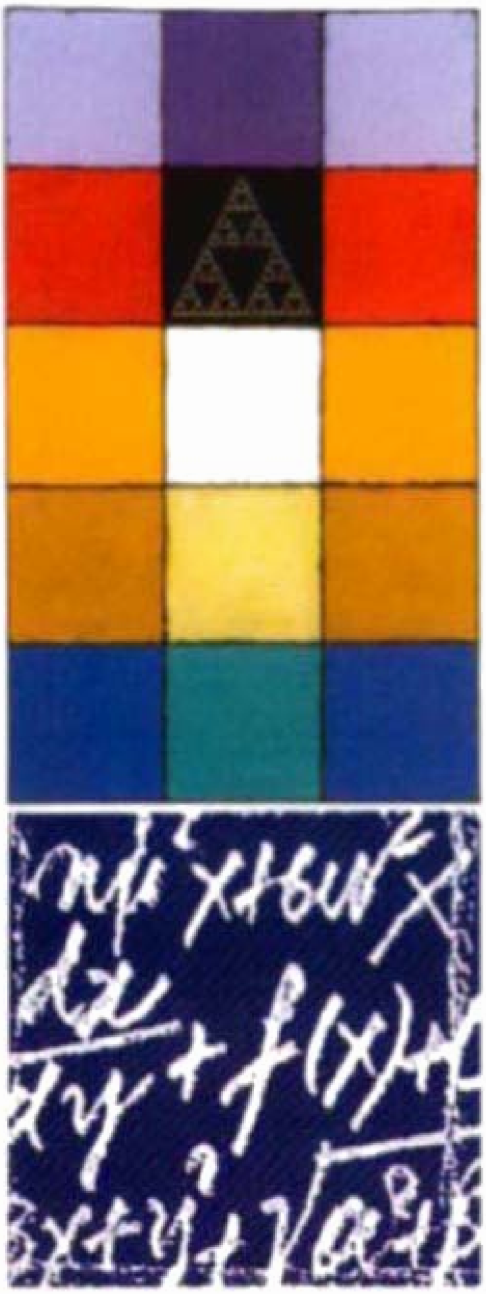
2ο ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ • 2nd MEDITERRANEAN CONFERENCE ON MATHEMATICS EDUCATION

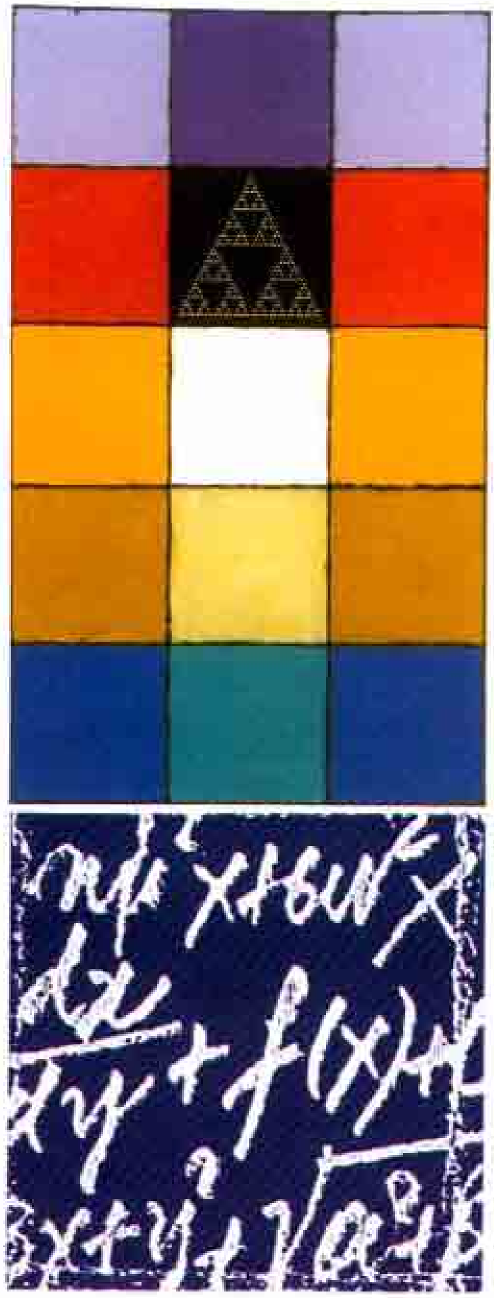


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΤΗΣ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΣΤ · ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1999

2nd MEDITERRANEAN CONFERENCE ON MATHEMATICS EDUCATION



2ο ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

КΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΣΤ'
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 1999

Επιμέλεια έκδοσης
Γρηγόρης Μακρίδης
Ανδρέας Φιλίππου

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η έκδοση αυτή της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας είναι ακόμη ένα προϊόν της ακούραστης προσφοράς πολλών συναδέλφων Μαθηματικών προς τους μαθητές της Κύπρου. Η έκδοση περιέχει όλους του διαγωνισμούς που οργάνωσε η ΚΥ.Μ.Ε. κατά τη σχολική χρονιά 1998-99, τους διεθνείς διαγωνισμούς, όλες τις ενιαίες και απολυτήριες εξετάσεις, τις εισαγωγικές εξετάσεις για τα ανώτερα και ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα, ανακοινώσεις συνάδελφων Μαθηματικών και θέματα από εκδηλώσεις και συνέδρια.

Η έκδοση αυτή είναι η μεγαλύτερη σε περιεχόμενο από όλες τις προηγούμενες εκδόσεις του "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ" και αυτό οφείλεται στις αυξημένες δραστηριότητες της ΚΥ.Μ.Ε. κατά την χρονιά που πέρασε και οι οποίες αναφέρονται στο παρόν τεύχος. Αύξηση έχει παρατηρηθεί επίσης στις ανακοινώσεις από συναδέλφους.

Στόχος της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας είναι η καλύτερη ενημέρωση για θέματα Μαθηματικής Παιδείας τόσο των μαθητών όσο και των συναδέλφων Μαθηματικών. Θέλουμε να πιστεύουμε ότι με αυτή την έκδοση επιτυγχάνουμε σε ένα μεγάλο μέρος το σκοπό αυτό ο οποίος συμπληρώνεται με τα διάφορα σεμινάρια , συνέδρια και το καλοκαιρινό μαθηματικό σχολείο που η ΚΥ.Μ.Ε. οργανώνει κάθε χρόνο.

Ευχαριστώ όσους βοήθησαν στην έκδοση του τεύχους αυτού.

Δρ Γρηγόρης Μακρίδης
Πρόεδρος
Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Δεκέμβριος 1999

Η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΧΑΙΡΕΤΙΖΕΙ ΑΠΟΦΑΣΗ

ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

Μετά από αίτημα της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας προς τον Έντιμο Υπουργό Παιδείας και Πολιτισμού κ. Ουράνιο Ιωαννίδη εγκρίθηκε η μείωση δύο διδακτικών περιόδων σε ένα Μαθηματικό σε κάθε επαρχία ο οποίος θα συνεργάζεται με την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία για την προετοιμασία μαθητών σε θέματα Μαθηματικών Ολυμπιάδων.

Ο θεσμός αυτός θα αρχίσει από τη σχολική χρονιά 2000-2001.

Ευχαριστούμε το Υπουργείο Παιδείας και Πολιστιμού που απεδέχτηκε την πρότασή μας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

			Σελίδα
1.	Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.		1
2.	Χαιρετισμός του Υπουργού Παιδείας κ. Λυκούργου Κάππα στο Β' Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας		2
3.	Χαιρετισμός του Διευθυντή του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου κ. Άδωνι Κωνσταντινίδη στο Β' Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας		4
4.	Χαιρεστιμός του Προέδρου της ΚΥ.Μ.Ε κ. Γρηγόρη Μακρίδη στο Β' Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας		5
5.	Ανακήρυξη του κ. Γλαύκου Αντωνιάδη σε Επίτιμο Πρόεδρο της ΚΥ.Μ.Ε.		7
6.	Χαιρετισμός του Γενικού Διευθυντή του Υ.Π.Π. κ. Ανδρέα Φυλακτού στο Β' Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας		10
7.	Χαιρετισμός του Γενικού Διευθυντή του Υ.Π.Π. κ. Ανδρέα Φυλακτού κατά την τελετή βράβευσης μαθητών από την ΚΥ.Μ.Ε		12
8.	Χαιρετισμός του Προέδρου της ΚΥ.Μ.Ε. κ. Γρηγόρη Μακρίδης κατά την τελετή βράβευσης μαθητών		14
9.	Χαιρετισμός του Προέδρου της ΚΥ.Μ.Ε στη τελετή έναρξης του 15ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας		20
10.	Μάθημα Μαθηματικής Λογικής	Γρ. Μακρίδης	21
11.	Αριθμητικά Τρίγωνα και Εξίσωση Fermat-Pell	Π. Δαμιανού	29
12.	Ιδιότητες των τελείων αριθμών	Χ. Λουγκρίδης	35
13	Μέθοδος Κατασκευής Αριθμητικών Τριγώνων με Πλευρές Διαδοχικούς Ακεραίους	Χ. Λουγκρίδης	45
14.	Αστρονομικά Ημερολογιακά Στοιχεία Κύπρου για το έτος 2000	Ι. Φάκας	48
15.	Αποτελέσματα Μαθηματικών Διαγωνισμών της ΚΥ.Μ.Ε. κατά τη σχολική χρονιά 1998-99.		50
16.	Χορηγοί Βράβευσης Διαγωνισμών της ΚΥ.Μ.Ε.		54
17.	Τιμηθέντες Μαθηματικοί που αφυπηρέτησαν κατά το 1998		55
18.	Κυπριακές ομάδες για Βαλκανικές και Διεθνή Ολυμπιάδα		56
19.	Επαρχιακός Διαγωνισμός Μαθηματικών για τη Β' και Γ' τάξη των Λυκείων Λευκωσίας	Σ. Αντωνίου Κ. Αντωνίου	58
20.	Επαρχιακός Διαγωνισμός Μαθηματικών για τη Β' και Γ' τάξη των Λυκείων Λεμεσού	Χρ. Παπαχριστοδούλου Μ. Ευσταθίου	62
21.	Επαρχιακός Διαγωνισμός Μαθηματικών για τη Β' και Γ' τάξη των Λυκείων Λάρνακας - Αμμ/στου	Α. Σαββίδης Α. Φιλίππου	68

			Σελίδα
22.	Επαρχιακός Διαγωνισμός Μαθηματικών για τη Β' και Γ' τάξη των Λυκείων Πάφου	Α. Δημητριάδης Ε. Λιασίδης	73
23.	Παγκύπριος Διαγωνισμός Μαθηματικών για τη Γ' Γυμνασίου	Σ. Ιωαννίδης Φ. Μαλαής	77
24.	Παγκύπριος Διαγωνισμός Μαθηματικών για την Α΄ Λυκείου	Λ. Λοΐζου Σ. Αντωνίου	80
25.	Παγκύπριος Διαγωνισμός Μαθηματικών για την Β΄και Γ΄ Λυκείου	Α. Φαλάς Τ. Παναγιώτου	85
26.	Διαγωνισμός Επιλογής Β' και Γ΄Λυκείου	Γρ. Μακρίδης Π. Πέτρου	89
27.	Διαγωνισμός Επιλογής για μαθητές κάτω των 15,5 ετών	Μ. Αντωνιάδης Σ. Αντωνίου	94
28.	16η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα 1999	S. Grozdev	97
29.	3η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων κάτω των 15,5 ετών	Γρ. Μακρίδης Α. Φιλίππου	101
30.	40η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα 1999	Μ. Αντωνιάδης	107
31.	Ενιαίες Γραπτές Απολυτήριες Εξετάσεις Λυκείων (ΛΕΜ) 1998-99, (Σ1, Σ4, Σ5)	Μ. Φαλά	113
32.	Ενιαίες Γραπτές Εξετάσεις Λυκείων 1998-99 (Σ2, Σ3 ΛΕΜ + 10ωρο ΕΛ)	Μ. Φαλά	119
33.	Ενιαίες Γραπτές Εξετάσεις Λυκείων 1998-99 (6ωρο ΕΛ)	Μ. Φαλά	131
34.	Ενιαίες Γραπτές Απολυτήριεξ Εξετάσεις Τεχνικών Σχολών 1998-99 (Τεχνικό)	Κ. Δεληγιάννης	140
35.	Εξετάσεις για τα Ανώτερα και Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα (Μαθηματικά 4)	Μ Φαλά	150
36.	Εξετάσεις για τα Ανώτερα και Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα (Μαθηματικά 8)	Μ Φαλά	160
37.	Εξετάσεις για τα Τεχνολογικά Εκπαιδευτικά Ιδρύματα (Τ.Ε.Ι.)	Μ. Φαλά	170
38.	Εξετάσεις για τα Ανώτερα και Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα για Αποφοίτους Τεχνικών Σχολών	Κ. Δεληγιάννης	179
39.	Αίτηση για τακτικά μέλη		189
40.	Αίτηση για έκτακτα μέλη		190
41.	Αίτηση για μέλος της Αμερικάνικης Μαθηματικής Εταιρείας		191
42.	Έντυπο αγοράς εκδόσεων της ΚΥ.Μ.Ε.		193

Διοικητικό Συμβούλιο της
Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας
Σεπτέμβριος 1998 - Σεπτέμβριο 2000

Πρόεδρος	: **Γρηγόρης Μακρίδης**
Αντιπρόεδρος	: **Ανδρέας Σχοινής**
Γενικός Γραμματέας	: **Σάββας Αντωνίου**
Ταμίας	: **Μάριος Αντωνιάδης**
Οργανωτικός Γραμματέας	: **Ανδρέας Αντωνίου**
Βοηθός Ταμίας	: **Μάριος Ευσταθίου**
Σύμβουλοι	: **Κλαίλια Σουρμελή-Σκοτεινού**
	Αθανάσιος Γαγάτσης
	Χρίστος Παπαχριστοδούλου
	Ανδρέας Σαββίδης
	Ανδρέας Φαλάς
	Σάββας Ιωαννίδης
	Λοΐζος Λοΐζου
	Αλέξανδρος Δημητριάδης
	Ανδρέας Φιλίππου

Χαιρετισμός του Υπουργού Παιδείας και Πολιτισμού κ. Λυκούργου Κάππα στο Β΄ Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικών της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Σάββατο, 5 Δεκεμβρίου 1998.
Ξενοδοχείο ΜΙΡΑΜΑΡΕ, Λεμεσός

Με ιδιαίτερη χαρά απευθύνω χαιρετισμό στο Β΄ Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικών, που οργανώνει η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, σε συνεργασία με το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Στην εποχή μας η ραγδαία ανάπτυξη των Θετικών Επιστημών και οι πολύμορφες εφαρμογές τους στην Τεχνολογία επηρεάζουν τις κοινωνικές δομές και εντείνουν τους ρυθμούς ανάπτυξης στους διάφορους τομείς. Με τη σημερινή έκρηξη της γνώσης οι επιστημονικές έρευνες προχωρούν με ρυθμό καλπάζοντα και αναμορφώνουν κάθε τομέα του επιστητού, ώστε η ενημέρωση του επιστημονικού κόσμου και του ευρύτερου κοινού να συνιστά αναγκαιότητα.

Τα Μαθηματικά αποκτούν ιδιαίτερη σπουδαιότητα, γιατί συνεργούν στην κατανόηση των φυσικών φαινομένων και στην καλλιέργεια θετικών στάσεων απέναντι στη διατήρηση του φυσικού περιβάλλοντος. Ενημερώνουν πάνω στις σύγχρονες εφαρμογές των διαφόρων κλάδων των Φυσικών Επιστημών και καλλιεργούν την απαραίτητη επιστημονική υποδομή για τη λύση προβλημάτων. Με τα αξιώματά τους οξύνουν το πνεύμα και καλλιεργούν με τον πραγματισμό τους, σε αντίθεση με τον ιδεαλισμό των Θεωρητικών Επιστημών, την αρετή της αριστοτελικής μεσότητας καi του ελληνικού μέτρου.

Η αυστηρή νομοτέλεια των αρχών της μαθηματικής λογικής συγκρατεί τις πληθωριακές εξάρσεις και καλλιεργεί τη συγκροτημένη πορεία προς τη γνώση. Άρα αναπτύσσει και προάγει το θετικισμό. Γιατί έργο της μαθηματικής επιστήμης είναι να βάζει γεγονότα στη θέση των φαινομένων και αποδείξεις στη θέση των εντυπώσεων λαο μα εξετάζει με ακρίβεια τις σχέσεις που αναφέρονται στο σχήμα, στο μέγεθος και στις θέσεις των αντικειμένων.

Τα Μαθηματικά, βασικό μάθημα της ελληνικής παιδείας, αναπτύχθηκαν και εδραιώθηκαν στην αρχαία Ελλάδα από τον Στ΄ αι. π.Χ. Οι αρχαίοι έλληνες τα ανήγαγαν σε περιωπή, οι δε Πυθαγόρειοι, ιδρυτές της μαθηματικής επιστήμης, εισήγαγαν πρώτοι την έννοια των ασύμμετρων αριθμών και του απείρου. Τα πρώτα στοιχεία της μαθηματικής επιστήμης ανέπτυξε ο Θαλής ο Μιλήσιος, σπουδαία δε ήταν η συμβολή του Ευκλείδη, Απολλώνιου, Αρχιμήδη, Ίππαρχου, Πτολεμαίου.

Ο λόγος για τον οποίο τα Μαθηματικά είναι τόσο χρήσιμα για τη διαπίστωση των γενικών νόμων των Θετικών Επιστημών είναι το απόλυτο κύρος των μαθηματικών τύπων και η ασφαλής γνώση που παρέχουν. Όλες οι μετρήσεις που βασίζονται στο πείραμα γίνονται με μαθηματικούς υπολογισμούς. Γενικότερα κάθε θεωρία, αναγόμενη στη σφαίρα των Θετικών Επιστημών, εκφράζεται με καθαρά μαθηματική μορφή και με τα μαθηματικά εξηγείται και δικαιολογείται.

Οι αριθμοί, έλεγαν οι Πυθαγόρειοι, είναι η ουσία του σύμπαντος. Η Δημιουργία παρίσταται σαν ένα υπέροχο αρχιτεκτόνημα, έργον πάσοφου Αρχιτέκτονα και Γεωμέτρη Νου, για τον οποίο ειπώθηκε "αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί". Τούτον ο Αναξαγόρας ονόμασε "Νουν ος τα πάντα διεκόσμησεν". Εμείς δε τον ονομάζουμεν Θεόν "ος τα πάντα εν σοφία εποίησεν".

Έπαινοι και συγχαρητήρια αξίζουν στην Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία και στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο για την οργάνωση του Συνεδρίου αυτού. Μέσα από τις επιστημονικές εισηγήσεις των Συνέδρων αναμένεται να εξαχθούν αξιόλογα πορίσματα, που θα προωθήσουν τη μαθηματική έρευνα.

Με τις σκέψεις αυτές κηρύσσω την έναρξη των εργασιών του Συνεδρίου σας και εύχομαι κάθε επιτυχία στη διεξαγωγή του.

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
ΛΕΥΚΩΣΙΑ

Β΄ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

4 - 6 Δεκεμβρίου, 1998.

Μήνυμα από το Διευθυντή του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου κ. Άδωνι Κωνσταντινίδη

Αισθάνομαι ιδιαίτερη ικανοποίηση για την πραγματοποίηση του Β΄ Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.

Η συνεργασία του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου με τη Μαθηματική Εταιρεία, δίνει την ευκαιρία και στα δυο μέρη να προσφέρουν σε τομείς στους οποίους και πείρα έχουν και αναγνωρισμένη επωφελή δραστηριότητα.

Εύχομαι το συνέδριο να γίνει παράδειγμα και σε άλλες ενώσεις και ειδικότητες για παρόμοιες δραστηριότητες. Εμείς στο Π.Ι. επιζητούμε τη συνεργασία όλων γιατί πιστεύουμε ότι έτσι λειτουργούμε στα πλαίσια του ρόλου που μας ανάθεσε το Υπουργείο και που είναι ακριβώς η προσφορά στους εκπαιδευτικούς κάθε δυνατής βοήθειας για βελτίωση της καθημερινής διδακτικής πράξης.

Επιθυμώ να κάμω ιδιαίτερη αναφορά στην απόφαση του Δ.Σ. της ΚΥ.Μ.Ε. να τιμήσει κατά τη διάρκεια του Συνεδρίου τον αποχωρούντα Πρόεδρό της κ. Γλαύκο Αντωνιάδη.

Πιστεύω πως η αξιέπαινη αυτή απόφαση τιμά το ίδιο το Συμβούλιο, γιατί εκφράζει έμπρακτα την εκτίμησή του σε κάποιο που ομολογουμένως πρόσφερε πολλά και αξιόλογα.

Είχα τη χαρά να συνεργαστώ με τον κ. Αντωνιάδη σε διάφορους τομείς για πολλά χρόνια και γι΄αυτό εκτιμώ βαθύτατα τη διάθεση και προθυμία του για προσφορά, την ευρύτητα των γνώσεών του, την αγάπη για τους Μαθηματικούς και την πίστη του στην ανάγκη διατήρησης ψηλών επιπέδων στη Μαθηματική Επιστήμη στον τόπο μας.

Είμαι σίγουρος ότι οι εργασίες του Συνεδρίου με τις ανακοινώσεις, τις συζητήσεις και τον προβληματισμό που θα προκαλέσουν, θα επιτύχουν τους στόχους που τέθηκαν και θα συμβάλουν στην ανάπτυξη της επιστημονικής γνώσης.

Χαιρετισμός του Προέδρου της ΚΥΜΕ Δρα Γρηγόρη Μακρίδη στο Β΄ Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας

Δεκέμβριος 1998

Κύριε Διευθυντή του Π.Ι., κύριοι ΠΛΕ, κύριοι Επιθεωρητές, κύριοι Διευθυντές Σχολείων, συνάδελφοι

Εκ μέρους του Διοικητικού Συμβουλίου της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας σας καλωσορίζω στο Β΄ Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας.

Αγαπητοί φίλοι της Μαθηματικής Επιστήμης είναι γεγονός ότι τα Μαθηματικά αποτελούν το σκελετό των επιστημών αλλά και της ανθρώπινης ζωής και εξέλιξης. Τα πάντα από όσα συμβαίνουν γύρω μας είτε τα βλέπουμε είτε όχι μπορούν να εξηγηθούν με Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά κατάφεραν να εξηγήσουν το φαινομενικά ανεξήγητο, το απρόβλεπτο, το ακανόνιστο και ακόμη το Χαοτικό.

Πριν 10 μόλις χρόνια μπορούσε κανείς να σπουδάσει Ιατρική χωρίς να γνωρίζει πολλά Μαθηματικά. Ανεπτυγμένες χώρες όπως οι ΗΠΑ προβλέποντας τις ανάγκες του 21^{ου} αιώνα αρχίζουν να ευνοούν άτομα για τις Ιατρικές τους σχολές με υπόβαθρο στη Μηχανολογία και Πληροφορική, επιστήμες που έχουν σαν προϋπόθεση αναβαθμισμένες γνώσεις στα Μαθηματικά.

Τα Μαθηματικά οργανώνουν, μεθοδεύουν και ασκούν την ανθρώπινη σκέψη, εμπλουτίζουν τη φαντασία και αυξάνουν τη δημιουργικότητα.

Σε αυτούς που θεωρούν τα Μαθηματικά μια άχαρη και σκοτεινή επιστήμη που σκοπό έχει να κάνει ανιαρούς και πολύπλοκους υπολογισμούς απαντούμε: «περιγράψετε το κόσμο γύρω σας».

Τα Μαθηματικά είναι ένα αυστηρό οικοδόμημα εννοιών, άθληση του νου και άμεση προέκταση της λογικής.

Τα Μαθηματικά, όταν χρησιμοποιηθούν σωστά, δεν δίνουν έτοιμες λύσεις, αλλά βοηθούν στη δημιουργική σκέψη και στην ελευθερία της νόησης, απαραίτητα και τα δύο για να επιβιώσει κάποιος στη σύγχρονη κοινωνία, όπου ολοένα και περισσότερες απαιτήσεις δημιουργούνται από τις αλλαγές και την κοινωνική αλληλεπίδραση.

