούμενοι με το 16;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Έχουμε:

$$\underbrace{11...111}_{1997}\underbrace{22...222}_{1998}5=\underbrace{11...111}_{1997}\cdot 10^{1999}+\underbrace{22...222}_{1998}\cdot 10+5=\frac{10^{1997}-1}{9}\cdot 10^{1999}+2\cdot\frac{10^{1998}-1}{9}\cdot 10+5=$$

$$=\ \frac{1}{9}\left(10^{3996}-10^{1999}+2\cdot 10^{1999}-20+45\right)=\frac{1}{9}\left(10^{3996}+2\cdot 5\cdot 10^{1998}+25\right)=\left(\frac{10^{1998}+5}{3}\right)^2.$$

2. Φέρουμε τις διαγώνιες ΑΓ, ΑΔ. Αφού ΑΒ=ΑΕ και $\hat{B}=\hat{E}=90^0$, από τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με βάση ΒΓ+ΔΕ=1 και ύψος ΑΒ=ΑΕ=1. Το εμβαδό του νέου τριγώνου είναι $E_1=\frac{1}{2}$.
Το κατασκευασθέν νέο τρίγωνο είναι ίσο με το τρίγωνο ΑΓΔ και έτσι το ολικό εμβαδό του πενταγώνου είναι 1.

3. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η (1,1).
Αν (χ,ψ) είναι μια άλλη λύση της εξίσωσης με $\chi\neq 1$, τότε πρέπει $\chi>\psi$, διότι αν $\chi\leq\psi$ θα είχαμε: $\psi^{\chi-\psi}\leq 1$, ενώ εν τω μεταξύ $\chi^{\psi}>1$.

Έστω $\chi>\psi\geq 2$. Τότε, σχηματίζουμε την εξίσωση: $\left(\frac{\chi}{\psi}\right)^{\psi}=\psi^{\chi-2\psi}$ (1).

Αφού $\frac{\chi}{\psi}>1$, παίρνουμε $\chi-2\psi>0$ και $\frac{\chi}{\psi}>2$ με $\frac{\chi}{\psi}\in N$. Τότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\frac{\chi}{\psi}=\psi^{\frac{\chi-2\psi}{\psi}}=\psi^{\frac{\chi}{\psi}-2}\geq 2^{\frac{\chi}{\psi}-2}$. Δηλ. $\frac{\chi}{\psi}\geq 2^{\frac{\chi}{\psi}-2}\Rightarrow\frac{\chi}{\psi}\leq 4$.

Άρα έχουμε: $2<\frac{\chi}{\psi}\leq 4$

Αν $\frac{\chi}{\psi}=3$, τότε $\psi=3,\ \ \chi=9$

Αν $\frac{\chi}{\psi}=4$, τότε ψ=2, χ=8

Τελικά, το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι: $\{(1,1),(8,2),(9,3)\}$.

4. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να γράψουμε 16 τέτοιους αριθμούς. Είναι φανερό ότι 8 από αυτούς τους αριθμούς πρέπει να είναι άρτιοι και οι υπόλοιποι πρέπει να είναι περιττοί. Είναι προφανές ότι τα ψηφία δεν μπορούν να είναι όλα άρτια ή όλα περιττά.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου τα δύο από τα ψηφία είναι άρτια και ένα περιττό. (Η περίπτωση με δύο περιττά ψηφία και ένα άρτιο είναι παρόμοια).Μπορούμε να γράψουμε ακριβώς 9 περιττούς τριψήφιους αριθμούς με τα δοθέντα ψηφία, τους:

$\overline{\alpha_1\kappa}$, $\overline{\alpha_2\kappa},\ldots,\overline{\alpha_9\kappa}$, όπου $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_9$ είναι διψήφιοι αριθμοί και κ το δοθέν περιττό ψηφίο. Είναι φανερό ότι το $\overline{\alpha_i\kappa}-\overline{\alpha_j k}$ είναι διαιρετό με το 16, τότε και μόνον τότε αν το $\alpha_i-\alpha_j$ είναι διαιρετό με το 8. Αλλά υπάρχουν μόνο τρεις διψήφιοι περιττοί αριθμοί, συνεπώς δεν υπάρχουν αρκετοί (τέσσερεις) διαφορετικοί περιττοί διψήφιοι αριθμοί, οι οποίοι θα δώσουν τριψήφιους αριθμούς με διαφορετικά υπόλοιπα (mod16). Επομένως, δεν μπορούμε να γράψουμε 16 τέτοιους τριψήφιους αριθμούς.

39η ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
12-20 Ιουλίου, 1998, ΤΑΪΠΕΙ, TAIWAN

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης
Τετάρτη 15 Ιουλίου, 1998
Χρόνος: 4,5 ώρες

Επιμέλεια
Γρηγόρης Μακρίδης
Σάββας Αντωνίου

Μέγιστη βαθμολογία κάθε θέματος: 7 μονάδες

ΠΡΩΤΗ ΜΕΡΑ

Πρόβλημα 1
Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες μεταξύ τους και οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΔΓ δεν είναι παράλληλες. Υποθέτουμε ότι το σημείο Ρ, όπου οι μεσοκάθετες των πλευρών ΑΒ και ΔΓ τέμνονται, βρίσκεται στο εσωτερικό του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν και μόνον αν τα τρίγωνα ΑΒΡ και ΓΔΡ έχουν ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2
Σε ένα διαγωνισμό, υπάρχουν α υποψήφιοι και β κριτές, όπου $\beta \geq 3$ είναι ένας περιττός ακέραιος. Κάθε κριτής βαθμολογεί τον κάθε υποψήφιο με «επιτυχία» η «αποτυχία». Υποθέτουμε ότι ο κ είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε, για κάθε δύο κριτές, οι βαθμολογίες τους συμπίπτουν για το πολύ κ υποφηψίους.
Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\kappa}{\alpha} \geq \frac{\beta - 1}{2\beta}$$

Πρόβλημα 3
Για κάθε θετικό ακέραιο n συμβολίζουμε με d(n) τον αριθμό των θετικών διαιρετών του n (συμπεριλαμβανομένων του 1 και του n). Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι κ για τους οποίους υπάρχει κάποιος n τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \kappa$$

39η ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης *Επιμέλεια*
Πέμπτη 16 Ιουλίου, 1998
Χρόνος: 4,5 ώρες

Μέγιστη βαθμολογία κάθε θέματος: 7 μονάδες

ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΡΑ

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν όλα τα ζεύγη (α,β) θετικών ακεραίων αριθμών τέτοιων ώστε ο αριθμός $\alpha^2 \beta+\alpha+\beta$ να διαιρείται με τον αριθμό $\alpha\beta^2 +\beta+7$.

Πρόβλημα 5
Έστω I το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Έστω ότι ο εγγεγραμμένος κύκλος του ΑΒΓ εφάπτεται με τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ στα σημεία Κ, Λ και Μ, αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Β και είναι παράλληλος προς την ΜΚ τέμνει τις ευθείες ΛΜ και ΛΚ στα σημεία Ρ και Σ, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η γωνιά $\angle$ΡΙΣ είναι οξεία.

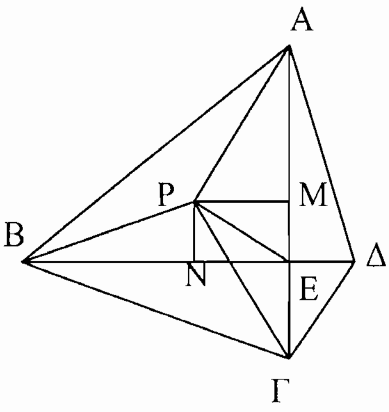
Πρόβλημα 6
Θεωρούμε όλες τις συναρτήσεις f ορισμένες στο σύνολο Ν των θετικών ακεραίων και με πεδίο τιμών το Ν που ικανοποιούν τη σχέση.

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

για όλα τα sκαι t στο Ν. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του f(1998).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1.



Έστω ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ε. Έστω, λόγω συμμετρίας ότι το Ρ βρίσκεται εντός του τριγώνου ΑΒΕ. Συμβολίζουμε με Μ και Ν τα σημεία που τέμνουν οι κάθετες από το Ρ τις ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

Χωρίς να θεωρούμε ότι το ΡΑ=ΡΒ και ΡΓ=ΡΔ γράφουμε τα εμβαδά των τριγώνων [ΑΒΡ] και [ΓΔΡ] ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}2[AB P] &= 2[ABE]-2[PAE]-2[PBE]\\ &= (AM+PN)(BN+PM)-(AM+PN)PM-(BN+PM)PN\\ &= AM\cdot BN - PM\cdot PN\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2[\Gamma\Delta P) &= 2[\Gamma\Delta E] + 2[P\Gamma E] + 2[P\Delta E]\\ &= (\Gamma M-PN)\,(\Delta N-PM) + (\Gamma M-PN)PM+(\Delta N-PM)PN\\ &= \Gamma M\cdot \Delta N - PM\cdot PN\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2([ABP]-[\Gamma\Delta P]) = AM\cdot BN - \Gamma M\cdot\Delta N \quad (1)$$

Τώρα θεωρούμε ότι το ΡΑ=ΡΒ και ΡΓ=ΡΔ. Έστω ότι το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Τότε η μοναδικότητα του Ρ συνεπάγει ότι είναι το περίκεντρο. Έτσι Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Έτσι ΑΜ=ΓΜ και ΒΝ=ΔΝ και από την (1) συνεπάγεται ότι [ΑΒΡ]=[ΓΔΡ].

Έστω τώρα ότι [ΑΒΡ]=[ΓΔΡ].
Τότε, από την (1) έχουμε ΑΜ . ΒΝ=ΓΜ . ΔΝ (2).

Αν ΡΑ≠ΡΓ, ας υποθέσουμε λόγω συμμετρίας ότι ΡΑ>ΡΓ. Τότε ΑΜ>ΓΜ και ακόμη ΒΝ>ΔΝ επειδή η ΡΒ>ΡΔ. Έτσι ΑΜ. ΒΝ>ΓΜ. ΔΝ το οποίο είναι άτοπο (βλέπε (2)). Συμπέρασμα είναι ότι ΡΑ=ΡΓ το οποίο συνεπάγει ότι το Ρ ισαπέχει από τα Α, Β, Γ και Δ. Συμπέρασμα είναι ότι το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

2. Εφόσον υπάρχουν $\binom{\beta}{2}$ ζεύγη κριτών και κάθε ζεύγος συμφωνεί στη βαθμολογία για το πολύ κ υποψηφίους, ο συνολικός αριθμός των περιπτώσεων που συμφωνούν οι κριτές ανά δύο είναι $\kappa\binom{\beta}{2}$. Για $1 \le \nu \le \alpha$, έστω ότι ο $\nu_{\text{οστός}}$ υποψήφιος έχει βαθμολογηθεί με «επιτυχία» και x_ν κριτές και με «αποτυχία» από y_ν κριτές, τότε $x_\nu + y_\nu = \beta$.

Τότε ο αριθμός των ζευγών των κριτών οι οποίοι συμφωνούν για αυτό τον υποψήφιο είναι:

$$\binom{x_\nu}{2} + \binom{y_\nu}{2} = \frac{x_\nu!}{2(x_\nu - 2)!} + \frac{y_\nu!}{2(y_\nu - 2)!} = \frac{x_\nu(x_\nu - 1)}{2} + \frac{y_\nu(y_\nu - 1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[x_\nu^2 + y_\nu^2 - x_\nu - y_\nu]$$

$$\ge \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(x_\nu + y_\nu)^2 - \beta] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\beta^2 - \beta]$$

$$= \frac{1}{4}[\beta^2 - 2\beta] = \frac{1}{4}[(\beta - 1)^2 - 1]$$

Εφόσον το β είναι περιττός μπορούμε να κάνουμε την ανίσωση πιο αυστηρή αντικαθιστώντας το $(\beta\text{-}1)^2\text{-}1$ με $(\beta\text{-}1)^2$.

Έτσι:

$$\binom{x_\nu}{2} + \binom{y_\nu}{2} \ge \frac{1}{4}(\beta - 1)^2$$

Συνεπάγεται:

$$\kappa\binom{\beta}{2} \ge \sum_{\nu=1}^{\alpha}[\binom{x_\nu}{2} + \binom{y_\nu}{2}] \ge \frac{\alpha(\beta - 1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \kappa\frac{\beta(\beta - 1)}{2} \ge \frac{\alpha(\beta - 1)^2}{4} \Rightarrow \frac{\kappa}{\alpha} \ge \frac{(\beta - 1)}{2\beta}$$

3. Για α και β που είναι μεταξύ τους πρώτοι θετικοί ακέραιοι έχουμε $d(\alpha\beta) = d(\alpha) \cdot d(\beta)$

Έστω $n = \rho_1^{\kappa_1}\rho_2^{\kappa_2}....\rho_t^{\kappa_t}$ όπου $\rho_1, \rho_2, ...\rho_t$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πρώτοι αριθμοί και $\kappa_1, \kappa_2, ...\kappa_t$ είναι θετικοί ακέραιοι.

Τότε $d(n) = (\kappa_1 + 1)(\kappa_2 + 1)....(\kappa_t + 1)$ ενώ $d(n^2) = (2\kappa_1 + 1)(2\kappa_2 + 1)...(2\kappa_t + 1)$.

Συνεπάγεται ότι το $d(n^2)$ είναι πάντοτε περιττός έτσι οι μόνες αποδεχτές τιμές του κ θα είναι περιττοί αριθμοί. Τώρα θα αποδείξουμε ότι κάθε περιττός αριθμός είναι αποδεχτός.

$\kappa = \frac{2\kappa_1 + 1}{\kappa_1 + 1} \cdot \frac{2\kappa_2 + 1}{\kappa_2 + 1} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{2\kappa_t + 1}{\kappa_t + 1}$ για κάποιους θετικούς ακέραιους $\kappa_1, \kappa_2, \ldots. \kappa_t$.

Προχωρούμε με τη μέθοδο της επαγωγής στο κ. Το αποτέλεσμα ισχύει για κ=1 εφόσον $\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1$.

Για κάθε περιττό ακέραιο κ>1, αν είναι της μορφής 4S+1, τότε κ=$\frac{4S+1}{2S+1}(2S+1)$ αφού 2S+1<κ, είναι αποδεχτό από την υπόθεση της επαγωγής.

Όταν το κ είναι τη μορφής 4S+3 τότε 4S+3=$\frac{4S+2+1}{2S+1+1}(2S+1+1)$ και 2S+2=$\frac{4S+3+1}{2} = \frac{\kappa+1}{2}$ είναι άρτιος αριθμός.

Πρέπει να διαχωρίσουμε τις περιπτώσεις κ=8ρ+3 και κ=8ρ+7.

8ρ+3=$\frac{24\rho+9}{12\rho+5} \cdot \frac{12\rho+5}{6\rho+3}(2\rho+1)$

Στη περίπτωση του 8ρ+7 θα χρειαστεί να εξετάσουμε άλλες δύο περιπτώσεις. Για να κλείσουμε τη διαδικασία κάνουμε το εξής:

Θεωρούμε ότι ο x είναι αποδεχτός, τότε θα είναι και ο $2^\lambda x - 1$ για κάθε λ≥1. Έστω μ είναι τέτοιο ώστε $\frac{d(\mu^2)}{d(\mu)} = x$. Για λ=1, παίρνω $n = \rho^{x-1} \cdot \mu$ όπου ρ πρώτος που δεν διαιρεί το λ. Τότε $\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2x-1}{x} \cdot x = 2x - 1$. Για λ>1, παίρνουμε

$n = \rho_1^{2^{\lambda-1}.3x-2}.\rho_2^{2^{\lambda-2}.3^2x-2}\ldots.\rho_{\kappa-1}^{2.3^{\lambda-1}x-2}.\rho_\kappa^{3^{\lambda-1}x-2}.\lambda$ όπου $\rho_1, \rho_2, \ldots. \rho_\kappa$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πρώτοι που δεν διαιρούν το λ. Τότε

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2^\lambda 3x - 3}{2^{\lambda-1} \cdot 3x - 1} \cdot \frac{2^{\lambda-1}3^2 x - 3}{2^{\lambda-2} \cdot 3^2 x - 1} \cdots \frac{2^2 3^{\lambda-1} x - 3}{2 \cdot 3^{\lambda-1} \cdot x - 1} \cdot \frac{2 \cdot 3^{\lambda-1} x - 1}{3^{\lambda-1} \cdot x} = 2^\lambda x - 1$$

και αυτό αποδεικνύει τη πιο πάνω πρόταση.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι όλοι οι περιττοί ακέραιοι είναι αποδεχτοί. Ήδη έχουμε δείξει ότι το 1 είναι. Για κάθε περιττό ακέραιο κ>1, μπορούμε να γράψουμε κ+1=2^λx για κάποιο περιττό ακέραιο x<κ. Εφόσον το x είναι αποδεχτό, κ=2^λx-1 θα είναι και αυτό. Έτσι όλοι οι περιττοί ακέραιοι είναι αποδεχτοί.

4. Αν $\alpha^2\beta+\alpha+\beta$ διαιρείται με $\alpha\beta^2+\beta+7$, τότε το ίδιο και ο αριθμός:

$$\beta(\alpha^2\beta+\alpha+\beta)-\alpha(\alpha\beta^2+\beta+7)=\beta^2-7\alpha$$

Επιπλέον, εφόσον $\alpha\geq 1$, έχουμε $\beta^2-7\alpha<\alpha\beta^2+\beta-7$. Έτσι, αν $\beta^2-7\alpha\geq 0$ τότε $\beta^2-7\alpha=0$.

Ειδικά, το 7 διαιρεί το β, έτσι $(\alpha, \beta)=(7z^2,7z)$ όπου z θετικός ακέραιος.

Αντιστρόφως, αν $(\alpha, \beta)=(7z^2,7z)$ με z να είναι θετικός ακέραιος, τότε $\alpha^2\beta+\alpha+\beta=7z(49z^4+z+1)$ διαιρείται με $\alpha\beta^2+\beta+7=7(49z^4+z+1)$.

Έστω ότι το $\beta^2-7\alpha<0$. Τότε ο θετικός ακέραιος $7\alpha-\beta^2$, μικρότερο του 7α, διαιρείται με το $\alpha\beta^2+\beta+7$. Αυτό είναι δυνατό μόνο αν $\beta=1$ ή $\beta=2$ εφόσον διαφορετικά $\alpha\beta^2+\beta+7>9\alpha$.

Για $\beta=1$, θα πρέπει το $7\alpha-1$ να διαιρείτε με το $\alpha+8$. Τώρα, $7\alpha-1=7(\alpha+8)-57$, και η παραγοντοποίηση $57=1\cdot 57=3\cdot 19$ δείχνει ότι $\alpha=11$ ή $\alpha=49$ είναι οι μόνες πιθανότητες. Για $(\alpha,\beta)=(11,1)$, έχουμε $\alpha\beta^2+\beta+7=19$, το οποίο διαιρεί το $\alpha^2\beta+\alpha+\beta=133$. Για $(\alpha,\beta)=(49,1)$, έχουμε $\alpha\beta^2+\beta+7=57$, το οποίο διαιρεί το $\alpha^2\beta+\alpha+\beta=2451$.

Για $\beta=2$, πρέπει το $7\alpha-4$ να διαιρείται με το $4\alpha-9$. Τώρα $4(7\alpha-4)=7(4\alpha+9)-79$, και το 79 δεν έχει διαιρέτη της μορφής $4\alpha+9$, έτσι δεν υπάρχει λύση.

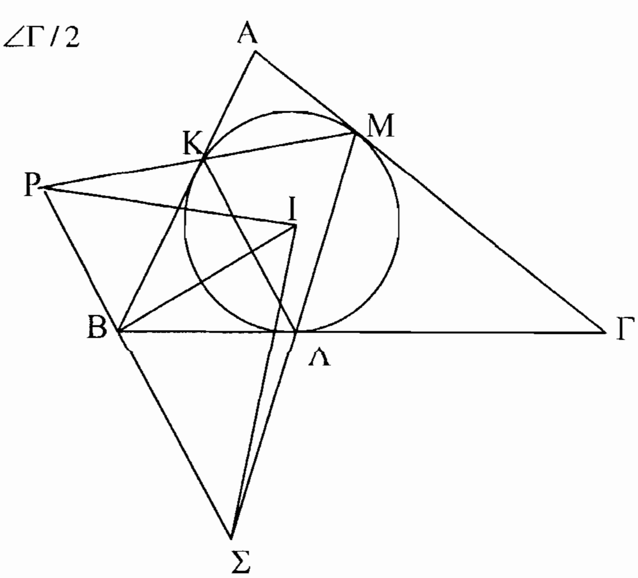
Έτσι, η συμπληρωμένη λύση δίδεται από το $(\alpha,\beta)=(7z^2,7z)$, $z=1,2,\ldots$, $(\alpha,\beta)=(11,1)$ και $(\alpha,\beta)=(49,1)$.

5. Εφόσον οι ευθείες ΚΛ και ΡΣ είναι παράλληλες, έχουμε, στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{BKP}$,

$\angle BKP=90^\circ-\angle A/2$

$\angle KBP=90^\circ-\angle B/2$

$\angle BPK=90^\circ-\angle \Gamma/2$



Από το νόμο των ημιτόνων, $BP = \frac{\sigma\upsilon\nu(\angle A/2)}{\sigma\upsilon\nu(\angle \Gamma/2)} \cdot BK$ (1)

Παρόμοια, έχουμε στο $\overset{\Delta}{B\Lambda\Sigma}$,

$\angle B\Lambda\Sigma = 90^o - \angle\Gamma/2$

$\angle B\Sigma\Lambda = 90^o - \angle A/2$

$\angle \Lambda B\Sigma = 90^o - \angle B/2$

έτσι, $B\Sigma = \frac{\sigma\upsilon\nu(\angle\Gamma/2)}{\sigma\upsilon\nu(\angle A/2)} \cdot B\Lambda = \frac{\sigma\upsilon\nu(\angle\Gamma/2)}{\sigma\upsilon\nu(\angle A/2)} \cdot BK$ (2)

Βλέπουμε τώρα ότι $BI \perp P\Sigma$ και $IK \perp AB$. Από τα (1) και (2), έχουμε

$I P^2 + I\Sigma^2 - P\Sigma^2 = \left(BI^2 + BP^2\right) + \left(BI^2 + B\Sigma^2\right) - \left(BP + B\Sigma\right)^2$

$= 2\left(BI^2 - BP \cdot B\Sigma\right)$

$= 2\left(BI^2 - BK^2\right)$

$= 2IK^2 > 0$

Έτσι, από το νόμο των συνιμητόνων, η $\angle PI\Sigma$ είναι οξεία.

6. Συμβολίζουμε με S το σύνολο των συναρτήσεων υπό αναφορά. Έστω f μια από αυτές, και έστω $f(1)=\alpha$. Θέτω $t=1$ και $s=1$ παίρνοντας $f(f(s))=\alpha^2 s$, $f(\alpha t^2)=[f(t)]^2$ για όλα τα $s, t \in N$.

Αυτές μαζί με την αρχική εξίσωση δίνουν:

$[f(s)f(t)]^2 = [f(s)]^2 f(\alpha t^2) = f[s^2 f(f(\alpha t^2))]$

$= f(s^2\alpha^2\alpha t^2) = f[\alpha(\alpha st)^2]$

$= [f(\alpha st)]^2$

Συνεπάγεται ότι $f(\alpha st) = f(s) f(t)$ για όλα τα s,t. Συγκεκριμένα, $f(\alpha s) = \alpha f(s)$, και έτσι: $\alpha f(st) = f(s) f(t)$ για όλα τα $s, t \in N$ (1)

Τώρα θα αποδείξουμε ότι f(t) διαιρείται για κάθε $t \in N$. Για δεδομένο πρώτο ρ, συμβολίζουμε με ρ^α και ρ^β τις μεγαλύτερες δυνάμεις του ρ που διαιρούν το α και f(t), αντίστοιχα. Συνεπάγεται δια επαγωγής και της (1) ότι:

$$[f(t)]^\kappa = \alpha^{\kappa-1} f(t^\kappa) \text{ για όλα τα } \kappa \in N.$$

Η μεγαλύτερη δύναμη του ρ που διαιρεί το $[f(t)]^\kappa$ είναι $\rho^{\kappa\beta}$ και αυτή που διαιρεί το $\alpha^{\kappa-1}$ είναι $\rho^{(\kappa-1)\alpha}$. Έτσι $\kappa\beta \geq (\kappa-1)\alpha$ για όλα τα $\kappa \in N$, το οποίο είναι δυνατό μόνο αν $\beta \geq \alpha$. Το συμπέρασμα ισχύει για όλους τους πρώτους ρ, και έτσι, α διαιρεί το f(t).

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \dfrac{1}{x - 1}$

$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$

$y=0 \Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2+x} & x+2 \\ 2x-1 & \\ \underline{-2x+2} & \\ +1 & \end{array}$$

Π.Ο. $x \in R-\{1\}$

$yx-y=x^2+x-1 \Rightarrow x^2 + (1-y)x + y - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{y - 1 \pm \sqrt{1 - 2y + y^2 - 4y + 4}}{2}$

$x = \dfrac{1}{2}\left(y - 1 \pm \sqrt{y^2 - 6y + 5}\right) = \dfrac{1}{2}\left(y - 1 \pm \sqrt{(y-5)(y-1)}\right)$ πρέπει $(y-5)(y-1) \geq 0$

$\Rightarrow$ Π.Τ. $y \leq 1$, $y \geq 5$

Κ.Α. $x=1$ Π.Α. $y=x+2$

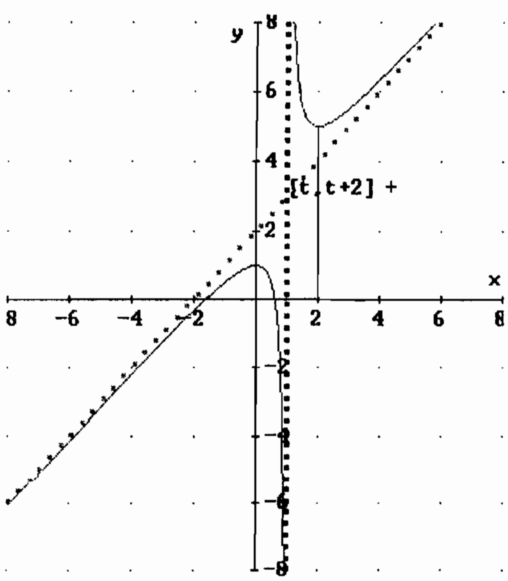
$y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ ρίζες $x=0$, $x=2$

$y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3} \neq 0 \quad \forall x \in R - \{1\}$

x		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		2	
y′			+	0	-		-	//	-	0	+
y			↗	∩	↘				↘	∪	↗
	-	0	+		+	0	-	//	+		

$y(0)=1$ max $(0,1)$

$y(2)= 4+1=5$ min $(2,5)$

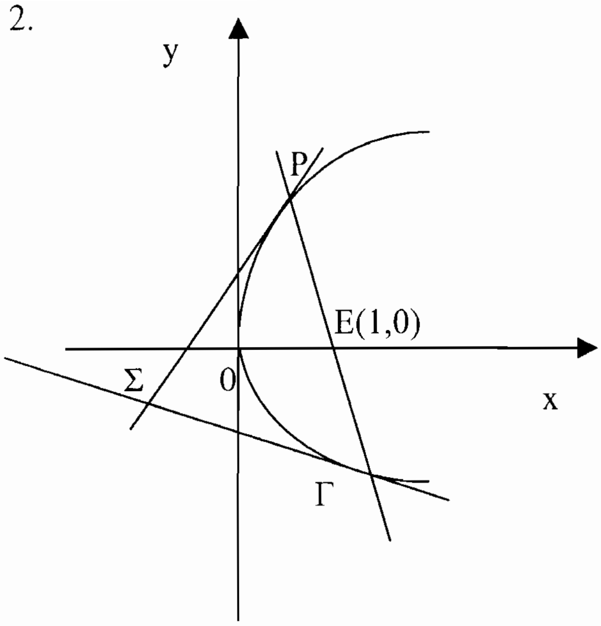


$E = \displaystyle\int_2^{e^{1998}+1} \left[\frac{x^2 + x - 1}{x - 1} - (x+2)\right]dx = \int_2^{e^{1998}+1} \frac{dx}{x-1}$

$E = \ln(x-1)\Big|_2^{e^{1998}+1} = \ln e^{1998} - \ln 1$

$\Rightarrow E = 1998$

2.



$y^2 = 4\alpha x \quad \alpha=1 \Rightarrow E(1,0)$

$\rho(\rho^2,2\rho) \quad T(t^2,2t)$

α. $(x)\ \dfrac{y-2\rho}{x-\rho^2}=\dfrac{2t-2\rho}{t^2-\rho^2}$

$\Rightarrow \dfrac{y-2\rho}{x-\rho^2}=\dfrac{2(t-\rho)}{(t-\rho)(t+\rho)} \Rightarrow 2x-2\rho^2=(t+\rho)y-2\rho(t+\rho)$

$\Rightarrow 2x-(t+\rho)y-2\rho^2+2\rho t+2\rho^2=0$

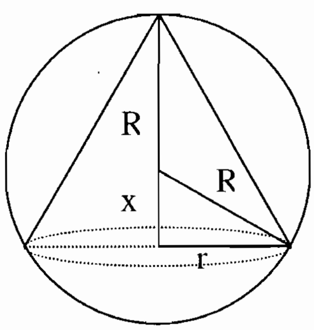
$\Rightarrow (x)\ 2x-(t+\rho)y+2\rho t=0$

β. $\left.\begin{array}{l} 2x-(t+\rho)y+2\rho t=0 \quad (x) \\ (1,0)\ \in(x) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 2-0+2\rho t=0 \\ \Rightarrow \rho t=-1 \end{array}$

γ. $\left.\begin{array}{l} P\Sigma:\ x-\rho y+\rho^2=0 \\ T\Sigma:\ x-ty+t^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\Sigma(\rho t,\ t+\rho) \\ t\rho=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma(-1,\ t+\rho)$

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ κέντρο βάρους} \Rightarrow x_G=\frac{1}{3}(x_\rho+x_T+x_\Sigma)=\frac{1}{3}(\rho^2+t^2-1) \\ \qquad\qquad y_G=\frac{1}{3}(y_\rho+y_T+y_\Sigma)=\frac{1}{3}(2\rho+2t+t+\rho)=t+\rho \\ \Rightarrow y^2=(t+\rho)^2=t^2+\rho^2+2(-1)=3x-1 \Rightarrow \text{γ.τ.G. } y^2=3x-1 \end{array}\right\}$$

3.



$V_{\sigma\varphi}=\dfrac{4}{3}\pi\cdot R^3$

$V_{\kappa\omega\nu}=\dfrac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot \upsilon=\dfrac{1}{3}\pi(R^2-x^2)(R+x)=\dfrac{\pi}{3}(R+x)^2(R-$

$\upsilon=R+x$

$r^2=R^2-x^2$

$\Rightarrow \dfrac{dV}{dx}=\dfrac{\pi}{3}[2(R+x)(R-x)+(R+x)^2(-1)]=$

$\dfrac{\pi}{3}(R+x)(2R-2x-R-x)=\dfrac{\pi}{3}(R+x)(R-3x)$

Ρίζες: $x=-R$ αδύνατο

$x=\dfrac{R}{3}$

$\dfrac{d^2x}{dx^2}=\dfrac{\pi}{3}[(R-3x)-3(R+x)]=\dfrac{\pi}{3}[-2R-6x]<0 \Rightarrow$ μέγιστο

$V_{\kappa\omega\nu.max}=\dfrac{\pi}{3}(R^2-\dfrac{R^2}{9})(R+\dfrac{R}{3})=\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{27}8R^2\cdot 4R=\dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{4}{3}\pi.R^3 \Rightarrow V_{\kappa.max}=\dfrac{8}{27}V_{\sigma\phi}$

4. $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow |B|=-1\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&5\\1&-2\end{pmatrix}$

α) $A-B^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&5\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A-B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-3\\3&5\end{pmatrix}$

β) ι) $AKB=5I\Rightarrow AK=5IB^{-1}=5B^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\kappa_1&\kappa_2\\\kappa_3&\kappa_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&25\\5&-10\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \kappa_1+2\kappa_3=-10\\ \quad 4\kappa_1+3\kappa_3=5\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}4\kappa_1+8\kappa_3=-40\\ 4\kappa_1+3\kappa_3=5 \quad -\\ \hline 5\kappa_3=-45\Rightarrow \kappa_3=-9\Rightarrow \kappa_1=8\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \kappa_2+2\kappa_4=25\\ \quad 4\kappa_2+2\kappa_4=-10\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}4\kappa_2+8\kappa_4 100\\ 4\kappa_2+3\kappa_4=-10 \quad -\\ \hline 5\kappa_4=90\Rightarrow \kappa_4=18\Rightarrow \kappa_2=-11\end{array}$$

$$\Rightarrow K=\begin{pmatrix}8&-11\\-9&18\end{pmatrix}$$

ιι) $A\Lambda=\Lambda B\Rightarrow \Lambda(A-I)=B\Rightarrow \Lambda=B(A-I)^{-1}$

$A\text{-}I=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\4&2\end{pmatrix}\Rightarrow |A-I|=-8\Rightarrow (A-I)^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&-2\\-4&0\end{pmatrix}$

$(A-I)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\end{pmatrix}\Rightarrow B(A-I)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}8&2\\3&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Lambda=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}8&2\\3&1\end{pmatrix}$

γ) $M=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ $\quad M^{-1}AM=\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow AM=M\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$AM=\begin{pmatrix}&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+2\gamma&\beta+2\delta\\4\alpha+3\gamma&4\beta+3\delta\end{pmatrix}$

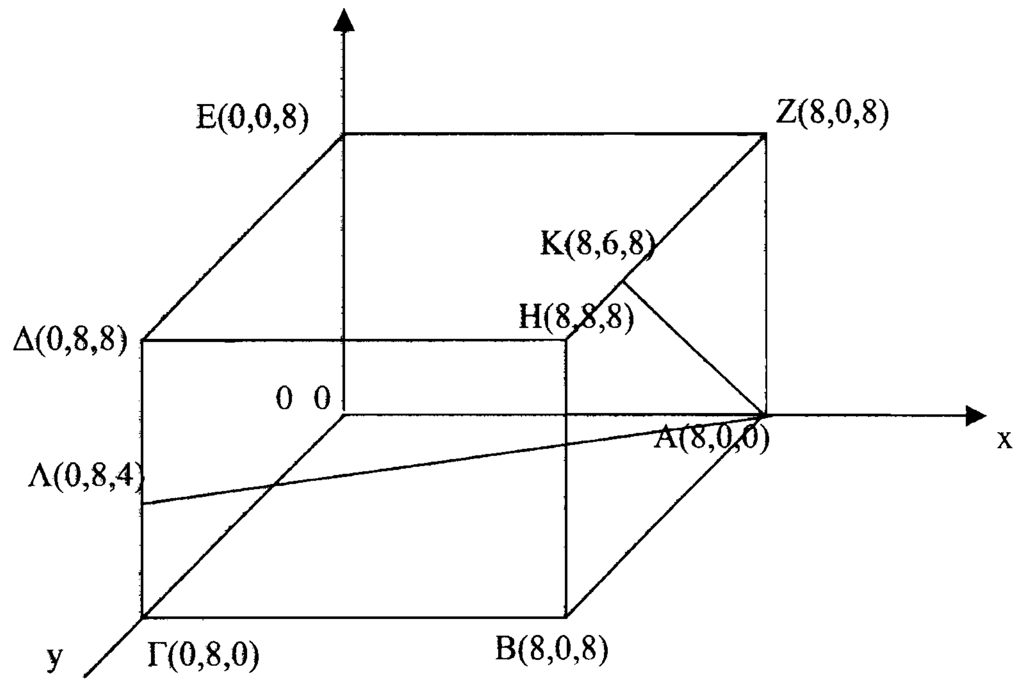
$M\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\alpha&-\beta\\5\gamma&-\delta\end{pmatrix}$

$\alpha+2\gamma=5\alpha \Rightarrow 2\gamma=4\alpha\Rightarrow \gamma=2\alpha$

$\beta=\beta+2\delta \Rightarrow -2\beta=2\delta\Rightarrow \delta=-\beta$

όπου α, $\beta\neq o$ για να $\exists M^{-1}$

5.



$ZK=3KH \Rightarrow K(8,6,8)$

$\Rightarrow \overrightarrow{KA}(8-8)\vec{i}+(0-6)\vec{j}+(0-8)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{KA}=-6\vec{j}-8\vec{k}=-2(3\vec{j}+4\vec{k})$

$x_\Lambda=\frac{1}{2}(x_\Theta+x_\Gamma)=0$

$y_\Lambda=\frac{1}{2}(y_\Theta+y_\Gamma)=8$

$z_\Lambda=\frac{1}{2}(z_\Theta+y_\Gamma)=4 \Rightarrow \Lambda=(0,8,4)$

$\overrightarrow{\Lambda A}=8\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}=4(2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k})$

α) $\sigma\upsilon\nu K\hat{A}\Lambda=\dfrac{\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{\Lambda A}}{\left|\overrightarrow{KA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\Lambda A}\right|}=\dfrac{(-2)4\cdot[0\cdot 2+3(-2)+4(-1)]}{2\sqrt{9+16}\cdot 4\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{80}{2\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\dfrac{80}{120}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu K\hat{A}\Lambda=\dfrac{2}{3}$

β) $\overrightarrow{KA}\times\overrightarrow{\Lambda A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -6 & -8\\ 8 & -8 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}(24-64)+\vec{j}(-64-0)+\vec{k}(0+48)=-40\vec{i}-64\vec{j}+48\vec{k}=-8\vec{n}$

$\sigma\upsilon\nu\phi=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{k}|}=\dfrac{(5\vec{i}+8\vec{j}-6\vec{k})\cdot(\vec{k})}{\sqrt{25+64+36}\cdot 1}=\dfrac{-6}{\sqrt{125}}\Rightarrow \phi=122{,}5^\circ$

γ) $\left.\begin{array}{r}(AK\Lambda):\vec{r}.\vec{n}=\vec{p}\\ AE(AK\Lambda)\end{array}\right\}\Rightarrow 5x+8y-6z=5.8+8.0-6.0=40$

$d=\dfrac{|15\cdot 0+8\cdot 0-6\cdot 0-40|}{\sqrt{25+64+36}}=\dfrac{40}{5\sqrt{5}}\Rightarrow d=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

6. Θεωρούμε τους βώλους διακριτούς
Δυνατές περιπτώσεις

	κ_1	κ_2	κ_3	
1)	1	1	8 $\Rightarrow$	$\alpha_1 = \binom{3}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{1}\cdot\binom{8}{8} = 270$
2)	1	2	7	$\alpha_2 = 3!\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{7} = 2160$
3)	1	3	6	$\alpha_3 = 3!\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{6} = 5040$
4)	1	4	5	$\alpha_4 = 3!\binom{10}{1}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{5} = 7560$
5)	2	2	6	$\alpha_5 = \binom{3}{1}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{6} = 3780$
6)	2	3	5	$\alpha_6 = 3!\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{5} = 15120$
7)	2	4	4	$\alpha_7 = \binom{3}{1}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4} = 9450$
8)	3	3	4	$\alpha_8 = \binom{3}{1}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{4} = 12600$ +

$\Delta = 55980$

Ευνοϊκές περιπτώσεις:

$$E = \binom{3}{1}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{4} = 12600$$

$$\Rightarrow P = \frac{E}{\Delta} = \frac{126000}{55980} \Rightarrow P = \frac{70}{311}$$

Για τον υπολογισμό των δυνατών περιπτώσεων μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: από όλες τις περιπτώσεις (3^{10}) αφαιρούμε όσες δεν θέλουμε, που είναι:

κ_1	κ_2	κ_3		
0	0	10	$\Rightarrow$	$\beta_1 = \binom{3}{1} \cdot 1 = 3$
1	2	7		$\beta_2 = 3!\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{9} = 60$
1	3	6		$\beta_3 = 3!\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{8} = 270$
1	4	5		$\beta_4 = 3!\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{7} = 720$
2	2	6		$\beta_5 = 3!\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{6} = 1260$
2	3	5		$\beta_6 = \binom{3}{1} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = 756 \quad +$
				3069

$\Rightarrow \Delta = 3^{10} - 3069 = 55980$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ενιαίο Λύκειο(10 ώρο)

13. z=x+yi

$|z-1-i| = 2|z-1-i| \Rightarrow |x-1+(y-1)i| = 2|x-1+(y+1)i|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = 4(x-1)^2+4(y+1)^2$

$\Rightarrow 3x^2+3y^2-6x+10y+6=0$

$K(-g,-f) \Rightarrow K(1,-\frac{5}{3}), R = \sqrt{g^2+f^2-c} \Rightarrow R = \frac{4}{3}$

14. $f(x) = x^2\text{τοξεφ}x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x\text{τοξεφ}x + \frac{x^2}{1+x^2}$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1\text{τοξεφ}1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 < 0 \\ f(2) = 4\text{τοξεφ}2 - 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ υπάρχει ρίζα $\rho \in (1,2)$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{\frac{\pi}{4}-1}{\frac{2\pi}{4}+\frac{1}{2}} \Rightarrow x_1 = 1{,}104$

15. $\rho_1=4\eta\mu 3\theta$

α) Εφαπτόμενες στον πόλο: $\rho_1=0 \Rightarrow 3\theta=\kappa\pi \Rightarrow$ (ΟΗ) $\theta=\frac{\pi}{3}$

β) $E=E_2-E_1=\pi.4^2 -3.\ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\eta\mu 3\theta)^2 d\theta = 16\pi - 12\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\sigma\upsilon\nu 6\theta)d\theta$

$E=16\pi-12\left(\theta - \frac{\eta\mu 6\theta}{6}\right)_0^{\frac{\pi}{3}} = 16\pi - 12[\left(\frac{\pi}{3}-0\right) - (0-0)] \Rightarrow E = 12\pi$ τ.μ.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ & ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης*</u>
Δευτέρα, 29 Ιουνίου, 1998.
7:30 π.μ. – 10:30 π.μ.

<u>*Επιμέλεια*</u>
Μαρία Φαλά

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση $\text{τοξεφ}\chi + \text{τοξεφ}\frac{4}{3} = \frac{3\pi}{4}$

2. Αν $\chi = \frac{t^2}{2} - e^t + t$ και $\psi = \eta\mu t - t$, να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{d\chi}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι:

$$\lim_{t \to 0} \frac{d\psi}{d\chi} = 1$$

3. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β ανήκουν στον ίδιο δειγματικό χώρο και $P(A\text{-}B)=\frac{1}{10}$, $P(B/A)=\frac{1}{2}$ και $P(B)=\frac{4}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$ και $P(B\cap A')$.

4. Δίνεται η παράσταση $K=\chi^2 \cdot \ln\psi$.
   α) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dK}{d\chi}$.
   β) Να βρείτε την γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης
   $$2\chi \cdot \ln\psi + \frac{\chi^2}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\chi} = 4\sigma\upsilon\nu 2\chi$$

5. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών 30 οικογενειών.

2	1	4	2	3	1	0	2	3	2
1	2	5	1	0	3	1	2	3	2
3	0	2	3	2	1	0	3	2	4

   α) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

   β) Να βρείτε το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

6. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 22 & -1 \end{pmatrix}$.

   α) Να δείξετε ότι A^2-6A+11·I=0
   (I ο μοναδιαίος και O ο μηδενικός 2x2 πίνακας).

   β) Να βρείτε ένα πίνακα X, 2x2, έτσι ώστε $A \cdot X = B$

7. Για μια καμπύλη ψ=f(χ) το σημείο A(2,1) είναι σημείο καμπής και $\frac{d\psi}{d\chi} = \chi + \frac{\alpha}{\chi^2}$.
   Να βρείτε την τιμή του α και την εξίσωση της καμπύλης.

8. Δίνεται η υπερβολή χψ=2 και το σημείο της A(2,1). Η κάθετη της υπερβολής στο A τέμνει ξανά την υπερβολή στο σημείο B. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το B και ακτίνα 3 μονάδες.

9. Δίνεται:

$$f(\chi)=\begin{vmatrix} 2+\chi & \ln\chi & 1 \\ 1 & \ln\chi & 0 \\ 1 & \ln\chi & 1 \end{vmatrix}$$

   α) Να δείξετε ότι f(χ)=(χ+1)lnχ

   β) Να βρείτε την τιμή του $\int_1^e f(\chi)d\chi$ ως συνάρτηση του e.

10. Σε μια συγκέντρωση βρίσκονται 3 παντρεμένα ζευγάρια, 5 ελεύθεροι άντρες και 2 ελεύθερες γυναίκες. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε ομάδα 4 ατόμων.

    α) χωρίς περιορισμό.

    β) αν η ομάδα θα περιέχει τουλάχιστο ένα άντρα και τουλάχιστο μια γυναίκα.

    γ) αν η ομάδα θα περιέχει <u>ακριβώς</u> ένα παντρεμένο ζευγάρι.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Ένας κύκλος (Κ) περνά από τα σημεία Ο(0,0) και Α(8,0) και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $\psi=\frac{3}{4}\chi$.
   α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του μπορεί να πάρει τη μορφή $\chi^2+\psi^2-8\chi-6\psi=0$.

   β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Β, αν ΟΒ διάμετρος του.

2. Σε μια σφαίρα ακτίνας $R=2\sqrt{3}\text{cm}$, εγγράφουμε ορθό κυκλικό κύλινδρο ύψους 2χ.
   α) Να δείξετε ότι η διαφορά, V, των όγκων των δυο στερεών δίνεται από τη σχέση $V=2\pi\,(\chi^3-12\chi+16\sqrt{3})$.

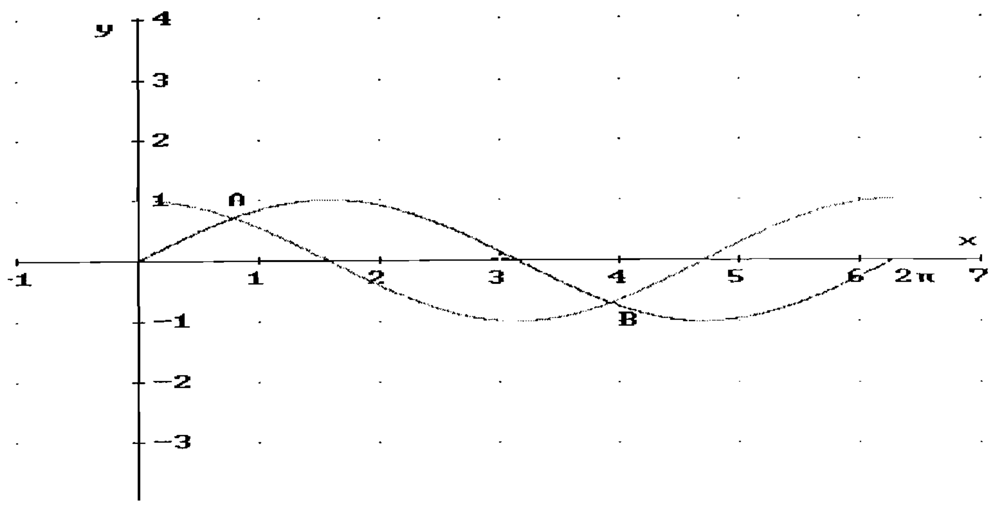
   β) Να βρείτε την τιμή του χ, ώστε το V να γίνει ελάχιστο, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

3. Η κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης $\psi=f(\chi)$ στο τυχαίο σημείο της (χ,ψ) ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{e^{2\chi}}{\psi.e^{\psi^2}}$.