Στη Μαθηματική Παιδεία αυξάνεται η διαπίστωση της σημασίας επιστημολογικών και φιλοσοφικών θεμάτων. Θεωρίες της μάθησης, όπως η δημιουργική, αποκτούν ολοένα και περισσότερο επιστημολογικούς προσανατολισμούς. Ένας αυξανόμενος αριθμός ερευνητικών τομέων αντλεί από την φιλοσοφία των Μαθηματικών. Αυτοί οι τομείς περιλαμβάνουν: τη λύση προβλημάτων και τη διερευνητική παιδαγωγική, θεωρίες αναλυτικών προγραμμάτων, τις πεποιθήσεις, εκπαίδευση και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, τα εθνομαθηματικά, μαθηματικά ίσων ευκαιριών για τα δύο φύλα, πολυπολιτισμικά μαθηματικά και την κοινωνιολογία και πολιτική της Μαθηματικής Παιδείας.

Η Τεχνολογία και τα Μαθηματικά είναι σώμα και ψυχή, έχουν στενή και αμφίδρομη σχέση, αφού η μεν Τεχνολογία στηρίζεται στα Μαθηματικά, αυτά δε με τη σειρά τους εξελίσσονται με τη βοήθειά της. Οι ραγδαίες τεχνολογικές εξελίξεις και η διεθνοποίηση των κοινωνικών και εργασιακών σχέσεων, καθώς και η αυτόματη μεταφορά της πληροφορίας, είτε αυτή αφορά την εκπαίδευση και την έρευνα, είτε αφορά την επιχείρηση, την οικονομία, την εργασία, απαιτούν νέες ικανότητες από τον άνθρωπο αλλά και νέες κατευθύνσεις για την εκπαίδευση. Τα Μαθηματικά εδώ θα παίξουν τον κύριο ρόλο αφού με αυτά επιτυγχάνεται η άθληση του νου και η ανάπτυξη της ικανότητας του νέου να παρακολουθεί τις τεχνολογικές εξελίξεις και να επιβιώνει στις νέες καταστάσεις και στις νέες συνθήκες που αυτές δημιουργούν. Η εκπαίδευση πρέπει να δώσει στο νέο όχι μόνο τις απαραίτητες γνώσεις αλλά κυρίως να τον κάνει ικανό να ερευνά, να αναλύει, να αξιολογεί, να επιλέγει και να χρησιμοποιεί κατάλληλα τις γνώσεις του.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία βλέπει τον 21^{o} αιώνα με οράματα. Χωρίς όραμα δεν υπάρχει πρόοδος, δεν υπάρχει δημιουργία. Η ΚΥ.Μ.Ε. ετοιμάζει σχέδιο δράσης μπροστά στις προκλήσεις του 21^{ου} αιώνα που με τη συνεργασία όλων σας ελπίζει στην υλοποίησή του.

Κλείνω με την ευχή να προκύψουν μέσα από το Συνέδριο αυτό, εισηγήσεις, προβληματισμοί και πορίσματα ικανά να μεταλλαχθούν σε υλοποιήσιμες προτάσεις και συμπεράσματα, που με τη σειρά τους θα συμβάλουν στην αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας.

Ευχαριστούμε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο για τη συνεργασία του στην οργάνωση του Συνεδρίου και συγχαίρω την Επιτροπή και όλους όσους εργάστηκαν για την άρτια οργάνωση του Συνεδρίου.

Ανακήρυξη του Γλαύκου Αντωνιάδη σε Επίτιμο Πρόεδρο της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Δεκέμβριος 1998

Σήμερα είναι μια ξεχωριστή μέρα για την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία αφού της δίδεται η ευκαιρία να τιμήσει ένα εξαίρετο υπηρέτη της, τον πρώην πρόεδρο της κ. Γλαύκο Αντωνιάδη.

Το Διοικητικό Συμβούλιο της Κ.Υ.Μ.Ε. απεφάσισε την ανακήρυξη του κ. Γλαύκου Αντωνιάδη εις Επίτιμο Πρόεδρο, εις ένδειξη εκτίμησης της πολυετούς και σημαντικής προσφοράς του στην αναβάθμιση του επιτελεσθέντος έργου της ΚΥ.Μ.Ε. και γενικά της μεγάλης του προσφοράς στην αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας της Κύπρου.

Ποιος είναι ο κ. Γλαύκος Αντωνιάδης;

Γεννήθηκε στην Πάφο το 1932. Είναι παντρεμένος με τη φιλόλογο Νίτσα Αντωνιάδου, το γένος Σταύρου Μιχαήλ και έχει μαζί της δυο κόρες την Κατερίνα και την Ελένη. Από την Κατερίνα έχει και ένα εγγονό τον Τζόζεφ.

Απεφοίτησε από το Γυμνάσιο Πάφου και στη συνέχεια σπούδασε μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο Αθήνας. Εργάστηκε ως καθηγητής των μαθηματικών και ως βοηθός διευθυντής στο Γυμνάσιο Πάφου. Στη συνέχεια πήγε με υποτροφία της Βρετανικής κυβέρνησης στο Institute of Education του Πανεπιστημίου του Hull στο Ηνωμένο Βασίλειο από όπου και πήρε τον τίτλο Diploma in specialist studies (mathematics).

Προήχθη το 1972 σε Γυμνασιάρχη και υπηρέτησε στο Γυμνάσιο Σολέας, το Γυμνάσιο Μακαρίου του Γ΄ στη Λάρνακα, το Γυμνάσιο Σταυρού στη Λευκωσία, το Γυμνάσιο Άσπρες στο Στρόβολο και το Λύκειο Στροβόλου. Προήχθη το 1989 σε επιθεωρητή των μαθηματικών και αφυπηρέτησε από τη θέση αυτή το 1992.

Γραμματέας της ΚΥ.Μ.Ε. και στη συνέχεια πρόεδρος της από το 1990. Κατά την προεδρία του ιδρύθηκε και ανδρώθηκε το καλοκαιρινό μαθηματικό σχολείο. Επίσης αγοράστηκε το οίκημα στο οποίο στεγάζεται σήμερα η ΚΥ.Μ.Ε.

Ο Γλαύκος Αντωνιάδης έχει μεγάλο ενδιαφέρον για τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών και αποτελεί ζωντανό παράγοντα στη μελέτη των θεμάτων που τα αφορούν.

Ιδιαίτερα ενδιαφέρεται για τη λογοτεχνία και την Ελληνική Ιστορία από το 1821 μέχρι σήμερα.

Εξέδωσε μαζί με το μαθηματικό Γιάννη Κουππά λύσεις όλων των βιβλίων των ενισχυμένων μαθηματικών. Εξέδωσε Γεωμετρία για τη Γ΄ Γυμνασίου και την Α΄ Λυκείου.

Έχει προσφέρει 1000 σε γραμμάτεια, έτσι που οι τόκοι να διατίθενται σε χρηματικά βραβεία στους μαθητές που διακρίνονται στους διάφορους διαγωνισμούς της ΚΥ.Μ.Ε.

Θα χαρακτηρίσω τον κ. Γλαύκο Αντωνιάδη μέσα από τα λόγια στενών συνεργατών του της ΚΥ.Μ.Ε. αλλά και πρώην συναδέλφων και στενών φίλων του:

Ο Σάββας Ιωαννίδης, γραμματέας της ΚΥ.Μ.Ε. επί προεδρίας του Γλ. Αντωνιάδη τον χαρακτηρίζει με δικά του λόγια:

"Ακούραστος και Ανιδιοτελής εργάτης της Ελληνικής Παιδείας της Κύπρου"

Ο Ανδρέας Φαλάς, ταμίας της ΚΥ.Μ.Ε. επί προεδρίας του Γλ. Αντωνιάδη τον χαρακτηρίζει με δικά του λόγια:

"Ο Γλαύκος Αντωνιάδης ήταν ο ηγέτης που κέρδιζε την εμπιστοσύνη των συνεργατών του με την εργατικότητα του, την ευθύτητά του και την ανιδιοτέλειά του".

Ο Δρ. Άδωνις Κωνσταντινίδης, Διευθυντής του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου συνάδελφος και φίλος του Γλαύκου Αντωνιάδη λέει:

Σημείωμα του κ. Αδωνι. Κωνσταντινίδη:

Μου ζητήθηκε να πω δυο λόγια για τον Γλαύκο Αντωνιάδη. Όπως καταλαβαίνετε, θα προτιμούσα να μου επιτρέπατε να πω δυο χιλιάδες λόγια ! Πόσα να συμπυκνώσω σε δυο λόγια......

Ο Γλαύκος Αντωνιάδης ουδέποτε επέλεξε το "λάθρα βιώσας". Είναι πάντα αεικίνητος, πολλά ποιών και πάμπολλα επιτελών. Ενδιαφέρεται, ικανοποιείται και χαίρεται ή πονά και θλίβεται για τα κοινά προβλήματα. Σχολιάζει και κρίνει καθετί που τον χαροποιεί ή τον ενοχλεί, με εποικοδομητική διάθεση και αγαθές προθέσεις. Όταν κυριαρχείται από την ορμή να μοιραστεί τις σκέψεις του με πολλούς τότε καταφεύγει στις εφημερίδες και με Ροΐδειο ύφος περιγράφει πάθη ανθρώπων, που το διεισδυτικό του βλέμμα εντοπίζει. Τα ενδιαφέροντα του είναι ποικίλα χωρίς με αυτά να ζημιώνεται η ποιότητα της προσφοράς του. Πάνω από όλα στις προτεραιότητες του έχει τα εκπαιδευτικά πράγματα και τη Μαθηματική γνώση. Παράλληλα είναι γνωστός για τις πλούσιες ιστορικές και λογοτεχνικές του γνώσεις καθώς και τις συγγραφικές του δεξιότητες.

Είμαι ευτυχής γιατί με τιμά με τη φιλία του και έτσι έχω τη χαρά να απολαμβάνω - μαζί με άλλα - την ευστροφία του πνεύματος του και να ωφελούμαι από τις ατέλειωτες φιλολογικές μας συζητήσεις.

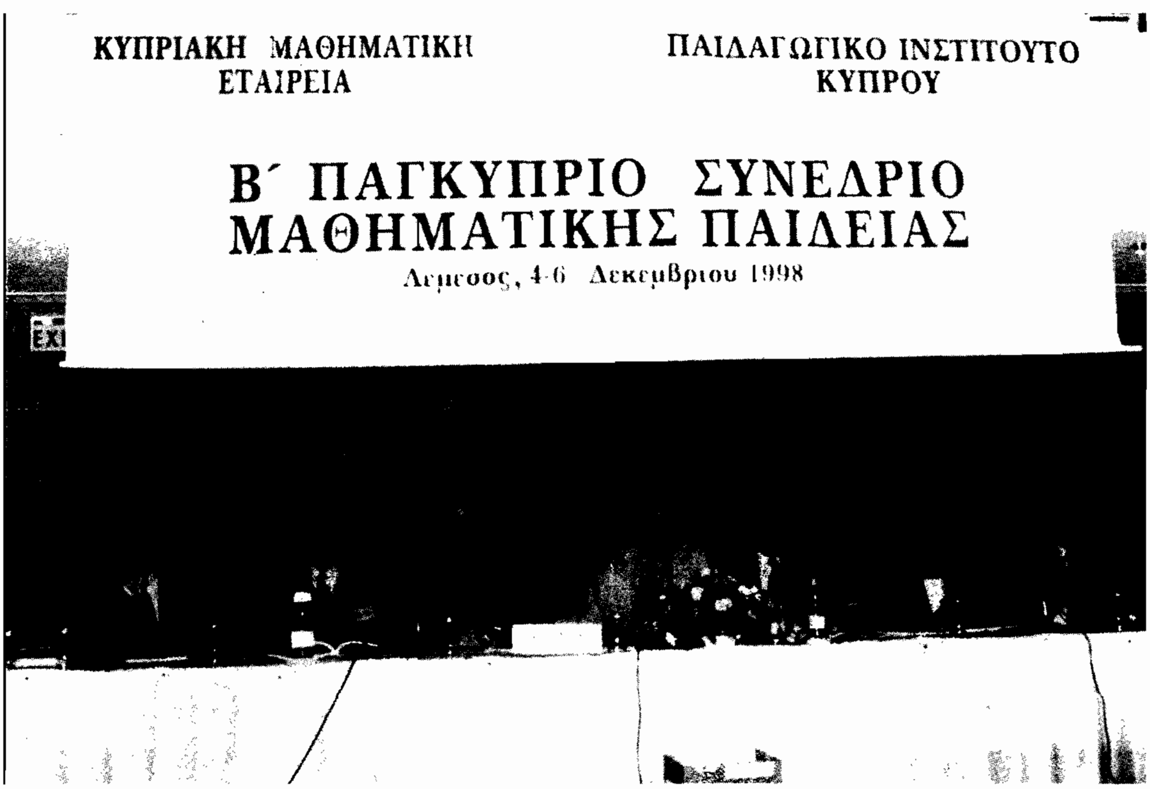
Για την ευγένεια, την κατανόηση, το σεβασμό στο συνάνθρωπο και την προσφορά του στην Εκπαίδευση γενικά και στη Μαθηματική Επιστήμη ιδιαίτερα δε χρειάζεται να πω. Είναι όλα πολύ γνωστά σε σας που τον γνωρίσατε ως καθηγητή, Βοηθό Διευθυντή, Διευθυντή, Επιθεωρητή Μαθηματικών και πρόεδρο της Μαθηματικής Εταιρείας.

Είμαι σίγουρος ότι θα συνεχίσει να είναι το ίδιο δραστήριος, το ίδιο δημιουργικός, το ίδιο επωφελής.

Εύχομαι να ακολουθήσουν πολλοί το παράδειγμα του Γλαύκου Αντωνιάδη.

Ο Δρ Αντρέας Φυλακτού, Γενικός Διευθυντής του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού, συνάδελφος και φίλος του κ. Γλαύκου Αντωνιάδη χαιρετίζει λέγοντας: (ο χαιρετισμός παρουσιάζεται στις επόμενες σελίδες)

Στην πιο πάνω φωτογραφία ο πρόεδρος της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας Δρ Γρηγόρης Μακρίδης απονέμει τιμητική πλακέτα στον επίτιμο πρόεδρο της ΚΥ.Μ.Ε. κ. Γλαύκο Αντωνιάδη.



Στην πιο πάνω φωτογραφία φαίνεται το προεδρείο συνεδρίας του Β' Παγκυπρίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας που έγινε το Δεκέμβριο του 1998.

Χαιρετισμός του Γενικού Διευθυντή του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού κ. Αντρέα Κ. Φυλακτού στο Παγκύπριο Συνέδριο της Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Δεκέμβριος 1998

Με ιδιαίτερη χαρά απευθύνω τον πιο θερμό και εγκάρδιο χαιρετισμό στο Παγκύπριο Συνέδριο της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας, το οποίο θα έχει ξεχωριστή διάσταση φέτος, γιατί σ' αυτό θα τιμηθεί ο πρώην πρόεδρος της Εταιρείας κ. Γλαύκος Αντωνιάδης με την απονομή του τίτλου του Επίτιμου Προέδρου της Μαθηματικής Εταιρείας.

«Ανδρών έργω γενομένων αγαθών έργω και δηλούσθαι τας τιμάς». Εφαρμόζοντας στην πράξη τη θουκυδίδεια αρχαιοελληνική σοφή αυτή ρήση, το Διοικητικό Συμβούλιο της Μαθηματικής Εταιρείας τιμά σήμερα έμπρακτα τον κ. Γλαύκο Αντωνιάδη, που τόσα πολλά πρόσφερε τόσο στην ίδια όσο και γενικότερα στην εκπαίδευση. Συγχαίρω θερμά την ΚΥΜΕ για την πρωτοβουλία της τιμητικής αυτής απονομής, η οποία, σε τελική ανάλυση, αντανακλά και στα ίδια τα μέλη, που το αποφάσισαν.

Εξαίρετος εκπαιδευτικός, ο Γλαύκος Αντωνιάδης άφησε άριστες εντυπώσεις σε όλα τα στάδια της ιεραρχίας που πέρασε: Καθηγητής, βοηθός διευθυντής, λυκειάρχης, επιθεωρητής Μαθηματικών.

Είχα την καλή τύχη να συνδεθώ μαζί του όχι μόνο επαγγελματικά αλλά και φιλικά. Οι δεσμοί φιλίας που μας ενώνουν εδώ και πολλά χρόνια σίγουρα απέβησαν προς δική μου ωφέλεια.

Κι αυτό, γιατί σπάνιες και πολυάριθμες είναι οι αρετές που κοσμούν την προσωπικότητα του Γλαύκου Αντωνιάδη. Η μεγάλη αφοσίωση στο έργο που επιτελεί, η απέραντη αγάπη προς το συνάνθρωπο και ιδιαίτερα προς εκείνον που πιστεύει ότι χρειάζεται ιδιαίτερη στοργή, το ακαταπόνητο της πολυδιάστατης δραστηριότητάς του στους τομείς της επιστήμης και της κοινωνικής προσφοράς, η μεγάλη του αγάπη προς τα γράμματα.

Η ενασχόλησή του με θέματα ιστορικά και φιλολογικά έδειξε πως ένας μαθηματικός μπορεί να ασχοληθεί με επιτυχία και σε τομείς έξω από τη μαθηματική επιστήμη. Έδειξε, όμως, ότι και η ιστορία και η λογοτεχνία έχουν στενή σχέση με τη λογική των Μαθηματικών.

Ως πρόεδρος της Μαθηματικής Εταιρείας ο Γλαύκος Αντωνιάδης είχε στενή επαφή με το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, το οποίο και, με τα επιχειρήματά του, έπειθε να βοηθά, στο μέτρο των δυνατοτήτων του, τις διάφορες δραστηριότητες της Μαθηματικής Εταιρείας. Η ιδιαίτερα επιτυχής διοργάνωση διαγωνισμών και συνεδρίων, η έκδοση περιοδικού, όπως και η λειτουργία του Καλοκαιρινού Σχολείου για τα Μαθηματικά, οφείλονται σε μεγάλο βαθμό στη δική του δραστηριότητα.

Σημαντική ήταν και η συμβολή του από τη θέση του επιθεωρητή Μαθηματικών στην ετοιμασία των αναλυτικών προγραμμάτων, στη συγγραφή βιβλίων για τα Μαθηματικά από την Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων και, με τις εύστοχες εισηγήσεις του, στην εισαγωγή καινοτομιών στην εκπαίδευση. Η παιδεία της Κύπρου του οφείλει πάρα πολλά.

Είμαι απόλυτα βέβαιος ότι ο Γλαύκος Αντωνιάδης θα συνεχίσει την προσφορά του τόσο στα εκπαιδευτικά θέματα όσο και στη Μαθηματική Επιστήμη, παράλληλα με τη συγγραφή μελετών για ιστορικά και λογοτεχνικά θέματα.

Ελπίζω και εύχομαι ο νέος πρόεδρος του Διοικητικού Συμβουλίου να συνεχίσει με τον ίδιο ζήλο, ενδιαφέρον και επιτυχία τις δραστηριότητες της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας.

Εύχομαι, τέλος, κάθε επιτυχία στις εργασίες του Συνεδρίου.

Χαιρετισμός του Γενικού Διευθυντή του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού κ. Αντρέα Κ. Φυλακτού κατά την τελετή βράβευσης μαθητών από την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Μάϊος 1999

Με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση απευθύνω τον πιο θερμό και εγκάρδιο χαιρετισμό στη σεμνή αυτή τελετή που οργανώνει η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία για την απονομή των βραβείων και διπλωμάτων των Παγκύπριων και Επαρχιακών Μαθηματικών Διαγωνισμών «Πετράκης Γιάλλουρος», «Ευαγόρας Παλληκαρίδης» και «Ανδρέας Βλάμης». Ο θεσμός αυτός της βράβευσης των αρίστων έχει καθιερωθεί οριστικά ως ο πιο καταξιωμένος και άρτια οργανωμένος στο είδος του. Λυπούμαι, μονάχα, που ανειλημμένες υποχρεώσεις δε μου επιτρέπουν να παραστώ προσωπικά.

Η τελετή αυτή αποσκοπεί στην απόδοση των οφειλόμενων τιμών και του πρέποντος επαίνου σ' εκείνους τους μαθητές και τις μαθήτριες, που η σκληρή, επίπονη και συστηματική τους προσπάθεια δικαιώθηκε μέσα από τα αποτελέσματα των διαγωνισμών. Η βράβευση αυτή ελπίζω και εύχομαι ότι θα λειτουργήσει και ως κίνητρο για πολλούς άλλους μαθητές και μαθήτριες, γιατί πραγματικά στους καιρούς μας η νεολαία μας έχει ανάγκη από υγιή και σωστά πρότυπα. Επιπρόσθετα, με τη βράβευση αυτή ενισχύεται, πιστεύω, και η θέση της Μαθηματικής Επιστήμης στον τόπο μας.

Γιατί πραγματικά θεμελιακή και πολύπλευρη είναι η σημασία της Μαθηματικής Επιστήμης τόσο για την όξυνση της ανθρώπινης σκέψης όσο και για την πρόοδο και ανάπτυξη όλων γενικά των επιστημών. Πάνω στο στέρεο υπόβαθρο των Μαθηματικών στηρίζεται ολόκληρο το οικοδόμημα της σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας, που αναπτύσσονται με ιλιγγιώδεις ρυθμούς στις μέρες μας. Δίκαια, επομένως, όπως λέει και η ετυμολογία του όρου, τα Μαθηματικά θεωρούνται το «κατ' εξοχήν μάθημα».

Το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού αναγνωρίζει τη μεγάλη σημασία των Μαθηματικών, γι' αυτό και τα θεωρεί ως βασικό μάθημα σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Επιδίωξή μας είναι η διαρκής αναβάθμιση της ποιότητας της διδασκαλίας των Μαθηματικών, η οποία επιδιώκεται τόσο με τον εκσυγχρονισμό και αναπροσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων και των σχολικών βοηθημάτων, όσο και με τη συνεχή επιμόρφωση του προσωπικού.

Πολύ βαριά είναι, άλλωστε, και η κληρονομιά που επωμιζόμαστε ως Έλληνες, καθώς τα Μαθηματικά γεννήθηκαν και θεμελιώθηκαν από τον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό. Πλάτωνας, Αριστοτέλης, Πυθαγόρας, Αρχιμήδης, Ευκλείδης, Απολλώνιος έχουν ανεξίτηλα σφραγίσει με το πρωτοποριακό τους έργο κάθε πτυχή της Μαθηματικής Επιστήμης, που, όσο και να εξελιχτεί πάντα θα επιστρέφει σ' αυτούς για έμπνευση και ανανέωση.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, με την πολυδιάστατη και πλούσια δράση της, ανταποκρίνεται επάξια στις ευθύνες που προκύπτουν από τη κληρονομιά αυτή και στις προσκλήσεις των καιρών. Τα επιστημονικά συνέδρια, τα Καλοκαιρινά Μαθηματικά Σχολεία, οι μαθηματικοί διαγωνισμοί, οι εκδόσεις και η διεθνής δράση της ΚΥΜΕ συμβάλλουν ουσιαστικά στην ανάπτυξη της Μαθηματικής Επιστήμης στον τόπο μας. Συγχαίρω γι΄ αυτό την ΚΥΜΕ συμβάλλουν ουσιαστικά στην ανάπτυξη της Μαθηματικής Επιστήμης στον τόπο μας. Συγχαίρω γι' αυτό την ΚΥΜΕ και ιδιαίτερα όλους εκείνους τους μαθηματικούς που προσφέρουν αφιλοκερδώς τις υπηρεσίες τους στον ελεύθερο τους χρόνο.

Συγχαίρω, επίσης, θερμά όλα τα παιδιά που διακρίθηκαν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς, τους γονείς και τους καθηγητές τους, καθώς και τους συντελεστές της ωραίας αυτής εκδήλωσης.

Εύχομαι, τέλος, καλές επιτυχίες στους διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς που πλησιάζουν.

Χαιρετισμός του Προέδρου της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας Δρα Γρηγόρη Μακρίδη κατά την τελετή βράβευσης μαθητών

Μάιος 1999

Μαθαίνω δεν σημαίνει οπωσδήποτε και κατανοώ.
Όταν οι μαθητές μας βρίσκουν το συνδετικό δεσμό ανάμεσα στα δεδομένα του θέματος που μελετούν, μαθαίνουν κάτι, χωρίς να μπορούν να το εξηγήσουν και οπωσδήποτε θα το ξεχάσουν αργότερα.
Όταν οι μαθητές μας μετασχηματίζουν τις σχέσεις των δεδομένων του θέματος που μελετούν, επινοούν και παράγουν νέες σχέσεις και διαπιστώνουν την αναγκαιότητα τους, οικοδομούν τις γνώσεις σε καλά οργανωμένα σύνολα. Αυτοί οι μαθητές κατανοούν τη δομή του θέματος, κάνουν τις γνώσεις εργαλείο της σκέψης τους, μαθαίνουν κάτι για όλη τους τη ζωή.
Τέτοιους μαθητές αγαπητοί φίλοι έχουμε σήμερα μαζί μας διότι για να είναι εδώ σήμερα κατάφεραν να κάνουν τις γνώσεις τους εργαλείο της σκέψης τους.
Ο Αριστοτέλης είπε: Αυτοί που δρουν αυτοί παίρνουν και τα βραβεία.

Την τελευταία εικοσαετία στους διεθνείς διαγωνισμούς Μαθηματικών αλλά και στους διαγωνισμούς της χώρας μας συχνά δίνονται θέματα τα οποία οι Κύπριοι μαθητές δύσκολα αντιμετωπίζουν, αφού για την αντιμετώπιση τέτοιων θεμάτων δεν αρκούν οι γνώσεις που παίρνουν οι μαθητές μας από το σχολείο. Σε τέτοιους διαγωνισμούς υπάρχουν θέματα εκτός του αναλυτικού προγράμματος γι' αυτό επιβάλλεται όπως οι μαθητές μας προετοιμάζονται ειδικά. Είναι γνωστό και η ΚΥ.Μ.Ε. το χαιρετίζει το γεγονός ότι πολλοί εκπαιδευτικοί Μαθηματικοί κάνουν ειδική προσπάθεια να βοηθήσουν και να προετοιμάσουν τους μαθητές πριν από τους επαρχιακούς και Παγκύπριους διαγωνισμούς . Είναι επίσης γνωστό ότι αρκετοί μαθητές κάνουν από μόνοι τους ειδική προετοιμασία μελετώντας θέματα που δεν καλύπτονται στο σχολείο και τους συγχαίρουμε για αυτό. Είναι επίσης γνωστό ότι μεταξύ επαρχιακών και παγκύπριων διαγωνισμών η ΚΥΜΕ παραδίδει ειδικά μαθήματα προετοιμασίας σε διάφορα κέντρα όπου μαθητές από όλη την Κύπρο συγκεντρώνονται διψασμένοι για περαιτέρω μαθηματικές γνώσεις.
Συγχαίρω τους εκπαιδευτικούς Σάββα Αντωνίου, Μάριο Αντωνιάδη, Ανδρέα Φαλά, Σάββα Ιωαννίδη, Αλέξανδρο Δημητριάδη, Θεόκλητο Παραγιό, που φέτος εργάστηκαν χωρίς κανένα οικονομικό όφελος αλλά

απλώς υπηρετώντας τη Μαθηματική Παιδεία και Επιστήμη στο πρόγραμμα ειδικών μαθημάτων προετοιμασίας.
Δεν θα παραλείψω όμως να συγχαρώ και εσάς τους γονείς που δείχνετε τόσο ενδιαφέρον για να βοηθήσετε τα παιδιά σας να επιτύχουν στους διαγωνισμούς γιατί πιστεύω ότι η ηθική συμπαράσταση είναι εξίσου σημαντική.

Είναι γεγονός ότι οι Παγκύπριοι Διαγωνισμοί Μαθηματικών έχουν μεγάλο συντελεστή παλληδρόμησης με τις εισαγωγικές εξετάσεις διότι για χρόνια τώρα παρακολουθώντας τα αποτελέσματα των εισαγωγικών μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι οι μαθητές που πρωτεύουν και διεκδικούν τις πιο περιζήτητες πανεπιστημιακές σχολές είναι μαθητές που έχουν διαπρέψει στους Παγκύπριους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Γι' αυτό αν θέλετε πρόκληση σημειώστε τα ονόματα αυτών των μαθητών σήμερα γιατί αύριο θα τα δείτε στις πρώτες θέσεις των πανεπιστημιακών σχολών και ακόμη παραπάνω θα τους δείτε στο μέλλον να είναι πρωτοπόροι της επιστημονικής και οικονομικής κοινωνίας.

Γιατί συμβαίνει αυτό;
Διότι ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ είναι ο βασιλιάς των επιστημών. Τα μαθηματικά είναι ο καταλύτης της αναλυτικής και λογικής σκέψης. Αν μπορείς να κατανοήσεις τα Μαθηματικά τότε μπορείς να κατανοήσεις οτιδήποτε.
Όπως είναι τα μηχανήματα ασκήσεων για την ανάπτυξη της μυϊκής διάπλασης του αθλητή έτσι είναι τα μαθηματικά για την ανάπτυξη της αναλυτικής και λογικής σκέψης κάθε ανθρώπου.

Η αρμονία και η ομορφιά που βρίσκει κάποιος στους αριθμούς και στις ιδιότητες αποτελούν πραγματικά την αποδειγμένη πλέον βάση για τα όσα βλέπουμε γύρω μας. Η πιο περίπλοκη και χαοτική κατάσταση που μπορεί να βλέπουμε στην καθημερινή ζωή περιέχει μια μαθηματική τάξη και αρμονία. Μια τάξη που μόνο με Μαθηματικά μπορεί να διερευνηθεί και να ερμηνευθεί.

Σκοποί της ΚΥΜΕ είναι η προαγωγή και διάδοση της Μαθηματικής Επιστήμης και Παιδείας και η υποστήριξη και επιμόρφωση των μελών της και δια των μελών της τη καλύτερη μόρφωση των μαθητών μας.
Είναι επίσης η διασφάλιση των προϋποθέσεων για μια σύγχρονη παιδεία στην υπηρεσία του λαού, όπως είναι η ελευθερία και η Ανεξαρτησία.

Οι πιο πάνω σκοποί επιτυγχάνονται με πολλές δραστηριότητες που η ΚΥΜΕ έχει ήδη διεκπεραιώσει . έχει προγραμματίσει ή σχεδιάζει για να προγραμματίσει.
Μεταξύ αυτών που έχουν γίνει θεσμός για αρκετά χρόνια τώρα είναι:
1. Διεξαγωγή επαρχιακών και παγκύπριων διαγωνισμών καθώς και διαγωνισμών επιλογής.
2. Ειδική σειρά δωρεάν μαθημάτων για ετοιμασία των ομάδων που εκπροσωπούν την Κύπρο σε διεθνείς διαγωνισμούς
3. Η Οργάνωση του Καλοκαιρινού Μαθηματικού Σχολείου
4. Η Οργάνωση Συνεδρίων όπως,

Ετήσιο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας
Α' Μεσογειακό Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας-Ιανουάριος 1997
Β' Μεσογειακό Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας-Ιανουάριος 2000
στο οποίο συνεργάζονται ....

5. Συμμετοχή σε διεθνείς διαγωνισμούς

Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές Λυκείου
Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5
Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα
Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα για τα Δημοτικά από το 2000

6. Εκδόσεις:
Η ΚΥΜΕ εκδίδει κάθε χρόνο εδώ και 15 χρόνια το "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ" όπου μαθητές και εκπαιδευτικοί μπορούν να βρουν όλες τις εξετάσεις και διαγωνισμούς στα Μαθηματικά με τις λύσεις τους και διάφορα άρθρα από εκπαιδευτικούς.
Πρακτικά Συνεδρίων
Θέματα Ολυμπιάδων και Λύσεις
Εντός του 2000 θα αρχίσει η έκδοση επιστημονικού περιοδικού Μαθηματικής Παιδείας με ερευνητικά άρθρα από όλο τον κόσμο.
7. Προχωρούμε στη δημιουργία ιστοσελίδας στο ΙΝΤΕΡΝΕΤ μέσω της οποίας θα μπορούν εκπαιδευτικοί και μαθητές να ενημερώνονται για τις διάφορες δραστηριότητες όπως ανακοινώσεις για συνέδρια, σεμινάρια και διαγωνισμούς, τα αποτελέσματα των μαθηματικών διαγωνισμών, ενημέρωση σε σύγχρονες εξελίξεις στα Μαθηματικά, αποτελέσματα ερευνών κ.α.
8. Οργανώνουμε τηλεοπτικά εκπαιδευτικά προγράμματα ως βοήθημα για τις εισαγωγικές εξετάσεις
9. Στα πλαίσια του Μεσογειακού Συνεδρίου του 2000 θα οργανωθεί φεστιβάλ μαθηματικών με διάφορες δραστηριότητες για να γιορτάσουμε το έτος 2000 που έχει ανακηρυχθεί ως το έτος Μαθηματικών από την ΟΥΝΕΣΚΟ. Στα ίδια πλαίσια θα οργανωθεί μικρή Ολυμπιάδα Μαθηματικών για όλους τους Μαθητές της Κύπρου.

10. Ετοιμάζουμε προσχέδιο για να υποβληθεί προς τον Υπουργό Παιδείας και Πολιτισμού και στη συνέχεια για έγκριση κονδυλίου από το Υπουργικό Συμβούλιο για τη διοργάνωση στη Κύπρο της Διεθνούς Ολυμπιάδας Μαθηματικών η οποία μπορεί να έχει κόστος πέραν των 300 χιλιάδων λιρών.
11. Έχουμε οργανώσει από φέτος σειρά σεμιναρίων σε συνεργασία με το Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου Κύπρου με ενδιαφέροντα θέματα για μαθητές, φοιτητές και καθηγητές. Ο θεσμός θα συνεχιστεί και στην επόμενη χρονιά.
12. Τα τελευταία 3 χρόνια οργανώνουμε ομαδική συμμετοχή στο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας με συμμετοχή περίπου 25 μελών μας κάθε χρόνο.
13. Τα μέλη μας τη τελευταία χρονιά έχουν φθάσει τα 530, περίπου 10% αύξηση και έχουμε αποκτήσει συνδρομητές εξωτερικού για τις εκδόσεις μας.

Αγαπητοί μου μαθητές, θα σας πω δύο ρητά και μια παραδειγματική ιστορία. τα οποία ελπίζω να τα έχετε υπόψη για το υπόλοιπο της ζωής σας αλλά ιδιαίτερα στα επόμενα λίγα χρόνια τα οποία είναι καθοριστικά για το μέλλον σας:

1. "If you did your best yesterday, you've begun to die; if you're doing your best today, you're beginning to live"........... Northwest Sparkler
"Αν έκανες το καλύτερο που μπορούσες χθες, τότε άρχισες να πεθαίνεις.....αν κάνεις το καλύτερο που μπορείς σήμερα, τότε αρχίζεις να ζεις."
Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ότι ποτέ δεν πρέπει να θεωρούμε ότι κάναμε το καλύτερο που μπορούσαμε και τελείωσε αλλά στο παρόν που ζούμε πρέπει να κάνουμε συνεχώς το καλύτερο που μπορούμε!

2. "If a man empties his purse into his head, no one can take it from him"............Benjamin Franklin
"Αν κάποιος κενώσει το πορτοφόλι του μέσα στο κεφάλι του, τότε κανείς δεν μπορεί να του το πάρει"
Αυτό θέλει να μας διδάξει ότι αυτό που έχουμε στο μυαλό μας, δηλαδή τη γνώση και τη μόρφωση, δε μπορεί κανείς να μας την πάρει. Εμείς οι Κύπριοι έχουμε ένα πολύ καλό παράδειγμα για αυτό. Όταν 200000 πρόσφυγες το 1974 έχασαν όλα όσα είχαν, τι ήταν αυτό που δεν έχασαν; φυσικά η μόρφωση που είχαν.

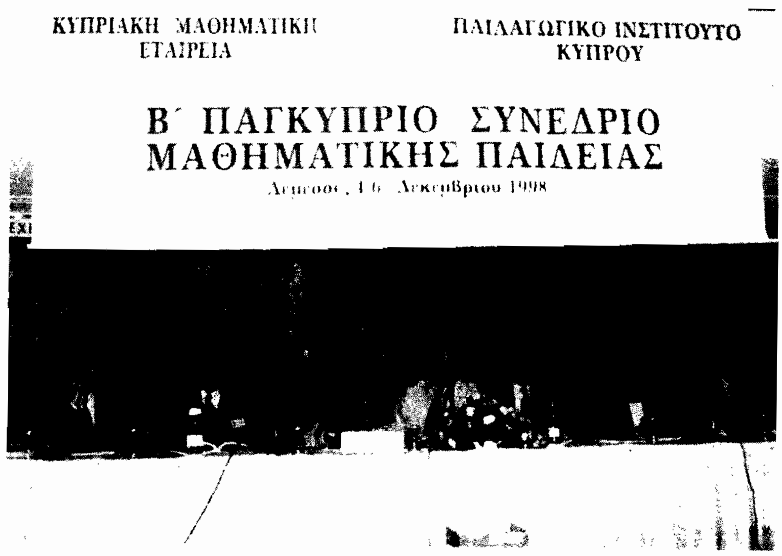
3. Ένας επιστάτης οικοδομών που δούλευε για πολλά χρόνια για ένα μεγάλο εργολάβο αποφάσισε να σταματήσει και να ξεκουραστεί. Ο επιστάτης ήταν πράγματι ο καλύτερος από όλους μια που έκτιζε πάντοτε τα καλύτερα σπίτια. Όταν το ανακοίνωσε στο εργολάβο ότι θέλει να σταματήσει και να πάρει τη σύνταξή του ο εργολάβος του ζήτησε σαν χάρη να κτίση ακόμη ένα σπίτι προτού σταματήσει. Ο επιστάτης συμφώνησε και άρχισε δουλειά. Καθ 'οδόν σκέφτηκε ότι μια και είναι το τελευταίο σπίτι, δεν βαριέσαι, θα το κτίσω στα γρήγορα και ας μην είναι όλα στην εντέλεια.

Όταν τελείωσε το σπίτι και πήγε να αποχαιρετήσει το μεγάλο εργολάβο, αυτός του είπε ότι λόγω εκτίμησης της δουλειάς που μου προσέφερες όλα αυτά τα χρόνια πάρε αυτά τα κλειδιά του τελευταίου σπιτιού που έκτισες και σου το χαρίζω να ζήσης με την οικογένειά σου μια άνετη συνταξιακή ζωή.

Αυτό παιδιά μας διδάσκει ότι πάντοτε πρέπει να δουλεύουμε σκληρά και σωστά ασχέτως των περιστάσεων. Ιδιαίτερα στις Μαθηματικές Ολυμπιάδες πρέπει να εργάζεστε με το ίδιο πάθος μέχρι την τελευταία στιγμή γιατί εργάζεστε τόσο για τον εαυτό σας όσο και για τη χώρα σας.

Τέλος θέλω να συγχαρώ την τοπική ομάδα του Συμβουλίου της ΚΥΜΕ για την οργάνωση της τελετής αυτής και να ευχαριστήσω τους αθλοθέτες κυρία Σκώττη και κυρία Χριστοδουλίδου και πολύ ιδιαίτερα την ΚΕΟ για την υποστήριξη που δίνουν μέσω της ΚΥΜΕ προς την αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης στην Κύπρο.

Φωτογραφίες από την Τελετή Βράβευσης των μαθητών που διακρίθηκαν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας κατά τη σχολική χρονιά 1998-99.



Χαιρετισμός του Προέδρου της ΚΥ.Μ.Ε. Δρα Γρηγόρη Μακρίδη στο 15ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας

Χίος, Νοέμβριος 1998

Εκ μέρους της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας χαιρετίζω το Συνέδριο σας και συγχαίρω την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία και το παράρτημα Χίου για τη διοργάνωση του 15[ου] Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, συμβάλλοντας έτσι στην επιστήμη των Μαθηματικών αλλά και στην αναβάθμιση της Εκπαίδευσης γενικότερα.

Είναι ιδιαίτερη η χαρά μας όταν για τρίτη συνεχή χρονιά παίρνουμε μέρος στο συνέδριο με οργανωμένη ομάδα και επισκεφτόμαστε τον ελληνισμό της περιφέρειας διότι πιστεύουμε ότι ο κόσμος εδώ διακατέχεται από παρόμοια συναισθήματα λόγω της γειτονίας με τον άσπονto εχθρό μας.

Έχουμε δημιουργήσει ένα ενιαίο αμυντικό δόγμα με μεγάλη επιτυχία αλλά προσωπικά πιστεύω ότι η καλύτερη άμυνα του έθνους μας ξεκινά από την Παιδεία και ίσως είναι καιρός για ένα ενιαίο εκπαιδευτικό δόγμα που να έχει τις ρίζες του βαθιά στον Ελληνισμό, την ιστορία του, την εκπαιδευτική του ιστορία, τις αρχές του και τον πολιτισμό του.

Εύχομαι πλήρη επιτυχία των εργασιών του Συνεδρίου σας.

ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Δρ. Γρηγόρης Μακρίδης
Συντονιστής Μαθηματικών
Παιδαγωγικό Ινστιτούτο

Τα θεωρήματα μαθηματικών συστημάτων και οι αλγόριθμοι οι οποίοι σχηματίζουν ένα σύστημα προγραμμάτων δημιουργούνται, αναπτύσσονται και συνδιάζονται με χρήση των κανόνων της λογικής. Για να καταλάβουμε μαθηματικές αποδείξεις και για να μπορέσουμε να γράψουμε αποτελεσματικά προγράμματα για ηλεκτρονικούς υπολογιστές χρειάζεται πρώτα να νοιώθουμε άνετα με τους κανόνες της λογικής. Ο θεμελιωτής της λογικής ήταν ο φιλόσοφος Χρύσιππος (281-208 π.χ.). Η νεώτερη ανάπτυξη οφείλεται σε διάφορους μαθηματικούς και φιλοσόφους όπως ο Leibnitz, De Morgan, Hilbert κ.ά. Σήμερα θα δώσουμε έμφαση σε ορισμένες κοινές μορφές συμβολικής λογικής και πινάκων τιμών αληθείας οι οποίες εάν μαθευτούν καλά θα μπορέσετε να τις χρησιμοποιήσετε για να καταλάβετε καλύτερα την γραμμή σκέψης στα ανώτερα μαθηματικά καθώς και μαθήματα προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Η λογική των μαθηματικών μας δίνει ένα σύνολο κανονισμών οι οποίοι διευθύνουν την αλήθεια και ανάπτυξη μιας μαθηματικής απόδειξης. Η λογική είναι ένα μέρος της απόδειξης την οποία μπορούμε να διδαχθούμε (να μάθουμε), τα υπόλοιπα είναι διαίσθηση (ενόραση), δημιουργικότητα, φαντασία και ένστικτο.

Οι προτάσεις πρέπει να υπακούουν σε ορισμένους συντακτικούς κανόνες, ξεχωριστά από την πραγματική τους σημασία. Για παράδειγμα το "FORTRAN assignment statement"

SUM=SUM + NEXT

είναι συντακτικώς σωστό. Εάν όμως το αφαιρέσουμε από το περιεχόμενο ενός προγράμματος, η σημασία του χάνεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΙΙΙ)

Ας εξετάσουμε το επόμενο επιχείρημα για τον Νίκο που είναι μαθητής σε ένα συγκεκριμένο μάθημα.
"Εάν ο Νίκος έχει την ικανότητα και δουλέψει σκληρά, τότε ο Νίκος θα επιτύχει σ' αυτό το μάθημα. Γι' αυτό, εάν ο Νίκος δεν πετύχει σ' αυτό το μάθημα, τότε ο Νίκος δεν έχει την ικανότητα ή ο Νίκος δεν δουλεύει σκληρά. "

Αυτό το επιχείρημα μπορεί να συμβολιστεί χρησιμοποιώντας τους Αγγλικούς χαρακτήρες p, q και r.

p: Ο Νίκος έχει την ικανότητα
q: Ο Νίκος δουλεύει σκληρά
r: Ο Νίκος θα επιτύχει σ' αυτό το μάθημα

Η λογική μορφή του πιο πάνω επιχειρήματος μπορεί να δοθεί ως εξής:

Εάν p και q, τότε r. Γι' αυτό, εάν όχι r, τότε όχι p ή όχι q.

Η λογική μας δίνει τον τρόπο να δώσουμε κύρος σε μια αφηρημένη μορφή επιχειρήματος με τρόπο ανεξάρτητο της αληθείας ή μή αληθείας του περιεχομένου των προτάσεων. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση "**συμβολικής λογικής**" και των "**πινάκων τιμών αληθείας**".

ΛΟΓΙΚΟΙ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ (Logical Connectives)

Οι περισσότερες μαθηματικές προτάσεις είναι συνδυασμοί άλλων απλών προτάσεων, ενωμένων χρησιμοποιώντας τις λέξεις " ή " , " και " , " όχι " , " εάν - τότε " , " τότε, και μόνον τότε, άν "

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1

α) Καλούμε **διάζευξη** (disjunction) του p και q την πρόταση " p ή q " και είναι αληθής δεδομένου ότι τουλάχιστο ένα από τα p ή q είναι αληθή, ή δ' άλλως είναι ψευδής.

Συμβολίζουμε την διάζευξη του p και q με $p \vee q$.

β) Καλούμε **σύζευξη** (conjuction) του p και q την πρόταση "p και q" και είναι αληθής δεδομένου ότι p και q είναι αληθή. Συμβολίζουμε την σύζευξη του p και q με $p \wedge q$.

γ) Καλούμε **άρνηση** (negation) του p την πρόταση "όχι p" η οποία έχει αληθή-τιμή αντίθετη από αυτή του p.

Συμβολίζεται με $\sim p$.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΙΜΩΝ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

p	q	p ∨ q
A	A	A
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

ΟΠΟΥ A ≡ αληθής
Ψ ≡ ψευδής

p	q	p ∧ q
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

p	~p
A	Ψ
Ψ	A

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Π2): Ο καθηγητής κάνει την πρόταση:
"Εάν πάρεις 90 ή περισσότερο στην τελική εξέταση, τότε θα πάρεις Α στο μάθημα".

p: παίρνεις 90 ή περισσότερα στην τελική εξέταση

q: παίρνεις Α στο μάθημα

Συμβολικά έχομε: "Εάν p, τότε q"
Ας αναλύσουμε την πρόταση του καθηγητή για να διαπιστώσουμε τις πιθανές αληθής τιμές.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1
p και q είναι αληθή. Σε αυτή την περίπτωση ο μαθητής πήρε 90 ή περισσότερο στην τελική εξέταση και πήρε βαθμό Α. Άρα η πρόταση του καθηγητή είναι αληθής.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2
p είναι αληθής και q είναι ψευδής. Ο μαθητής πήρε το ολιγότερο 90 αλλά για κάποιο λόγο δεν πήρε Α στο μάθημα. Ίσως ο καθηγητής να έκανε λάθος, αλλά βάση των πληροφοριών η πρόταση του καθηγητή είναι ψευδής.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3
p είναι ψευδής και q είναι αληθής. Ο μαθητής πήρε λιγότερο από 90 στην τελική εξέταση αλλά πήρε Α. Ίσως ο μαθητής πήρε 89 στην τελική εξέταση και ο καθηγητής αποφάσισε να του δόσει Α. αυτό όμως δεν αντιλέγει την πρόταση του καθηγητή, άρα πρέπει να θεωρήσουμε την πρόταση αληθή.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4
Το p και το q είναι ψευδή. Ο μαθητής πήρε λιγότερο από 90 στην εξέταση και δεν πήρε Α. Εδώ η ισχύς της πρότασης του καθηγητή δεν έχει εξεταστή, άρα πρέπει να την θεωρήσουμε αληθή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2
Η υποθετική πρόταση: Εάν p, τότε q καλείται η συνεπαγωγή του q από το p.
Είναι ψευδής όταν το p είναι αληθής και το q είναι ψευδής και αληθής σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.
Συμβολίζουμε την πρόταση με $p \rightarrow q$
Συνηθίζουμε να διαβάζουμε $p \rightarrow q$ σαν "p συνεπάγεται q"

Άλλοι τρόποι διατύπωσης της συνεπαγωγής $p \rightarrow q$ είναι:
α) " p είναι ικανή συνθήκη για q "
(p is a sufficient condition for q)
β) " q είναι αναγκαία συνθήκη για p "
(q is a necessary condition for p)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

p	q	$p \rightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Π3)

Ας εξετάσουμε τις προτάσεις

α) Εάν $X = 1$, τότε $X^2 = 1$

β) Εάν $X^2 = 1$, τότε $X=1$ ή $X=-1$

όπου X πραγματικός αριθμός. Εδώ η πρόταση (α) είναι αληθής ενώ η (β) είναι ψευδής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Π4)

α) Εάν $X=1$ ή $X=-1$, τότε $X^2 = 1$

β) Εάν $X^2 = 1$,τότε $X=1$ ή $X=-1$

Εδώ και οι δύο προτάσεις είναι αληθής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3·

Η υποθετική πρόταση

"Εάν q, τότε p " ($q \rightarrow q$)

καλείται **αντίστροφος** της

"Εάν p, τότε q " ($p \rightarrow q$)

Συχνά στα μαθηματικά συμβαίνει η πρόταση με λογική μορφή

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

να είναι αληθής. Αυτό σημαίνει ότι η πρόταση $p \rightarrow q$ και η αντίστροφη της $q \rightarrow p$ είναι αληθής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4

Η πρόταση $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

καλείται ισοδυναμία (equivalence or biconditional).