   α) Αν είναι γνωστό ότι η καμπύλη περνά από το σημείο $A(\frac{1}{2},1)$, να δείξετε ότι η εξίσωση της είναι $\psi^2=2\chi$.

   β) Η κάθετη της $\psi^2=2\chi$ στο σημείο $A(\frac{1}{2},1)$, τέμνει τον άξονα Οχ στο σημείο Β. το χωρίο, που ορίζεται από το τόξο ΟΑ της καμπύλης και τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΒ και ΑΒ, στρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα των χ. να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

4.



Στο πιο πάνω σχήμα δίνονται τα διαγράμματα των καμπύλων με εξισώσεις f(χ)=ημχ, g(χ)=συνχ, χε[0,2π].

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β στα οποία τέμνονται οι δυο καμπύλες.

β) Να βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

5. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi=1-\dfrac{16}{(\chi-4)^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τις τομές με τους άξονες, τις ασύμπτωτες, τυχόν ακρότατα και να την παραστήσετε γραφικά.

β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη, τον άξονα των χ και την ευθεία χ=20.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $\text{τοξεφ}\chi + \text{τοξεφ}\frac{4}{3} = \frac{3\pi}{4}$

Θέτω $\text{τοξεφ}\chi = \alpha \Leftrightarrow \chi = \text{εφ}\alpha,\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Θέτω $\text{τοξεφ}\frac{4}{3} = \beta \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \text{εφ}\beta,\ \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$

$$\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \text{εφ}(\alpha+\beta) = \text{εφ}\frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{1 - \text{εφ}\alpha.\text{εφ}\beta} = -1 \Rightarrow \chi + \frac{4}{3} = -1 + \chi \cdot \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\chi = \frac{7}{3} \Rightarrow \chi = 7$$

2. $\chi = \frac{t^2}{2} - e^t + t,\ \psi = \text{ημ}t - t$

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{d\psi}{dt}\Big/\frac{d\chi}{dt} = (\text{συν}t - 1)\cdot\frac{1}{t - e^t + 1} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{\text{συν}t - 1}{t - e^t + 1}$$

$$l = \lim_{t\to 0}\frac{d\psi}{d\chi} = \lim_{t\to 0}\frac{\text{συν}t - 1}{t - e^t + 1} = \frac{1-1}{0-1+1} = \frac{0}{0} \text{ απροσ.}$$

De l' Hospital $l = \lim_{t\to 0}\frac{(\text{συν}t - 1)'}{(t - e^t + 1)'} = \lim_{t\to 0}\frac{-\text{ημ}t}{1 - e^t} = -\frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$ απροσ.

$$\Rightarrow l = \lim_{t\to 0}\frac{-\text{συν}t}{-e^t} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow l = 1$$

3. $P(A\text{-}B) = \frac{1}{10},\ P(B/A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{4}{5}$

$$\left.\begin{aligned} &P(A\text{-}\beta) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{1}{10} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{10} + P(A\cap B)\\ &P(A/B) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = 2P(A\cap B)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{10} + P(A\cap B) = 2P(A\cap B)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{10}\\ &P(A) = 2P(A\cap B)\end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{5}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{1}{10} \Rightarrow P(A\cup B) = \frac{9}{10}$$

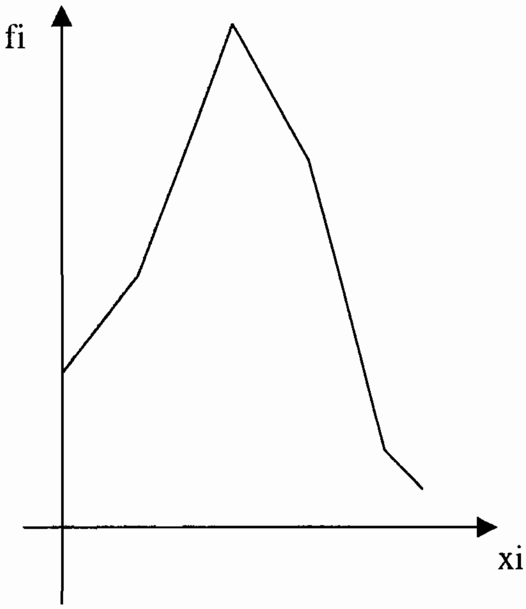
$$P(B\cap A') = P(B) - P(A\cap B) = \frac{4}{5} - \frac{1}{10} \Rightarrow P(B\cap A') = \frac{7}{10}$$

4. $K=\chi^2 \ln\psi \Rightarrow \frac{dK}{d\chi} = 2\chi \cdot \ln\psi + \chi^2 \cdot \frac{\frac{d\psi}{d\chi}}{\psi}$

$$2\chi \ln\psi + \frac{\chi^2}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\chi} = 4\sigma\upsilon\nu 2\chi \Rightarrow \frac{dK}{d\chi} = 4\sigma\upsilon\nu 2\chi \Rightarrow \int dK = 2\int 2\sigma\upsilon\nu 2\chi \cdot d\chi$$

$$\Rightarrow K = 2\eta\mu 2\chi + c \Rightarrow \chi^2 \ln\psi = 2\eta\mu 2\chi + c$$

5. α)



β) $\overline{x} = \frac{1}{30}(4\cdot 0 + 6\cdot 1 + 10\cdot 2 + 7\cdot 3 + 2.4 + 1\cdot 5) = \frac{60}{30}$

$$\overline{x} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \overline{x})^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\frac{4(0-2)^2 + 6(1-2)^2 + 10(2-2)^2 + 7(3-2)^2 + 2(4-2)^2 + 1(5-2)^2}{4+6+10+7+2+1}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4.4 + 6.1 + 0 + 7.1 + 2.4 + 1.9}{4+6+10+7+2+1}} = \sqrt{\frac{46}{30}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{23}{15}} \approx 1{,}24$$

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 22 & -1 \end{pmatrix}$

α) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^2 - 6A + 11I = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 18 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-12+11 & -6+6+0 \\ 18-18+0 & 13-24+11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 - 6A + 11I = 0$$

β) $A\chi=B \Rightarrow \chi=A^{-1}.B$

$$|A|=8+3=11 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \chi=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11 & 3\\ 22 & -1\end{pmatrix}$$

$$\chi=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}66 & 11\\ 11 & -11\end{pmatrix} \Rightarrow \chi=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

7. $\psi=f(x)$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} A(2,1)\ \sigma.\kappa. \Rightarrow f''(2)=0,\ f(2)=1 \\ \dfrac{d\psi}{d\chi}=\chi+\dfrac{\alpha}{\chi^2} \Rightarrow \dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}=1-\dfrac{2\alpha}{\chi^3} \end{array}\right\} \Rightarrow 1-\dfrac{2\alpha}{2^3}=0 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{4}=1 \Rightarrow \alpha=4$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi}=\chi+\dfrac{4}{\chi^2} \Rightarrow \psi=\dfrac{\chi^2}{2}-\dfrac{4}{\chi}+\kappa \\ f(2)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=\frac{2^2}{2}-\frac{4}{2}+\kappa \Rightarrow \kappa=1 \Rightarrow \psi=\frac{\chi^2}{2}-\frac{4}{\chi}+1$$

8. $\left.\begin{array}{l} (Y)\ \chi\psi=2 \quad A(2,1)\ \varepsilon(Y) \\ \psi+\chi\cdot\dfrac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi}=-\dfrac{\psi}{\chi} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \lambda_{\perp}=2$

$$(\perp) \quad \left.\left.\begin{array}{l} \psi-\psi_1=\lambda_{\perp}(\chi-\chi_1) \\ \Rightarrow \lambda_{\perp}=2, A\in(\perp) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \psi-1=2(\chi-2) \Rightarrow \psi=2\chi-3 \\ \chi\psi=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi(2\chi-3)=2 \Rightarrow 2\chi^2-3\chi-2=0$$

$(2\chi+1)(\chi-2)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma:\ \chi=2,\ \chi=-\dfrac{1}{2} \\ \chi\psi=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi=-4$$

$\Rightarrow A(2,1), \quad B(-\frac{1}{2},-4)$

$$(K) \quad [\chi-(-\tfrac{1}{2})]^2+[\psi-(-4)]^2=3^2 \Rightarrow (\chi+\tfrac{1}{2})^2+(\psi+4)^2=9$$

9. $$f(x)=\begin{vmatrix}2+x & \ln x & 1\\ 1 & \ln x & 0\\ 1 & \ln x & 1\end{vmatrix}=\ln x\begin{vmatrix}2+x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\ln x[(2+x+0+1)-(1+1+0)]$$

α) $\quad f(x)=\ln x\cdot(x+1)$

β. $I=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e (x+1)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx+\int_1^e \ln x\,dx$

$$I=\int_1^e \ln x\,d\frac{x^2}{2}=\int_1^e \ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^2 d\ln x+x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x\,d\ln x$$

$$I=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{x^2}{x}dx-\int_1^e\frac{x}{x}dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e-x\Big|_1^e$$

$$I=\left((\frac{e^2}{2}+e).1-\frac{e^2}{4}-e\right)-\left(0-\frac{1}{4}-1\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{5}{4}\Rightarrow I=\frac{e^2+5}{4}$$

10. $\left.\begin{array}{l}\text{3 παντρεμένα ζευγάρια}\\ \text{5 ελεύθεροι άνδρες}\\ \text{2 ελεύθερες γυναίκες}\end{array}\right\}\Rightarrow$ 13 άτομα

8 άνδρες 5 γυναίκες

α) $\alpha=\binom{13}{4}=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\Rightarrow\alpha=715$

β) $\beta=\binom{8}{1}\binom{5}{3}+\binom{8}{2}\binom{5}{2}+\binom{8}{3}\binom{5}{1}=8\cdot\frac{5\cdot4}{1\cdot2}+\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\cdot\frac{5\cdot4}{1\cdot2}+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot5\Rightarrow\beta=640$

1α+3γ ή 2α+2γ ή 3α+1γ

γ) <u>α΄ τρόπος:</u> $\gamma=\binom{3}{1}\cdot\left[\binom{11}{2}-2\right]=3\left(\frac{11\cdot10}{1\cdot2}-2\right)\Rightarrow\gamma=159$

ιζ + 2 άλλοι όχι ζευγάρι

<u>β΄ τρόπος:</u> $\gamma=\binom{3}{1}\cdot\left[\binom{7}{2}+\binom{4}{2}+\binom{7}{1}\binom{4}{1}-2\right]$

ιζ + (2α ή 2γ ή 1α+1γ-1ζ) $\Rightarrow$ γ=159

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. (K) $\left.\begin{array}{l}\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0\\ O(0,0),\ A(8,0)\ \varepsilon(K)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Rightarrow 0+0+0+c=0 \Rightarrow c=0\\ 8^2+0+2.8.g+0=0 \Rightarrow g=-4\end{array}$

$K(-g,-f)=(4,-f)\quad \psi=\frac{3}{4}\chi \Rightarrow \psi=\frac{3}{4}.4=3 \Rightarrow -f=3 \Rightarrow f=-3 \Rightarrow K(4,3)$

α) $\Rightarrow (K)\ \chi^2+\psi^2+2(-4)\chi+2(-3)\psi=0 \Rightarrow (K)\ \chi^2+\psi^2-8\chi-6\psi=0$

β) O(0,0), OB διάμετρος $\Rightarrow$ K(4,3) $\in$OB, B$\in$ (K)

O(0,0) K(4,3) $B(\chi_B,\psi_B)$

$\left.\begin{array}{l}\chi_K=\frac{1}{2}(\chi_O+\chi_B) \Rightarrow \chi_B=8\\ \psi_K=\frac{1}{2}(\psi_O+\psi_B) \Rightarrow \psi_B=6\end{array}\right\} \Rightarrow B(8,6)$

$$2\chi+2\psi\cdot\frac{d\psi}{d\chi}-8-6\frac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}(2\psi-6)+2\chi-8=0 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}=-\frac{\chi-4}{\psi-3} \Rightarrow$$

$$\lambda_{\varepsilon\phi}=\left.\frac{d\psi}{d\chi}\right|_{(8,6)}=-\frac{8-4}{6-3}=-\frac{4}{3}$$

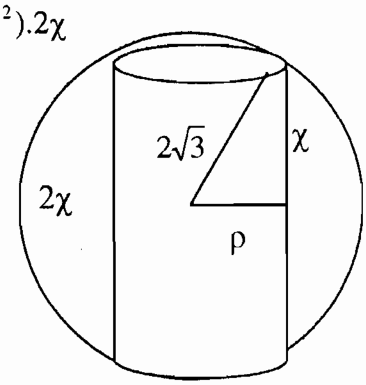
$$(\varepsilon\varphi)\quad \psi-\psi_B=\lambda_{\varepsilon\phi}(\chi-\chi_B) \Rightarrow \psi-6=-\frac{4}{3}(\chi-8) \Rightarrow 3\psi-18=-4\chi+32 \Rightarrow (\varepsilon\phi)\ 3\psi+4\chi-50=0$$

2. $R_{\sigma\phi}=2\sqrt{3}\text{cm},\quad \upsilon_{\kappa\upsilon\lambda.}=2\chi \qquad \rho=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-\chi^2}=\sqrt{12-\chi^2}\text{cm}$

α) $V=V_{\sigma\phi}-V_{\kappa\upsilon\lambda}=\frac{4}{3}\pi R^3-\pi\rho^2.\upsilon=\frac{4}{3}\pi.8.3\sqrt{3}-\pi(12-\chi^2).2\chi$

$V=32\sqrt{3}\pi-2\pi\chi 12-\chi^2)=2\pi(16\sqrt{3}-12\chi+\chi^3)$

$\Rightarrow V=2\pi(\chi^3-12\chi+16\sqrt{3})$



β) $\frac{dV}{d\chi}=2\pi(3\chi^2-12)=6\pi(\chi-2)(\chi+2)$

ρίζες: χ=2, χ=-2<ο απορ.

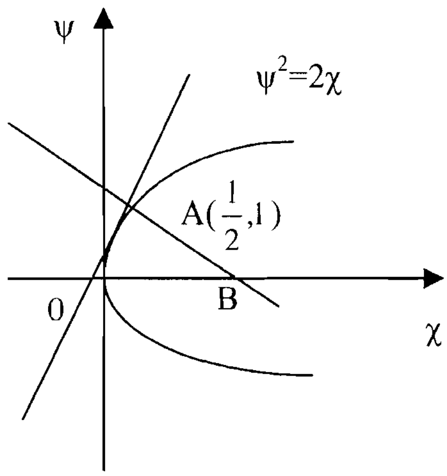
$\Rightarrow$ ελάχιστο για χ=2

3. $\psi = f(\chi)$

α) $\dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{e^{2x}}{\psi . e^{\psi^2}} \Rightarrow \int e^{2x}dx = \int \psi e^{\psi^2} d\psi \Rightarrow \dfrac{1}{2}e^{2x} = \dfrac{1}{2}e^{\psi^2} + c$, $A(\dfrac{1}{2},1) \in f(\chi)$ $\Bigg\} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\cdot e^{1} = \dfrac{1}{2}e^{1} + c \Rightarrow c = 0$

$$\Rightarrow e^{2x} = e^{\psi^2} \Rightarrow \psi^2 = 2\chi \Rightarrow 2\psi \cdot \frac{d\psi}{d\chi} = 2 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{1}{\psi} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = \left.\frac{d\psi}{d\chi}\right|_{(\frac{1}{2},1)} = 1$$

β)



$$\Rightarrow \lambda_{\perp} = -1$$

$$\Rightarrow (\perp)$$

$$\psi - \psi_A = \lambda_{\perp}(\chi - \chi_A) \Rightarrow \psi - 1 = -1(\chi - \frac{1}{2})$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \psi = -\chi + \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow (\perp)\ \chi + \psi - \frac{3}{2} = 0 \\ &\psi = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \chi_B = \frac{3}{2}, B(\frac{3}{2},0)$$

$$V = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} \psi^2 d\chi + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \upsilon = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} 2\chi d\chi + \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}) = \pi\chi^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{3}$$

$$V = \pi(\frac{1}{4} - 0) + \frac{\pi}{3} \Rightarrow V = \frac{7}{12}\pi \quad \tau.\mu.$$

4. $f(\chi)=\eta\mu\chi$, $g(\chi)=\sigma\upsilon\nu\chi$, $\chi\varepsilon[0,2\pi]$

α) $\eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu(\chi + \dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow \chi + \dfrac{\pi}{2} = \kappa\pi + (-1)^{\kappa}.\chi,\ \ \kappa \in Z,\ \chi \in [0,2\pi]$

$$\Rightarrow \chi = \frac{\pi}{4}, \chi = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow A(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad B(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

β) $E = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)d\chi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)d\chi + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} (\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)d\chi$

$$E = (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)_{\frac{5\pi}{11}}^{2\pi}$$

$$E=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+(0+1)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$E=\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}\Rightarrow E=4\sqrt{2}\ \text{τ.μ.}$$

5. α) $ψ=1-\dfrac{16}{(χ-4)^2}\Rightarrow$ π.ο. $χ\in R-\{4\}$

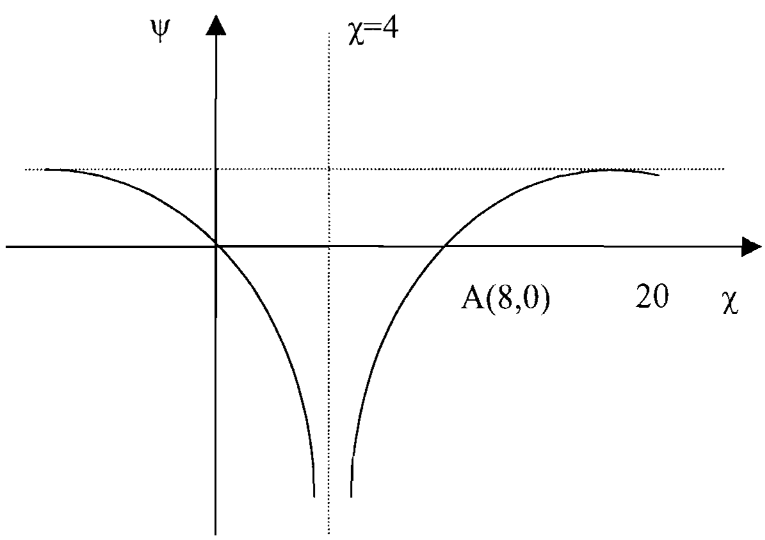
$χ=0\Rightarrow ψ=1-\dfrac{16}{16}=0\Rightarrow O(0,0)\ \ A(8,0)\ \ ψ=0\Rightarrow(χ-4)^2=16\Rightarrow χ-4=\pm4\Rightarrow χ=0, χ=8$

Κ.Α. $χ-4=0\Rightarrow$ Κ.Α. $χ=4$

Ο.Α. $ψ=\lim\limits_{χ\to\pm\infty}\left[1-\dfrac{16}{(χ-4)^2}\right]=1-0\Rightarrow$ Ο.Α. $ψ=1$

$\dfrac{dψ}{dχ}=2.16(χ-4)^{-3}=\dfrac{32}{(χ-4)^3}\neq0\Rightarrow\nexists$ Σ.Κ.

$χ$	$-\infty$	0	4	8	$+\infty$
$\dfrac{dψ}{dχ}$		-	//	+	
$ψ$		+ 0 -	//	- 0 +	
		↘ ↘		↗ ↗	



β) $E=\displaystyle\int_8^{20}ψ\,dχ=\int_8^{20}\left[1-\frac{16}{(χ-4)^2}\right]dχ=χ+16(χ-4)^{-1}\Big|_8^{20}=(20-8)+16\left(\frac{1}{20-4}-\frac{1}{8-4}\right)$

$E=12+16\left(\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}\right)\Rightarrow E=9\ \ \text{τ.μ.}$

ΕΞΕΤΑΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 8

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης*</u>:
Τετάρτη 1 Ιουλίου 1998
7.30π.μ. – 10.30π.μ.

<u>*Επιμέλεια*</u>
Μαρία Φαλά

<u>ΜΕΡΟΣ Α</u>
Να απαντήσετε σε **<u>όλες</u>** τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Για τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου P(x,y) πάνω σε μια καμπύλη (κ) ισχύει η σχέση: $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$
 και η καμπύλη περνά από το σημείο (4,0). Να βρείτε την εξίσωση της (κ), να την κατονομάσετε και να βρείτε τις ασύμπτωτές της.

2. Να βρείτε πόσοι είναι οι δυνατοί αναγραμματισμοί της λέξης MAXIMUM. Αν πάρουμε στην τύχη έναν από αυτούς τους αναγραμματισμούς, να βρείτε την πιθανότητα αυτός ο αναγραμματισμός να έχει το ένα M στην αρχή, το δεύτερο M στο τέλος και το τρίτο M στο μέσο του.

3. Αν οι συντελεστές των όρων $α^2$ και $α^3$ στο ανάπτυγμα του διωνύμου είναι ίσοι, να βρείτε τον ν.
 $$(1+α)^ν,\ ν>2$$

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

 α. $\int_0^{\pi/2} ημ2x\, e^{ημ2x}dx$ (χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u=ημ^{2x}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο).

 β. $\int ημ\sqrt[3]{x}\,dx$, (χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u=\sqrt[3]{x}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο).

5. Σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά σε ένα τμήμα των 28 μαθητών υπολογίστηκε ότι ο (αριθμητικός) μέσος όρος των βαθμών και των 28 μαθητών ήταν 11,75. Για τους 10 μαθητές που συγκέντρωσαν τους πιο χαμηλούς βαθμούς ο μέσος όρος ήταν 7,3 και για τους 10 μαθητές με τις ψηλότερες βαθμολογίες ο μέσος όρος ήταν 16. Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών των υπολοίπων 8 μαθητών, με τις ενδιάμεσες βαθμολογίες.

6. Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι γυναίκες. Επίσης το 5% των ανδρών είναι ψηλότεροι του 1,85m ενώ το 2% των γυναικών είναι ψηλότερες του 1,85m. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άτομο και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
   A. το άτομο να είναι ψηλότερο του 1,85m
   B. το άτομο να είναι άνδρας.

   Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(A\cap B)$, $P(B/A)$

7. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$. Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της Α(1, -2). Αν η εφαπτομένη αυτή τέμνει την παραβολή $y^2=-4(x+1)$ στα σημεία Β και Γ, να βρείτε:

   α. Το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της χορδής ΒΓ και της παραβολής $y^2=-4(x+1)$, και
   β. Τον όγκο του στερεού που παράγεται αν το χωρίο που καθορίζεται στο (α) περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x.

8. Δίνεται η καμπύλη που περιγράφεται από την εξίσωση

   (κ) $\qquad 2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1$

   και ο μετασχηματισμός, με πίνακα $M=\begin{pmatrix} \etaμ45° & συν45° \\ συν45° & -\etaμ45° \end{pmatrix}$ και ο οποίος σε κάθε σημείο P(x,y) αντιστοιχεί το σημείο P΄ (X,Y).

   Να δείξετε ότι η καμπύλη (κ) μετατρέπεται από το μετασχηματισμό αυτό στην καμπύλη με εξίσωση $5X^2 - y^2 = 1$.

   Στη συνέχεια να κατονομάσετε το είδος της καμπύλης και να προσδιορίσετε την εκκεντρότητα της.