Η πρόταση αυτή διαβάζεται, " p τότε, και μόνον τότε, αν q " και συμβολίζεται $p \leftrightarrow q$ (p if and only if q) .

Άλλες ονομασίες: α) " p συνεπάγεται q και αντιστρόφως "

β) " p είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για q"

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

ΛΟΓΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ (LOGICAL EQUIVALENCE)

Στα μαθηματικά, όπως και σε πολλά άλλα θέματα υπάρχουν πολλοί τρόποι για να πει κανείς το ίδιο πράγμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5

Έστω u και υ λογικοί τύποι, όπου λογικό τύπον εννοούμε σύνθετον πρόταση, η οποία μορφώνεται από άλλες προτάσεις χρησιμοποιώντας λογικούς συνδέσμους. Καλούμε u και v λογικά ισοδύναμα και γράφουμε $u \equiv v$, όταν κκαι οι δύο τύποι u και v έχουν την αυτήν τιμήν αληθείας και ψευδή όταν οι u και υ έχουν διαφορετικές τιμές αληθείας.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δείξετε ότι $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
χρησιμοποιώντας πίνακα τιμών αληθείας.
(Λύση στο τέλος).

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δείξετε ότι $p \to q \equiv \sim p \vee q$
χρησιμοποιώντας πίνακα τιμών αληθείας
(Λύση στο τέλος)

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6

α) Ένας λογικός τύπος καλείται **ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑ** (tautology) τότε, και μόνον τότε, αν καθίσταται αληθής πρότασης για κάθε συνδυασμός τιμών αληθείας των προτάσεων, οι οποίες τον συνθέτουν.

β) Ένας λογικός τύπος καλείται **ΑΝΤΙΛΟΓΙΑ** (contradiction) τότε, και μόνον τότε, αν καθίσταται πρόταση ψευδής για κάθε συνδυασμό τιμών αληθείας των προτάσεων, οι οποίες τον συνθέτουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Π5)

Ας εξετάσουμε τον τύπο $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

p	q	$p \to q$	$(\sim p \vee q)$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Άρα ο πιο πάνω τύπος είναι ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑ.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δείξετε ότι $[(p \wedge q) \to r] \to [\sim r \to (\sim p \vee \sim q)]$ είναι ταυτολογία.
(Λύση στο τέλος).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (Π6)

Από άσκηση 1 έχουμε $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Από άσκηση 2 έχουμε $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα δύο αποτελέσματα δείξετε ότι $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ χωρίς πίνακες τιμών αληθείας

Λύση:

$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$ Από άσκηση 2

$\equiv (\sim(\sim p)) \wedge \sim q$ Από άσκηση 1

$\equiv p \wedge \sim q$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες λογικής ισοδυναμίας δείξετε ότι η σύθετη πρόταση $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ είναι ταυτολογία.

(Η πιο πάνω σύνθετη πρόταση ονομάζεται modus ponens και έχει την έννοια Εάν p και $p \rightarrow q$ ισχύουν, τότε q ισχύει).

(Λύση στο τέλος)

ΑΣΚΗΣΗ 5

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες λογικής ισοδυναμίας δείξετε ότι

$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim q) \leftrightarrow p$

(Λύση στο τέλος)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1:

p	q	~p	~q	p V q	~(p V q)	~p Λ ~q
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

ΑΣΚΗΣΗ 2:

p	q	~q	p → q	~p V q
Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω $u \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ και $v \equiv \sim r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

p	q	r	~p	~q	~r	p Λ q	~p Λ ~q	u	v	u→v
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α

ΑΣΚΗΣΗ 4

		ΙΔΙΟΤΗΤΑ
$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	$\equiv \sim(p \wedge (p \rightarrow q)) \vee q$	Άσκηση 2
	$\equiv (\sim p \vee \sim(p \rightarrow q)) \vee q$	10
	$\equiv (\sim p \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$	Π6
	$\equiv ((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \vee q$	5
	$\equiv (A \wedge (\sim p \vee \sim q)) \vee q$	11
	$\equiv (\sim p \vee \sim q)) \vee q$	15(β)
	$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee q)$	3
	$\equiv \sim p \vee A$	11
	$\equiv A$	15(α)

ΑΣΚΗΣΗ 5

		ΙΔΙΟΤΗΤΑ
$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\equiv \sim((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$	Ορισμός 1.4
	$\equiv \sim(p \rightarrow q) \vee \sim(q \rightarrow p)$	10
	$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$	Π6
	$\equiv \sim((p \wedge \sim q) \vee q) \wedge ((p \wedge \sim q) \vee \sim p)$	5
	$\equiv \sim((p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)) \wedge ((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$	5,1
	$\equiv ((p \vee q) \wedge A) \wedge (A \wedge (\sim p \vee \sim q))$	11
	$\equiv (p \vee q) \wedge ((\sim p \vee \sim q)$	15(β)
	$\equiv (\sim q \rightarrow p) \wedge ((p \rightarrow \sim q)$	Άσκηση 2
	$\equiv (\sim q) \leftrightarrow p$	ορισμός 1.4

ΛΟΓΙΚΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ (ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ)

1) $p \vee q \equiv q \vee p$
2) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
4) $p \vee (q \wedge r) \equiv p \wedge (q \wedge r)$
5) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
6) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
7) $p \vee p \equiv p$
8) $p \wedge p \equiv p$
9) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
10) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
11) $p \vee \sim p \equiv A$ (Ταυτολογία)
12) $p \wedge \sim p \equiv \Psi$ (Αντιλογία)
13) $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
14) $q \rightarrow p \equiv \sim p \rightarrow \sim q$
15) Έστω Α συμβολίζει ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑ και Ψ ΑΝΤΙΛΟΓΙΑ, τότε:
   α) $p \vee A \equiv A$
   β) $p \wedge A \equiv p$
   γ) $p \vee \Psi \equiv p$
   δ) $p \wedge \Psi \equiv \Psi$

Αριθμητικά Τρίγωνα και εξίσωση Fermat – Pell

Παντελής Δαμιανού
Τμήμα Μαθηματικών και
Στατιστικής
Πανεπιστήμιο Κύπρου

Στο προηγούμενο τεύχος του Μαθηματικού Βήματος (τεύχος ΙΕ, 1998) εμφανίστηκε ένα ενδιαφέρον άρθρο του Χ. Λουγκρίδη με τίτλο «Μέθοδος Κατασκευής αριθμητικών τριγώνων με πλευρές διαδοχικούς ακεραίους» [5].

Αριθμητικό τρίγωνο, είναι ένα τρίγωνο του οποίου οι πλευρές και το εμβαδόν είναι θετικοί ακέραιοι. Στο εν λόγω άρθρο κατασκευάζονται τρίγωνα, των οποίων οι πλευρές είναι διαδοχικοί ακέραιοι $N-1,\ N,\ N+1$. Με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή καταγράφονται 10 τιμές του N για τις οποίες η κατασκευή είναι δυνατή:

$N = 4,\ 14,\ 52,\ 194,\ 724,\ 2702,\ 10084,\ 37634,\ 140452,\ 524174$.

Στο [5] αναφέρονται ακόμα 13 τιμές του N οι οποίες είναι λανθασμένες, σίγουρα από υπολογιστικό λάθος.

Στο παρόν άρθρο θα αποδείξω ότι η κατασκευή αριθμητικού τριγώνου με πλευρές διαδοχικούς ακεραίους είναι δυνατή αν και μόνο αν ο N έχει τη μορφή $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ όπου $n = 1,2,3,\dots$.

Η απόδειξη που ακολουθεί είναι δική μου, αλλά είμαι σίγουρος πως το αποτέλεσμα είναι γνωστό από τον 19ο αιώνα. Μάλιστα ο Dickson αναφέρει στο βιβλίο του [2] ότι ο R. Hoppe [3] μελετούσε τρίγωνα με ακέραιες πλευρές και ρητό εμβαδό το 1879.

Θεώρημα: Το τρίγωνο με πλευρές, $N-1,\ N,\ N+1$ είναι αριθμητικό αν και μόνο αν ο N έχει τη μορφή $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ όπου $n = 1,2,3,\dots$.

Απόδειξη: Εστω τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου και E το εμβαδό του τριγώνου. Τότε $\tau = \dfrac{3N}{2}$. Από τον τύπο του Ήρωνα:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\tau(\tau-(N-1))(\tau-N)(\tau-(N+1))} \\ &= \frac{N}{4}\sqrt{3\left(N^2-4\right)} \end{aligned}$$

Το τρίγωνο είναι αριθμητικό άν

$\dfrac{N}{4}\sqrt{3\left(N^2-4\right)} = M$ για κάποιο θετικό ακέραιο M.

Επομένως $3N^2\left(N^2-4\right) = 16M^2$ (1)

Αν $N \equiv 1 \pmod 2$
τότε από την (1) θα είχαμε

$1 \equiv 0 \pmod 2$

που είναι αδύνατο. Επομένως ο N είναι ζυγός και έτσι $N = 2x$ για κάποιο θετικό ακέραιο x. Η εξίσωση (1) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$3x^2(x^2-1) = M^2 \tag{2}$$

$\Rightarrow 3 \mid M^2$

και από το λήμμα του Ευκλείδη

$3 \mid M$.

Αρα $M = 3a$ όπου a θετικός ακέραιος. Η εξίσωση (2) τώρα γράφεται στη μορφή

$$x^2(x^2-1) = 3a^2 \tag{3}$$

Θέτω $z = x^2$ και η (3) γράφεται

$$z(z-1) = 3a^2 \tag{4}$$

Από την τελευταία εξίσωση συνεπάγεται ότι

$$3 \mid z(z-1)$$

και από το λήμμα του Ευκλείδη

$$3 \mid z \text{ ή } 3 \mid z-1$$

Περίπτωση 1 $3 \mid z$

Σε αυτή την περίπτωση $z = 3k$ και η εξίσωση (4) γράφεται

$$k(3k-1) = a^2$$

Επειδή $(k,\ 3k-1) = 1$ πρέπει να έχουμε $k = \lambda^2$ και $3k - 1 = \mu^2$ για $\lambda, \mu \in Z \Rightarrow 3\lambda^2 - 1 = \mu^2$.

Αν εξετάσουμε την τελευταία εξίσωση mod 3 καταλήγουμε στην $\mu^2 \equiv -1 \pmod 3$ που είναι προφανώς αδύνατη.

Περίπτωση 2 $3 \mid z-1$

Σε αυτή την περίπτωση

$$z - 1 = 3b \text{ για } b \in Z \tag{5}$$

και η εξίσωση (4) γράφεται

$3zb = 3a^2$

$\Rightarrow bz = a^2$

Επειδή $(z,b)=1$ πρέπει τα z και b να είναι τέλεια τετράγωνα,

$z=x^2$ και $b=y^2$

Από την (5) έχουμε

$x^2-1=3y^2$

ή

$$x^2-3y^2=1 \qquad (6)$$

Για κάθε λύση της (6) στους θετικούς ακεραίους θα έχουμε και ένα αριθμητικό τρίγωνο με πλευρές $2x-1,\ 2x,\ 2x+1$.

Η εξίσωση $x^2-dy^2=1$ ονομάζεται εξίσωση Pell ή εξίσωση Fermat-Pell.

Το 1657, ο Fermat θέλοντας να προκαλέσει τους μαθηματικούς της Ευρώπης, έθεσε το εξής πρόβλημα:
Να βρεθεί ακέραιος y που να κάνει το $1+dy^2$ τέλειο τετράγωνο. Το πρόβλημα λύθηκε τελικά το 1768 από τους Euler και Lagrange με χρήση συνεχών κλασμάτων. Ο John Pell (1611-1685) δεν είχε ουδεμία σχέση με το πρόβλημα. Από ένα λάθος του Euler η εξίσωση ονομάστηκε εξίσωση Pell. Η σωστή ονομασία θα έπρεπε να ήταν εξίσωση Fermat.

Υπάρχει στενή σχέση μεταξύ των λύσεων της εξίσωσης $x^2-dy^2=1$ και ρητών προσεγγίσεων του $\sqrt{d}$. Αν x,y είναι θετικές λύσεις της $x^2-dy^2=1$ τότε

$$\left(x-y\sqrt{d}\right)\left(x+y\sqrt{d}\right)=1$$

και συνεπώς

$$\frac{x}{y}-\sqrt{d}=\frac{1}{y\left(x+y\sqrt{d}\right)}<\frac{1}{2y^2}$$

Η εξίσωση $x^2-3y^2=1$ μπορεί να λυθεί με διάφορους τρόπους [1]. Θα δείξω δύο διαφορετικές μεθόδους. Η πρώτη είναι με χρήση συνεχών κλασμάτων. Το συνεχές κλάσμα του $\sqrt{3}$ είναι

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\dots}}}$$

ορίζεται δηλαδή από την ακολουθία

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \dots=b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots$$

και είναι περιοδικό με περίοδο 2.

Αν ορίσω τα μερικά αθροίσματα

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 1 = \frac{p_0}{q_0} \\
c_1 &= 1 + \frac{1}{1} = \frac{p_1}{q_1} \\
c_2 &= 1 + \frac{1}{1+2} = \frac{p_2}{q_2} \\
\vdots & \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

τότε $\lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{3}$ και οι ακολουθίες

p_n, q_n ορίζονται αναδρομικά:

$$
\begin{array}{lll}
p_0 = b_0 & q_0 = 1 & \\
p_1 = b_0 b_1 + 1 & q_1 = b_1 & \\
p_k = b_k p_{k-1} + p_{k-2} & q_k = b_k q_{k-1} + q_{k-2} & \text{για } k = 2,3,4,\ldots
\end{array}
$$

Στη δική μας περίπτωση έχουμε

$$
\begin{array}{ll}
p_0 = 1 & q_0 = 1 \\
p_1 = 2 & q_1 = 1 \\
p_2 = 5 & q_2 = 3 \\
p_3 = 7 & q_3 = 4 \\
p_4 = 19 & q_4 = 11 \\
p_5 = 26 & q_5 = 15
\end{array}
$$

Σύμφωνα με τη Θεωρία της εξίσωσης Pell, όταν έχουμε συνεχές κλάσμα με περίοδο 2, όλες οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - dy^2 = 1$ δίνονται από τους τύπους

$$x_n = p_{2n-1}, \quad y_n = q_{2n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Αρα οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 3y^2 = 1$ είναι

$(x_n, y_n) = (2,1),\ (7,4),\ (26,15),\ (97,56),\ (362,209),\ (1351,780),\ \ldots$

Οι αντίστοιχες τιμές του $N = 2x$ είναι $a_n = 4,\ 14,\ 52,\ 194,\ 724,\ 2702, \ldots$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε με επαγωγή, ότι αν γνωρίζουμε μια ελάχιστη λύση της $x^2 - 3y^2 = 1$ (Στη περίπτωση μας $x_1 = 2$, $y_1 = 1$) τότε όλες οι λύσεις έχουν τη μορφή (x_n, y_n) όπου

$$x_n + \sqrt{3} y_n = (x_1 + y_1\sqrt{3})^n = (2 + \sqrt{3})^n \quad . \qquad (7)$$

Π.χ. $x_2+y_2\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$

$x_3+y_3\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^3=26+15\sqrt{3}$

$x_4+y_4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^4=97+56\sqrt{3}$.

Χρησιμοποιώντας την (7) βλέπουμε ότι

$x_n=4x_{n-1}-x_{n-2}$ με αρχικές συνθήκες $x_0=1,\ x_1=2$.

Σημειώνουμε τις πρώτες 10 τιμές της ακολουθίας x_n
$2,7,26,97,362,1351,5042,18817,70226,262087$.

Η αναδρομική ακολουθία που ικανοποιεί το

$a_n=2x_n$ είναι

$a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$ με αρχικές συνθήκες $a_0=2,\ a_1=4$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ακολουθίας είναι

$$x^2-4x+1=0$$

με ρίζες $2+\sqrt{3},\ \ 2-\sqrt{3}$.

Επομένως

$$a_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Σημειώνουμε τις πρώτες 20 τιμές της ακολουθίας a_n:

4, 14, 52, 194, 724, 2702, 10084, 37634, 140452, 524174,
1956244, 7300802, 27246964, 101687054, 379501252,
1416317954, 5285770564, 19726764302, 73621286644,
274758382274.

Φυσικά το $n=0$ απορρίπτεται, διότι είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές $1,2,3$.

Παρατηρήσεις

(1) Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε τα αριθμητικά τρίγωνα με πλευρές $N-2,\ N,\ N+2$. Σ'αυτή την περίπτωση οι λύσεις έχουν τη μορφή $N=8,28,104,\ldots$ δηλαδή ο N έχει τη μορφή
$2(2+\sqrt{3})^n+2(2-\sqrt{3})^n \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ldots$

(2) Γενικότερα, αριθμητικά τρίγωνα με πλευρές $N-c,\ N,\ N+c$ υπάρχουν για τις ακόλουθες τιμές του N:

$$N = c\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(3) Η μοναδική Πυθαγόρεια τριάδα αποτελούμενη από διαδοχικούς ακεραίους που ορίζει αριθμητικό τρίγωνο είναι η (3, 4, 5), διότι

$$(N-1)^2 + N^2 = (N+1)^2 \Rightarrow N = 4.$$

(4) Τελικά αναφέρω μια παρατήρηση που ενδιαφέρει τους Στατιστικούς. Συνήθως ορίζουμε την τυπική απόκλιση ως

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}{n}} \text{ ή } s = \sqrt{\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}{n-1}}.$$

Εστω $\sigma(n)$, $s(n)$ οι τυπικές αποκλίσεις του δείγματος $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Τότε $\sigma(n)$ είναι ακέραιος αν και μόνο αν ο n είναι ένας από τους αριθμούς x_{2n}, $n = 0, 1, 2, \ldots$ δηλαδή ανήκει στο σύνολο 1,7, 97, 1351, 18817, 262087, 3650401, 50843527,...

Παρόμοια $s(n)$ είναι ακέραιος αν n είναι ένας από τους αριθμούς $\frac{x_{2n}-1}{2}$ δηλαδή 0, 3, 48, 675, 9408, 131043, 825200, 25421763, ...
Για αποδείξεις παραπέμπω στο άρθρο [4].

<u>Παραπομπές:</u>

[1] Burton, D.M. Elementary Number Theory, 4th ed., McGraw Hill, (1997)

[2] Dickson, L.E. History of the theory of numbers, Chelsea, New York, (1952)

[3] Hoppe R. Rationales Dreieck, dessen Seiten auf einander folgende ganze Zahlen sind, Archiv Math Phys. 64, 441-443 (1879)

[4] Lloyd, E.K. The standard deviation of 1, 2, ..., n Pell equation and rational triangles, The Mathematical Gazette, 231-243 (1997)

[5] Λουγκρίδης, Χ. Μέθοδος κατασκευής Αριθμητικών Τριγώνων με πλευρές διαδοχικούς ακέραιους, Μαθηματικό Βήμα, Τεύχος ΙΕ, (1998)

Ιδιότητες των τελείων αριθμών

Χαράλαμπος Λουγκρίδης, Μαθηματικός, Β.Δ.

Στο τεύχος θ′ του περιοδικού “ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ” δημοσιεύτηκε άρθρο με τίτλο “Τέλειοι αριθμοί”. Υπενθυμίζουμε εδώ τον ορισμό του τελείου αριθμού και στη συνέχεια δίνουμε μερικές ιδιότητές του με τις σχετικές αποδείξεις τους.

Ορισμός. : Τέλειος λέγεται ο φυσικός αριθμός ρ που είναι ίσος με το άθροισμα των μικρότερων του ρ διαιρετών του. Θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι τέλειος είναι ο φυσικός αριθμός που ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος όλων των διαιρετών του. (Με τον ορισμό αυτό συμπεριλαμβάνεται στους διαιρέτες του ρ και ο εαυτός του).

1η ιδιότητα. Κάθε τέλειος αριθμός ρ είναι τρίγωνος, μπορεί δηλαδή να γραφτεί

στη μορφή $\boxed{\rho = \frac{\kappa(\kappa+1)}{2}}$ **(1) με** $\kappa \in \mathrm{N}$

Είναι γνωστόν ότι κάθε τρίγωνος αριθμός ισούται με το ημιγινόμενο δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών. Διαπιστώνοντας λοιπόν ότι για ένα τέλειο αριθμό ρ ισχύει αυτή η σχέση συμπεραίνουμε ότι ο τέλειος αυτός αριθμός είναι και τρίγωνος.

Ετσι για τους πρώτους πέντε τέλειους αριθμούς βρίσκουμε ότι:

$\alpha)\quad 6 = \frac{3\times4}{2},\qquad \beta)\quad 28 = \frac{7\times8}{2},\qquad \gamma)\quad 496 = \frac{31\times32}{2},$

$\delta)\quad 8128 = \frac{127\times128}{2},\qquad \varepsilon)\quad 33550336 = \frac{8191\times8192}{2}$

σχέσεις που μας λένε ότι οι τέλειοι αυτοί είναι και τρίγωνοι.

Απόδειξη της πρώτης ιδιότητας.

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Ευκλείδη $\forall \nu \in N$ αν ο αριθμός (2^ν-1) είναι πρώτος

τότε ο αριθμός $\rho = (2^\nu - 1)\cdot 2^{\nu-1}$ είναι τέλειος.

Εχω λοιπόν: $\rho = (2^\nu - 1)\cdot 2^{\nu-1} = \frac{2^\nu - 1}{2}\cdot 2^\nu = \frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$

δηλαδή κάθε τέλειος αριθμός είναι και τρίγωνος.

2η Ιδιότητα. Το 8πλάσιο τέλειου αριθμού ρ, αυξημένο κατά 1, είναι τετράγωνος αριθμός, δηλ. $8\rho+1=\chi^2$, $\chi \in N$.

Απόδειξη.

$8\rho + 1 = 8\cdot\frac{\kappa(\kappa+1)}{2} + 1 = 4\kappa(\kappa+1) + 1 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 = (2\kappa+1)^2$, που είναι τετράγωνος.

Πράγματι. Για τον τέλειο αριθμό 6 ισχύει: 8Χ6+1 = 49 = 7^2

Για τον τέλειο αριθμό 28 έχουμε: 8Χ28+1 = 225 = 15^2

Για τον τέλειο αριθμό 496 επίσης έχουμε: 8Χ496+1 = 63^2

3η Ιδιότητα. Το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των διαιρετών ενός τέλειου αριθμού ισούται με 2.