9. Να βρείτε την τιμή της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2}{k!}\left(1 - \frac{e}{k+1}\right)$$

10. Επίπεδο αποκόπτει από το τρισορθογώνιο σύστημα των θετικών ημιαξόνων Ox, Oy, Oz (O η αρχή των αξόνων) κανονική τριγωνική πυραμίδα ΟΑΒΓ (ΑΒΓ το ισόπλευρο τρίγωνο που αποτελεί τη βάση της πυραμίδας). Αν $AB=\alpha\sqrt{2}$ cm να βρείτε:
    α) Την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου
    β) Την απόσταση του Ο από το επίπεδο, και
    γ) Τον όγκο της πυραμίδας

ΜΕΡΟΣ Β

Να απαντήσετε σε **όλες** τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι καμπύλες
   (κ1): $y = \left|x^2 - 4\right|$ και (κ2): $y = \left|x + 2\right|$
   α) Να κάμετε τις γραφικές παραστάσεις των καμπύλων (κ1) και (κ2) στο ίδιο διάγραμμα. Στο διάγραμμα να φαίνονται με σαφήνεια και ευανάγνωστα τα σημεία τομής με τους άξονες και τα σημεία τομής των καμπύλων.
   β). Να γραμμοσκιάσετε στο διάγραμμα εκείνο το χωρίο R που περικλείεται από τις δύο καμπύλες και αντιστοιχεί στις τιμές του x για τις οποίες είναι $\left|x + 2\right| \geq \left|x^2 - 4\right|$
   γ). Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου R.

2. Δίνονται τα σημεία Α (1, 1, 2), Β(-2, -6, 3), Γ(-1, 1, 5) και Δ(2, 4, 2).
   α). Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$.
   β) Να αποδείξετε ότι τα τέσσερα σημεία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.
   γ). Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τριάδα από τα τέσσερα σημεία αποτελείται από σημεία που δεν είναι συνευθειακά.
   δ). Να βρείτε πόσα τρίγωνα σχηματίζονται με κορυφές τα σημεία Α,Β,Γ και Δ.

3. Δίνονται η παραβολή $y^2=4x$, δύο σημεία $T(t^2, 2t)$ και $\Sigma(s^2, 2s)$ πάνω σ' αυτή και το σημείο Ρ(κ,λ).
   α). Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής ΤΣ είναι:
   $$2x - (t+s)y + 2ts = 0$$
   β) Αν η χορδή ΤΣ περνά από το σημείο Ρ, τότε να δείξετε ότι το σημείο τομής των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία Τ και Σ βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε): $2x - \lambda y + 2\kappa = 0$
   γ) Αν $\kappa = \lambda = 2^\nu$ και αν (ε_0), (ε_1), (ε_2) οι ευθείες που αντιστοιχούν στα σημεία $P_\nu(2^\nu, 2^\nu)$, για ν=0, 1, 2, σύμφωνα με τον τρόπο που καθορίστηκε στο (β), τότε να αποδείξετε ότι οι ευθείες αυτές περνούν όλες από το ίδιο σημείο, Κ, και να βρείτε τις συντεταγμένες του Κ.

4. Δίνονται ο κύκλος (κ): $x^2 + y^2 - 10x = 0$ και το σημείο του Α(8,4).
   Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α είναι η ευθεία (ε): $3x + 4y - 40 = 0$.

   Μια έλλειψη της μορφής $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ περνά από το σημείο Α και η εφαπτομένη της σ' αυτό το σημείο συμπίπτει με την ευθεία (ε).
   Να βρείτε τα a^2 και b^2 και να αποδείξετε ότι κάθε εσωτερικό σημείο του κύκλου (κ) είναι και εσωτερικό σημείο της έλλειψης.

Να γραμμοσκιάσετε το χωρίο που αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο, είναι εντός της έλλειψης, εκτός του κύκλου (κ) και μεταξύ των ευθειών x=0 και x=5. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου αυτού γύρω από τον άξονα των x.

5. α) Αν $w = \frac{dy}{dx}$, να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} = w\frac{dw}{dy}$

β) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $w = \frac{dy}{dx}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να λύσετε τη διαφορική εξίσωση:

$y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3y\frac{dy}{dx}$, με $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2$ για x=0

γ) Στη συνέχεια, αν y=f(x) η λύση της διαφορικής εξίσωσης που βρέθηκε στο (β), να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+e^{3x}}{y^3}$

Λ Υ Σ Ε Ι Σ

ΜΕΡΟΣ Α

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \Rightarrow \int y dy = \int x dx \Rightarrow y^2 = x^2 + c \left.\begin{matrix} \\ x=4,\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=16+c \Rightarrow c=-16 \Rightarrow (K)\ y^2=x^2=16$

   $\Rightarrow$ (K) x^2-y^2=16 ισοσκελής υπερβολή, ασύμπτωτες $y=\pm x$

2. MAXIMUM

   Πλήθος αναγραμματισμών $\quad \alpha=\frac{7!}{3!} \Rightarrow \alpha=840$

   M - - M - - M $\quad \beta=4!=24 \Rightarrow P=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{24}{840} \Rightarrow P=\frac{1}{35}$

3. $(1+\alpha)^{\nu}=1+\nu\alpha+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^3+\ldots$

   συντ. (α^2)=συντ.(α^3) $\Rightarrow \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3} \Rightarrow 1\frac{\nu-2}{3} \Rightarrow \nu=5$

4. α) $I_{\alpha}=\int_0^{\pi/2} \eta\mu 2x e^{\eta\mu^2 x}dx=\int_0^{\pi/2} e^{\eta\mu^2 x}d\eta\mu^{2x}=e^{\eta\mu^2 x}\Big|_0^{\pi/2}=e^1-e^0 \Rightarrow I=e-1$

   ή με τη χρήση του μετασχηματισμού u=ημ2x ⇒du=2ημx.συνxdx=ημ2xdx

   $\frac{x}{u}\Big|\frac{0}{0}\Big|\frac{\pi/2}{1} \quad I\alpha=\int_0^1 e^u du=e^u\Big|_0^1=e^1-e^0 \quad I_{\alpha}=e-1$

   β) $I_{\beta}=\int \eta\mu\sqrt[3]{x}dx \quad u=\sqrt[3]{x}=x^{2/3} \Rightarrow du=\frac{1}{3}x^{-2/3}dx=\frac{1}{3}\frac{dx}{u^2} \Rightarrow dx=3u^2du$

   $I_{\beta}=\int(\eta\mu u)\cdot 3u^2du=-3\int u^2 d\sigma\upsilon\nu\kappa=-3u^2\sigma\upsilon\nu\kappa+3\int\sigma\upsilon\nu\kappa du^2$

   $I_{\beta}=-3u^2\sigma\upsilon\nu u+3\int 2u\sigma\upsilon\nu u du=-3u^2\sigma\upsilon\nu u+6\int u d\eta\mu u$

   $I_{\beta}=-3u^2\sigma\upsilon\nu u+6u\eta\mu x-6\int\eta\mu u du=-3u^2\sigma\upsilon\nu u+6u n\mu x+6\sigma\upsilon\nu u+K$

   $I_{\beta}=-3u^2 ouvu+6un\mu x-6\int\eta\mu u du==3u^2\sigma\upsilon\nu u+6un\mu x+6\sigma\upsilon\nu u+K$

   $\Rightarrow I_{\beta}=-3\sqrt[3]{x^2}\sigma\upsilon\nu\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x}\eta\mu\sqrt[3]{x}+6\sigma\upsilon\nu\sqrt[3]{x}+K$

5. $\bar{X}=\frac{10_x\cdot 7{,}5+8_M\cdot\bar{M}+10_{\psi}\cdot 16}{10_x+8_m+10_{\psi}}=11{,}75 \Rightarrow 11{,}75=\frac{73+8\bar{M}+160}{28}=\frac{233+8\bar{M}}{28}$

   $\Rightarrow 329=233+8\bar{M} \Rightarrow 96 \Rightarrow \bar{M}=12$

6. 60% Γ(γυναίκες) ⇒ 40% Β (άνδρες)

   2% ψηλότεροι του 1,85m 5%

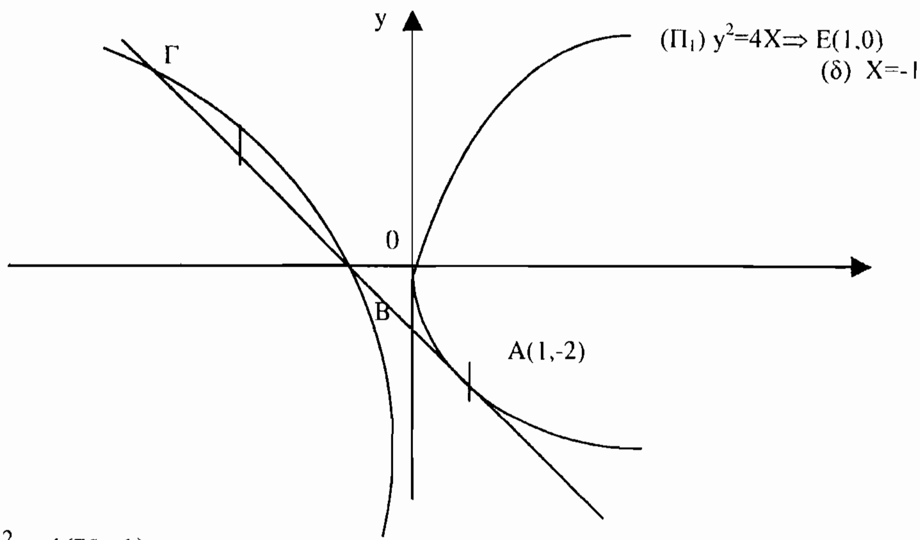
$$P(A)=P(\Gamma)P(A/\Gamma)+P(B)P(A/B)=\frac{60}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}=\frac{12+20}{1000}=\frac{32}{1000}=\frac{4}{125}$$

$\Rightarrow P(A)=3{,}2\%$

$$P(A\Lambda B)=P(B)\cdot P(A/B)=\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}=\frac{20}{100}\Rightarrow P(A\Lambda B)=\frac{1}{50}=2\%$$

$$P(B/A)=\frac{P(B\Lambda A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{4}{125}}=\frac{125}{200}\Rightarrow P(B/A)=\frac{5}{8}=62{,}5\%$$

7.



(Π_2) $y^2=-4(X+1)$

$$y^2=4x \Rightarrow (\varepsilon\varphi):\ 2y\frac{dy}{dx}=4\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}=\frac{dy}{dx}\Big|_A=\frac{2}{-2}=-1$$

$\Rightarrow$ $(\varepsilon\varphi_A)$ $y-y_A=\lambda_{\varepsilon\varphi A}(x-x_A)\Rightarrow y-(-2)=-1(x-1)\Rightarrow(\varepsilon\varphi_A)\quad x+y=-1$

$y^2=-4(x+1)$

$\Rightarrow$ $y^2=-4(-y)\Rightarrow y(y-4)=0\Rightarrow y=0,\ x=1$ $\qquad B(-1,0)$

ή $y=4,\ x=-5$ $\qquad \Gamma(-5,4)$

α) $$E=\int_{-5}^{-1}y_{\pi\alpha\rho}-y_{\varepsilon\varphi})dx=\int_{-5}^{-1}[\sqrt{-4(x+1)}-(x-1)]dx=\int_{-5}^{-1}[2(-x-1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)]dx$$

$$E=-\frac{4}{3}(-x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_{-5}^{-1}=(-\frac{4}{3}\cdot 0+0)-(-\frac{4}{3}.8+8)\Rightarrow E=\frac{8}{3}\ \tau.\mu.$$

B) $$V=-\pi\int_{-5}^{-1}(y^2_{\pi\alpha\rho}-y^2_{\varepsilon\varphi})dx=\pi\int_{-5}^{-1}-4(x+1)-(-x-1)^2]dx$$

$$V=-2(x+1)^2-\frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_{-5}^{-1}=(-2.0-\frac{1}{3}0)-(2.16-\frac{1}{3}.64)=32-\frac{64}{3}$$

$\Rightarrow$ $V=\frac{32}{3}\pi$ κ.μ.

8. (κ): $2x^2+6xy+2y^2=1$ $\qquad M=\begin{pmatrix} \eta\mu 45^o & \sigma\upsilon\nu 45^o \\ \sigma\upsilon\nu 45^o & -\eta\mu 45^o \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P(x,y) \overset{M}{\Rightarrow} P'\,(X,Y) \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ \Psi \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M'\begin{pmatrix} X \\ \Psi \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta\mu 45^o & \sigma\upsilon\nu 45^o \\ \sigma\upsilon\nu 45^o & -\eta\mu 45^o \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{-\eta\mu^2 45^o - \sigma\upsilon\nu^2 45^o}\begin{pmatrix} -\eta\mu 45^o & \sigma\upsilon\nu 45^o \\ -\sigma\upsilon\nu 45^o & \eta\mu 45^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta\mu 45^o & \sigma\upsilon\nu 45^o \\ \sigma\upsilon\nu 45^o & -\eta\mu 45^o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ 2X^2+6XY+2Y^2=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 2\frac{1}{2}(X+Y)^2+6\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)+2\frac{1}{2}(X-Y)^2=1 \\ \Rightarrow X^2+2XY+Y^2+3X^2-3Y^2+X^2-2XY+Y^2=1 \\ \Rightarrow (y)\ 5X^2-Y^2=1 \ \text{υπερβολή}\ (y)\ \frac{X^2}{\frac{1}{5}}-\frac{Y^2}{1}=1 \end{array}$$

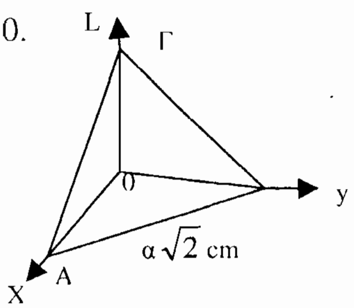
$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2=\frac{1}{5},\ \beta^2=1 \\ \beta^2=\alpha^2(e^2-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1=\frac{1}{5}(e^2-1) \Rightarrow e^2-1=5 \Rightarrow e^2=6 \Rightarrow e=\sqrt{6}$$

9. $S=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{e^2}{K!}(1-\frac{e}{K+1}) = e^2 \sum_{K=1}^{\infty}[\frac{1}{K!}-\frac{e}{(K+1)!}]$

$S=e^2[(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....)\ -e(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+....)]=e^2[(e-1)-e(e-1-1)]$

$S=e^2(3e-e^2-1)$ $\qquad (e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....)$

10.



$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2 \Rightarrow (\alpha\sqrt{2})^2=x^2+x^2=2x^2$

$\Rightarrow\ x=\alpha\ \Rightarrow A(\alpha,O,O),\ B(O,\alpha,O),\ \Gamma(O,O,\alpha)$

(α) $\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_\Gamma-x_A & y_\Gamma-y_A & z_\Gamma-z_A \end{vmatrix} = O,\ (AB\Gamma)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-\alpha & y & z \\ -\alpha & \alpha & o \\ -\alpha & o & \alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad (\alpha^2x-\alpha^3+0+0)-(-\alpha^2z-\alpha^2y+0)=0 \\ \Rightarrow \quad \alpha^2x+\alpha^2y+\alpha^2z-\alpha^3=0 \end{array}$$

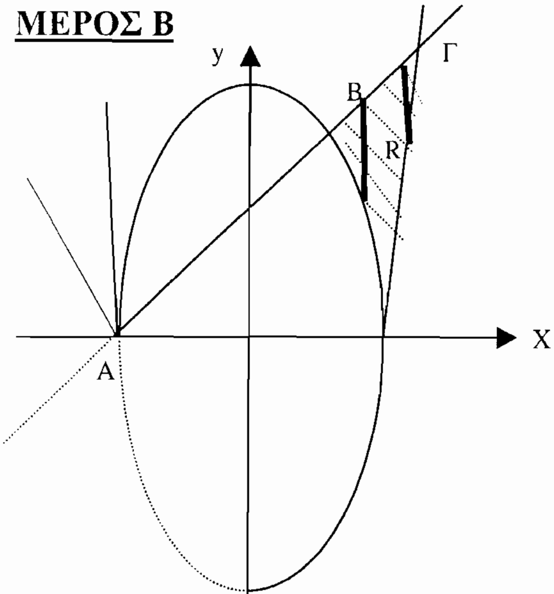
$\Rightarrow\ (AB\Gamma) \quad x+y+z=\alpha$

β) $d=\frac{|0+0+0-\alpha|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \Rightarrow d=\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\text{cm}$

γ) $V=\frac{1}{3}\cdot E_{ΑΒΓ}\cdot d=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\cdot(\alpha\sqrt{2})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}\alpha^3$ ή

$$V=\frac{1}{6}|ΟΑxΟΒ.ΟΓ|=\frac{1}{6}\left|\,\left|\vec{ΟΑ}\ x\ \vec{ΟΒ}\ x\ \vec{ΟΓ}\right|\,\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|\alpha^3|$$

ΜΕΡΟΣ Β



(K_2) $y=|x+2|$ $\qquad |x+2|=|x^2-4|$

(K_1) $y=|x^2-4|$ $\qquad x^2-4=\pm(x+2)$

(i) $x^2-4=x+2 \Rightarrow (x+2)(x-2-1)=0$

$\Rightarrow$ $x=-2 \Rightarrow A(-2,0)$

$x=3 \Rightarrow Γ(3,5)$

(ii) $x^2-4=-x-2 \Rightarrow (x+2)(x-2+1)=0$

$\Rightarrow$ $x=-2 \Rightarrow A(-2,0)$

$x=1 \Rightarrow B(1,3)$

$|x+2| \geq |x2-4| \Rightarrow y_2 \geq y_1 \Rightarrow 1\leq x \leq 3$

$$E=\int_1^2[(x+2)-(4-x^2)]dx+\int_2^3[(x+2)-(x^2-4)]dx$$

$$E=\int_1^2(x^2+x-2)dx+\int_2^3(-x^2+x+6)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)_1^2-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right)_2^3$$

$$E=\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)+\left(-\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+18\right)-\left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+12\right)$$

$$E=\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+9+\frac{9}{2}+\frac{8}{3}-14=5+4-5\Rightarrow E=4τ.μ.$$

2. $A(1,1,2)$ $\quad B(-2,-6,3)$ $\quad Γ(-1,1,5)$ $\quad Δ(2,4,2)$

(α) $\vec{AB}=(-2-1)\bar{i}+(-6-1)\bar{j}+(3-2)\bar{k}\Rightarrow \vec{AB}=-3\bar{i}-7\bar{j}+\bar{k}$

$\vec{AΓ}=(-1-1)\bar{i}+(1-1)\bar{j}+(5-2)\bar{K}\Rightarrow \vec{AΓ}=-2\bar{i}+3\bar{k}$

(β) εξίσωση επιπέδου (ΑΒΓ): $\begin{vmatrix}x-1 & y-i & z-2\\ -3 & -7 & 1\\ -2 & 0 & 3\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow$ $[(-21(x-1)-2(y-1)+0]-[14(z-2)-9(y-1)+0]=0$

$\Rightarrow$ $-21x+21-2y+2-14z+28+9y-9=0 \Rightarrow -21x+7y=14z+42=0$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}(ΑΒΓ)\ 3x-y+2z=6\\ Δ\ (2,4,2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow 3.2-4+2.2=6 \Rightarrow Δ\in(ΑΒΓ)\Rightarrow Α,Β,Γ,Δ$ συνεπίπεδα (γ) $\vec{A\Delta}=\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{B\Gamma}=\vec{i}+7\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{B\Delta}=4\vec{i}+10\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{AB},\vec{A\Gamma}$ μη παράλληλα $\Rightarrow$ A, B, Γ, όχι συνευθειακά

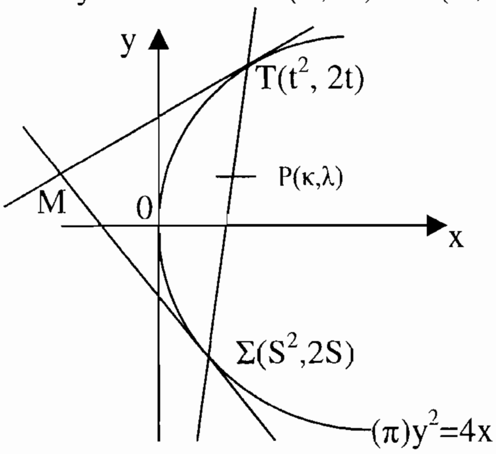
$\vec{AB},\vec{A\Delta}$ μη παράλληλα $\Rightarrow$ A, B, Δ, όχι συνευθειακά

$\vec{A\Gamma},\vec{A\Delta}$ μη παράλληλα $\Rightarrow$ A, Γ, Δ, όχι συνευθειακά

$\vec{B\Gamma},\vec{B\Delta}$ μη παράλληλα $\Rightarrow$ B, Γ, Δ, όχι συνευθειακά

(δ) πλήθος τριγώνων $N=\frac{4}{3}\Rightarrow N=4$

3. $y^2=4x$ $\quad \Gamma(t^2, 2t)$ $\quad \Sigma(s^2, 2s)$ $\quad P(\kappa, \lambda)$



(α) (ΤΣ) $\frac{y-y_t}{x-x_t}=\frac{y_s-y_t}{x_s-x_t}$

$\Rightarrow \frac{y-2t}{x-t^2}=\frac{2s-2t}{s^2-t^2}=\frac{2}{s+t}$

$\Rightarrow (s+t)y-2st-2t^2=2x-2t^2$

$\Rightarrow$ (ΤΣ) $2x-(s+t)y+2tS=0$

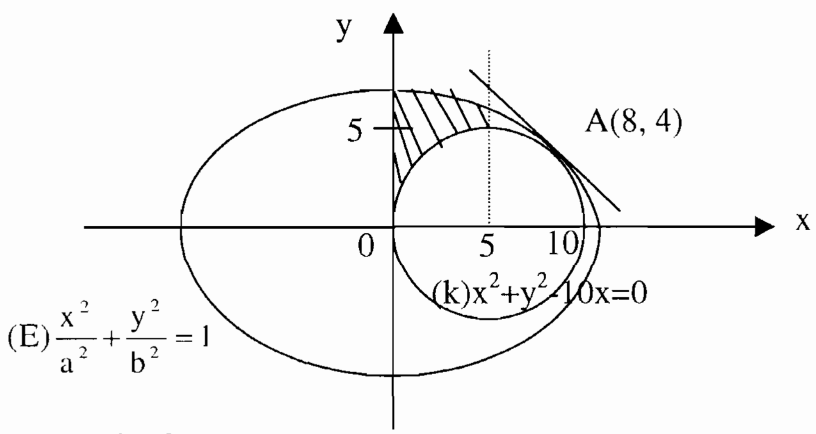
(β) $\left.\begin{aligned}&(\varepsilon\varphi_\Gamma)\ x-ty+t^2=0\\&(\varepsilon\varphi_\Sigma)\ x-sy+s^2=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}&y(s-t)+(t-s)(t+s)=0\Rightarrow y_M=t+s\\&x_M=-t^2+t(t+s)\quad\Rightarrow x_M=ts\end{aligned}\right\}\Rightarrow M(ts,t+s)$

$\left.\begin{aligned}&(T\Sigma)\ 2x-(t+s)y+2tS=0\\&P\ (K,\lambda)\ \varepsilon(T\Sigma)\end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned}&\Rightarrow 2k-(t+s)\lambda+2ts=0\\&X_M=ts,\ y_M=t+s\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\Rightarrow 2k-y\lambda+2x=0\\&\Rightarrow (t)\ 2x-\lambda y+2k=0\end{aligned}$

(γ) $K=\lambda=2^\nu$

$\left.\begin{aligned}&(\varepsilon_0)\quad K=\lambda=2^0=1\ \Rightarrow(\varepsilon_0)\ \ 2x-y+2=0\\&(\varepsilon_1):\ K=\lambda=2^1=2\ \Rightarrow(\varepsilon_1)\ 2x-2y+4=0\\&(\varepsilon_2):\ K=\lambda=2^2=4\ \Rightarrow(\varepsilon_2)\ \ 2x-4y+8=0\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\Rightarrow\quad (0,2)\ \varepsilon(\varepsilon_0),(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)\\&\Rightarrow\quad K(0,2)\end{aligned}$

4.



(Κ) $x^2+y^2-10x=0$ $\quad\Rightarrow$ εξ. Εφαπ. $x_1\cdot x+y_1\cdot y-5(x+x_1)=0$

$x_1=8,\ y_1=4$

$\Rightarrow$ 8x+4y-5(x+8)=0 $\Rightarrow$ (ε) 3x+4y-40=0

$$\left.\begin{matrix}(E)\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \dfrac{x_1 x}{a^2}+\dfrac{y_1 y}{b^2}=1 \\ (x_1, y_1)=(8,4)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{8x}{a^2}+\dfrac{4y}{b^2}=1 \\ 3x+4y=40\end{matrix}\right\} \quad \frac{\frac{8}{a^2}}{3}=\frac{\frac{4}{b^2}}{4}=\frac{1}{40}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3a^2}=\frac{1}{40} \Rightarrow a^2=\frac{320}{3}, \qquad \frac{1}{b^2}=\frac{1}{40} \Rightarrow b^2=40 \Rightarrow (E)\frac{3}{320}x^2+\frac{y^2}{40}=1$$

Από το σχήμα και τα στοιχεία των δύο καμπυλών που έχουμε υπολογίσει φαίνεται καθαρά ότι ο κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό της έλλειψης (εφάπτονται στα Α&Α΄).

$$V=\pi\int_0^5 (y_E^2-y_k^2)dx=\pi\int_0^5 [40(1-\frac{3}{320}x^2)-(10x-x^2)]dx$$

$$V=\pi\int_0^5 (40-\frac{3}{8}x^2-10x+x^2)dx=\pi(40x-5x^2+\frac{5}{24}x^3)_0^5$$

$$V=\pi(40.5-5.25+\frac{5}{24}125)-\pi(0+0+0)=\pi(200-125+\frac{5}{24}\cdot 125)=(200-\frac{19}{24}\cdot 125)\pi$$

$$\Rightarrow V=\frac{2425}{24}\pi \text{ κ.μ.}$$

5. α) $w=\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dw}{dy}=\dfrac{dw}{dx}:\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dw}{dx}\dfrac{1}{w} \Rightarrow w\dfrac{dw}{dy}=\dfrac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=w\dfrac{dw}{dy}$

β) $$\left.\begin{matrix} y\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=3y\dfrac{dy}{dx} \\ w=\dfrac{dw}{dy}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\Rightarrow & y.w\dfrac{dw}{dy}+2w^2=3y.w \Rightarrow y\dfrac{dw}{dy}+2w=3y \\ \Rightarrow & \dfrac{dw}{dy}+\dfrac{2}{y}.w=3\end{matrix}$$

$$\Rightarrow I=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{2\ln y}=y^2 \Rightarrow y^2\frac{dw}{dy}+2yw=3y^2 \Rightarrow y^2w=\int 3y^2dy$$

$$\left.\begin{matrix}\Rightarrow y^2w=y^3+k \\ \Rightarrow w=\dfrac{dy}{dx}\end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2\frac{dy}{dx}=y^3+K \Rightarrow \int\frac{y^2}{y^3+k}dy=\int dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{d(y^3+k)}{(y^3+le)}=x+c \Rightarrow \ln|y^3+k|=3(x+c) \Rightarrow y^3+k=e^{3x+3c}=Ae^{3x}$$

$$\left.\begin{matrix}y^3+e=Ae^{3x} \\ x=0\ \ y=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow 1+k=A.1$$

$$\left.\begin{matrix}3y^2\dfrac{dy}{dx}=3Ae^{3x} \\ x=0,\ \dfrac{dy}{dx}=2,\ y=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow 1.2=A \Rightarrow A=2, k=1 \Rightarrow \text{λύση της Δ.Ε. } y^3+1=2e^{3x}$$

γ) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e^{3x}}{y^{3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e^{3x}}{2e^{3x}+1}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ απροσ.

$L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+e^{3x})'}{(2e^{3x}+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+3e^{3x}}{6e^{3x}}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ απροσ.

$L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9e^{3x}}{18e^{3x}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow L=\dfrac{1}{2}$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.)

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης*</u>
Τρίτη, 7 Ιουλίου, 1998
10:00 π.μ. – 12:30 μ.μ.

<u>*Επιμέλεια*</u>
Μαρία Φαλά

Από τα 6 ζητήματα να λύσετε τα 4.

<u>Ζήτημα 1ο</u>

α) Δίνεται η εξίσωση $2ημ^2χ-3ημχ-2=0$.
Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $ημχ=ω$ να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{συνχ}{ημ30^0}+\frac{ημχ}{συν30^0}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

στο διάστημα $0 \le χ \le 360^0$.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η τριγωνομετρική εξίσωση

$$συν(45^0+χ)+\sqrt{2}\cdot ημχ=0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση μπορεί να μετασχηματιστεί στη μορφή $εφχ=α$, όπου α σταθερός αριθμός, και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση στο διάστημα $0 \le χ \le 360^0$.

(Μονάδες 9)

<u>Ζήτημα 2ο</u>

α) Αν $εφα=3εφβ$ να δείξετε ότι $εφ(α-β)=\dfrac{ημ2β}{1+2ημ^2β}$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η τριγωνομετρική εξίσωση

$$3συν^2χ+5συνχ-2=0$$

ι) Να βρείτε την τιμή του συνχ.
ιι) Αν επί πλέον είναι γνωστό ότι $ημχ>0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $Κ=9\sqrt{2}\cdot ημ2χ-180συν2χ+1850$.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται $ημφ=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ με $\dfrac{π}{2}<φ<π$ και $εφω=\dfrac{4}{3}$ με $π<ω<\dfrac{3π}{2}$.

Να βρείτε τις τιμές των $συν(φ+\dfrac{π}{3})$ και $ημ(φ-ω)$

(Μονάδες 9)

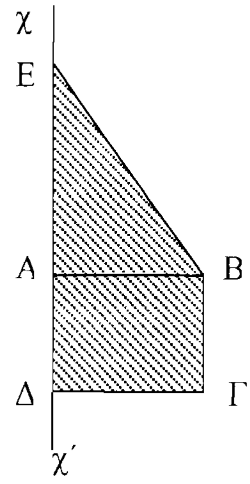
(<u>Σημείωση</u>: οι απαντήσεις μπορούν να μείνουν με ριζικά)

Ζήτημα 3ο

α) Η διάμετρος της βάσης ενός ορθού κυκλικού κώνου είναι 6χ cm και το ύψος του 4χ cm. Αν η γενέτειρά του έχει μήκος 20cm, να υπολογίσετε την τιμή του χ, τον όγκο και την ολική επιφάνεια του κώνου συναρτήσει του π.

(Μονάδες 8)

β) Στο γραμμοσκιασμένο χωρίο (τ) του διπλανού σχήματος, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 10cm και η γωνία ΑΕΒ έχει μέτρο 30^o. Το χωρίο (τ) στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα χ΄χ. Να υπολογίσετε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



(Μονάδες 8)

γ) Κώνος και κύλινδρος έχουν ίσο όγκο. Ο κώνος έχει περίμετρο βάσης 6πα και εμβαδό κυρτής επιφάνεια $15πα^2$ (α σταθερός αριθμός). Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι τα $\frac{3}{2}$ της ακτίνας της βάσης του, να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνεια του κυλίνδρου.

(Μονάδες 9)

Ζήτημα 4ο

α) Δίνεται πυραμίδα με βάση τετράγωνο πλευράς 10cm. Αν η παράπλευρη έδρα της πυραμίδας σχηματίζει με τη βάση γωνία 60^o, να βρείτε τον όγκο και την επιφάνεια της πυραμίδας.

(Μονάδες 8)

β) Μια σφαίρα διαμέτρου 12cm βρίσκεται στο βάθος κυλινδρικού δοχείου. Η σφαίρα εφάπτεται τόσο στα τοιχώματα όσο και στη βάση του δοχείου. Ρίχνουμε νερό στο δοχείο μέχρι που η στάθμη του νερού να εφάπτεται ακριβώς της σφαίρας (η σφαίρα είναι βαριά και μένει στην αρχική θέση). Να υπολογίσετε:

ι) τον όγκο του νερού που ρίξαμε στο κυλινδρικό δοχείο.

ιι) το ύψος της στάθμης του νερού όταν αφαιρέσουμε τη σφαίρα.

(Μονάδες 8)

γ) Ένας ρόμβος ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 8λ, όπου λ σταθερός αριθμός, και διαγώνια $ΑΓ=2λ\sqrt{3}$. Ο ρόμβος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα χΑψ παράλληλο προς τη διαγώνιο ΒΔ. Να βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

(Μονάδες 9)

Ζήτημα 5ο

α) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \dfrac{-8\chi + 2}{\chi^2 + 2\chi}$.

ι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της (-1,-10).

ιι) Να βρείτε τις συντεταγμένες των δυο τοπικών ακροτάτων που έχει η καμπύλη και να τα χαρακτηρίσετε.

(Μονάδες 8)

β. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \chi^2 - 2\chi$

ι) Να βρείτε τις συντεταγμένες του τοπικού ακροτάτου της καμπύλης.

ιι) Να κάμετε τη γραφική της παράσταση (στο σχήμα να φαίνονται οι τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης με τον άξονα των χ).

ιιι) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη και τον άξονα των χ.

(Μονάδες 8)

γ. Η συνάρτηση $\psi = \alpha\chi + 2\beta\eta\mu\chi$, α,β σταθεροί αριθμοί, έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο Γ(π,π). Να βρείτε:

ι) τις τιμές των α, β.

ιι) το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την ψ=χ+ημχ και τον άξονα των χ για $0 \leq \chi \leq \pi$.

(Μονάδες 9)

Ζήτημα 6ο

α. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\eta\mu\chi \cdot \eta\mu 4\chi d\chi$.

(Μονάδες 8)

β. Να υπολογίσετε το $\int (3\chi^2 + \eta\mu^2 \frac{\chi}{2}) d\chi$.

(Μονάδες 8)

γ. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση

$$\psi = -\chi^2 - \chi + 2$$

ι) Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη χ=-1.

ιι) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη και τον άξονα των χ.

(Μονάδες 9)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

α) $\left.\begin{array}{l}2\eta\mu^2\chi-3\eta\mu\chi-2=0\\ \eta\mu\chi=\omega\end{array}\right\} \Rightarrow 2\omega^2\text{-}3\omega\text{-}2=0 \Rightarrow (2\omega+1)(\omega\text{-}2)=0 \Rightarrow \begin{array}{l}\omega=2>1 \text{ αδυν.}\\ \omega=-\dfrac{1}{2}\end{array}$

$$\Rightarrow \eta\mu\chi=-\frac{1}{2}=\eta\mu(-30^o)\Rightarrow \chi=360^o\kappa+(-30^o)$$

$$\chi=360^o\kappa+180^o-(-30^o)$$

$$\Rightarrow \chi=360^o\kappa-30^o,\ \chi=360^o\kappa+210^o,\ \kappa\in Z$$

β) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu30^o}+\dfrac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu30^o}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu30^o\cdot\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu30^o\cdot\eta\mu\chi}{\eta\mu30^o.\cdot\sigma\upsilon\nu30^o}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu(30^o-\chi)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\chi-30^o)=-\frac{1}{2}=\alpha\upsilon\nu120^o\Rightarrow \chi-30^o=360^o\kappa\pm120^o\quad \kappa\in Z$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \chi=360^o\ \kappa+150^o\\ 0\le\chi\le360^o\end{array}\right\}\Rightarrow \chi=150^o$$

$$\left.\begin{array}{l}\chi=360^o\ \kappa\text{-}90^o\\ 0\le\chi\le360^o\end{array}\right\}\Rightarrow \chi=270^o$$

γ) $\sigma\upsilon\nu(45^o+\chi)+\sqrt{2}.\eta\mu\chi=0\Rightarrow \sigma\upsilon\nu45^o.\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu45^o.\eta\mu\chi+\sqrt{2}\eta\mu\chi=0$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\chi-\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\chi+\sqrt{2}\eta\mu\chi=0\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\chi+\frac{1}{2}\eta\mu\chi=0\Rightarrow \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}=-1$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow \varepsilon\phi\chi=-1=\varepsilon\phi(-45^o)\Rightarrow \chi=180^o\kappa-45^o,\quad \kappa\in Z\\ 0\le\chi\le360^o\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow \chi=135^o\\ \Rightarrow \chi=315^o\end{array}$$

Ζήτημα 2ο

α) εφα=3εφβ

$$\varepsilon\phi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\phi\alpha-\varepsilon\phi\beta}{1+\varepsilon\phi\alpha.\varepsilon\phi\beta}=\frac{3\varepsilon\phi\beta-\varepsilon\phi\beta}{1+3\varepsilon\phi\beta.\varepsilon\phi\beta}=\frac{2\varepsilon\phi\beta}{1+3\varepsilon\phi^2\beta}=\frac{2\dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}}{1+3\dfrac{\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}}=\frac{2\dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\beta+3\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}}$$

$$\varepsilon\phi(\alpha-\beta)=\frac{2\eta\mu\beta.\sigma\upsilon\nu\beta}{(\sigma\upsilon\nu^2\beta+\eta\mu^2\beta)+2\eta\mu^2\beta}\Rightarrow \varepsilon\phi(\alpha-\beta)=\frac{\eta\mu2\beta}{1+2\eta\mu^2\beta}$$

β) $3\sigma\upsilon\nu^2\chi + 5\sigma\upsilon\nu\chi - 2 = 0 \Rightarrow (3\sigma\upsilon\nu\chi - 1)(\sigma\upsilon\nu\chi + 2) = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = -2 < -1$ αδυν.

$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{3}$

$K = 9\sqrt{2}\cdot\eta\mu 2\chi - 180\sigma\upsilon\nu 2\chi + 1850 = 9\sqrt{2}\cdot 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 180(2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1) + 1850$

$$\left.\begin{array}{r}\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \Rightarrow \eta\mu\chi = \pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \\ \eta\mu\chi > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \eta\mu\chi = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$\Rightarrow K = 18\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3} - 18(2\cdot\frac{1}{9} - 1) + 1850 = 8 - 180\cdot(-\frac{7}{9}) + 1850 = 8 + 140 + 1850$

$\Rightarrow K = 1998$

γ) $\eta\mu\phi = \frac{\sqrt{7}}{4},\ \ \frac{\pi}{2} < \phi < \pi,\quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3}\qquad \pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{r}\sigma\upsilon\nu\phi = \pm\sqrt{1-\eta\mu^2\phi} = \pm\sqrt{1-\frac{7}{16}} = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} \\ \frac{\pi}{2} < \phi < \pi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi + \frac{\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu\phi\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - \eta\mu\phi\cdot\eta\mu\frac{\pi}{3} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\phi + \frac{\pi}{3}) = \frac{-3-\sqrt{21}}{8}$

$$\left.\begin{array}{r}\tau\varepsilon\mu^2\omega = 1 + \varepsilon\phi^2\omega = 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{9}{25} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \\ \pi < \omega < \frac{3\pi}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$$

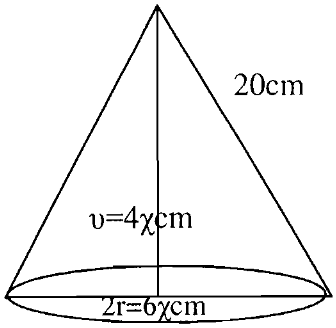
$$\left.\begin{array}{r}\eta\mu\omega = \pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \\ \pi < \omega < \frac{3\pi}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$$

$\eta\mu(\phi - \omega) = \eta\mu\phi.\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega.\sigma\upsilon\nu = \frac{\sqrt{7}}{4}.\left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right).\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-3\sqrt{7}}{20} - \frac{12}{20}$

$\eta\mu(\phi - \omega) = -\frac{3}{20}(4 + \sqrt{7})$

<u>Ζήτημα 3ο</u>

α)



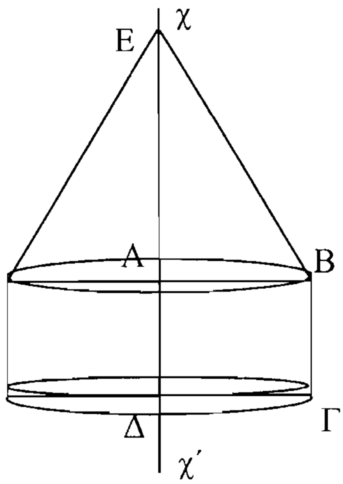
$$20^2 = (3\chi)^2 + (4\chi)^2 = 9\chi^2 + 16\chi^2 = 25\chi^2 \Rightarrow \chi^2 = \frac{400}{25} = 16$$

$$\Rightarrow \chi = 4\text{cm} \Rightarrow r = 3\chi = 12\text{cm},\ \upsilon = 4\chi = 16\text{cm}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot E_\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{3}\cdot \pi r^2 \cdot \upsilon = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 16\text{cm}^3 \Rightarrow V = 768\pi\,\text{cm}^3$$

$$E = E_\beta + E_\pi = \pi r^2 + \pi r\lambda = \pi(12^2 + 12\cdot 20) \Rightarrow E = 384\pi\,\text{cm}^2$$

β)



$AB = B\Gamma == \Delta A = 10\text{cm} = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} AB = 10\text{cm} \\ A\hat{E}B = 30^O \end{array}\right\} \Rightarrow EB=20\text{ cm}$$

$$(EA)^2 = (EB)^2 - (AB)^2 = 20^O - 10^2 = 300 \Rightarrow EA = 10\sqrt{3}\text{cm}$$

$$E = E_{\kappa\upsilon\rho\tau.\kappa\omega\nu} + E_{\kappa\upsilon\rho\tau.\kappa\upsilon\lambda.} + E_\beta$$

$$E = \pi.AB.EB + 2\pi.AB.A\Delta + \pi(AB)^2$$

$$E = \pi.10\cdot 20 + 2\pi\cdot 10\cdot 10 + \pi.10^2 = (200 + 200 + 100)\pi\,\text{cm}^2$$

$$E = 500\pi\,\text{cm}^2$$

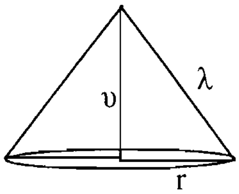
$$V = V_{\kappa\omega\nu.} + V_{\kappa\upsilon\lambda} = \frac{1}{3}\pi(AB)^2 \cdot EA + \pi(AB)^2 \cdot A\Delta = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 10\sqrt{3} + \pi.10^2 \cdot 10 = 100(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)\pi$$

$$V = \frac{100}{\sqrt{3}}(1 + \sqrt{3})\pi\,\text{cm}^3$$

γ) $V_{\kappa\omega\nu.} = V_{\kappa\upsilon\lambda.}$

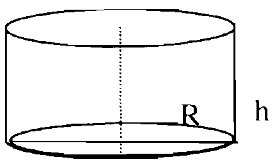
$2\pi r_{\kappa\omega\nu.} = 6\pi\alpha \Rightarrow r = 3\alpha$

$\pi r\lambda_{\kappa\omega\nu.} = 15\pi\alpha^2 \Rightarrow 3\alpha.\lambda = 15\alpha^2 \Rightarrow \lambda = 5\alpha$



$$\upsilon = \sqrt{\lambda^2 - r^2} = \sqrt{25\alpha^2 - 9\alpha^2} = 4\alpha$$

$$V_{\kappa\omega\nu.} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2_{\kappa\omega\nu} \cdot \upsilon = \frac{1}{3}\pi \cdot 9\alpha^2 \cdot 4\alpha \Rightarrow V_{\kappa\omega\nu.} = 12\alpha^3\pi = V_{\kappa\upsilon\lambda.}$$



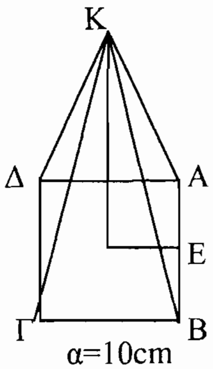
$$h=\frac{3}{2}R \qquad V_{\kappa\upsilon\lambda.} = \pi R^2 h = \pi R^2.\frac{3}{2}R = \frac{3}{2}R^3\pi = 12\alpha^3\pi$$

$$\Rightarrow R^3 = 8\alpha^3 \Rightarrow R = 2\alpha \Rightarrow h = 3\alpha$$

$$E = 2E_\beta + E_{\kappa\upsilon\rho\tau.} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi.4\alpha^2 + 2\pi\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha$$

$$\Rightarrow E = 20\alpha^2\pi$$

Ζήτημα 4ο



$$\left.\begin{array}{l} O\hat{K}E = 30^o \\ OE = 5cm \end{array}\right\} \Rightarrow KE=10cm=h$$

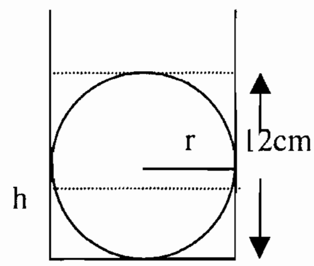
$$KO = \upsilon = \sqrt{(KE)^2 - (OE)^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{5}cm$$

$$V = \frac{1}{3}E_\beta \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 5\sqrt{5} \Rightarrow V = \frac{500}{3}\sqrt{5}\,cm^3$$

$$E = E_{\pi\alpha\rho.} + E_\beta = \frac{\pi_\beta \cdot h}{2} + \alpha^2 = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10}{2} + 10^2 = 200 + 100$$

$$E = 300\,cm^2$$

β)



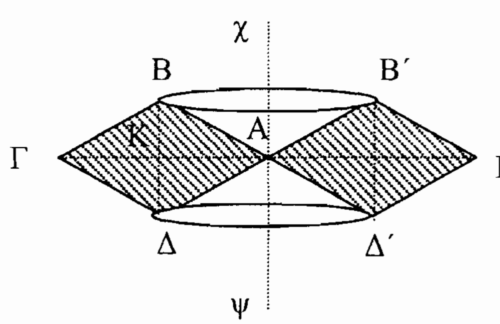
$$V_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} = V_{\kappa\upsilon\lambda.} - V_{\sigma\varphi} = \pi r^2 \upsilon - \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi.6^2.12 - \frac{4}{3}\pi 6^3$$

$$V_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} = 432\pi - 288\pi \Rightarrow V_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} = 144\pi\,cm^3$$

$$V_{\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon}} = V_{\nu\acute{\varepsilon}o\upsilon.\kappa\upsilon\lambda} \Rightarrow \pi.r^2 h = 144\pi \Rightarrow 6^2 \cdot h = 144$$

$$\Rightarrow h = 4cm$$

γ.