Επαληθεύω την πρόταση για τους διαιρέτες :

α) του τέλειου αριθμού 6 που είναι οι: 1, 2, 3, 6.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$$

β) του τέλειου αριθμού 28 που είναι οι: 1, 2, 4, 7, 14, 28.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$$

Απόδειξη της τρίτης ιδιότητας

Εστω ρ ο τέλειος αριθμός. Οι διαιρέτες του ρ κατά αύξουσα τάξη είναι οι αριθμοί: $1, \chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots, \chi_\nu, \chi_{\nu+1}, \chi_{\nu+2}, \ldots, \chi_{2\nu}, \rho$

Είναι φανερό ότι ισχύουν: $1\cdot\rho = \chi_1\cdot\chi_{2\nu} = \chi_2\cdot\chi_{2\nu-1} = \ldots = \chi_\nu\cdot\chi_{\nu+1}$, **δηλαδή**

$$\chi_{2\nu} = \frac{\rho}{\chi_1}, \quad \chi_{2\nu-1} = \frac{\rho}{\chi_2}, \quad \chi_{2\nu-2} = \frac{\rho}{\chi_3}, \ldots \qquad \textbf{(2)}$$

Από τον ορισμό του τέλειου ισχύει για τους διαιρέτες του ρ:

$$1+\chi_1+\chi_2+\chi_3+\ldots+\chi_\nu+\ldots+\chi_{2\nu-2}+\chi_{2\nu-1}+\chi_{2\nu} = \rho \quad \textbf{ή}$$

Για το άθροισμα όλων των διαιρετών του ρ, συμπεριλαμβανομένου του ρ, ισχύει:

$$1+\chi_1+\chi_2+\chi_3+\ldots+\chi_\nu+\ldots+\chi_{2\nu-2}+\chi_{2\nu-1}+\chi_{2\nu}+\rho = 2\rho$$

Θέτω : Α = το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των διαιρετών του ρ. Τότε, γράφοντας την προηγούμενη σχέση σαν αθροίσματα ανά δύο των όρων που ισαπέχουν από τα άκρα, και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2) θα έχω:

$$A = \left(1+\frac{1}{\rho}\right)+\left(\frac{1}{\chi_1}+\frac{\chi_1}{\rho}\right)+\left(\frac{1}{\chi_2}+\frac{\chi_2}{\rho}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\chi_\nu}+\frac{\chi_\nu}{\rho}\right)$$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι ρ, άρα:

$$A = \frac{\rho+1}{\rho}+\frac{x_{2\nu}+x_1}{\rho}+\frac{x_{2\nu-1}+x_2}{\rho}+\frac{x_{2\nu-2}+x_3}{\rho}+\ldots+\frac{x_{\nu+1}+x_\nu}{\rho}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1+x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2\nu}+\rho}{\rho} = \frac{2\rho}{\rho} = 2$$

Αποδείκτηκε έτσι το ζητούμενο, ότι δηλαδή το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των διαιρετών ενός τέλειου αριθμού ισούται με 2.

<u>4η Ιδιότητα</u>: Κάθε τέλειος αριθμός ρ (εξαιρουμένου του 6) ισούται με το άθροισμα κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών (Περιοδικό "ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ", τεύχος 1/1987, σελ. 65-66).

Η πρόταση αυτή γράφεται ως μερικό άθροισμα σειράς: $\rho = \sum_{\kappa=1}^{\nu} (2\kappa - 1)^3$

Επιβεβαίωση της ιδιότητας αυτής έχουμε με τους τέλειους 28, 496, 8128.

α) Για τον πρώτο τέλειο, τον αριθμό 6, δεν ισχύει η πρόταση.

β) $28 = 1^3 + 3^3 = 1 + 27$

γ) $496 = \underline{1^3 + 3^3} + 5^3 + 7^3 = 28 + 125 + 343$

δ) $8128 = \underline{1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3} + 9^3 + \ldots + 15^3 = 496 + 729 + 1331 + 2197 + 3375$

Σύμφωνα με την πιο πάνω ιδιότητα μπορούμε και τον πέμπτο τέλειο , τον αριθμό 33550336, να το γράψουμε σαν άθροισμα ν κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών, με πρώτον όρο το 1^3. Προσπάθειά μας να βρούμε το ν.

<u>Λύση</u>. $\rho = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa-1)^3 = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(8\kappa^3-12\kappa^2+6\kappa-1) = 8\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3 - 2\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 + 6\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa - \sum_{\kappa=1}^{\nu}1 =$

$$8\cdot\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} - 12\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + \frac{6\nu(\nu+1)}{2} - \nu = 2\nu^2(\nu+1)^2 - 2\nu(\nu+1) + 3\nu(\nu+1) - \nu =$$

$$\nu[\,2\nu^3+4\nu^2+2\nu-2(2\nu^2+\nu+2\nu+1)+3\nu+3-1] = \nu(2\nu^3-4\nu-2+3\nu+2) = \nu(2\nu^3-\nu) =$$

$= \nu^2(2\nu^2-1)$, ώστε: $\rho = \nu^2(2\nu^2 -1)$. (3)

Με τον τύπο αυτό βρίσκουμε το πλήθος των κύβων των ν διαδοχικών περιττών αριθμών, που το άθροισμά τους δίνει καθένα από τους πιο πάνω τέλειους αριθμούς.

Ετσι ο τέλειος αριθμός 28 ισούται με το άθροισμα δυο κύβων, ο τέλειος 496 ισούται με το άθροισμα 4 κύβων και ο 8128 με το άθροισμα 8 κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών, όπως επαληθεύεται από τη σχέση (3) που βρήκαμε.

Για τον πέμπτο τέλειο, τον 33550336, δεν έχουμε το άθροισμα των κύβων και έτσι αναζητούμε το ν, το πλήθος δηλαδή των κύβων.

Από την (3) έχουμε: $\nu^2(2\nu^2-1) = 33550336$. Λύοντας τη διτετράγωνη αυτή εξίσωση παίρνουμε τη θετική ρίζα $\nu = 64$. Ώστε ο 33550336 είναι άθροισμα 64 κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών με πρώτον τον 1^3 και τελευταίο τον 127^3.

Για τον έκτο τέλειο, τον αριθμό 8589869056, λύουμε τη διτετράγωνη εξίσωση

$\nu^2(2\nu^2-1) = 8589869056$ και βρίσκουμε $\nu = 256$. Ώστε ο 6ος τέλειος είναι

άθροισμα 256 κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών με πρώτο τον 1^3 και τελευταίο το 511^3.

Με ανάλογο τρόπο, λύοντας τις εξισώσεις: $\nu^2(2\nu^2-1) = 137438691328$,

$\nu^2(2\nu^2-1)=2305843008139952128$ και

$\nu^2(2\nu^2-1)=2658455991569831744654692615953842176$

βρίσκω για τον 7_o, 8_o και 9_o τέλειο αντίστοιχα, $\nu=512=2^9$, $\nu=32768=2^{15}$ και

$\nu=1073741824=2^{30}$.

Συγκεντρώνουμε τα πιο πάνω ευρήματα, που αφορούν τους τελείους 2_o-8_o στον επόμενο πίνακα.

Τάξη τελείου	Τέλειος	Πλήθος κύβων	2^ν
2	28	2	2^1
3	496	4	2^2
4	8128	8	2^3
5	33550336	64	2^6
6	8589869056	256	2^8
7	137438691328	512	2^9
8	2305843008139952128	32768	2^{15}

Από τον πίνακα αυτό διαπιστώνουμε ότι η τέταρτη ιδιότητα θα μπορούσε να συμπληρωθεί ως εξής: " Κάθε τέλειος αριθμός μπορεί να γραφτεί ως μερικό άθροισμα αρτίου πλήθους (ίσου με δύναμη του 2) κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών, με πρώτο όρο τον 1^3.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε πιο πάνω για την εύρεση του πλήθους ν των κύβων μπορεί ασφαλώς να γενικευθεί για τον οποιοδήποτε τέλειο. Ετσι:

$\nu^2(2\nu^2-1) = \rho, \Rightarrow$ $\underline{2\nu^4-\nu^2-\rho = 0}$, εξίσωση που μας επιτρέπει να βρούμε το ν.

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{1+8\rho}}} \qquad (4)$$

<u>Σημείωση</u>: Να προσεχτεί ότι κάθε αριθμός ρ που δίνει με τον πιο πάνω τύπο (4) φυσικό αριθμό ν δεν είναι κατ□ ανάγκη τέλειος. π.χ. για το μη τέλειο αριθμό

ρ=2096128 προκύπτει ν=32, δηλαδή ισχύει:

$$2096128 = \sum_{\kappa=1}^{32}(2\kappa-1)^3 \quad ή \quad 1^3+3^3+\ ...+61^3.$$

Με αφορμή την πιο πάνω ιδιότητα ερευνώ μήπως ο τέλειος αριθμός ρ μπορεί να γραφτεί και ως άθροισμα ή διαφορά τετραγώνων φυσικών αριθμών.

Παρατηρώ έτσι ότι: $6 = 1^2-2^2+3^2$

Παρόμοια και για το 28 ισχύει: $28 = 1^2 -2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2$

Και στις δυο αυτές περιπτώσεις έχω περιττό πλήθος όρων, που είναι τετράγωνα των φυσικών αριθμών και ισχύει: $\rho = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\kappa^2$ (5)

Εξετάζω μήπως η σχέση αυτή ισχύει για <u>κάθε τέλειο</u>.

Παρατηρώ ότι για τους τέλειους αριθμούς 6 και 28 ισχύουν:

$6 = 1^2+3^2-2^2$ και $28 = (1^2+3^2+5^2+7^2) - (2^2+4^2+6^2)$

Ετσι διαμορφώνω την (5) όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$\rho=\sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa^2=\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa^2-\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}(2\kappa)^2 \qquad \textbf{(6)}$$

Από την (6) προκύπτει:

$$\rho=\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}(2\kappa)^2-\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}4\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}1-\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}4\kappa^2 \qquad \text{ή}$$

$$\rho=4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa^2-4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa+\frac{\nu+1}{2}-4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2\Rightarrow$$

$$\rho=4\left(\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa^2-\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2\right)+\left(\frac{\nu+1}{2}\right)-4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa \qquad \textbf{(7)}$$

Θέτω:

$$A=\left(\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa^2-\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2\right) \quad \kappa\alpha\iota \quad B=\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa. \qquad \textbf{Επειδή:}$$

$$\frac{\nu+1}{2}-\frac{\nu-1}{2}=1\Rightarrow A=\frac{(\nu+1)^2}{4} \quad \kappa\alpha\iota \quad B=\frac{(\nu+1)(\nu+3)}{8}$$

Από την (7) έχουμε με τη βοήθεια των A και B :

$$\rho=4\cdot\frac{(\nu+1)^2}{4}+\frac{\nu+1}{2}-4\cdot\frac{(\nu+1)(\nu+3)}{8}\Rightarrow\rho=\frac{\nu(\nu+1)}{2} \qquad (8)$$

Η σχέση (8) μας λέει ότι:

$\sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa^2=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, που ως γνωστόν δίνει τρίγωνο αριθμό. □ρα κάθε τέλειος

μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$\rho=\sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\kappa^2$, δηλαδή ως μερικό άθροισμα ν πρώτων όρων μιας σειράς που έχει ως γενικό όρο, τον $\alpha_\kappa = (-1)^{\kappa+1}\kappa^2$

όπου ν η θετική ρίζα της εξίσωσης: $\rho=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ και ρ ο τέλειος.

Δοκιμάζοντας για τον τέλειο ρ = 496 θα έχουμε: $\nu^2+\nu-496=0 \Rightarrow \nu=31$, ώστε

$496 = 1^2-2^2+3^2-...+31^2$

Επαναλαμβάνω τη δοκιμή για τον τέταρτο τέλειο αριθμό, τον 8128, οπότε:

$$8128=\frac{\nu(\nu+1)}{2}\Rightarrow\nu^2+\nu-16256=0\Rightarrow\nu=127 \quad \text{οποτε} \quad 8128=\sum_{\kappa=1}^{127}(-1)^{\kappa+1}$$

Παρόμοια εκφράζω και τον πέμπτο τέλειο, τον αριθμό 33550336 ως μερικό άθροισμα σειράς της προηγούμενης μορφής, λύοντας την εξίσωση:

$33550336=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$. Βρίσκω έτσι ν = 8191, οπότε ο τέλειος 335503336 γράφεται: $33550336 = \sum_{\kappa=1}^{8191}(-1)^{\kappa+1}.\kappa^2$

Διατυπώνω έτσι την πέμπτη ιδιότητα:

<u>5η ιδιότητα</u>: Κάθε τέλειος αριθμός ρ μπορεί να γραφτεί ως μερικό άθροισμα

περιττού πλήθους ν τετραγώνων φυσικών αριθμών, κατά τον τύπο:

$\rho = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}.\kappa^2$ όπου ν είναι η θετική ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$\nu^2+\nu-2\rho = 0$ και ρ ο τέλειος.
Μια παρατήρηση αφορά το άθροισμα των ψηφίων των οκτώ πρώτων

τελείων αριθμών, εξαιρουμένου του 6.

Προσθέτω τα ψηφία του τελείου αριθμού. Αν το άθροισμα των ψηφίων είναι διψήφιος αριθμός τότε ή θα είναι ο 10 (όπως συμβαίνει με τον τέλειο 28) ή και αυτού το άθροισμα των ψηφίων θα ισούται με 10 (όπως συμβαίνει με τους τέλειους 496, 8128.

Τάξη τελείου	Τέλειος	Πλήθος ψηφίων	Διψήφιο άθροισμα	□θροισμα ψηφίων διψήφιου
2	28	2	10	10
3	496	3	19	10
4	8128	4	19	10
5	33550336	8	28	10
6	8589869056	10	64	10
7	137438691328	12	55	10
8	2305843008139952128	19	73	10

Για τον 9_o τέλειο: ρ=2658455991569831744654692615953842176

το άθροισμα των 37 ψηφίων του είναι ο τριψήφιος 190. Παρατηρώ ότι και αυτού το άθροισμα των ψηφίων είναι 10.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Recreations in The Theory of Numbers. The queen of Mathematics Entertains,
Albert H. Beiler
(Dover Publications, inc. New York 1966 2th Edition)

2. A Course in Number Theory, H.E. Rose
(Clarendon Press - Oxford 1994)

3. An introduction to the Theory of Numbers, G.H. Hardy, E.M. Wright
(Clarendon Press - Oxford)

4. A concise introduction to the Theory of numbers, Alan Baker

(Cambridge University Press)

5. An introduction to the Theory of Numbers, Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman,
Hugh L. Montgomery)
(New York 1991)

6. Unsolved Problems in Number Theory, Volume 1, Richard K. Guy

7. Εισαγωγή στην Αναλυτική Θεωρία αριθμών, Tom Apostol
(Θωμά Μ. Αποστολοπούλου, Μετάφραση Ανδρέα Ζαχαρίου, Εκδόσεις Gutenberg)

8. Εισαγωγή στα Μαθηματικά, Α. Χαλάτσης
(Εκδόσεις ART of TEXT, Θεσσαλονίκη)

9. Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδος
(Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα)

10. Ιστορία των Μαθηματικών, Τόμος Α□ , G. Loria, (Ε.Μ.Ε., Εκδόσεις Παπαζήση)

11. Το βιβλίο των διαγωνισμών στα Μαθηματικά Λυκείου, Γιώργος Ν. Φιλίππου,
(ΚΥ.Μ.Ε., 1988)

12. Μαθηματικό Βήμα, Περιοδικό, τεύχη: β□ (1985) και θ□ (1992)

13. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ, Περιοδικό ΕΜΕ, τεύχος 1/1987 σελ. 65-66

ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΥΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

Χαράλαμπος Λουγκρίδης - Μαθηματικός Β.Δ.

Αριθμητικό τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που τα μέτρα των πλευρών και το εμβαδό του εκφράζονται με ακέραιους αριθμούς.

Ας είναι ν-1, ν, ν+1 φυσικοί αριθμοί που εκφράζουν τα μήκη των πλευρών του ζητούμενου τριγώνου. Αν τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου, τότε:

$$\tau=\frac{\nu-1+\nu+\nu+1}{2}=\frac{3\nu}{2},\quad \tau-\alpha=\frac{\nu+2}{2},\quad \tau-\beta=\frac{\nu}{2},\quad \tau-\gamma=\frac{\nu-2}{2}$$

Από τον τύπο του Ήρωνα: $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ βρίσκουμε:

$$E=\sqrt{\frac{3\nu}{2}\cdot\frac{\nu+2}{2}\cdot\frac{\nu}{2}\cdot\frac{\nu-2}{2}}=\frac{\nu}{4}\cdot\sqrt{3\left(\nu^2-4\right)} \quad \textbf{(1)}$$

Για να είναι το τρίγωνο αριθμητικό θα πρέπει και το εμβαδό του **Ε** να είναι φυσικός αριθμός, $\forall\nu\in N,\quad \nu\rangle 2$.

Αν το **ν** είναι περιττός αριθμός τότε και το $\boldsymbol{\nu^2}$ είναι περιττός, $\Rightarrow \nu^2-4$ περιττός

$\Rightarrow 3\left(\nu^2-4\right)$ δεν είναι άρτιος άρα και το εμβαδό του τριγώνου, όπως δίνεται από την (1) δεν είναι ακέραιος. Αποκλείεται λοιπόν το ν να είναι περιττός, άρα είναι άρτιος.

Στην παράσταση $A=\sqrt{3\left(\nu^2-4\right)}$ δίνω στο ν άρτιες τιμές, ώστε ο Α να είναι ακέραιος, τέτοιος που στη συνέχεια να προκύπτει και από την (1) ακέραιος αριθμός για το εμβαδό Ε. Δοκιμάζοντας βρίσκουμε:

α) Για ν= 4, $\Rightarrow A=6 \Rightarrow E=6 \Rightarrow$ αριθμητικό τρίγωνο με πλευρές 3, 4, 5.
β) Για ν= 14, $\Rightarrow A=24 \Rightarrow E=84 \Rightarrow$ αριθμ. τρίγωνο με πλευρές 13, 14, 15
γ) Για ν= 52, $\Rightarrow E=1170 \Rightarrow$ αριθμ. τρίγ. με πλευρές 51, 52, 53
δ) Για ν=194 $\Rightarrow E=16296 \Rightarrow$ αριθμ. τρίγωνο με πλευρές 193, 194, 195.

Τα πιο πάνω αριθμητικά τρίγωνα ανακάλυψε το 1792 ο Ιάπων **Genkei** [1] .

Συνεχίζοντας τις πιο πάνω δοκιμές βρίσκουμε για **ν=724** νέο αριθμητικό τρίγωνο με πλευρές 723, 724, 725 και εμβαδό Ε=226 974. Το τρίγωνο αυτό είναι οξυγώνιο, αφού ισχύει: $725^2<723^2+724^2$. Με το νόμο των συνημιτόνων βρίσκουμε ότι η μεγαλύτερη γωνία είναι $89^0\ 59'\ 59{,}8''$.

Σημαντική παρατήρηση είναι ότι αποκλείεται η εύρεση αριθμ. τριγώνου, που τα μέτρα των πλευρών του να είναι διαδοχικοί ακέραιοι και δυο από αυτούς να είναι άρτιοι.

Με πρόγραμμα στους Η.Υ.[2] βρίσκουμε και άλλα αριθμητικά τρίγωνα, των οποίων τα μέτρα των πλευρών να είναι διαδοχικοί ακέραιοι. Στον πίνακα **1** που ακολουθεί φαίνονται τα 10 πρώτα από αυτά.

Πίνακας 1

ν	Ε	ν-1	ν	ν+1	Σ	Σ΄	Σ΄΄
4	6	3	4	5	6	6	6
14	84	13	14	15	12	3	3
52	1170	51	52	53	9	9	9
194	16296	193	194	195	24	6	6
724	226974	723	724	725	30	3	3
2702	3161340	2701	2702	2703	18	9	9
10084	44031786	10083	10084	10085	33	6	6
37634	613283664	37633	37634	37635	39	12	3
140452	8541939510	140451	140452	140453	45	9	9
524174	118973869476	524173	524174	524175	69	15	6

Για τα δέκα αυτά τρίγωνα παρατηρούμε ότι:

α) η μεσαία πλευρά ν του τριγώνου λήγει διαδοχικά σε: 4, 4, 2
β) το εμβαδό λήγει αντίστοιχα σε: 6, 4, 0 και είναι πολλαπλάσιο του 6
γ) το μονοψήφιο άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που εκφράζει το εμβαδό είναι αντίστοιχα 6, 3, 9.

Στον πιο πάνω πίνακα **1** στην έκτη στήλη, **Σ** είναι το άθροισμα των ψηφίων του εμβαδού, στην έβδομη στήλη, **Σ΄** είναι το άθροισμα των ψηφίων του Σ, και στην όγδοη στήλη, **Σ΄΄** το άθροισμα των ψηφίων του Σ΄ κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε σε μονοψήφιο άθροισμα.

Μια άλλη παρατήρηση αφορά το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στη μεσαία πλευρά **ν** του τριγώνου. Από τον τύπο: $\upsilon = \frac{2E}{\nu}$ βρίσκω τα ύψη των πιο πάνω τριγώνων και διαπιστώνω ότι ισχύει η σχέση: $\upsilon_{2\kappa} = 2E_{\kappa}$.

Το ύψος υ είναι ακέραιος αριθμός και μάλιστα στα τρίγωνα αρτίας τάξης (2_o, 4_o, 6_o, ...) το ύψος αυτό $\upsilon_{2\kappa}$ ισούται με το διπλάσιο του αριθμού που εκφράζει το εμβαδό E_κ του τριγώνου τάξης κ.

Στον πίνακα **2** που ακολουθεί φαίνεται η παρατήρηση αυτή

Πίνακας 2

Τάξη	ν	E_κ	υ_κ	Σχέση
1_o	4	6	3	
2_o	14	84	12	υ_2=2E1
3_o	52	1170	45	
4_o	194	16296	168	$\upsilon_4=2E_2$
5_o	724	226974	627	
6_o	2702	3161340	2340	$\upsilon_6=2E_3$
7_o	10084	44031786	8733	
8_o	37634	613283664	32592	$\upsilon_8=2E_4$
9_o	140452	8541939510	121635	
10_o	524174	118973869476	453948	$\upsilon_{10}=2E_5$

Οι παρατηρήσεις μας αυτές επιβεβαιώνονται και για τα επόμενα δέκα αριθμητικά τρίγωνα με μεσαία πλευρά **α**: 1956244, 7300802, 27246964,...[3]. Ακόμη επιβεβαιώνονται και για τα επόμενα 60 αριθμητικά τρίγωνα[4] που προκύπτουν από τον τύπο: $\alpha_\mu = 4\alpha_{\mu-1} - \alpha_{\mu-2}$,[5] με αρχικές συνθήκες $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 4$: (Με την αναδρομική αυτή ακολουθία βρίσκουμε τη μεσαία πλευρά ν των αριθμητικών τριγώνων και κατ΄επέκταση τα αριθμητικά τρίγωνα).

Διατυπώνω έτσι την "εικασία" ότι για κάθε αριθμητικό τρίγωνο με μήκη πλευρών διαδοχικούς ακεραίους ισχύουν:

α) η μεσαία πλευρά ν λήγει διαδοχικά σε: 4, 4, 2
β) το εμβαδό λήγει αντίστοιχα σε: 6, 4, 0 και είναι πολλαπλάσιο του 6.
γ) το μονοψήφιο άθροισμα των ψηφίων του αριθμού που εκφράζει το εμβαδό είναι αντίστοιχα 6, 3, 9.
δ) το ύψος που αντιστοιχεί στη μεσαία πλευρά του τριγώνου τάξεως 2κ είναι ακέραιος αριθμός που ισούται με το διπλάσιο του αριθμού που εκφράζει το εμβαδό του τριγώνου τάξεως κ.