π=8λ⇒ α=2λ=AB

$$A\Gamma = 2\lambda\sqrt{3} \Rightarrow AK = \lambda\sqrt{3}$$

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{4\lambda^2 - 3\lambda^2} \Rightarrow BK = \lambda$$

$$V = 2\left(V_{\kappa\omega\lambda.\kappa\omega\nu B\Gamma\Gamma'B'} - V_{\kappa\omega\nu BAB'}\right)$$

$$V = 2\left[\frac{1}{3}\pi \cdot \upsilon \cdot (R^2 + \rho R + \rho^2) - \frac{1}{3}\pi \cdot r^2\upsilon\right]$$

$$V = 2\left[\frac{1}{3}\pi \cdot BK(A\Gamma^2 + KA.A\Gamma + KA^2) - \frac{1}{3}\pi \cdot KA^2 \cdot BK\right]$$

$$V = 2\left[\frac{1}{3}\pi \cdot \lambda(4\lambda^2 \cdot 3 + \lambda\sqrt{3} \cdot 2\lambda\sqrt{3} + \lambda^2 \cdot 3) - \frac{1}{3}\pi \cdot \lambda^2 3\lambda\right]$$

$$V = 2\left[\frac{1}{3}\pi\lambda \cdot 21\lambda^2 - \pi\lambda^3\right] = 2(7\pi\lambda^3 - \pi\lambda^3)$$

$$V = 12\pi\lambda^3$$

Ζήτημα 5ο

α) $\psi=\dfrac{-8\chi+2}{\chi^2+2\chi}\Rightarrow\dfrac{d\psi}{d\chi}=\dfrac{-8(\chi^2+2\chi)-(-8\chi+2)(2\chi+2)}{\chi^2(\chi+2)^2}=\dfrac{-8\chi^2-16\chi-(-16\chi^2-16\chi+4\chi+4)}{\chi^2(\chi+2)^2}$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{-8\chi^2-16\chi+16\chi^2+12\chi-4}{\chi^2(\chi+2)^2}=\frac{8\chi^2-4\chi-4}{\chi^2(\chi+2)^2}=\frac{4(2\chi+1)(\chi-1)}{\chi^2(\chi+2)^2}$$

ι) $\left.\dfrac{d\psi}{d\chi}\right|_{(-1,-10)}=\lambda_{\varepsilon\phi}=\dfrac{8\cdot 1-4(-1)-4}{1(-1+2)^2}=8$

$\psi-\psi_1=\lambda(\chi-\chi_1)\Rightarrow\psi-(-10)=8[\chi-(-1)]\Rightarrow\psi+10=8\chi+8\Rightarrow$

$(\varepsilon\phi)\ 8\chi-\psi-2=0$

ιι) $\dfrac{d\psi}{d\chi}=0\Rightarrow\dfrac{4(2\chi+1)(\chi-1)}{\chi^2(\chi+2)^2}=0\Rightarrow\chi=-\dfrac{1}{2},\chi=1$

$\psi(1)=\dfrac{-8.1+2}{1+2.1}=-\dfrac{6}{3}=-2$

$\psi(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{-8(-\frac{1}{2})+2}{\frac{1}{4}+2(-\frac{1}{2})}=\dfrac{4+2}{\frac{1}{4}-1}=\dfrac{6}{-\frac{3}{4}}=-8$

χ	$-\infty$		-2		$-1/2$		0		1		$+\infty$
$\frac{d\psi}{d\chi}$		+	//	+	0	-	//	-	0	+	
ψ				↗	∩	↘		↘	∪	↗	

max $(-\frac{1}{2},-8)$ min $(1,-2)$

β) $\psi=\chi^2-2\chi\Rightarrow\dfrac{d\psi}{d\chi}=2\chi-2=2(\chi-1)$ ρίζα: $\chi=1$

χ	$-\infty$		1		$+\infty$
$\frac{d\psi}{d\chi}$		-	0	+	
ψ		↘	∪	↗	

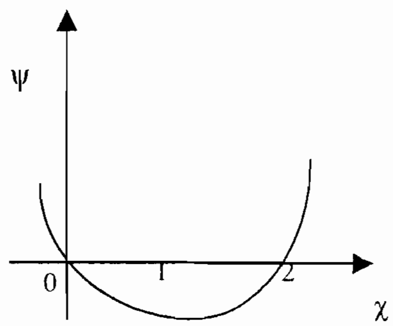
ι) $\psi(1)=1-2=-1\Rightarrow\min(1,-1)$

ιι) $\chi=0\Rightarrow\psi=0$

$\psi=0\Rightarrow\chi(\chi-2)=0\Rightarrow(0,0)\ (2,0)$

ιιι) $E=-\displaystyle\int_0^2(\chi^2-2\chi)d\chi=-\left(\frac{\chi^3}{3}-2\frac{\chi^2}{2}\right)_0^2=-\left[\left(\frac{8}{3}-4\right)-0\right]$

$E=\dfrac{4}{3}$ τ.μ.



γ) $(\varepsilon)\ \psi=\alpha\chi+2\beta\eta\mu\chi$, $\Gamma(\pi,\pi)\ \varepsilon\ (\varepsilon)$ $\Rightarrow\pi=\alpha\pi+2\beta.0\Rightarrow\alpha=1$

$\dfrac{d\psi}{d\chi}=\alpha+2\beta\sigma\upsilon\nu\chi$, $\left.\dfrac{d\psi}{d\chi}\right|_{(\pi,\pi)}=0$ $\Rightarrow\alpha+2\beta(-1)=0\Rightarrow\beta=\dfrac{\alpha}{2}\Rightarrow\beta=\dfrac{1}{2}$

ι) $\quad E=\int_{0}^{\pi}(\chi+\eta\mu\chi)d\chi=\frac{\chi^{2}}{2}-\sigma\upsilon\nu\chi\Big|_{0}^{\pi}=\left[\frac{\pi^{2}}{2}-(-1)\right]-(0-1)=\frac{\pi^{2}}{2}+1+1$

$E=2+\frac{\pi^{2}}{2}\ \tau.\mu.$

<u>Ζήτημα 6ο</u>

α) $\quad I_{\alpha}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\eta\mu\chi\cdot\eta\mu4\chi d\chi=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[\sigma\upsilon\nu(4\chi-\chi)-\sigma\upsilon\nu(4\chi+\chi)]d\chi=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sigma\upsilon\nu3\chi-\sigma\upsilon\nu5\chi)d\chi$

$I_{\alpha}=\left(\frac{1}{3}\eta\mu3\chi-\frac{1}{5}\eta\mu5\chi\right)_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{1}{3}\eta\mu\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{5}\eta\mu\frac{5\pi}{2}\right)-(0-0)=\frac{1}{3}(-1)-\frac{1}{5}.1\Rightarrow I_{\alpha}=-\frac{8}{15}$

β) $\quad I_{\beta}=\int\left(3\chi^{2}+\eta\mu^{2}\frac{\chi}{2}\right)d\chi=\int\left(3\chi^{2}+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\chi\right)d\chi=\frac{3}{3}\chi^{3}+\frac{1}{2}\eta\mu\chi+\kappa$

$I_{\beta}=\chi^{3}+\frac{\chi}{2}-\frac{1}{2}\eta\mu\chi+\kappa$

γ) $\quad \psi=-\chi^{2}-\chi+2\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}=-2\chi-1$ ρίζα: $\chi=-\frac{1}{2}$ $\quad\frac{d^{2}\psi}{d\chi^{2}}=-2<0\Rightarrow$ μέγιστο

$\lambda_{\varepsilon\phi}=\frac{d\psi}{d\chi}\Big|_{x=-1}=-2(-1)-1=1\Rightarrow\lambda_{\kappa\alpha\theta}=-1$

$\psi(-1)=-1-(-1)+2=2$

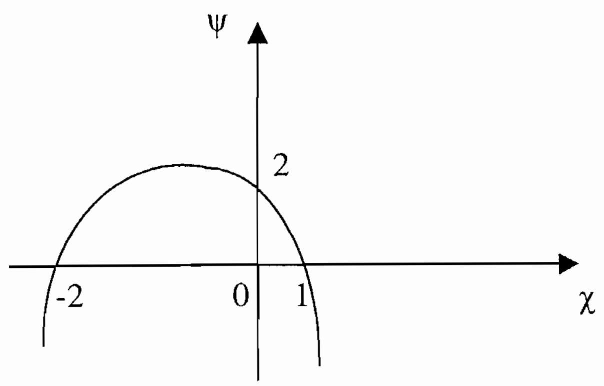
$(\kappa\alpha\theta)\ \psi-\psi_{1}=\lambda_{\perp}(\chi-\chi_{1})\Rightarrow\psi-2=-1(\chi+1)\Rightarrow\psi-2=-\chi-1\Rightarrow(\kappa\alpha\theta)\ \chi+\psi-1=0$

$\psi=-\chi^{2}-\chi+2=(-\chi+1)(\chi+2)\Rightarrow(-2,0),(1,0)$

$E=\int_{2}^{1}(-\chi^{2}-\chi+2)d\chi=\frac{-\chi^{3}}{3}-\frac{\chi^{2}}{2}+2\chi\Big|_{-2}^{1}=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)$

$E=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{8}{3}+6\Rightarrow$

$E=\frac{9}{2}\tau.\mu.$



ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 1997-1998

Α΄ ΣΕΙΡΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΤΕΧΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης
15 Ιουνίου, 1998
8:00 π.μ. – 10:30 π.μ.

Επιμέλεια
Κωνσταντίνος Δεληγιάννης

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να απαντήσετε σε **12 μόνο** από τις 15 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λυθεί η τριγωνομετρική εξίσωση: $2\text{συν}^2\chi+5\text{συν}\chi=3$.

2. Να δειχτεί ότι $\text{τοξεφ}4+\text{τοξεφ}\frac{5}{3}=\frac{3\pi}{4}$.

3. Στο ανάπτυγμα του $\left(\alpha\chi+\frac{1}{\alpha\chi^2}\right)^6$ ο ανεξάρτητος του χ όρος είναι ίσος με $\frac{12}{5}$. Να υπολογιστεί η τιμή του α.

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int e^{\chi}\left(e^{\chi}+3\right)^4 d\chi$.

5. Να δείξετε ότι $\frac{(\nu+5)!}{(\nu+3)!}=\nu^2+9\nu+20$.

6. Να λύσετε την τριγωνομετρική εξίσωση: $\frac{\eta\mu5\chi-\eta\mu\chi}{\text{συν}5\chi+\text{συν}\chi}=\sqrt{3}$ στο διάστημα $0^{\circ}\le\chi\le360^{\circ}$.

7. Αν $\int_1^5\frac{d\chi}{2\chi-1}=\ln\kappa$ να βρεθεί η τιμή του κ.

8. Η καμπύλη με εξίσωση $\psi=\alpha\chi^3-\beta\chi^2+3$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο Μ(-2,7). Να υπολογίσετε τα α και β.

9. α) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΕΠΙΣΤΗΜΗ μπορούν να γίνουν;
β) Πόσοι αν τα δύο Η θα είναι το ένα δίπλα στο άλλο;
γ) Πόσοι αν τα δυο Η θα είναι το ένα στην αρχή και το άλλο στο τέλος;

10. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{e^{\chi}+e^{-\chi}-2}{\eta\mu^2\chi}$.

11. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $\psi=2\chi^3-9\chi^2+12\chi$. Τι είδους τοπικά ακρότατα είναι;

12. Αν $\chi=1-\sigma\upsilon\nu 2\theta$ και $\psi=2\theta-\eta\mu 2\theta$, να δείξετε ότι: $\dfrac{d\psi}{d\chi}=\varepsilon\varphi\theta$.

13. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $\chi^2+\psi^2-4\chi+6\psi-12=0$.
Να βρεθούν:

α) Οι συντεταγμένες του κέντρου του και η ακτίνα του.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο του Α(-1,1).

14. Μια συνάρτηση $\psi=f(\chi)$ παριστά καμπύλη που περνά από το σημείο (1,2) και η κλίση της σε κάθε σημείο της (χ,ψ) είναι $3\chi^2$.

ι) Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης.

ιι) Να γίνει γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi=f(\chi)$.

ιιι) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τους άξονες.

15. Αν $\psi=e^{3\chi}\eta\mu 4\chi$ να δείξετε ότι: $\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}-6\dfrac{d\psi}{d\chi}+25\psi=0$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να απαντήσετε σε **4 μόνο** από τις 6 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. ι) Να υπολογιστεί το $\int \frac{4\chi - 17}{(\chi+4)(2\chi-3)} d\chi$

   ιι) Να λυθεί η Διαφορική Εξίσωση: $2\psi(\chi+1)\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{\psi^2+1}{\chi}$

2. Η καμπύλη με εξίσωση $\psi=e^\chi$ τέμνει τον άξονα των ψ στο Α. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της Β(1,e) έχει εξίσωση: $\psi=e\cdot\chi$. Αν Ο η αρχή των αξόνων να βρείτε:

   ι) Το εμβαδό του μικτογράμμου τριγώνου ΟΑΒ.

   ιι) Τον όγκο που θα παραχθεί αν το μικτόγραμμο χωρίο ΟΑΒ περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα Οψ.

3. Η γραφική παράσταση της $\psi = \frac{\alpha}{\chi - \beta}$ τέμνει τον άξονα των ψ στο σημείο Β(0,4) και η κατακορυφή ασύμπτωτη της καμπύλης τέμνει τον άξονα των χ στο σημείο Α(3,0).

   ι) Να βρεθούν τα α και β.

   ιι) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

   ιιι) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ.

4. Κύκλος περνά από τα σημεία Ο(0,0), Α(6,0) και Β(0,8).

   ι) Να βρεθεί το κέντρο, η ακτίνα και η εξίσωση του.

   ιι) Να βρεθεί η τιμή του c ώστε ο κύκλος με εξίσωση $\chi^2+\psi^2-2\chi+4\psi+c=0$ να τέμνει ορθογώνια τον προηγούμενο κύκλο.

5. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\chi^3+1=u^2$ ή με άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{3d\chi}{\chi\sqrt{\chi^3+\chi}}$.

6. Ζαχαροπλαστείο διαθέτει 7 διαφορετικές γεύσεις παγωτού.

   ι) Σε κάθε πελάτη προσφέρει μίγμα από τρεις γεύσεις. Πόσα διαφορετικά παγωτά μπορεί να προσφέρει;

   ιι) Πόσα διαφορετικά παγωτά μπορεί να προσφέρει αν θα βγάζει 4 γεύσεις αλλά μια ορισμένη γεύση θα υπάρχει σε όλα τα μίγματα;

Π Ρ Ο Τ Ε Ι Ν Ο Μ Ε Ν Ε Σ   Λ Υ Σ Ε Ι Σ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $\left.\begin{array}{l} 2\sigma\upsilon\nu^2\chi+5\sigma\upsilon\nu\chi-3=0 \\ -1 \le \sigma\upsilon\nu\chi = \omega \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\omega^2+5\omega-3=0$

$$\omega_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4} \begin{array}{l} \nearrow \ \frac{1}{2}\ \text{δεκτή} \\ \searrow \ -3(\text{απορρ.}) \end{array}$$

$\sigma\upsilon\nu\chi=\frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu 60^{o} \Rightarrow \chi=360^{o}\kappa\pm 60^{o},\ \kappa \in Z$

2. $\tau o\xi\varepsilon\varphi 4+\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{5}{3}=\frac{3\pi}{4}$

$$\left.\begin{array}{ll} \tau o\xi\varepsilon\varphi 4=\alpha \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha=4, & \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2} \\ \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{5}{3}=\beta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\beta=\frac{5}{3}, & \frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$$

Η σχέση που θα δείξω γίνεται $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta}{1-\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}=\frac{4+\frac{5}{3}}{1-4\left(\frac{5}{3}\right)}=\frac{\frac{17}{3}}{\frac{-17}{3}}=-1=\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4},\quad \kappa\in Z \\ \text{Αλλά} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}<\pi$$

$$-\frac{\pi}{4}<\kappa\pi<\frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{1}{4}<\kappa<\frac{1}{4},\qquad \kappa\in Z \Rightarrow \kappa=0$$

Άρα $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$

Δηλαδή $\tau o\xi\varepsilon\varphi 4+\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{5}{3}=\frac{3\pi}{4}$

3. $\left(\alpha\chi+\frac{1}{\alpha\chi^2}\right)^6$, ο ανεξάρτητος του χ όρος είναι $\frac{12}{5}$

$$T_{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}A^{\nu-\kappa}\cdot B^{\kappa} \Rightarrow T_{\kappa+1}=\binom{6}{\kappa}(\alpha\chi)^{6-\kappa}\cdot\left(\alpha^{-1}\chi^{-2}\right)^{\kappa} \Rightarrow$$

$$T_{\kappa+1}=\binom{6}{\kappa}\alpha^{6-\kappa}\cdot\chi^{6-\kappa}\cdot\alpha^{-\kappa}\cdot\chi^{-2\kappa}=\binom{6}{\kappa}\alpha^{6-2\kappa}\cdot\chi^{6-3\kappa}$$

Για ανεξάρτητο του χ όρο πρέπει 6-3κ=0 $\Rightarrow$ κ=2

Τότε ο ανεξάρτητος του χ όρος είναι: $T_3 = \binom{6}{2}\alpha^2 = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot \alpha^2 = \frac{12}{5}$

$\Rightarrow 15\alpha^2 = \frac{12}{5} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{12}{75} = \frac{4}{25} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{2}{5}$

4. $\int e^{\chi}(e^{\chi}+3)^4 d\chi = \int (e^{\chi}+3)^4 d(e^{\chi}+3) = \frac{(e^{\chi}+3)^5}{5} + c$

5. $\frac{(\nu+5)!}{(\nu+3)!} = \nu^2 + 9\nu + 20$

Α.Μ.= $\frac{(\nu+5)!}{(\nu+3)!} = \frac{(\nu+3)!(\nu+4)(\nu+5)}{(\nu+3)!} = \nu^2 + 9\nu + 20 =$ Β.Μ.

6. $\frac{\eta\mu 5\chi - \eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu 5\chi + \sigma\upsilon\nu\chi} = \sqrt{3}, \quad 0^o \le \chi \le 360^o$

$\frac{2\eta\mu\frac{5\chi-\chi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\chi+\chi}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{5\chi+\chi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\chi-\chi}{2}} = \frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu 2\chi} = \varepsilon\phi 2\chi = \sqrt{3}$

εφ2χ=εφ60^o $\Rightarrow$ 2χ=180^{o}κ+60^o $\Rightarrow$ χ=90^o κ+30, κ$\in$Z

Για κ=0 $\Rightarrow$ χ=30^o λύση
Για κ=1 $\Rightarrow$ χ=120^o λύση
Για κ=2 $\Rightarrow$ χ=210^0 λύση
Για κ=3 $\Rightarrow$ χ= 300^o λύση
Για κ=4 $\Rightarrow$ χ=390^o απορρ.
Για κ=-1 $\Rightarrow$ χ=-60^o απορρ.

7. $\int_1^5 \frac{d\chi}{2\chi-1} = \ln\kappa \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{d(2\chi-1)}{2\chi-1} = \ln\kappa \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\ln|2\chi-1|\right]_1^5 = \ln\kappa$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|10-1| - \frac{1}{2}\ln|2-1| = \frac{1}{2}\ln 9 = \ln\sqrt{9} = \ln 3$

Άρα ln3=lnκ
$\Rightarrow$ κ=3

8. ψ=αχ^3-βχ^2+3 Τ.Α. Μ(-2,7), α=; , β=;
ψ΄=3αχ^2-2βχ
Το Μ(-2,7) είναι Τ.Α. άρα 0=3α(-2)^2-2β(-2)=12α+4β
Μ(02,7) είναι σημείο της καμπύλης άρα την επαληθεύει
7=α(-2)^3-β(-2)^2+3 $\Rightarrow$ 7=-8α-4β+3 $\Rightarrow$ 4=-8α-4β

$$\begin{array}{l} 0=12\alpha+4\beta \\ 4=-8\alpha-4\beta \\ \hline 4=4\alpha \\ \alpha=1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 12(1)+4\beta=0 \\ 4\beta=-12 \\ \\ \beta=-3 \end{array}$$

9. Ε, Π, Ι, Σ, Τ, Μ, Η, Η, $\quad M_\nu^\kappa = \dfrac{\nu!}{\kappa!}$

α) $\quad M_8^\varepsilon = \dfrac{8!}{2!} = 3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 12\cdot30\cdot56 = 20160$

β) $\quad M_7 = 7! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 = 5040$

γ) $\quad M_6 = 6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$

10. $L = \lim\limits_{\chi\to0}\dfrac{e^\chi + e^{-\chi} - 2}{\eta\mu^2\chi} = \dfrac{1+1-2}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Απροσ.)

$$L \overset{KH}{=} \lim_{\chi\to0}\frac{\left(e^\chi + e^{-\chi} - 2\right)'}{\left(\eta\mu^2\chi\right)'} = \lim_{\chi\to0}\frac{e^\chi - e^{-\chi}}{2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\ (\text{Απροσ.})$$

$$L \overset{KH}{=} \lim_{\chi\to0}\frac{\left(e^\chi - e^{-\chi}\right)'}{\left(\eta\mu2\chi\right)'} = \lim_{\chi\to0}\frac{e^\chi + e^{-\chi}}{2\sigma\upsilon\nu2\chi} = \frac{1+1}{2\cdot1} = 1$$

11. $\psi=2\chi^3-9\chi^2+12\chi$
$\psi'=6\chi^2-18\chi+12=6(\chi^2-3\chi+2)=6(\chi-2)(\chi-1)$
$\psi'=0 \Rightarrow \chi=2,\ \chi=1$

χ	$-\infty$		1		2		$+\infty$
ψ'		+	0	-	0	+	
ψ		↗		↘		↗	
			max (1,5)		min (2,4)		

$\psi_{max} = 2\cdot1^3 - 9\cdot1^2 + 1^2\cdot1$
$\quad = 2-9+12=5$

$\psi_{min} = 2\cdot2^3 - 9\cdot2^2 + 1^2\cdot2$
$\quad = 16-36+24 = 4$

12. $\chi=1-\sigma\upsilon\nu2\theta \Rightarrow \dfrac{d\chi}{d\theta} = 2\eta\mu2\theta$

$\psi=2\theta-\eta\mu2\theta \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\theta} = 2-2\sigma\upsilon\nu2\theta$

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{2-2\sigma\upsilon\nu2\theta}{2\eta\mu2\theta} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu2\theta}{\eta\mu2\theta} = \frac{1-1+2\eta\mu^2\theta}{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\sigma\upsilon\theta} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi\theta$$

13. $\chi^2+\psi^2-4\chi+6\psi-12=0$

ι) $\left.\begin{array}{l} g=-2 \Rightarrow -g=2 \\ f=3 \;\Rightarrow -f=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow K(-g,-f)=K(2,-3)$

$c=-12,\ R=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{4+9+12}=5$

ιι) $\chi_1\chi+\psi_1\psi+g(\chi+\chi_1)+f(\psi+\psi_1)+c=0$ εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου
$\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0$ στο σημείο του (χ_1,ψ_1)

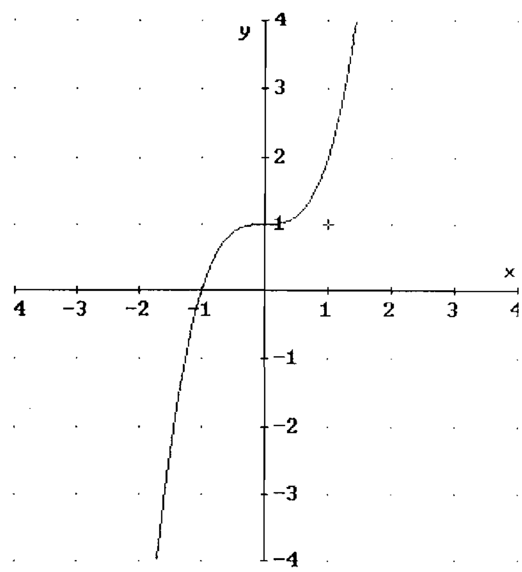
εξίσωση εφαπτομένης του (κ): $\chi^2+\psi^2-4\chi+6\psi-12=0$ στο σημείο του A(-1,1)
είναι: $-1\chi+1\psi-2(\chi-1)+3(\psi+1)-12=0$
$-\chi+\psi-2\chi+2+3\psi+3-12=0$
$-3\chi+4\psi-7=0 \Rightarrow 3\chi-4\psi+7=0$

14. ι) $\dfrac{d\psi}{d\chi}=3\chi^2 \Rightarrow d\psi=3\chi^2 d\chi \Rightarrow \int d\psi=\int 3\chi^2 d\chi \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} \psi=\dfrac{3\chi^3}{3}+c \Rightarrow \psi=\chi^3+c \\ \text{για } \chi=1 \Rightarrow \psi=2 \end{array}\right\}$ άρα $2=1+c \Rightarrow c=1$

εξίσωση της καμπύλης: $\psi=\chi^3+1$

ιι) Σημεία τομής με τους άξονες:
$\chi=0 \Rightarrow \psi=1$ (0,1)
$\psi=0 \Rightarrow \chi=-1$ (0,-1)



$\psi'=3\chi^2,\ \psi''=6\chi$
$\psi'=0 \Rightarrow \chi=0$ (διπλή)

χ		0	
ψ'	+	0	+
ψ	↗		↗

Σ.Κ. (0,1)

χ		0	
ψ''	-	0	+
ψ	∩		∪

Σ.Κ. (0,1)

ιιι) $E=\int_{-1}^{0}\psi d\chi=\int_{-1}^{0}(\chi^3+1)d\chi=\left[\dfrac{\chi^4}{4}+\chi\right]_{-1}^{0}=(0+0)-\left(\dfrac{1}{4}-1\right)=\dfrac{3}{4}$ τ.μ.

15. $\psi=e^{3\chi}\eta\mu 4\chi$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=3e^{3\chi}\eta\mu 4\chi+e^{3\chi}\cdot 4\sigma\upsilon\nu 4\chi=e^{3\chi}(3\eta\mu 4\chi+4\sigma\upsilon\nu 4\chi)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=3e^{3\chi}(3\eta\mu 4\chi+4\sigma\upsilon\nu 4\chi)+e^{3\chi}(12\sigma\upsilon\nu 4\chi-16\eta\mu 4\chi)$$

$$=e^{3\chi}(9\eta\mu 4\chi+12\sigma\upsilon\nu 4\chi+12\sigma\upsilon\nu 4\chi-16\eta\mu 4\chi)$$

$$=e^{3\chi}(-7\eta\mu 4\chi+24\sigma\upsilon\nu 4\chi)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}-6\frac{d\psi}{d\chi}+25\psi=-7e^{3\chi}\eta\mu 4\chi+24e^{3\chi}\sigma\upsilon\nu 4\chi-18e^{3\chi}\eta\mu 4\chi-24e^{3\chi}\sigma\upsilon\nu 4\chi+25e^{3\chi}\eta\mu 4\chi=0$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. ι) $I=\int\frac{4\chi-17}{(\chi+4)(2\chi-3)}d\chi$ $\qquad \frac{4\chi-17}{(\chi+4)(2\chi-3)}\equiv\frac{A}{\chi+4}+\frac{B}{2\chi-3}$

$$I=\int\left(\frac{3}{\chi+4}-\frac{2}{2\chi-3}\right)d\chi=3\ln|\chi+4|-\ln|2\chi-3|+c$$

Για $4\chi-17\equiv A(2\chi-3)+B(\chi+4)$

$\chi=-4\Rightarrow -33=-11A\Rightarrow A=3$

$\chi=\frac{3}{2}\Rightarrow -11=B\left(\frac{3}{2}+4\right)\Rightarrow B=-2$

ιι) $2\psi(\chi+1)\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\psi^2+1}{\chi}\Rightarrow\frac{2\psi d\psi}{\psi^2+1}=\frac{d\chi}{\chi(\chi+1)}\Rightarrow$

$$\int\frac{2\psi d\psi}{\psi^2+1}=\int\frac{d\chi}{\chi(\chi+1)}$$

$$\ln(\psi^2+1)=\int\left(\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\chi+1}\right)d\chi=\ln|\chi|-\ln|\chi+1|+\kappa=\ln\left|\frac{\chi}{\chi+1}+\ln|c|\right|$$

$$\ln(\psi^2+1)=\ln\left|\frac{c\chi}{\chi+1}\right|\Rightarrow\psi^2+1=\frac{c\chi}{\chi+1}$$

$$\frac{1}{\chi(\chi+1)}=\frac{A}{\chi}+\frac{B}{\chi+1}$$

$1\equiv A(\chi+1)+B\chi$

$\chi=0\Rightarrow 1=A$

$\chi=-1\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1$

2. $\left.\begin{array}{l}\psi=e^{\chi}\\ \chi=0\end{array}\right\} \Rightarrow \psi=1 \Rightarrow A(0,1)$

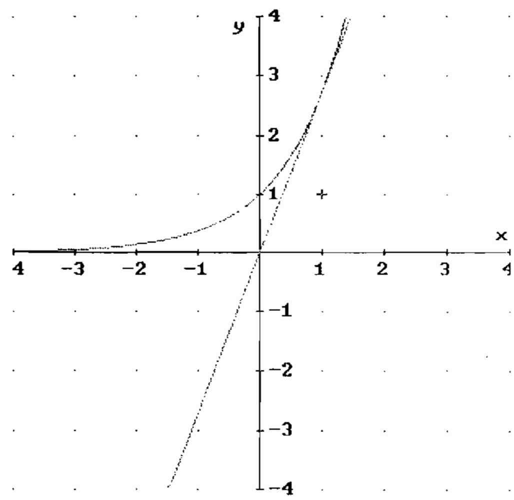
$\psi'= e^{\chi}$
$\lambda_{\varepsilon\varphi}= e^{1} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}= e$

Εξ. Εφαπτ. στο $B(1,e)=\psi-\psi_1=\lambda(\chi-\chi_1)$

$$\psi-e=e(\chi-1)$$
$$\psi-\cancel{e}=e\chi-\cancel{e}$$
$$\psi=e\chi$$

ι) $E_{OAB} = \int_0^1 \psi_k d\chi - \int_0^1 \psi_E d\chi$

$$= \int_0^1 (e^{\chi} - e\cdot\chi)\, d\chi$$
$$= \left[e^{\chi} - \frac{e\chi^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \left(e - \frac{e}{2}\right) - (1 - c)$$
$$= \frac{e}{2} - 1 = \frac{e-2}{2} \quad \tau.\mu.$$



ιι) $V_{O\psi} = \pi\int_0^e \chi_E^2\, d\psi - \pi\int_1^e \chi_K^2\, d\psi = \pi\int_0^e \frac{\psi^2}{e^2} d\psi - \pi\int_1^e \ln^2\psi\, d\psi$

$$= \left[\frac{\pi\psi^3}{3e^2}\right]_0^e - \pi\cdot I$$

$$I=\int_1^e \ln^2\psi\, d\psi = \left[\psi\cdot\ln^2\psi\right]_1^e - \int_1^e \psi\cdot 2\ln\psi\cdot\frac{1}{\psi} d\psi = \left[\psi\ln^2\psi\right]_1^e - 2\int_1^e \ln\psi\, d\psi =$$
$$= \left[\psi\ln^2\psi - 2\left(\psi\cdot\ln\psi - \int\psi\cdot\frac{1}{\psi}d\psi\right)\right]$$
$$= \left[\psi\ln^2\psi - 2\psi\ln\psi + 2\psi\right]_1^e$$
$$= \left(e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e\right) - \left(1\ln^2 1 - 2\cdot 1\ln 1 + 2\cdot 1\right)$$
$$= e - \cancel{2e} + \cancel{2e} - 2$$
$$= e - 2$$

$$u=\ln^2\psi \Rightarrow d\psi = 2\ln\psi\cdot\frac{1}{\psi}d\psi$$

$$u_1=\ln\psi \Rightarrow du_1 = \frac{1}{\psi}d\psi$$

$$dV_1 = d\psi \Rightarrow V_1 = \psi$$

$$V_{O\psi} = \frac{\pi e^3}{3e^2} - \pi(e-2) = \frac{\pi e}{3} - \pi e + 2\pi$$

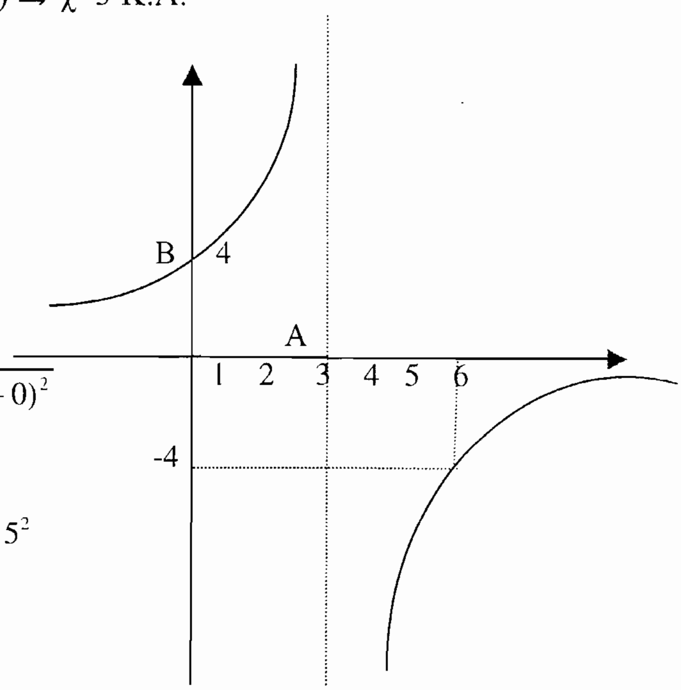
$$V_{O\psi} = \frac{6\pi - 2\pi e}{3} = \frac{2\pi}{3}(3-e) \quad \text{κ.μ.}$$

3. ι) $\psi = \dfrac{\alpha}{\chi-\beta}$ τέμνει τον ψ΄ψ στο B(0,4)

$$4 = \frac{\alpha}{-\beta} \Rightarrow \alpha = -4\beta$$

Η Κ.Α. τέμνει τον χ΄χ στο A(3,0) ⇒ χ=3 Κ.Α.

$$\left.\begin{array}{l}\chi=\beta \text{ K.A}\\ \chi=3 \text{ K.A}\end{array}\right. \Rightarrow \beta=3 \text{ οπότε } \alpha=-12$$



ιι) $\psi = \dfrac{-12}{\chi-3}$

$$\psi' = \frac{12}{(\chi-3)^2} > 0 \quad \forall\chi\in R - \{3\}$$

ιιι) $K(3,0)$, R= (AB)=$\sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2}$

R= (AB)=$\sqrt{9+16}=5$

Εξίσωση κύκλου: $(\chi-3)^2+\psi^2=5^2$

ή $\chi^2+\psi \; -6\chi-16=0$

4. O(0,0), A(6,0), B(0,8)

ι) (κ): $\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0$

O(0,0) ∈ (κ) ⇒ c=0

$$\left.\begin{array}{l}A(6,0) \in (\kappa) \Rightarrow 36+12g=0 \Rightarrow g=-3\\ B(0,8) \in (\kappa) \Rightarrow 64+16f=0 \Rightarrow f=-4\end{array}\right\} \Rightarrow$$

(κ): $\chi^2+\psi^2-6\chi-8\psi=0$

K(-g,-f)=K(3,4)

$$R = \sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{9+16} = 5$$

ιι) (κ): $\chi^2+\psi^2-6\chi-8\psi=0$ $\quad g_1=-3,\ f_1=-4,\ c_1=0$

(Λ): $\chi^2+\psi^2-2\chi+4\psi+c=0$ $\quad g_2=-1,\ f_2=-2,\ c_2=c$

$2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2 \Leftrightarrow$ (κ), (Λ) τέμνονται ορθογώνια

$2(-3)(-1)+2(-4)2=0+c$

$+6-16=c \Rightarrow c=-10$

5. $I=\int\frac{3d\chi}{\chi\sqrt{\chi^3+1}}$, $\quad \chi^3+1=u^2,\ 3\chi^2 d\chi=2udu$

$$I=\int\frac{\frac{2udu}{\chi^2}}{\chi\cdot u}=\int\frac{2du}{\chi^3}=\int\frac{2du}{u^2-1}$$

$$\frac{2}{(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$$

$$2=A(u+1)+B(u-1)$$

$u=1\ \ 2=2A \Rightarrow A=1$

$u=-1\ \ 2=-2B \Rightarrow B=-1$

$$I=\int\frac{2du}{(u-1)(u+1)}=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=\ln|n-1|-\ln|n+1|+c$$

$$=\ln\left|\frac{u-1}{n+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{\chi^3+1}-1}{\sqrt{\chi^3+1}+1}\right|+c$$

6. ι) Τα διαοφρετικά παγωτά είναι όσα οι συνδυασμοί των 7 ανά 3.

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{4!3!}=\frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3}=35$$

ιι) Τα διαφορετικά παγωτά όταν μια γεύση θυα υπάρχει πάντοτε σε κάθε παγωτό θα είναι όσα οι συνδυασμοί των 6 ανά 3.

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=\frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=20$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ & ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ
ΓΙΑ ΑΠΟΦΟΙΤΟΥΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης
Τρίτη, 30 Ιουνίου, 1998.
10:15 π.μ. – 1:15 μ.μ.

Επιμέλεια
Κωνσταντίνος Δεληγιάννης

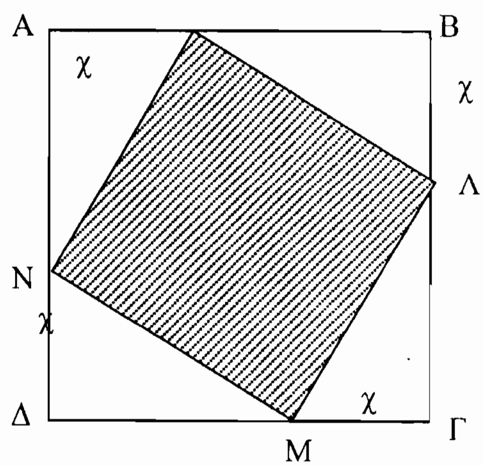
ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{3\eta\mu^2\chi}{e^{\chi}+e^{-\chi}-2}$

2. Στο ανάπτυγμα $\left(\dfrac{1}{\chi}+\chi^2\right)^{12}$ του διωνύμου, να βρείτε το συντελεστή του χ^{18}.

3. Στο διπλανό σχήμα ΑΒΓΔ, ΚΛΜΝ είναι τετράγωνα με ΑΒ=2 και ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ=ΔΝ=χ.
   α) Να εκφράσετε το εμβαδό, Ε(χ), του ΚΛΜΝ ως συνάρτηση του χ.
   β) Να βρείτε την τιμή του χ ώστε το Ε(χ) να είναι ελάχιστο. (Δικαιολογήστε γιατί γίνεται ελάχιστο).



4. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $\eta\mu\chi\dfrac{d\psi}{d\chi}+2\psi\sigma\upsilon\nu\chi=2$ για την οποία ισχύει ψ=0 για $\chi=\dfrac{\pi}{2}$.

5. Δίνεται η λέξη ΑΝΑΠΝΟΗ.
   α) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης υπάρχουν;
   β) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης έχουν τα γράμματα Π και Η **<u>ΟΧΙ</u>** συνεχόμενα;
   γ) Πόσοι αναγραμματισμοί αρχίζουν από Α και τελειώνουν σε Α;

6. Δίνεται ο κύκλος $\chi^2+\psi^2-4\chi+2\psi-20=0$ και το σημείο Α(5,3) αυτού.
   α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α.
   β) Αν ΑΒ διάμετρος του πιο πάνω κύκλου να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

7. Δίνεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις
   $\chi = \sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3\theta,\ \psi = \eta\mu\theta - \frac{1}{3}\eta\mu 3\theta$
   α) Να δείξετε ότι $\frac{d\psi}{d\chi} = \varepsilon\phi 2\theta$ και
   β) Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[1+\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^2\right] d\theta$

8. Δίνονται τα ψηφία 2, 4, 6, 8, 9. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία αυτά χωρίς επανάληψη να βρείτε:
   α) Πόσοι τριψήφιοι μεγαλύτεροι του 500 μπορούν να γίνουν;
   β) Πόσοι από τους πιο πάνω αριθμούς είναι άρτιοι;

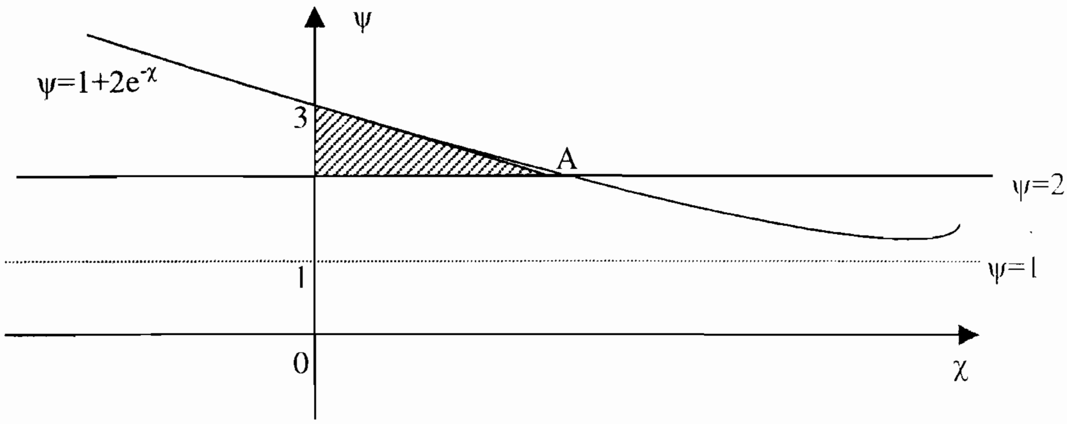
9. Να λύσετε την τριγωνομετρική εξίσωση:
   $\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\theta} = 4$ στο διάστημα $0^o \le \theta \le 360^o$.

10. Η ολική επιφάνεια ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό $24cm^2$ το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης της πλευράς του και στη συνέχεια το ρυθμό αύξησης του όγκου του όταν το μήκος της πλευράς του γίνει 8cm.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το $\int (\chi + 2\eta\mu 5\chi)\sigma\upsilon\nu 3\chi d\chi$

2. 

Στο πιο πάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της καμπύλης με εξίσωση $\psi=1+2e^{-\chi}$ και της ευθείας $\psi=2$ και το σημείο τομής τους Α.

α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι (ln2,2).

β) Το γραμμοσκιασμένο χωρίο περιστρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα των χ. να δείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι: $V = \pi\left(\frac{7}{2} - \ln 8\right)$.

3. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \dfrac{1+\chi^2}{\chi}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τις ασύμπτωτες, τα ακρότατα και αν παραστήσετε γραφικά την καμπύλη.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη και την ευθεία $\psi = \frac{5}{2}$ είναι ίσο με $\frac{15}{8} - \ln 4$.

4. Δίνεται ο κύκλος $\chi^2+\psi^2-8\chi+6\psi-15=0$ (κ)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του.

β) Αν η ευθεία $\chi=2\psi$ τέμνει τον κύκλο (κ) στα σημεία Α και Β, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων αυτών καθώς επίσης και την εξίσωση του κύκλου (Λ) που περνά από τα σημεία Α και Β και το σημείο Γ(1,1).

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{5}{(1+3\chi)\cdot(1-2\chi)}$

α) Να αναλύσετε το πιο πάνω κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

β) Με τη βοήθεια της ανάλυσης αυτής ή με άλλο τρόπο και λαμβάνοντας υπόψη ότι το χ είναι αρκετά μικρό ώστε η τέταρτη και οι ανώτερες δυνάμεις του χ να μπορούν να αγνοηθούν, να αποδείξετε ότι f(χ) μπορεί να πάρει τη μορφή $f(\chi)=\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2+\delta\chi^3$ και να προσδιορίσετε τις τιμές των ακεραίων α, β, γ, δ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $$L=\lim_{\chi\to 0}\frac{3\eta\mu^2\chi}{e^{\chi}+e^{-\chi}-2}=\frac{0}{1+1-2}=\frac{0}{0}\,(\text{Απροσ.})$$

$$L=\lim_{\chi\to 0}\frac{3\eta\mu^2\chi}{e^{\chi}+e^{-\chi}-2}=\lim_{\chi\to 0}\frac{6\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}{e^{\chi}-e^{-\chi}}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}\,(\text{Απροσ.})$$

$$L=\lim_{\chi\to 0}\frac{3\eta\mu 2\chi}{e^{\chi}-e^{-\chi}}=\lim_{\chi\to 0}\frac{6\sigma\upsilon\nu 2\chi}{e^{\chi}+e^{-\chi}}=\frac{6\cdot 1}{1+1}=3$$

2. $$\left(\frac{1}{\chi}+\chi^2\right)^{12}$$

$$T_{\kappa+1}=\binom{\nu}{\kappa}\alpha^{\nu-\kappa}\cdot\beta^{\kappa}\quad(\text{Γενικός όρος})$$

$$T_{\kappa+1}=\binom{12}{\kappa}\left(\frac{1}{\chi}\right)^{12-\kappa}\cdot\left(\chi^2\right)^{\kappa}=\binom{12}{\kappa}\chi^{-12+\kappa}\cdot\chi^{2\kappa}=\binom{12}{\kappa}\chi^{-12+3\kappa}$$

$-12+3\kappa=18 \Rightarrow 3\kappa=30 \Rightarrow \kappa=10$

$$T_{11}=\binom{12}{10}\chi^{18}\Rightarrow \text{συντελ. του }\chi^{18}=\binom{12}{10}=\binom{12}{2}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}=66$$

3. α) ΑΚ=χ, ΚΒ=2-χ

(ΑΒΓΔ)=2^2=4 τ.μ.

(ΑΚΝ)=(ΚΒΛ)= (ΛΓΜ)=(ΜΝΔ)=$\dfrac{\chi(2-\chi)}{2}$

Ε(χ)=(ΚΛΜΝ)= $4-\cancel{4}\cdot\dfrac{\chi(2-\chi)}{\cancel{2}}=4-4\chi+2\chi^2$

β) Ε΄(χ)=-4+4χ

Ε΄(χ)=0 ⇒ χ=1

Ε΄΄(χ)=4

Ε΄΄(1)=4>0 ⇒ για χ=1 το Ε(χ) γίνεται ελάχιστο.