Παραπομπές:

1. "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ" 1974-75, Τεύχος 4, σελ.17, άρθρο Παρ. Μαρουσάκη
2. Ανδρέα Πολυδώρου: Πρόγραμμα στη γλώσσα Foxpro 2.6 for Windows, Μαθηματικό Βήμα, Τεύχος ΙΕ΄ 1998 (΄Αρθρο Χ.Λουγκρίδη).
3. Παντελή Δαμιανού: Μαθηματικό Βήμα, Τεύχος ΙΣΤ΄ 1999
4. Ανδρέα Πολυδώρου: Πίνακες αριθμητικών τριγώνων, 1999
5. Παντελή Δαμιανού, Μαθημ. Βήμα, Τεύχος ΙΣΤ΄ 1999.

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΠΡΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2000

Επιμέλεια
Ιωάννης Φάκας

1. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Κριόν την 20ην Μαρτίου εις τις 09ω, 35λ.
   Αρχή του Έαρος.
2. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Καρκίνο την 21ην Ιουνίου εις τις 03ω, 48λ.
   Αρχή του Θέρους.
3. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Ζυγόν την 22ην Σεπτεμβρίου εις τις 19ω, 27λ.
   Αρχή του Φθινοπώρου.
4. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Αιγόκερω την 21ην Δεκεμβρίου εις τις 15ω, 37λ.
   Αρχή του Χειμώνα.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

ΕΚΛΕΙΨΕΙΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2000

Υπάρχουν 6 εκλείψεις: 4 του Ηλίου και 2 της Σελήνης.

1. Ολική Έκλειψη Σελήνης 21ην Ιανουαρίου 2000. Ορατή από την Κύπρο.
   Στοιχεία της έκλειψης:
   Είσοδος στην παρασκιά: 4ω 3λ.
   Είσοδος στη σκιά 5ω 2λ.
   Αρχή της Ολικής Έκλειψης 6ω 5λ.
   Μέσον της έκλειψης 7ω 22λ.
   Έξοδος εκ της σκιάς 8ω 25λ.
   Έξοδος εκ της παρασκιάς 9ω 24λ.
   Μέγεθος έκλειψης 1,331.
   Την ημέρα της έκλειψης ο Ήλιος ανατέλλει στις 6ω 52λ.
   Το λυκόφως παρουσιάζεται στις 6ω 17λ.
2. Μερική Έκλειψη Ηλίου την 5η Φεβρουαρίου 2000.
   Το επίκεντρο της ευρίσκεται στο Νότιο Πόλο
   Αόρατη από τη Κύπρο.
3. Μερική Έκλειψη Ηλίου την 1η Ιουλίου 2000.
   Θα είναι ορατή από μία περιοχή στο Νότιο Ειρηνικό Ωκεανό,
   αόρατη από τη Κύπρο.
4. Ολική Έκλειψη Σελήνης την 16η Ιουλίου 2000.
   Αόρατη από τη Κύπρο.
5. Μερική Έκλειψη Ηλίου την 31η Ιουλίου 2000.
   Θα είναι ορατή σε μία περιοχή με επίκεντρο τον Βόρειο Πόλο.
   Αόρατη από τη Κύπρο.
6. Μερική Έκλειψη Ηλίου την 25η Δεκεμβρίου 2000.
   Ορατή σε μια περιοχή με επίκεντρο τη Β. Αμερική.
   Αόρατη από τη Κύπρο.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

ΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΣΕΛΗΝΗΣ

	Νέα Σελήνη		Πρώτο Τέταρτο		Πανσέληνος		Τελευταίο Τέταρτο
	ημ ω λ		ημ ω λ		ημ ω λ		ημ ω λ
Ιαν.	6 20 14	Ιαν.	14 15 34	Ιαν.	21 06 40	Ιαν.	28 09 57
Φεβ.	5 15 03	Φεβ.	13 01 21	Φεβ.	19 18 27	Φεβ.	27 05 53
Μαρ.	6 07 17	Μαρ.	13 08 59	Μάρ.	20 06 44	Μάρ.	28 02 21
Απρ.	4 20 12	Απρ.	11 15 30	Απρ.	18 19 41	Απρ.	26 21 30
Μάιος	4 06 12	Μάιος	10 22 00	Μάιος	18 09 34	Μάιος	26 13 55
Ιούν.	2 14 14	Ιούν.	9 05 29	Ιούν.	17 00 27	Ιούν.	25 03 00
Ιούλ.	1 21 20	Ιούλ.	8 14 53	Ιούλ.	16 15 55	Ιούλ.	24 13 02
Ιούλ.	31 04 25	Αύγ.	7 03 02	Αύγ.	15 07 13	Αυγ.	22 20 51
Αυγ.	29 12 19	Σεπ.	5 18 27	Σεπ.	13 21 37	Σεπ.	21 03 28
Σεπ.	27 21 53	Οκτ.	5 12 59	Οκτ.	13 10 53	Οκτ.	20 09 59
Οκτ.	27 09 58	Νιόβ.	4 09 27	Νιόβ.	11 23 15	Νιόβ.	18 17 24
Νιόβ.	26 01 11	Δεκ.	4 05 55	Δεκ.	11 11 03	Δεκ.	18 02 41
Δεκ.	25 19 22						

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία, Κύπρος
Τηλ-Φαξ: 2-379122/09-641843

Αποτελέσματα Επαρχιακών Διαγωνισμών στα Μαθηματικά για τις τάξεις Β' και Γ' Λυκείου
12 Δεκεμβρίου 1998

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία ανακοινώνει τα αποτελέσματα των επαρχιακών διαγωνισμών στα Μαθηματικά για τις τάξεις Β' και Γ Λυκείου που πραγματοποιήθηκαν στις 12 Δεκεμβρίου 1998.

<u>Επαρχία Λευκωσίας(Διαγωνισμός "ΙΑΚΩΒΟΣ ΠΑΤΑΤΣΟΣ")</u>
1° Βραβείο: Κουτσουλίδης Αναστάσιος, (Γ) , Παγκύπριο Γυμνάσιο
2° Βραβείο: Σολωμού Λοΐζος, (Γ), Λύκειο Παλλουριώτισσας
3° Βραβείο εξίσου στους: Χρίστου Κωνσταντίνα, (Γ), Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ
και Κρασιάς Μιχάλης, (Γ), Λύκειο Ακρόπολης
και Γεωργίου Νίκος, (Β'), Ενιαίο Λύκειο Κύκκου Α
και Ανδρέας Κοκκοφίτης του Κώστα(Γ) Ενιαίο Λύκειο Αρχαγγέλου

Επαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:
1ος. Σαββίδου Αντρια, Λύκειο Ακρόπολης
2ος. Κρύφτη Μαρία, Λύκειο Ακρόπολης
3ος. Πολυκάρπου Σόλωνας, Λύκειο Ακρόπολης
4ος. Αρμοστής Σπύρος, Λύκειο Παλλουριώτισσας
5ος. Παντζιαράς Μάριος, Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ

Εύφημη Μνεία στους:
1. Λουκά Φώτιος, Παγκύπριο Γυμνάσιο
2. Κρόνης Ιωάννης, Παγκύπριο Γυμνάσιο
3. Ρούσου Γεώργιος, Παγκύπριο Γυμνάσιο
4. Κούβαρος Γεώργιος, Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ
5. Ματθαίου Κάλλια, Λύκειο Αποστόλου Βαρνάβα
6. Παναγιώτη Σταυρινίδη, Λύκειο Ακρόπολης

Επαρχία Λεμεσού(Διαγωνισμός "ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΛΑΜΗΣ")

1° Βραβείο: Χαραλάμπους Θεμιστοκλής Χριστάκη, (Γ), Λύκειο Πολεμιδιών
2°& 3° Βραβείο εξίσου στους: Βρόντη Ελένη Χαράλαμπου, (Γ), Λανίτειο Λύκειο Α'
και Χριστοδούλου Στέλιος Χρίστου, (Β'), Λανίτειο Λύκειο Α'

Επαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:
1ος. Τσίκκου Χάρις Χριστοφόρου, (Β'), Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου
2ος. Πολυκάρπου Νικόδημος Ανδρέα, (Γ), Λανίτειο Λύκειο Β'
3ος. Νεοφύτου Χρίστος Σοφοκλή, (Γ), Λανίτειο Λύκειο Β'
4ος. Πετρίδης Νεόφυτος Δημήτρη, (Β'), Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου
5ος. Βασιλείου Παναγιώτα Ανδρέα, (Β'), Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου
6ος. Γρηγοριάδης Βασίλης Βασίλη, (Γ), Λανίτειο Λύκειο Α'

Εύφημη Μνεία στους:
1. Χαραλάμπους Ιάκωβος Σωτήρη, (Γ), Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου
2. Δημητρίου Τέλης Δημήτρη, (Β'), Λανίτειο Λύκειο Β'
3. Ηλιάδης Ανδρέας Παναγιώτη, (Β'), Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου
4. Παναγή Κροίσος Γεωργίου, (Β'), Λύκειο Πολεμιδιών
5. Γεωργιάδου Άννα Ιωάννη, (Γ), Λανίτειο Λύκειο Β'

Επαρχία Λάρνακας και Αμμοχώστου (Διαγωνισμός "ΠΕΤΡΑΚΗ ΚΥΠΡΙΑΝΟΥ")

1° Βραβείο εξίσου στους: Λάντος Γιώργος Αδάμου, (Β'), Λύκειο Παραλιμνίου
και Κύζα Ειρήνη Ανδρέα, (Γ) ,Λύκειο Παραλιμνίου
2° Βραβείο εξίσου στους: Βαβλίτης Παύλος Σταύρου, (Γ), Λύκειο Παραλιμνίου
και Ξενή Φλουρής Ξενή, (Β'), Λύκειο Παραλιμνίου

Επαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:
1ος. Χριστοδούλου Δάνος Χρίστου, (Γ) ,Λύκειο Αγίου Γεωργίου
2ος. Χ"Ματθαίου Νατάσα Παναγιώτη, (Β'), Λύκειο Μακαρίου Γ
3ος. Ιεροδιακόνου Έλενα Αιμιλίου, (Β') ,Λύκειο Παραλιμνίου

Επαρχία Πάφου(Διαγωνισμός "ΑΝΔΡΕΑΣ ΧΑΤΖΗΘΕΟΡΗΣ")
1° Βραβείο εξίσου στους: Στυλιανού Μαρία, (Γ), Λύκειο Κύκκου Πάφου
και Γιάγκου Ονούφριος, (Γ), Λύκειο Αγίου Νεοφύτου
2° Βραβείο: Κασιουλής Χαρίλαος, (Γ) ,Λύκειο Αγίου Νεοφύτου
3° Βραβείο: Νικολαΐδης Δώρος, (Γ), Α' Λύκειο Πάφου

Επαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:
1ος εξίσου στους: Μανώλη Θεοδώρα, (Γ) ,Λύκειο Κύκκου Πάφου
και Στασή Δέσποινα, (Β'), Α' Λύκειο Πάφου
2ος εξίσου στους: Ευσταθίου Ελισάβετ, (Γ), Α' Λύκειο Πάφου
και Φκιαράς Δημήτρης, (Β') ,Λύκειο Αγίου Νεοφύτου
3ος: Σωκράτους Νικόλαος, (Β'), Λύκειο Κύκκου Πάφου

Αποτελέσματα Παγκύπριου Διαγωνισμού Μαθηματικών «ΖΗΝΩΝ»

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία ανακοινώνει τα αποτελέσματα του παγκύπριου διαγωνισμού Μαθηματικών «ΖΗΝΩΝ» για τη Β΄ και Γ΄ Λυκείου που έγινε το Σάββατο 27 Φεβρουαρίου 1999.

1ο Βραβείο: *Μανώλη Θεοδώρα Πέτρου (Γ΄), Λύκειο Κύκκου, Πάφος*
2ο Βραβείο: *Χαραλάμπους Θεμιστοκλής Χριστάκη (Γ΄), Λύκειο Πολεμιδιών, Λεμεσός*
3ο Βραβείο: *Βαβλίτης Παύλος Σταύρου (Γ΄), Παγκύπριο Λύκειο, Λάρνακα*
1ος Επαινος: *Στυλιανού Μαρία Γεωργίου (Γ΄), Λύκειο Κύκκου, Πάφος*
2ος Επαινος: *Σολωμού Λοΐζος Γεωργίου (Γ΄), Λύκειο Παλλουριώτισσας, Λευκωσία*
3ος Επαινος: *Σωκράτους Νικόλας Βάσου (Β΄), Λύκειο Κύκκου, Πάφος*
4ος Επαινος: *Κρύφτη Μαρία Γεωργίου (Γ΄), Λύκειο Ακροπόλεως, Λευκωσία*
5ος Επαινος: *Ματθαίου Κάλλια Ματθαίου (Γ΄), Λύκειο Αποστόλου Βαρνάβα, Λευκωσία*
6ος Επαινος: *Σαββίδου Άντρια Λάμπρου (Γ΄), Λύκειο Ακροπόλεως, Λευκωσία*
7ος Επαινος: *Κύζα Ειρήνη Ανδρέα (Γ΄), Λύκειο Παραλιμνίου, Αμμόχωστος*
8ος Επαινος: *Γιάγκου Ονούφριος Ηροδότου (Γ΄), Λύκειο Αγίου Νεοφύτου, Πάφος*

Συμμετοχή στο διαγωνισμό επιλογής έχουν κερδίσει οι πιο κάτω μαθητές και στρατεύσιμοι:
Μαθητές κατά σειρά επιτυχίας:
Τσίκκου Χάρις Χριστοφόρου (Β΄), Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου, Λεμεσός
Σταυρινίδης Παναγιώτης Ευαγγέλου (Γ΄), Λύκειο Ακροπόλεως, Λευκωσία
Χριστοδούλου Δάνος Χρήστου (Γ΄), Λύκειο Αγίου Γεωργίου, Λάρνακα
Βασιλείου Παναγιώτα Ανδρέα (Β΄), Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου, Λεμεσός
Στρατεύσιμοι κατά σειρά επιτυχίας:
Παλαίχωρος Γεώργιος Σάββα, Λευκωσία
Σωκράτους Χριστόφορος Βάσου, Πάφος
Ιερωνύμου Εύης Ιωάννη, Πάφος
Χριστοφίδης Δημήτρης Χριστάκη, Λεμεσός

Αποτελέσματα Παγκύπριων Διαγωνισμών Γ' Γυμνασίου και Α' Λυκείου

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία ανακοινώνει τα αποτελέσματα των παγκύπριων διαγωνισμών Μαθηματικών «Ευαγόρας Παλληκαρίδης» για τη Γ' Γυμνασίου και «Πετράκης Γιάλλουρος» για την Α' Λυκείου που έγιναν το Σάββατο 13 Φεβρουαρίου 1999.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1° Βραβείο: *Σιαμμάς Δημήτρης Γιώργου, Γυμνάσιο Αρχ. Μακαρίου Γ', Λευκωσία*

2° Βραβείο εξίσου στους:

Ζαχαρία Κυριάκο Σίμου, Νικολαΐδειο Γυμνάσιο, Πάφος
Σεβδαλή Ιωάννα Βασίλη, Γυμνάσιο Διανέλλου και Θεοδότου, Λευκωσία.

1ος Έπαινος: *Μίτιλλος Χριστόδουλος Γιώργου, English School, Λευκωσία*

2ος Έπαινος εξίσου στους:

Βαρνάβα Χαράλαμπο Βαρνάβα, Γυμνάσιο Καθολικής, Λεμεσός
Χαραλάμπους Δημήτρης Χαράλαμπου, Γυμν. Διανέλλου και Θεοδότου, Λευκωσία

Εύφημη Μνεία στους:

Νικολάου Αλεξία Νικολάου, Γυμνάσιο Γεροσκήπου, Πάφος
Λαζάρου Σωτήρης Γεωργίου, Γυμνάσιο Γεροσκήπου, Πάφος
Αντωνίου Έλενα Αθανασίου, Γ' Γυμνάσιο Αγίου Ιωάννη, Λεμεσός

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

1° Βραβείο: *Ζαμπυρίνης Κωνσταντίνος Παντελή, Λύκειο Κύκκου, Πάφος*
2° Βραβείο: *Λεμονάρη Μαρίνα Βασίλη, Λύκειο Κύκκου, Πάφος*
3° Βραβείο: *Σαββίδου Χριστίνα Ανδρέα, Παγκύπριο Λύκειο, Λάρνακα*
1ος Έπαινος: *Πετρίδου Έλια Δημήτρη, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου, Λεμεσός*
2ος Έπαινος: *Ορφανίδης Γιώργος Μιχάλη, Λύκειο Αγίου Σπυρίδωνα, Λεμεσός*
3ος Έπαινος: *Τήλλυρου Δέσποινα Νικόλα, Λύκειο Παραλιμνίου, Αμμόχωστος*

Εύφημη Μνεία στους:

Κωνσταντινίδη Κλείτο Σόλωνα, Α' Λύκειο Εθν. Μακαρίου Γ', Πάφος
Χατζηκαλλή Κυριάκο Χρίστου, Ενιαίο Λύκειο Κύκκου Α', Λευκωσία
Ελευθερίου Θεόδωρο Κωνσταντίνου, Λανίτειο Λύκειο Α', Λεμεσός
Σταύρου Δήμητρα Σταύρου, Παγκύπριο Γυμνάσιο, Λευκωσία
Χαραλάμπους Ιφιγένεια Στυλιανού, Λύκειο Αγίου Νεοφύτου, Πάφος
Χριστοδούλου Ελπίδα Φειδία, Β' Λύκειο, Πάφος

Οι Χορηγοί των Βραβεύσεων των Διαγωνισμών της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Τράπεζα Κύπρου
Βραβείο για τον Παγκύπριο Διαγωνισμό Μαθηματικών

Ανδρούλλα Γαβριήλ Σκώττη
(Τελευταία χρονιά ως χορηγός: 1999)

Γλαύκος Αντωνιάδης
Γραμμάτιο (1000 Λ.Κ.)
Βραβείο για μαθητές που διαπρέπουν ή ανοίκουν στην ομάδα για ΒΜΟ / ΙΜΟ

Μαρία Ακύλα Χριστοδουλίδου
Χορηγός Παγκύπριου Διαγωνισμού για Α' Λυκείου
εις μνήμη του συζύγου της

Μαρία Ηλία για Χαράλαμπο Μορφάκη(δεν είναι στη ζωή)
Γραμμάτιο (4662 Λ. Κ.)
Βραβείο για Παγκύπριο Β' και Γ' Λυκείου
χορηγός εις μνήμη του γιου του που σκοτώθηκε σε δυστύχημα και
ήταν άριστος στα Μαθηματικά
Παρουσιάζεται η Μαρία Ηλία, θυγατέρα του Χ. Μορφάκη.

Κανίκλης Αντρέας
Γραμμάτιο (1019 Λ.Κ.)
Βραβείο για Επαρχιακό Λευκωσίας
εις μνήμη της συζύγου του Λέλιας(Μαθηματικού)

ΤΟΥΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΟΥΜΕ ΠΟΛΥ

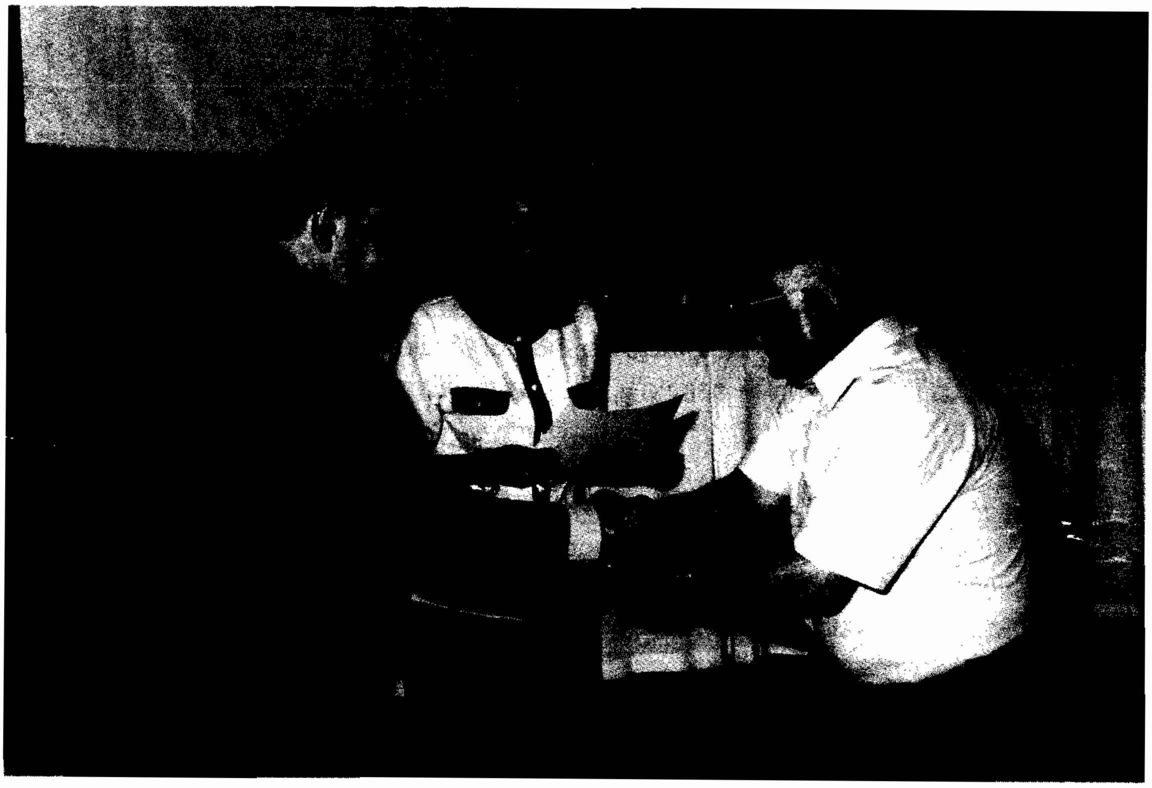
Τιμηθέντες Μαθηματικοί
που αφυπηρέτησαν κατά τη χρονιά 1998

Το Συμβούλιο της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας απεφάσισε να τιμά τους Μαθηματικούς που αφυπηρετούν από τη Δημόσια Εκπαιδευτική Υπηρεσία για τη προσφορά τους στη Μαθηματική Παιδεία της Κύπρου. Οι πρώτοι που βραβεύτηκαν με τιμητικό δίπλωμα και πλακέτα ήταν αυτοί που αφυπηρέτησαν το 1998 και οι οποίοι παρουσιάζονται πιο κάτω.

Μαθηματικοί που βραβεύθηκαν :

26 Μαΐου 1999

Κακκίντηρο Ευστάθιο
Στασόπουλλο Μιχαήλ
Πέτρου Αικατερίνη
Μιχαηλίδου Μαρία
Βασιλείου Χριστάκη
Μιχαηλίδη Μιχαήλ
Φάνη Λουκά
Χατζηθεοδοσίου Χάρη



Στη φωτογραφία ο πρώην επιθεωρητής μαθηματικών κ. Χάρης Χατζηθεοδοσίου δέχεται τις τιμές από τον πρόεδρο της ΚΥ.Μ.Ε Δρα Γρηγόρης Μακρίδη και την κ. Κλαίλια Σκοτεινού μέλους του Δ.Σ. της ΚΥ.Μ.Ε. και επιθεωρήτριας μαθηματικών.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Τ.Θ. 25675, 1311 Λευκωσία, Κύπρος
Φαξ-τηλ: 2-379122/ Κοιν. 09-641843

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία ανακοινώνει τους μαθητές που αποτέλεσαν τις Κυπριακές ομάδες για τη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές Β' και Γ' Λυκείου που έγίνε στα Σκόπια στις 5-10 Μαϊου 1999 για τη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 ετών που έγινε στη Βουλγαρία στις 24-27 Ιουνίου 1999 και για τη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα που έγινε στη Ρουμανία τον Ιούλιο 1999.

Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές Β' και Γ' Λυκείου

Χαραλάμπους Θεμιστοκλής, Λύκειο Πολεμιδιών, Λεμεσός
Σωκράτους Νικόλας, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
Μανώλη Θεοδώρα, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
Στυλιανού Μαρία, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
Ματθαίου Κάλλια, Λύκειο Αποστόλου Βαρνάβα, Λευκωσία
Σταυρινίδης Παναγιώτης, Λύκειο Ακροπόλεως, Λευκωσία

(Στη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα δεν λάβαμε μέρος τελικά λόγω του πολέμου στη Γιουγκοσλαβία)

Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 ετών

1. Μίτιλλος Χριστόδουλος, English School, Λευκωσία **(Επαινο)**
2. Ορφανίδης Γιώργος, Λύκειο Αγ. Σπυρίδωνα, Λεμεσός **(Επαινο)**
3. Σιαμμάς Δημήτρης, Γυμνάσιο Αρχ. Μακαρίου Γ΄. Λευκωσία **(Επαινο)**
4. Ζαχαρία Κυριάκος Σίμου, Νικολαΐδειο Γυμνάσιο, Πάφος **(Χάλκινο Μετάλλιο)**
5. Νικολάου Αλεξία, Γυμνάσιο Γεροσκήπου, Πάφος **(Επαινο)**

Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα 1999

Σωκράτους Νικόλας, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
Μανώλη Θεοδώρα, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
Στυλιανού Μαρία, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
Ιερωνύμου Εύης, Στρατεύσιμος
Χριστοφίδης Δημήτρης, Στρατεύσιμος
Παλαίχωρος Γεώργος, Στρατεύσιμος **(Επαινο)**

Η Κυπριακή αποστολή στη 3η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 ετών που έγινε στη Βουλγαρία.

Η Κυπριακή αποστολή στη 40η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα που έγινε στη Ρουμανία.

<u>ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ</u>

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
"ΙΑΚΩΒΟΣ ΠΑΤΑΤΣΟΣ"

<u>Ημερομηνία και ώρα εξέτασης</u>
Λευκωσία 12.12.98
9.30 –12.30

<u>Επιμέλεια</u>
Σάββας Αντωνίου
Κυριάκος Αντωνίου

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με είκοσι (20) μονάδες.

1. Να δείξετε ότι $\eta\mu\dfrac{\pi}{24}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

2. Από το μέσο Μ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ενός κύκλου φέρουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνουν την χορδή ΑΒ στα Δ και Ε και το κύκλο στα Η, Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

3. Να λυθεί το σύστημα : $\dfrac{\chi(\psi\omega+1)}{\omega}=\dfrac{\psi(\omega\chi+1)}{\chi}=\dfrac{\omega(\chi\psi+1)}{\psi}=2$

4. Έστω η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1=3$ και $\alpha_{\nu+1}=\dfrac{2\alpha_\nu-1}{\alpha_\nu}$

(α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu=\dfrac{1}{\alpha_\nu-1}$ είναι αριθμητική πρόοδος.

(β) Να βρείτε το νιοστό όρο της (α_ν) και να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S_\nu=\frac{1}{\alpha_1-1}+\frac{1}{\alpha_2-1}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu-1}$$

5. Σε κύκλο (Ο,R) θεωρούμε χορδή $AB=R\sqrt{3}$ και το απόστημα της, ΟΜ που τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Γ. Με διάμετρο ΜΓ γράφουμε κύκλο με κέντρο Κ. Να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου που εφάπτεται με τους κύκλους (Ο,R), (Κ,ΚΜ) με τη χορδή ΑΒ σε σημείο διαφορετικό του Μ.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

1. Να δείξετε ότι $\eta\mu\dfrac{\pi}{24}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

<u>Λύση</u>

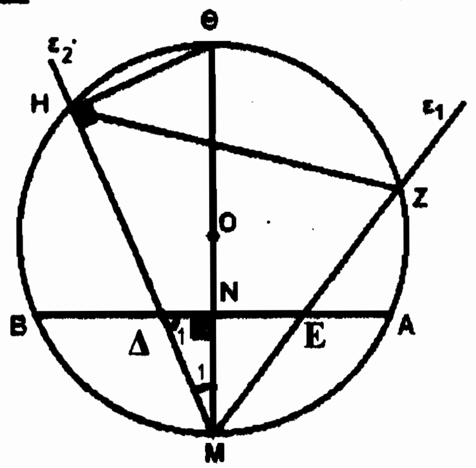
$$\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\Rightarrow \underline{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\eta\mu^2\frac{\pi}{24}=\frac{1}{2}\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\Rightarrow$$

$$\underline{\eta\mu\frac{\pi}{24}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

2. Από το μέσο Μ τόξου $\widehat{AB}$ ενός κύκλου φέρουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνουν την χορδή ΑΒ στα Δ και Ε και το κύκλο στα Η, Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση



Από το μέσο Μ του τόξου $\widehat{AB}$ φέρω κάθετο στη χορδή ΑΒ την ευθεία ΜΝΘ η οποία διέρχεται και από το κέντρο Ο δηλαδή ΜΘ διάμετρος.

$\hat{\Theta} = \hat{Z}$ *(στο ίδιο τόξο $H\widehat{A}B$)* *(1)*

$\hat{H} = 90^0$ *(ΘΜ διάμετρος)* $\Rightarrow$

$\hat{\Theta} + \hat{M}_1 = 90^0$ *(2)*

$\hat{N} = 90^0$ $(MN \perp AB) \Rightarrow \hat{\Delta}_1 + \hat{M}_1 = 90^0$ *(3)*

$(2) \wedge (3) \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\Theta}$ *(4)*

$(1) \wedge (4) \Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{Z}$

Επειδή $\hat{\Delta}_1$ είναι η απέναντι εξωτερική γωνία της $\hat{Z}$ συνεπάγεται ότι το ΔΕΖΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

3. Να λυθεί το σύστημα : $\dfrac{\chi(\psi\omega+1)}{\omega} = \dfrac{\psi(\omega\chi+1)}{\chi} = \dfrac{\omega(\chi\psi+1)}{\psi} = 2$

Λύση $\chi \cdot \psi \cdot \omega \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\chi(\psi\omega+1)}{\omega} = 2 \Rightarrow \chi\psi\omega + \chi = 2\omega \\ \dfrac{\psi(\omega\chi+1)}{\chi} = 2 \Rightarrow \chi\psi\omega + \psi = 2\chi \\ \dfrac{\omega(\chi\psi+1)}{\psi} = 2 \Rightarrow \chi\psi\omega + \omega = 2\psi \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Θέτω } \chi\psi\omega = \kappa \Rightarrow$$

$\chi = 2\omega - \kappa$ *(1)* $\qquad \psi = 2\chi - \kappa$ *(2)* $\qquad \omega = 2\psi - \kappa$ *(3)*

$$\left.\begin{array}{l} \psi = 2\chi - \kappa \\ \chi = 2\omega - \kappa \end{array}\right\} \Rightarrow \psi = 2(2\omega - \kappa) - \kappa \Rightarrow \psi = 4\omega - 3\kappa$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi = 4\omega - 3\kappa \\ \omega = 2\psi - \kappa \end{array}\right\} \Rightarrow \omega = 2(4\omega - 3\kappa) - \kappa \Rightarrow \omega = 8\omega - 6\kappa - \kappa \Rightarrow 7\kappa = 7\omega \Rightarrow \underline{\kappa = \omega}$$

Αντικαθιστώ στις (1) και (2) $\Rightarrow \chi = \kappa$ *και* $\psi = \kappa$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \chi = \psi = \omega = \kappa \\ \chi \cdot \psi \cdot \omega = \kappa \end{array}\right\} \Rightarrow \kappa^3 = \kappa \Rightarrow \kappa = \pm 1 \qquad \kappa \neq 0$$

$$\Rightarrow (\chi, \psi, \omega) \in \{(1, 1, 1), (-1, -1, -1)\}$$

4. Έστω η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{2\alpha_\nu - 1}{\alpha_\nu}$

(α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu - 1}$ είναι αριθμητική πρόοδος.

(β) Να βρείτε το νιοστό όρο της (α_ν) και να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S_\nu = \frac{1}{\alpha_1 - 1} + \frac{1}{\alpha_2 - 1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_\nu - 1}$$

Λύση

(α) Για να δείξω ότι η β_ν είναι Α.Π. πρέπει να δείξω ότι $\beta_{\nu+1} - \beta_\nu$ είναι σταθερή.

$$\beta_{\nu+1} - \beta_\nu = \frac{1}{\alpha_{\nu+1} - 1} - \frac{1}{\alpha_\nu - 1} = \frac{1}{\frac{2\alpha_\nu - 1}{\alpha_\nu} - 1} - \frac{1}{\alpha_\nu - 1} = \frac{\alpha_\nu}{2\alpha_\nu - 1 - \alpha_\nu} - \frac{1}{\alpha_\nu - 1} =$$

$$= \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu - 1} - \frac{1}{\alpha_\nu - 1} = \frac{\alpha_\nu - 1}{\alpha_\nu - 1} = 1 \text{ σταθερή} \Rightarrow \beta_\nu \text{ είναι Α.Π.}$$

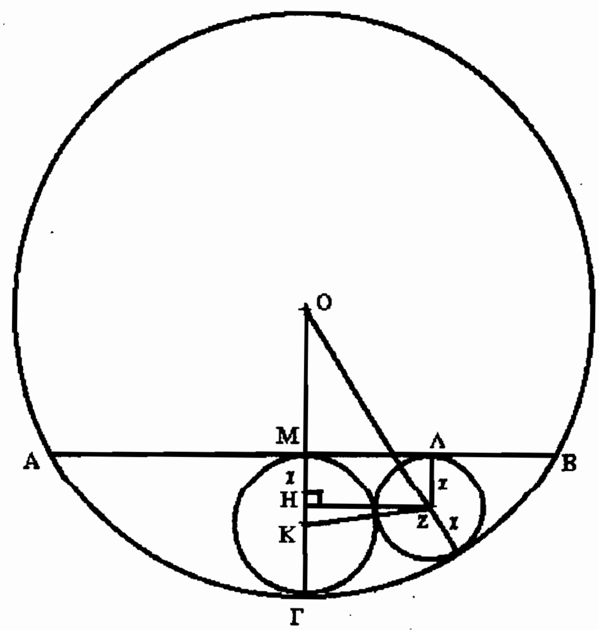
(β) $\delta = 1 \quad \beta_1 = \dfrac{1}{\alpha_1 - 1} = \dfrac{1}{3 - 1} = \dfrac{1}{2}$

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu - 1)\delta \Rightarrow \frac{1}{\alpha_\nu - 1} = \frac{1}{2} + (\nu - 1) \Rightarrow \frac{1}{\alpha_\nu - 1} = \frac{2\nu - 1}{2} \Rightarrow \alpha_\nu - 1 = \frac{2}{2\nu - 1}$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu = \frac{2}{2\nu - 1} + 1 \Rightarrow \underline{\alpha_\nu = \frac{2\nu + 1}{2\nu - 1}}$$

$$S_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu = \frac{\left[2 \cdot \frac{1}{2} + (\nu - 1)\delta\right]\nu}{2} = \frac{(1 + \nu - 1)\nu}{2} = \frac{\nu^2}{2}$$

5. Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε χορδή AB = $R\sqrt{3}$ και το απόστημα της OM, που τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο Γ. Με διάμετρο ΜΓ γράφουμε κύκλο με κέντρο Κ. Να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου που εφάπτεται με τους κύκλους (O,R), (K,KM) με τη χορδή AB σε σημείο διαφορετικό του Μ.



Λύση

(OZ) = R−χ

$\alpha_3 = (OM) = \dfrac{R}{2} \Rightarrow (OH) = \dfrac{R}{2} + x$

$(M\Gamma) = \dfrac{R}{2} \Rightarrow (MK) = \dfrac{R}{4}$

$\Rightarrow \quad (HK) = \dfrac{R}{4} - \chi$

$(KZ) = \dfrac{R}{4} + \chi$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ZHK}$

$\Rightarrow (ZH)^2 = (ZK)^2 - (HK)^2$

$$\Rightarrow (ZH)^2 = \left(\frac{R}{4}+\chi\right)^2 - \left(\frac{R}{4}-\chi\right)^2 = R\cdot\chi$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{OHZ}$ *έχουμε ότι* $(OZ)^2 = (OH)^2 + (HZ)^2$

$$\Rightarrow (R-\chi)^2 = \left(\frac{R}{2}+\chi\right)^2 + R\cdot\chi \Rightarrow R^2 - 2R\chi + \chi^2 = \frac{R^2}{4} + \chi^2 + R\chi + R\chi \Rightarrow$$

$$R^2 - \frac{R^2}{4} = 2R\chi + Rx + Rx \Rightarrow 4R\chi = 3\frac{R^2}{4} \Rightarrow \chi = \frac{3R}{16}$$

Το μήκος του κύκλου (Z, χ) *είναι* $\Gamma = 2\pi\chi = 2\pi\frac{3R}{16} = \frac{3R\pi}{8}$

Το εμβαδό του κύκλου (Z,χ) *είναι* $E = \pi\cdot\chi^2 = \pi\left(\frac{3R}{16}\right)^2 = \frac{9\pi R^2}{256}$

<u>ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ</u>

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΜΕΣΟΥ ΓΙΑ ΤΗ Β' ΚΑΙ Γ' ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ "ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΛΑΜΗΣ"

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης*</u>	<u>*Επιμέλεια*</u>
12.12.99	Χρ. Παπαχριστοδούλου
9.30΄–12.30΄	Μάριος Ευσταθίου

1. Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα Κ, Λ εφάπτονται στο Α. Σχηματίζουμε πλάγιο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ (Μ σημείο του κύκλου με κέντρο το Λ και Ν σημείο του κύκλου με κέντρο το Κ). Γράφουμε με διάμετρο ΜΝ ημικύκλιο εκτός του παραλληλογράμμου. Να αποδειχτεί ότι το παραλληλόγραμμο έχει ίσο εμβαδό με εκείνο του χωρίου που περικλείεται από τα μικρότερα ημικυκλίου τόξα ΑΝ, ΑΜ και το ημικύκλιο ΜΝ.

2. Δίνεται η εξίσωση: $(x^2+\lambda x+1)^2-\mu^2=0$, με $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ και $\mu>0$. Αν οι 4 ρίζες της είναι πραγματικές άνισες και διαδοχικοί όροι Α.Π. να αποδειχτεί ότι $\lambda^2-5\mu=4$.

3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι η εσωτερική διχοτόμος. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι γύρω από τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδειχτεί ότι $ΒΖ = ΓΕ = \dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}$.

4. Να αποδειχτεί ότι για τις γωνίες α,β με 0<α, β<π ισχύει: $\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta \le \eta\mu^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (1).

   Με τη βοήθεια της σχέσης (1) και για 0<α, β, γ, δ<π να αποδειχτεί ότι ισχύει:

   $$\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma\,\eta\mu\delta \le \eta\mu^4\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right) \quad (2).$$

   Για $\delta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ και με τη βοήθεια της σχέσης (2) να αποδειχτεί ότι:

   $$\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma \le \eta\mu^3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

   Αν Α, Β, Γ γωνιές τριγώνου, να αποδειχτεί ότι: $0 < \eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu \Gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5. Δίνονται τα σημεία Α (ασυνθ, βημθ), Β(α συνφ, βημφ) και Γ (α, 0) με α, β $\neq$ 0 και $0<\theta+\varphi<\pi$.

   i) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι:

   $$\beta x\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + \alpha y\eta\mu\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = \alpha\beta\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

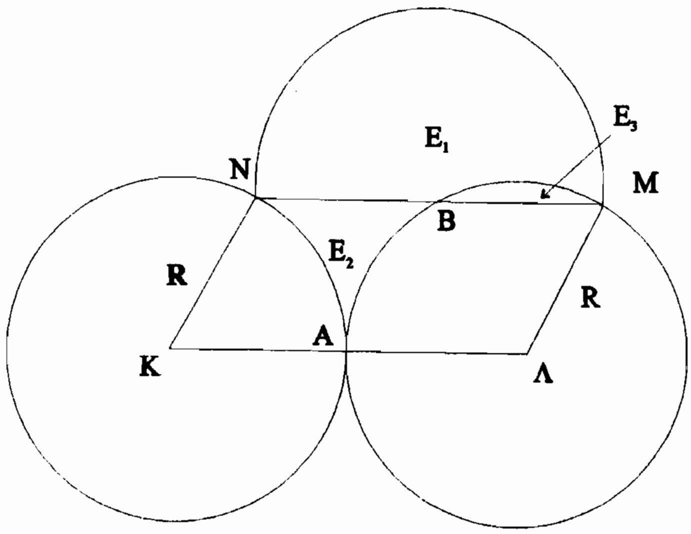
   ii) Αν η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι ορθή να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}\,\varepsilon\varphi\dfrac{\phi}{2}=-\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ και ότι η ΑΒ συναντά τον άξονα x΄ο x στο σημείο $\Delta\left[\alpha\left(\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right),0\right]$.

ΛΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΝΤΑΙ

1. Δύο ίσοι κύκλοι με κέντρα Κ, Λ εφάπτονται στο Α. Σχηματίζουμε πλάγιο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ (Μ σημείο του κύκλου με κέντρο το Λ και Ν σημείο του κύκλου με κέντρο το Κ). Γράφουμε με διάμετρο ΜΝ ημικύκλιο εκτός του παραλληλογράμμου. Να αποδειχτεί ότι το παραλληλόγραμμο έχει ίσο εμβαδό με εκείνο του χωρίου που περικλείεται από τα μικρότερα ημικυκλίου τόξα ΑΝ, ΑΜ και το ημικύκλιο ΜΝ.

Λύση

---*---



ΚΛΜΝ# ⇒ΚΛ=ΜΝ άρα το ημικύκλιο έχει ακτίνα ίση με την ακτίνα των 2 κύκλων (Κ,R), (Λ,R).

E_1: Εμβαδό ημικυκλίου με διάμετρο ΜΝ.
E_2: Εμβαδό καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΝ.
E_3: Εμβαδό κυκλικού τμήματος.

$$E_{\pi\alpha\rho} = E_{\kappa.\tau o\mu.KAN} + E_{\kappa.\tau o\mu.A\Lambda M} + E_2 - E_3$$

$$= \frac{\pi R^2 \omega}{360^0} + \frac{\pi R^2 \phi}{360^0} + E_2 - E_3$$

$$= \frac{\pi R^2(\omega + \phi)}{360^0} + E_2 - E_3 = \frac{\pi R^2 180}{360^0} + E_2 - E_3$$

$$= E_{\eta\mu.MN} + E_2 - E_3 = E_1 + E_2 - E_3 = E_{\kappa\alpha\mu\pi\upsilon\lambda o\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu o\upsilon\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ AMN}$$

2. Δίνεται η εξίσωση: $(x^2 + \lambda x + 1)^2 - \mu^2 = 0$, με $\lambda, \mu \in R$ και $\mu > 0$. Αν οι 4 ρίζες της είναι πραγματικές άνισες και διαδοχικοί όροι Α.Π. να αποδειχτεί ότι $\lambda^2 - 5\mu = 4$.

ΛΥΣΗ

---*---

$$(x^2 + \lambda x + 1)^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow (x^2 + \lambda x + 1 - \mu) (x^2 + \lambda x + 1 + \mu) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x^2 + \lambda x + 1 - \mu) = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + \lambda x + 1 + \mu) = 0 \quad (2)$$

Έστω Δ_1, Δ_2 οι διακρίνουσες των (1) και (2).

$\Delta_1 = \lambda^2 - 4 + 4\mu$ και $\Delta_2 = \lambda^2 - 4 - 4\mu$. Επειδή $\mu > 0$, $\Delta_1 > \Delta_2$. Οι ρίζες των (1) και (2) είναι κατα σειρά μεγέθους:

$$\frac{-\lambda-\sqrt{\Delta_1}}{2} < \frac{-\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2} < \frac{-\lambda+\sqrt{\Delta_2}}{2} < \frac{-\lambda+\sqrt{\Delta_1}}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{\Delta_1} < -\sqrt{\Delta_2} < \sqrt{\Delta_2} < \sqrt{\Delta_1}$$

Έτσι αφού οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι όροι Α.Π. θα έχουμε τους διαδοχικούς όρους Α.Π:

α) $-\sqrt{\Delta_1}$, $-\sqrt{\Delta_2}$, $\sqrt{\Delta_2}$,$\sqrt{\Delta_1}$ ή

β) $\sqrt{\Delta_1}$,$\sqrt{\Delta_2}$,$-\sqrt{\Delta_2}$, $-\sqrt{\Delta_1}$

α) $\Rightarrow -2\sqrt{\Delta_2} = \sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_1}$ (3)

$2\sqrt{\Delta_2} = \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}$ (4)

Οι (3) και (4) είναι ισοδύναμες έτσι:

$$3\sqrt{\Delta_2} = \sqrt{\Delta_1} \Rightarrow 9\Delta_2 = \Delta_1$$

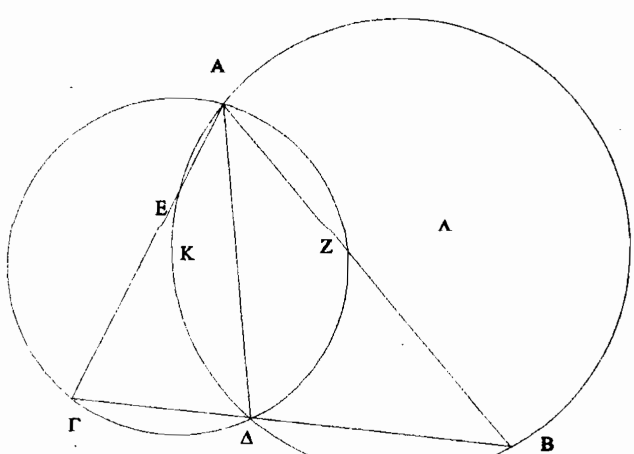
$$\Rightarrow 9\,(\lambda^2 - 4\mu - 4) = \lambda^2 - 4 + 4\mu \Rightarrow$$

$$8\lambda^2 - 40\mu - 32 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\mu - 4 = 0$$

β) Προκύπτει η ίδια σχέση όπως στο α.

3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι η εσωτερική διχοτόμος. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι γύρω από τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδειχτεί ότι $ΒΖ = ΓΕ = \dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}$.

Λύση



Δύναμη των σημείων Β και Γ ως προς τους κύκλους κέντρων Κ και Λ.

$(ΓΔ)(ΓΒ) = (ΓΕ)(ΓΑ) \qquad (1)$
$(ΒΔ)(ΓΒ) = (ΒΖ)(ΒΑ) \qquad (2)$

διαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη οπότε:

$$\frac{(ΓΔ)}{(ΒΔ)} = \frac{(ΓΕ)(ΓΑ)}{(ΒΖ)(ΒΑ)} \qquad (3)$$

όμως ΑΔ διχοτόμος $\Rightarrow \dfrac{(ΓΔ)}{(ΒΔ)} = \dfrac{(ΓΑ)}{(ΒΑ)} \qquad (4)$

(3) και (4) $\Rightarrow \dfrac{(ΓΕ)}{(ΒΖ)} = 1 \Rightarrow (ΓΕ) = (ΒΖ) \qquad (5)$

(1) και (2) $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $(ΓΔ)(ΓΒ) = (ΓΕ)(ΓΑ)$ με προσθ.
$(ΒΔ)(ΓΒ) = (ΓΕ)(ΑΒ)$ $\Rightarrow$

$$(ΒΓ)^2 = (ΓΕ)[(ΑΓ) + (ΑΒ)] \Rightarrow α^2 = (ΓΕ)\,(β + γ) \Rightarrow$$

$$(ΓΕ) = \frac{α^2}{β + γ}$$

4. Να αποδειχτεί ότι για τις γωνιές α,β με 0<α, β<π ισχύει: $ημα\,ημβ \le ημ^2\left(\dfrac{α+β}{2}\right)$ (1).

Με τη βοήθεια της σχέσης (1) και για 0<α, β, γ, δ<π να αποδειχτεί ότι ισχύει:

$ημα\,ημβ\,ημγ\,ημδ \le ημ^4\left(\dfrac{α+β+γ+δ}{4}\right)$ (2).