Από τον πίνακα φαίνετε ότι το Ε(χ) είναι min για χ=1

χ	1
Ε΄(χ)	- 0 +
Ε(χ)	↘ min ↗

4. $$\eta\mu\chi\frac{d\psi}{d\chi}+2\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\psi=2.$$

Δεν είναι ακριβής, έτσι διαιρώ κάθε όρο της με το ημχ και παίρνω:

$$\frac{d\psi}{d\chi}+2\sigma\varphi\chi\cdot\psi=2\sigma\tau\epsilon\mu\chi\quad(1)$$

$$I(\chi)=e^{\int 2\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}d\chi}=e^{2\ln\eta\mu\chi}=e^{\ln\eta\mu^2\chi}=\eta\mu^2\chi$$

Πολλαπλασιάζω κάθε όρο της (1) με το $\eta\mu^2\chi$ έχουμε την ακριβή διαίρεση:

$$\eta\mu^2\chi\frac{d\psi}{d\chi}+2\sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\chi-\psi=2\eta\mu\chi$$

$$d(\psi\cdot\eta\mu^2\chi)=2\eta\mu\chi$$

$$\psi\eta\mu^2\chi=\int 2\eta\mu\chi dx=-2\sigma\upsilon\nu\chi+c\Rightarrow\psi=-\frac{2\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^2\chi}\Rightarrow\psi=-2\sigma\phi\chi\cdot\sigma\tau\epsilon\mu\chi$$

$$0\cdot\eta\mu^2\frac{\pi}{2}=-2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+c$$

$$0=0+c\Rightarrow c=0$$

5. ΑΝΑΠΝΟΗ

α) $\frac{7!}{2!\,2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot1\cdot2}=180\cdot7=1260$

β) Αν τα Π και Η ήταν συνεχόμενα τότε το πλήθος των αναγραμματισμών είναι: $\frac{6!}{2!\,2!}\cdot2!=3\cdot4\cdot5\cdot6=360$

Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΝΑΠΝΟΗ που έχουν τα Π και Η όχι συνεχόμενα είναι: 1260-360=900

γ) Το πλήθος των αναγραμματισμών που αρχίζουν από Α και τελειώνουν σε Α είναι: $\frac{5!}{2!}=3\cdot4\cdot5=60$

6. $\chi^2+\psi^2-4\chi+2\psi-20=0$, $A(5,3)$

εξίσωση εφαπτ. στο (χ_1,ψ_1): $\chi_1\chi+\psi_1\psi+g(\chi+\chi_1)+f(\psi+\psi_1)+c=0$

εξίσωση εφαπτ. στο $A(5,3)$: $5\chi+3\psi-2(\chi+5)+1(\psi+3)-20=0$

$3\chi+4\psi-10+3-20=0$

$3\chi+4\psi-27=0$

ΑΒ διάμετρος, $K(-g,-f)=K(2,-1)$

$$\chi_\kappa=\frac{\chi_A+\chi_B}{2}\Rightarrow2=\frac{5+\chi_B}{2}\Rightarrow\chi_B=-1$$

$$\psi_\kappa=\frac{\psi_A+\psi_B}{2}\Rightarrow-1=\frac{3+\psi_B}{2}\Rightarrow\psi_B=-5\Rightarrow B(-1,-5)$$

7. α) $\chi=\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu3\theta\Rightarrow\frac{d\chi}{d\theta}=-\eta\mu\theta+\eta\mu3\theta$

$\psi=\eta\mu\theta-\frac{1}{3}\eta\mu3\theta\Rightarrow\frac{d\psi}{d\theta}=\sigma\upsilon\nu\theta-\sigma\upsilon\nu3\theta$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta-\sigma\upsilon\nu3\theta}{\eta\mu3\theta-\eta\mu\theta}=\frac{\cancel{2}\eta\mu2\theta\cancel{\eta\mu\theta}}{\cancel{2}\cancel{\eta\mu\theta}\sigma\upsilon\nu2\theta}=\epsilon\phi2\theta$$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left[1+\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^2\right]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left[1+\varepsilon\varphi^2 2\theta\right]d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}}\tau\varepsilon\mu^2 2\theta\, d(2\theta(= \left[\frac{1}{2}\varepsilon\varphi 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{8}} = \left(\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\varepsilon\varphi 0\right)=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}$

8. 2, 4, 6, 8, 9

α)

Τριψήφιοι	3	4	3			$3\cdot 4\cdot 3=36$
Τετραψήφιοι	5	4	3	2		$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$
Πενταψήφιοι	5	4	3	2	1	$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$

Μπορούν να γίνουν 36+240=276 αριθμοό μεγαλύτεροι του 500.

β) ι) Άρτιοι τριψήφιοι | 2 | 3 | 1 | $2\cdot 3\cdot 1=6$
μεγαλύτεροι του 500 με ψηφίο μονάδων το 6.

ιι) Άρτιοι τριψήφιοι αριθμοί μεγαλύτερου του 500 με ψηφίο μονάδων το 8. | 2 | 3 | 1 | $2\cdot 3\cdot 1=6$

τετραψήφιοι άρτιοι >500	4	3	2	4		$4\cdot 3\cdot 2\cdot 4=96$
πενταψήφιοι άρτιοι >500	4	3	2	1	4	$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4=96$

Άρτιοι μεγαλύτεροι του 500 είναι: 6+6+96+96=204 αριθμοί.

9. $\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}=4$ στο $0^o \leq \theta \leq 360^o$.

$1-\sigma\upsilon\nu\theta+1+\sigma\upsilon\nu\theta=4(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$2=4-4\sigma\upsilon\nu^2\theta \Rightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2\theta=2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta=\frac{2}{4} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\, 45^o$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta=-\sigma\upsilon\nu 45^o=\sigma\upsilon\nu 135^o$

$\theta=360^o\kappa \pm 45$ $\qquad$ $\theta=360^o\kappa \pm 135^o$

$\kappa\in Z$ $\qquad$ $\kappa\in Z$

$\kappa=0$ $\quad \theta=45^o$ $\quad \theta=135^o$

$\kappa=1$ $\quad \theta=315^o$ $\quad \theta=225^o$

Λύσεις: $\theta=45^o$, $\theta=135^o$, $\theta=225^o$, $\theta=315^o$

10. $E_{o\lambda}=6\alpha^2$, $\quad \frac{dE}{dt}=24m^2/s$, $\quad \frac{da}{dt}\Big/_{\alpha=8cm}=;\quad \frac{dV}{dt}\Big/_{\alpha=8cm}=;$

$E=6\alpha^2 \Rightarrow \frac{dE}{d\alpha}=12\alpha$

$\frac{dE}{dt}=\frac{dE}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow 24=12\alpha-\frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt}=\frac{2}{\alpha}$

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right/\alpha_{=8cm}=\frac{2}{8}=0{,}25m/s$$

$$V=\alpha^3\Rightarrow\frac{dV}{d\alpha}=3\alpha^2,\ \frac{dV}{dt}=\frac{dV}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}=3\alpha^2\cdot 0{,}25\Rightarrow\left.\frac{dV}{dt}\right/\alpha_{=8cm}=3\cdot 8^2\cdot\frac{1}{4}=48m^3/s$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. $$\int(\chi+2\eta\mu5\chi)\sigma\upsilon\nu3\chi d\chi=\int\chi\sigma\upsilon\nu3\chi d\chi+\int2\eta\mu5\chi\sigma\upsilon\nu3\chi d\chi$$

$$=\frac{1}{3}\int\chi d\eta\mu3\chi+\int(\eta\mu3\chi+\eta\mu2\chi)d\chi$$

$$=\frac{1}{3}\chi\cdot\eta\mu3\chi-\frac{1}{3}\int\eta\mu3\chi d\chi-\frac{\sigma\upsilon\nu8\chi}{8}-\frac{\sigma\upsilon\nu2\chi}{2}+c$$

$$=\frac{\chi\eta\mu3\chi}{3}+\frac{\sigma\upsilon\nu3\chi}{9}-\frac{\sigma\upsilon\nu8\chi}{8}-\frac{\sigma\upsilon\nu2\chi}{2}+c$$

2. $\psi=1+2e^{-\chi}$, $\psi=2$ με σημείο τομής το Α.

α) $2=1+2e^{-\chi}\Rightarrow 1=2e^{-\chi}\Rightarrow e^{\chi}=2\Rightarrow\chi=\ln2\Rightarrow A(\ln2,2)$

β) $$V=\pi\int_0^{\ln2}\left(\psi_K^2-\psi_E^2\right)d\chi=\pi\int_0^{\ln2}\left[\left(1+2e^{-x}\right)^2-2^2\right]d\chi=$$

$$=\pi\int_0^{\ln2}\left(1+4e^{-2\chi}+4e^{-\chi}-4\right)d\chi$$

$$=\pi\left[3\chi-2e^{-2\chi}-4e^{-\chi}\right]_0^{\ln2}$$

$$=\pi\left(-3\ln2-2e^{-2\ln2}-4e^{-\ln2}\right)-\pi(0-2-4)$$

$$=\pi\left(-3\ln2-2\cdot2^{-2}-4\cdot2^{-1}+6\right)$$

$$=\pi\left(-\text{lm}8-2^{-1}-2^{1}+6\right)=\pi\left(-\ln8-\frac{1}{2}+4\right)$$

$$=\pi\left(\frac{7}{2}-\ln8\right)$$

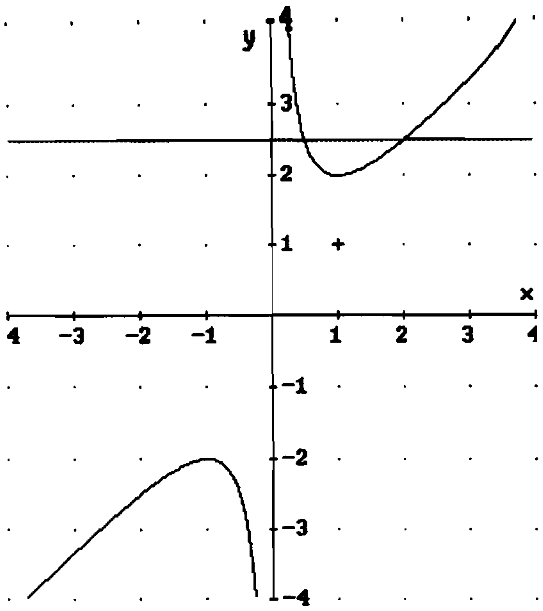
3. $\psi=\dfrac{1+\chi^2}{\chi}$

α) Π.Ο. R-{0}, χ=0 Κ.Α.

ψ=χ Π.Α.

$$\psi'=\frac{2\chi\cdot\chi-\left(1+\chi^2\right)\cdot1}{\chi^2}=\frac{\chi^2-1}{\chi^2}=\frac{(\chi-1)(\chi+1)}{\chi^2}$$

$\psi'=0\Rightarrow\chi=1,\chi=-1$



χ		-1			0		1	
ψ'	+	0	-		//	-	0	+
ψ	↗	∩	↘			↘	∪	↗
		max (-1,-2)					min (1,2)	

β) $\left.\begin{array}{l}\psi=\dfrac{1+\chi^2}{\chi}\\ \psi=\dfrac{5}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1+\chi^2}{\chi}=\dfrac{5}{2} \Rightarrow 2+2\chi^2=5\chi \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\chi^2-5\chi+2=0$$

$$\chi_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow \frac{1}{2}\end{array}$$

$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\psi_E-\psi_K)d\chi=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1+\chi^2}{\chi}\right)d\chi=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{5\chi-2-2\chi^2}{2\chi}\right)d\chi$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{\chi}-\chi\right)d\chi=\left[\frac{5}{2}\chi-\ln|\chi|-\frac{\chi^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=(5-\ln 2-2)-\left(\frac{5}{4}-\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)$$

$$=3-\ln 2-\frac{5}{4}+\frac{1}{8}-\ln 2=\frac{24-10+1}{8}-2\ln 2$$

$$=\frac{15}{8}-\ln 4$$

4. $\chi^2+\psi^2-8\chi+6\psi-15=0$ (κ)

α) $\left.\begin{array}{l}2g=-8 \Rightarrow g=-4\\ 2f=6 \Rightarrow f=3\end{array}\right. \Rightarrow K(4,-3)$

$c=-15$ $\qquad R=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{16+9+15}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

β) $\left.\begin{array}{l}\chi^2+\psi^2-8\chi+6\psi-15=0\\ \chi=24\end{array}\right\} \Rightarrow 4\psi^2+\psi^2-16\psi+6\psi-15=0$

$5\psi^2-10\psi-15=0$

$\psi^2-2\psi-3=0,\ (\psi-3)(\psi+1)=0,\ \psi=3,\ \psi=-1$

$\chi=6,\ \chi=-2$

$A(6,3),\ B(-2,-1)$

$\Lambda:\ \chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0$

Α σημείο του Λ $\Rightarrow 36+9+52g+6f+c=0 \quad (1)$

Β σημείο του Λ $\Rightarrow 4+1-4g-2f+c=0 \quad (2)$

Γ σημείο του Λ $\Rightarrow 1+1+2g+2f+c=0 \quad (3)$

$$\begin{array}{l|l} (1)-(2) \Rightarrow 40+16g+8f=0 & 1 \\ (1)-(3) \Rightarrow 43+10g+4f=0 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \Rightarrow 40+16g+8f=0 \\ \underline{-86-20g-8f=0} \\ -4g=46 \\ g=-\dfrac{23}{2} \end{array}$$

$43+\overset{5}{\cancel{10}}\left(-\dfrac{23}{\cancel{2}}\right)+4f=0$

$4f=115-43$

$4f=72$

$\boxed{f=18}$

$2+2g+2f+c=0$

$2+2\left(-\dfrac{23}{2}\right)+2\cdot 18+c=0$

$2-23+36+c=0$

$\boxed{c=-15}$

$\Lambda:\ \chi^2+\psi^2-23\chi+36\psi-15=0$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία , Κύπρος
Φαξ - Τηλ: 2-379122 / Κοιν:9-641843
e-mail: cms@cyearn.pi.ac.cy

<u>ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΤΑΚΤΙΚΑ ΜΕΛΗ</u>
(για άτομα με δίπλωμα Μαθηματικών ανεξάρτητα ειδικότητας)

Ημερομηνία αίτησης....................

<u>Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία</u>

ΕΠΩΝΥΜΟ: .... ΟΝΟΜΑ: ....
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ: ....
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ: ....99....
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: .... Α.Κ.Α.: ....

<u>ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*</u>
B.S. ☐ ΕΤΟΣ .... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ....
M.S. ☐ ΕΤΟΣ .... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ....
Ph.D. ☐ ΕΤΟΣ .... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ....
Άλλο ....

<u>ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ</u>
Αριθμός και οδός: ....
Πόλη: .... Τ.Τ. ....
Χωριό: ....
Τηλέφωνα: ...., ..., ...

<u>ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ</u>
Ιδιότητα- Βαθμός: ....
Σχολείο-Ιδρυμα-Υπηρεσία: ....
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα .... Ιδιωτικό Τομέα ....

<u>ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ</u>
....

Αριθμός αποδ.:	**Εγγραφή:** £2
Ημερομηνία αποδ.:	**Ετήσια Συνδρομή:** £10

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως τακτικό μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από το καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή,

....
(υπογραφή)

* *Να επισυναπτούν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων.*

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία , Κύπρος
Φαξ - Τηλ: 2-379122 / Κοιν:9-641843
e-mail: cms@cyearn.pi.ac.cy

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΕΚΤΑΚΤΑ ΜΕΛΗ
(ειδικότητες εκτός Μαθηματικών ή για φοιτητές)

Ημερομηνία αίτησης…………………

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία

ΕΠΩΝΥΜΟ: …………………………………………… ΟΝΟΜΑ: ………………………………
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ: ……………………………………………………………………………………
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ: ……………...99….
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: ……………………………. Α.Κ.Α.: ………………………………

ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*
B.S. ☐ ΕΤΟΣ …………… ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ……………………………………………
M.S. ☐ ΕΤΟΣ …………… ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ……………………………………………
Ph.D. ☐ ΕΤΟΣ …………… ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ……………………………………………
Άλλο ……………………………………………………………………………………………

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ
Αριθμός και οδός: ……………………………………………………………………………
Πόλη: ……………………………………………………………… Τ.Τ. ……………………
Χωριό: …………………………………………………………………………………………
Τηλέφωνα: …………………………, …………………………, ……………………………

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ
Ιδιότητα- Βαθμός: ……………………………………………………………………………
Σχολείο-Ιδρυμα-Υπηρεσία: …………………………………………………………………
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα ……………… Ιδιωτικό Τομέα ……………

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
…………………………………………………………………………………………………

Αριθμός αποδ.: ………………………………………………	**Εγγραφή:** £2
Ημερομηνία αποδ.: …………………………………………	**Ετήσια Συνδρομή:** £10

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως τακτικό μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από το καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή,

…………………………
(υπογραφή)

* *Να επισυναπτούν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων.*

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Application for Membership 1999
(January – December)

Date .... 19...............

Please read the "Membership Categories" section of this form to determine the membership category for which you are eligible. Then fill out this application and return it as soon as possible.

....
Family Name *First* *Middle*

Place of birth ....
City *State* *Country*

Bate of Birth ....
City *State* *Country*

If formerly a member of AMS, please indicate dates ....

Check here if you are now a member of either MAA ☐ or SIAM ☐

Degrees, with institutions and dates ....

....

....

Present position ....

Firm or institution ....

....
City *State* *Zip/Country*

Primary Fields of Interest (choose five from the list at right)

....

Secondary Fields if Interest (choose from the list at right)

....

....

Address for all mail

....

....

....

Telephone number(s) ....

Electronic address ....

....
Signature

Prepayment Methods and Mailing Addresses

All prices quoted in U.S. dollars.
Payment by check must be drawn on U.S. bank if paid in U.S. dollars.

Send checks, money orders, UNESCO coupons to American Mathemetical Society, P.O. Box 5904, Boston, MA 02206-5904

To use credit cards, fill in information requested and mail to American Mathematical Society, P.O. Box 6248, Providence, RI 02940_6248 or call (401) 455-4000 or 1-800-321-4AMS.

For Foreign Bank Transfers: American Mathematical Society, State Street Bank and Trust Company, 225 Franklin St., ABA ≠011000028, Account ≠0128-262-3, Boston, MA 02110.

American Express ☐ Discover ☐ VISA ☐ MasterCard ☐

....
Account number *Expiration date*

M9NO

Fields of Interest
If you wish to be on the mailing lists to receive information about publications in fields of mathematics in which you have an interest, please consult the list of major headings below. These categories will be added to your computer record so that you will be informed of new publications or special sales in the fields you have indicated.

EME Education/Mathematics Education
00 General
01 History and biography
03 Mathematical logic and foundations
04 Set theory
05 Combinatorics
06 Order, lattices, ordered algebraic structures
08 General algebraic systems
11 Number theory
12 Field theory and polynomials
13 Commutative rings and algebras
14 Algebraic geometry
15 Linear and multilinear algebra; matrix theory
16 Associative rings and algebras
17 Nonassociative rings and algebrass
18 Category theory, homological algebra
19 K-theory
20 Group theory and generalizations
22 Topological groups, Lie groups
26 Real functions
28 Measure and integration
30 Functions of a complex variable
31 Potential theory
32 Several complex variables and analytic spaces
33 Special functions
34 Ordinary differential equations
35 Partial differential equations
39 Finite differences and functional equations
40 Sequences, series, summability
41 Approximations and expansions
42 Fourier analysis
43 Abstract harmonic analysis
44 Integral transforms, operational calculus
45 Integral equations
46 Functional analysis
47 Operatory theory
49 Calculus of variations and optimal control; Optimization
50 Geometry
52 Convex and discrete geometry
53 Differential geometry
54 General topology
55 Algebraic topology
57 Manifolds and cell complexes
58 Global analysis, analysis on manifolds
60 Probability theory and stochastic processes
62 Statistics
65 Numerical analysis
68 Computer science
70 Mechanics of particles and systems
73 Mechanics of solids
76 Fluid mechanics
77 Optics, electromagnetic theory
80 Classical thermodynamics, heat transfer
81 Quantum theory
82 Statistical mechanics, structure of matter
83 Relativity and gravitational theory
85 Astronomy and astrophysics
86 Geophysics
90 Economics, operations research, programming, Games
91 Biology and other natural sciences, behavioral sciences
93 Systems theory; control
94 Information and communication, circuits

Membership Categories

Please read the following to determine what membership category you are eligible for, and then indicate below the category for which you are applying.

For ***ordinary members*** whose annual professional income is below $55,000, the dues are $99; for those whose annual professional income is $55,000 or more, the dues are $132.

The ***CMS cooperative rate*** applies to ordinary members of the AMS who are also members of the Canadian Mathematical Society and reside outside of the U.S. For members whose annual professional income is $55,000 or less, the dues are $84; for those whose annual professional income is above $55,000, the dues are $112.

*For a **joint*** **family membership**, one member pays ordinary dues, based on his or her income; the other pays ordinary dues based on his or her income, less $20. (Only the member paying full dues will receive the Notices and the Bulletin as a privilege of membership, but both members will be accorded all other privileges of membership).

Minimum dues for ***contributing members*** are $198.

For either ***students*** or ***unemployed individuals***, dues are $33, and annual verification is required.

The annual dues for ***receprocity members*** who reside outside the U.S. and Canada are $66. To be eligible for this classification, members must belong to one of those foreign societies with which the AMS has established a reciprocity agreement, and annual verification is required. Reciprocity members who reside in theU.S. or Canada must pay ordinary member dues ($99 or $132).

The annual dues for ***reciprocity members*** who reside outside the U.S. and Canada are $66. To be eligible for this classification, members must belong to one of those foreign societies with which the AMS has established a reciprocity agreement, and annual verification is required. Reciprocity members who reside in the U.S. or Canada must pay ordinary member dues ($99 or $132).

The annual dues for ***category-S members***, those who reside in developing countries, are $16. Members can chose only one privilege journal. Please indicate your choice below.

Members can purchase a ***multi-year membership*** by prepaying their current dues rate for either two, three, four or five years. This option is not available to category-S, unemployed, or student members.

1997 Dues Schedule (January through December)

Ordinary member		☐ $99	☐ $132
CMS Cooperative rate		☐ $84	☐ $112
Joint family member (full rate)		☐ $99	☐ $132
Joint family member (reduced rate)		☐ $79	☐ $112
Contributing member (minimum $192)			☐
Student member (please verify)[1]			☐ $33
Unemployed member (please verify)[2]			☐ $33
Reciprocity member (please verify)[3]	☐ $66	☐ $99	☐ $132
Category-S member4			☐ $16
Multi-year membership	$.............	for.............	years

[1] ***Student Verification*** (sign below)

I am a full-time student at ....

.... Currently working toward a degree.

[2] ***Unemployed Verification*** (sign below) I am currently unemployed and actively seeking employment.

[3] ***Reciprocity Membership Verification*** (sign below) I am currently a member of the society indicated on the right and am therefore eligible for reciprocity membership.

....

Signature

[4]☐ **send NOTICES** ☐**send BULLETIN**

Reciprocating Societies

- ☐ Allahabad Mathematical Society
- ☐ Asociación Matemática Española
- ☐ Australian Mathematical Society
- ☐ Azerbaijan Mathematical Society
- ☐ Berliner Mathematische Gessellschaft e.V.
- ☐ Calcutta Mathematical Society
- ☐ Croatian Mathematical Society
- ☐ Cyprus Mathematical Society
- ☐ Dansk Matematisk Forening
- ☐ Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.
- ☐ Edinburgh Mathematical Society
- ☐ Egyptian Mathematical Society
- ☐ Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik
- ☐ Glasgow Mathematical Society
- ☐ Indian Mathematical Society
- ☐ Iranian Mathematical Society
- ☐ Irish Mathematical Society
- ☐ Islenzka Staerdfraedafélagid
- ☐ Israel Mathematical Union
- ☐ János Bolyai Mathematical Society
- ☐ London Mathematical Society
- ☐ Malaysian Mathematical Society
- ☐ Mathematical Society of Japan
- ☐ MathematicalSociety of the Philippines
- ☐ Mathematical Society of the Republic of China
- ☐ Mongolian Mathematical Society
- ☐ Norsk Matematisk Forening
- ☐ Österreichische mathematische Gesellschaft
- ☐ Palestine Society for Mathematical Sciences
- ☐ Polskie Towarzystwo Matematyczne
- ☐ Punjab Mathematical Society
- ☐ Ramanujan Mathematical Society
- ☐ Real Sociedad Matemática Española
- ☐ Saudi Association for Mathematical Sciences
- ☐ Sociedad Colombiana de Matemática
- ☐ Sociedad de Matemática de Chile
- ☐ Sociedad Matemática de la Republica Dominicana
- ☐ Sociedad Matemática Mexicana
- ☐ Sociedade Brasileira Matemática
- ☐ Sociedade Brasileira de Matemática Aplicade e Computacional
- ☐ Sociedade Paranaense de Matemática
- ☐ Sociedade Portuguesa de Matemática
- ☐ Societate Catalana de Matemàtiques
- ☐ Societatea de Ştiinţe Matematice din România
- ☐ Societatea Matematicieenilor din Romania
- ☐ Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles
- ☐ Société Mathématique de Belgique
- ☐ Société Mathématique de France
- ☐ Société Mathématique Süisse
- ☐ Society of Associations of Mathematicians & Computer Science of Macedonia
- ☐ Society of Mathematicians, Physicists, and Astronomers of Slovenia
- ☐ South African Mathematical Society
- ☐ Southeast Asian Mathematical Society
- ☐ Suomen Matemaattinen Yhdistys
- ☐ Svenska Matematikersamfundet
- ☐ Union Mathemática Argentina
- ☐ Union of Bulgarian Mathematicians
- ☐ Union of Czech Mathematicians and Physicists
- ☐ Union of Slovak Mathematicians and Physicists
- ☐ Unione Matematica Italiana
- ☐ Vijnana Parishad of India
- ☐ Wiskundig Genootschap