Για $δ = \dfrac{α+β+γ}{3}$ και με τη βοήθεια της σχέσης (2) να αποδειχτεί ότι:

$ημα\,ημβ\,ημγ \le ημ^3\left(\dfrac{α+β+γ}{3}\right)$

Αν Α, Β, Γ γωνιές τριγώνου, να αποδειχτεί ότι: $0 < ημΑ\,ημΒ\,ημΓ \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

<u>Λύση</u>

α) $ημα\,ημβ = \dfrac{συν(α-β) - συν(α+β)}{2} \le \dfrac{1 - συν(α+β)}{2} = ημ^2\left(\dfrac{α+β}{2}\right) \qquad (1)$

β) $ημα\,ημβ\,ημγ\,ημδ \le ημ^2\left(\dfrac{α+β}{2}\right)ημ^2\left(\dfrac{γ+δ}{2}\right) =$

$$\left[ημ\left(\frac{α+β}{2}\right)ημ\left(\frac{γ+δ}{2}\right)\right]^2 \le \left[ημ^2\left(\frac{α+β+γ+δ}{4}\right)\right]^2 = ημ^4\left(\frac{α+β+γ+δ}{4}\right) \qquad (2)$$

γ) $\delta=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=3\delta$ (3)

$$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma\,\eta\mu\delta \le \eta\mu^4\left(\frac{4\delta}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma \le \eta\mu^3\delta = \eta\mu^3\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \quad (4)$$

Α, Β, Γ γωνιές τριγώνου $\Rightarrow 0 < A, B, \Gamma < \pi \Rightarrow$ ισχύει η (4) $\Rightarrow$

$$0 < \eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma \le \eta\mu^3\left(\frac{A+B+\Gamma}{3}\right) = \eta\mu^3 60 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

αφού ημΑ, ημΒ, ημΓ θετικά.

5. Δίνονται τα σημεία Α (ασυνθ, βημθ), Β(α συνφ, βημφ) και Γ (α, 0) με **α, β ≠ 0 και 0 < θ+φ < π.**

i) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι:

$$\beta x\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + \alpha y\eta\mu\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = \alpha\beta\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

ii) Αν η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι ορθή να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\phi}{2} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2}$ **και ότι η ΑΒ συναντά τον** άξονα x΄ο x στο σημείο $\Delta\left[\alpha\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right),0\right]$.

<u>Λύση</u>

Α (α συνθ, β ημθ), Β (α συνφ, β ημφ), Γ (α, 0).

$$AB:\ \frac{y-\beta\eta\mu\theta}{x-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\beta(\eta\mu\phi-\eta\mu\theta)}{\alpha(\sigma\upsilon\nu\phi-\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{\beta\cdot 2\cdot\eta\mu\left(\frac{\phi-\theta}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)}{\alpha\cdot 2\cdot\eta\mu\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\alpha\ \eta\mu\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)y + \beta\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)x = \alpha\beta(\ \sigma\upsilon\nu\theta\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right) + \eta\mu\theta\ \eta\mu\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha\ \eta\mu\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)y + \beta\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)x = \alpha\beta\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) \quad (1)$$

β) $\lambda_{A\Gamma}\,\lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow \frac{\beta\eta\mu\theta-0}{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta-\alpha}\cdot\frac{\beta\eta\mu\phi}{\alpha\sigma\upsilon\nu\phi-\alpha} = -1 \Rightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}2\eta\mu\frac{\phi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\phi}{2}}{2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}2\eta\mu^2\frac{\phi}{2}} = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\ \varepsilon\varphi\frac{\phi}{2} = \frac{-\beta^2}{\alpha^2} \Rightarrow \frac{\eta\mu\frac{\theta}{2}\cdot\eta\mu\frac{\phi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\phi}{2}} = \frac{-\beta^2}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\eta\mu\frac{\theta}{2}\cdot\eta\mu\frac{\phi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\phi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\phi}{2}-\eta\mu\frac{\theta}{2}\cdot\eta\mu\frac{\phi}{2}} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \quad (2) \qquad \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\phi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+\phi}{2}} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \quad (3)$$

Σημείο τομής με άξονα x΄ο x $\quad y = 0 \Rightarrow$

$$\beta\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\phi+\theta}{2}\right)x = \alpha\,\beta\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) \Rightarrow \quad x = \alpha\,\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\phi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+\phi}{2}} \overset{(3)}{=} \alpha\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \Rightarrow \Delta\left[\alpha\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\right),0\right]$$

* * * * *

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΛΑΡΝΑΚΑΣ – ΑΜΜΟΧΩΣΤΟΥ
ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ «ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΚΥΠΡΙΑΝΟΥ»

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης
12.12.1998 – 3 ώρες
9.30-12.30

Επιμέλεια
Ανδρέας Σαββίδης
Ανδρέας Φιλίππου

Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Αν ισχύει η σχέση : $\varepsilon\phi\frac{\chi+\alpha}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\chi-\alpha}{2}=\varepsilon\phi^2\frac{\beta}{2}$

να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta$

2. Να δείξετε ότι ο αριθμός $5^{2\nu+1}\cdot2^{\nu+2}+3^{\nu+2}\cdot2^{2\nu+1}$ είναι διαιρετός με το 19, $\forall\ \nu\in\mathbf{N}$

3. α) Αν $\alpha+\beta=45^0$, να δείξετε ότι: $(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot(1+\varepsilon\varphi\beta)=2$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A=(1+\varepsilon\varphi1^0)\,(1+\varepsilon\varphi2^0)\,(1+\varepsilon\varphi3^0)\ \ldots\ (1+\varepsilon\varphi44^0)$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=β, ΒΓ=α και ΒΑΓ=20^0. Αν Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ ώστε ΔΒΓ=20^0 , να δείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma=\alpha^2/\beta$ και β) $\alpha^3+\beta^3=3\alpha\beta^2$.

5. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ να πάρετε σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε να είναι ΑΕ=ΒΖ=λ. Να φέρετε τη ΔΗ κάθετη στη ΕΖ, που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Να δείξετε ότι: $\widehat{EMZ}=90^0$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν ισχύει η σχέση : $\varepsilon\phi\frac{\chi+\alpha}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\chi-\alpha}{2}=\varepsilon\phi^2\frac{\beta}{2}$

να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta$

Λύση

$$\varepsilon\phi\frac{\chi+\alpha}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\chi-\alpha}{2}=\varepsilon\phi^2\frac{\beta}{2}\Rightarrow\frac{\eta\mu\frac{\chi+\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\alpha}{2}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{\chi-\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\alpha}{2}}=\frac{\eta\mu^2\frac{\beta}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\beta}{2}}\qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\alpha-\chi+\alpha}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\alpha+\chi-\alpha}{2}\right]}{\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\alpha-\chi+\alpha}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\alpha+\chi-\alpha}{2}\right]}=\frac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\beta}{2}}{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\beta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\chi}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\beta}{1+\sigma\upsilon\nu\beta} \Rightarrow (\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\chi)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\beta)=(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\chi)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\beta)$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\chi-\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=2\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$$

2. Να δείξετε ότι ο αριθμός $5^{2\nu+1}\cdot 2^{\nu+2}+3^{\nu+2}\cdot 2^{2\nu+1}$

είναι διαιρετός με το 19, $\forall\, \nu \in \mathbf{N}$.

Λύση

(Μέθοδος τέλειας επαγωγής)

Για $\nu=1$ $\quad 5^3\cdot 2^3+3^3\cdot 2^3=10^3+6^3\ 1216=64\cdot 19=$ *πολ/σιο 19*

Θεωρούμε ότι για $\nu=\kappa$ *είναι αληθής :*

$$(1)\quad 5^{2\kappa+1}\cdot 2^{\kappa+2}+3^{\kappa+2}\cdot 2^{2\kappa+1}=\text{πολ/σιο } 19=19\lambda,\qquad \lambda\in N$$

Θα δείξουμε ότι για $\nu=\kappa+1$ *είναι αληθής*

$$(2)\quad 5^{2\kappa+3}\cdot 2^{\kappa+3}+3^{\kappa+3}\cdot 2^{2\kappa+3}=\text{πολ/σιο } 19=19\mu,\qquad \mu\in N$$

Α΄ μέλος (2) $=5^{2\kappa+3}\cdot 2^{\kappa+3}+3^{\kappa+3}\cdot 2^{2\kappa+3}$

$=25\cdot 5^{2\kappa+1}\cdot 2\cdot 2^{\kappa+2}+3\cdot 3^{\kappa+2}\cdot 4\cdot 2^{2\kappa+1}$

$=50\cdot 5^{2\kappa+1}\cdot 2^{\kappa+2}+12\cdot 3^{\kappa+2}\cdot 2^{2\kappa+1}$

$=50\cdot 5^{2\kappa+1}\cdot 2^{\kappa+2}+50\cdot 3^{\kappa+2}\cdot 2^{2\kappa+1}-38\cdot 3^{\kappa+2}\cdot 2^{2\kappa+1}$

$=50\cdot(5^{2\kappa+1}\cdot 2^{\kappa+2}+3^{\kappa+2}\cdot 2^{2\kappa+1})-38\cdot 3^{\kappa+2}\cdot 2^{2\kappa+1}$

Από την (1) $=50\cdot 19\lambda-38\cdot 3^{\kappa+2}\cdot 2^{2\kappa+1}$

$=19\cdot(50\lambda-2\cdot 3^{\kappa+2}\cdot 2^{2\kappa+1})$ *(Για* $\lambda\in N$ *και* $\kappa\in N$ *η παρένθεση είναι ακέραιος)*

$=19\cdot\mu$

Άρα η δοθείσα σχέση ισχύει $\forall\,\nu\in N$.

3. α) Αν $\alpha+\beta=45^0$, να δείξετε ότι: $(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot(1+\varepsilon\varphi\beta)=2$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$A=(1+\varepsilon\varphi 1^0)(1+\varepsilon\varphi 2^0)(1+\varepsilon\varphi 3^0)\ \ldots\ (1+\varepsilon\varphi 44^0)$

Λύση

α) $\alpha+\beta=45^0 \Rightarrow \varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\varepsilon\varphi 45^0 \Rightarrow \varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=1 \Rightarrow \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta+1=2 \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha(1+\varepsilon\varphi\beta)+1+\varepsilon\varphi\beta=2$

$\Rightarrow (1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\beta)=2$

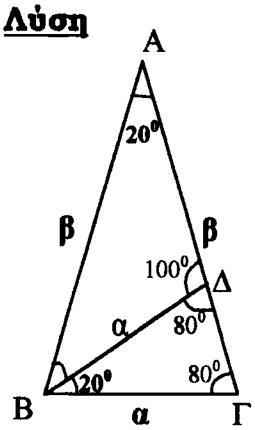
$\beta)\quad A=(1+\varepsilon\varphi 1^0)(1+\varepsilon\varphi 2^0)(1+\varepsilon\varphi 3^0)\ldots(1+\varepsilon\varphi 44^0)$

$$=\underbrace{\underbrace{\left[(1+\varepsilon\varphi 1^0)(1+\varepsilon\varphi 44^0)\right]}_{2}\cdot\underbrace{\left[(1+\varepsilon\varphi 2^0)(1+\varepsilon\varphi 43^0)\right]}_{2}\ldots\underbrace{\left[(1+\varepsilon\varphi 22^0)(1+\varepsilon\varphi 23^0)\right]}_{2}}_{22 \text{ παράγοντες}}=2^{22}$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=β, ΒΓ=α και ΒΑΓ=20^0. Αν Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ ώστε ΔΒΓ=20^0, να δείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma=\alpha^2/\beta$ και β) $\alpha^3+\beta^3=3\alpha\beta^2$.

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι όμοια (γωνίες στο σχήμα)

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AB\Gamma}\\ \overset{\Delta}{B\Delta\Gamma}\end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{B\Gamma}{\Delta\Gamma}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}\Rightarrow B\Gamma^2=\Delta\Gamma\cdot A\Gamma$$

$$\Rightarrow \alpha^2=\Gamma\Delta\cdot\beta \Rightarrow \Delta\Gamma=\frac{\alpha^2}{\beta}\qquad (1)$$

β) Νόμος συνημιτόνων στο $\overset{\Delta}{AB\Delta}$

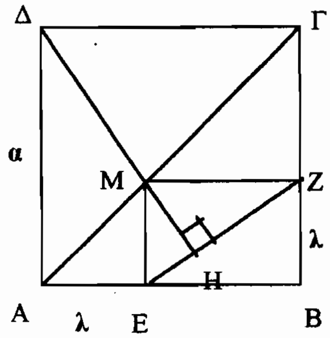
$$\sigma\upsilon\nu 60^0=\frac{1}{2}=\frac{\alpha^2+\beta^2-(\beta-\Delta\Gamma)^2}{2\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta=\alpha^2+\beta^2-\beta^2-(\Delta\Gamma)^2+2\beta(\Delta\Gamma) \Rightarrow \alpha\beta=\alpha^2-\frac{\alpha^4}{\beta^2}+2\alpha^2 \qquad (\alpha\neq 0)$$

$$\Rightarrow \beta=\alpha-\frac{\alpha^3}{\beta^2}+2\alpha \Rightarrow \beta^3=3\alpha\beta^2-\alpha^3 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3=3\alpha\beta^2$$

5. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ να πάρετε σημεία Ε και Ζ έτσι ώστε να είναι ΑΕ=ΒΖ=λ. Να φέρετε τη ΔΗ κάθετη στη ΕΖ, που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Να δείξετε ότι: ΕΜΖ=90^0.

Λύση *(Με Αναλυτική Γεωμετρία)*



Αρχή των αξόνων το A(0,0), AB άξονας των X, AΔ άξονας των Ψ. Οπότε σημεία έχουν συντεταγμένες E(λ,0), B(α,0), Z(α,λ), Δ(0,α), Γ(α,α)

Η κλίση της EZ :

$$m_{EZ}=\frac{\lambda}{\alpha-\lambda}\overset{(\Delta H\perp EZ)}{\Rightarrow} m_{\Delta H}=\frac{\lambda-\alpha}{\lambda}$$

Εξίσωση ΔH : $\psi-\alpha=\frac{\lambda-\alpha}{\lambda}\chi$, *Εξίσωση AΓ:* $\psi=\chi$

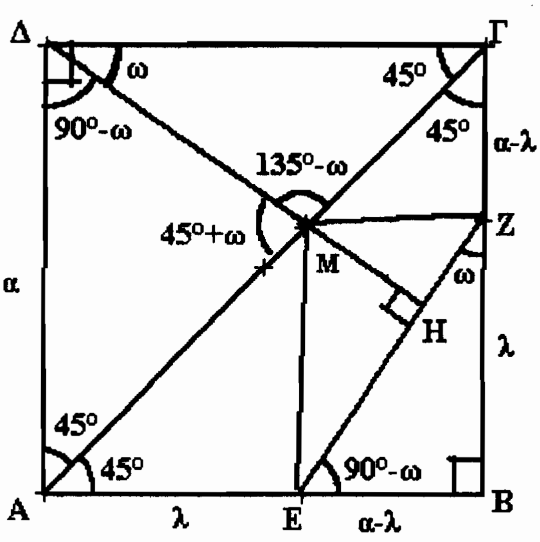
Συντεταγμένες του σημείου M :

$$\left.\begin{array}{l}\psi-\alpha=\frac{\lambda-\alpha}{\lambda}\chi\\ \psi=\chi\end{array}\right\}\Rightarrow(\chi-\alpha)\lambda=(\lambda-\alpha)\chi\Rightarrow\lambda\chi-\alpha\lambda=\chi\lambda-\alpha\chi\Rightarrow\alpha\chi=\lambda\alpha$$

$$\overset{(\alpha\neq0)}{\Rightarrow}\ \chi=\lambda=\psi$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Άρα}\ \left.\begin{array}{l}M(\lambda,\lambda)\\ Z(\alpha,\lambda)\end{array}\right\}\Rightarrow MZ//AB\\ \text{Ενώ}\ \left.\begin{array}{l}M(\lambda,\lambda)\\ E(\lambda,0)\end{array}\right\}\Rightarrow EM\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\ MZ\perp EM,\quad \text{Άρα}\ E\hat{M}Z=90^0$$

Λύση *(Με Γεωμετρία – Τριγωνομετρία)*



$M\hat{\Delta}\Gamma=B\hat{Z}E=\hat{\omega}$ *(γωνίες με πλευρές κάθετες)*

Στο τρίγωνο EZB :

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{EB}{ZB}\Rightarrow\varepsilon\varphi\omega=\frac{\alpha-\lambda}{\lambda}\quad(1)$$

Νόμος Ημιτόνων στο $\overset{\Delta}{\Delta M\Gamma}$ *:*

$$\frac{\Delta M}{\eta\mu45^0}=\frac{M\Gamma}{\eta\mu\omega}=\frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\left(135^0-\omega\right)}\Rightarrow$$

$$\frac{M\Gamma}{\eta\mu\omega}=\frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\left[180^0-\left(45^0+\omega\right)\right]}=\frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\left(45^0+\omega\right)}\Rightarrow M\Gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\omega}{\eta\mu\left(45^0+\omega\right)}\quad(2)$$

Νόμος ημιτόνων στο $\overset{\Delta}{\Delta M A}$:

$$\frac{MA}{\eta\mu(90^0-\omega)}=\frac{A\Delta}{\eta\mu(45^0+\omega)} \Rightarrow MA=\frac{\alpha\,\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu(45^0+\omega)} \quad (3)$$

$$(2) \text{ και } (3) \Rightarrow \frac{M\Gamma}{MA}=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\cdot\frac{\eta\mu(45^0+\omega)}{\eta\mu(45^0+\omega)} \Rightarrow \frac{M\Gamma}{MA}=\varepsilon\phi\omega \overset{(1)}{=} \frac{\alpha-\lambda}{\lambda} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}(4) \Rightarrow \dfrac{M\Gamma}{MA}=\dfrac{\alpha-\lambda}{\lambda}\\ \dfrac{Z\Gamma}{ZB}=\dfrac{\alpha-\lambda}{\lambda}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M\Gamma}{MA}=\frac{Z\Gamma}{ZB} \overset{\Theta.\,\Theta\alpha\lambda\acute{\eta}}{\Rightarrow} MZ\,//\,AB \quad (6)$$

Όμοια :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{\lambda}{\alpha-\lambda}\\ (4) \Rightarrow \dfrac{MA}{M\Gamma}=\dfrac{\lambda}{\alpha-\lambda}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MA}{M\Gamma}=\frac{EA}{EB} \Rightarrow EM\,//\,\Gamma B \quad (7)$$

$$(6) \text{ και } (7) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}MZBE \text{ παραλ/μο}\\ \hat{B}=90^0\end{array}\right\} \Rightarrow MZBE \text{ ορθογώνιο} \Rightarrow E\hat{M}Z=90^0$$

* * * * *

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΦΟΥ «ΑΝΔΡΕΑΣ ΧΑΤΖΗΘΕΟΡΗΣ» ΓΙΑ ΤΙΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΕΙΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης
12-12-1998
9.30π.μ. – 12.30μ.μ.

Επιμέλεια
Α. Δημητριάδης
Ε. Λιασίδης

Να λυθούν όλες οι ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Αν οι εξισώσεις $\chi^2 + \alpha\chi + \beta\gamma = 0$ και $\chi^2 + \beta\chi + \gamma\alpha = 0$ έχουν μια και μόνο κοινή ρίζα, να δείξετε ότι οι άλλες ρίζες τους επαληθεύουν την εξίσωση $\chi^2 + \gamma\chi + \alpha\beta = 0$

2. Αν $\eta\mu\left(\dfrac{\chi+\psi}{2}\right) = \alpha$ με $\alpha \neq 0$, ζητούνται:

   (α) Να υπολογίσετε το συν(χ+ψ) σαν συνάρτηση του α.

   (β) Αν $\eta\mu\chi + \eta\mu\psi = 1$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)$ και το συν(χ-ψ) σαν συνάρτηση του α.

   (γ) Για ποιες τιμές του α ισχύει: $\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi = \dfrac{3}{4}$;

3. (α) Οι κύκλοι με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Δ της υποτείνουσας που τη χωρίζει σε λόγο 1:3. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

   (β) Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{7} - \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου με ΑΗ=R, να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.

5. (α) Να βρεθούν οι πέντε πρώτοι όροι της ακολουθίας που ορίζεται από τον αναγωγικό τύπο $\alpha_{\nu+1} = 5\,\alpha_\nu - 6\,\alpha_{\nu-1}$ με $\alpha_1 = 5$ και $\alpha_2 = 13$.
   Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι: $\alpha_\nu = 3^\nu + 2^\nu$.

   (β) Σε μια ακολουθία με φυσικούς αριθμούς, ο πρώτος όρος είναι το 100, ο δεύτερος όρος της είναι αριθμός μικρότερος του 100 και κάθε επόμενος όρος είναι η διαφορά των δύο προηγούμενων όρων. Ποιος πρέπει να είναι ο δεύτερος όρος της ακολουθίας ώστε η ακολουθία που θα σχηματιστεί να έχει όσο το δυνατό περισσότερους όρους ;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν οι εξισώσεις $\chi^2 + \alpha\chi + \beta\gamma = 0$ και $\chi^2 + \beta\chi + \gamma\alpha = 0$ έχουν μια και μόνο κοινή ρίζα, να δείξετε ότι οι άλλες ρίζες τους επαληθεύουν την εξίσωση $\chi^2 + \gamma\chi + \alpha\beta = 0$

Λύση

Αν ρ, ρ_1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\chi^2 + \alpha\chi + \beta\gamma = 0$ (1)

και ρ , ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\chi^2+\beta\chi+\gamma\alpha=0$ (2)
Πρέπει $\alpha\neq\beta$ διότι αν $\alpha=\beta$ οι (1) και (2) θα συμπίπτουν

θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll}\rho+\rho_1=-\alpha & (3)\\ \rho\cdot\rho_1=\beta\gamma & (4)\\ \rho+\rho_2=-\beta & (5)\\ \rho\cdot\rho_2=\gamma\alpha & (6)\end{array}\right| \begin{array}{l}\overset{(3)-(5)}{\Longrightarrow}\ \rho_1-\rho_2=\beta-\alpha \quad (7)\\ \overset{(4)-(6)}{\Longrightarrow}\ \rho(\rho_1-\rho_2)=\gamma(\beta-\alpha)\\ \overset{(4):(6)}{\Longrightarrow}\ \dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\dfrac{\beta}{\alpha}\Rightarrow\rho_1=\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\rho_2\overset{(7)}{\Rightarrow}\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\rho_2-\rho_2=\beta-\alpha\end{array}$$

$$\Rightarrow \beta\rho_2-\alpha\rho_2=\alpha(\beta-\alpha)\Rightarrow(\beta-\alpha)\rho_2=\alpha(\beta-\alpha)\Rightarrow\ \underline{\rho_2=\alpha}\ \ \text{και}\ \underline{\rho_1=\beta}$$

$$\left.\begin{array}{r}\rho+\rho_1=-\alpha\Rightarrow\gamma+\beta=-\alpha\Rightarrow\alpha+\beta=-\gamma\Rightarrow\rho_1+\rho_2=-\gamma\\ \rho_1\cdot\rho_2=\alpha\beta\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho_1,\rho_2$ *ρίζες της* $\chi^2+\gamma\chi+\alpha\beta=0$

2. Αν $\eta\mu\left(\dfrac{\chi+\psi}{2}\right)=\alpha$ με $\alpha\neq0$, ζητούνται :

(α) Να υπολογίσετε το συν(χ+ψ) σαν συνάρτηση του α.

(β) Αν ημχ + ημψ = 1, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\chi-\psi}{2}\right)$ και το συν(χ-ψ) σαν συνάρτηση του α.

(γ) Για ποιες τιμές του α ισχύει : $\sigma\upsilon\nu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi=\dfrac{3}{4}$;

Λύση

(α) $\eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}=\alpha\Rightarrow\eta\mu^2\dfrac{\chi+\psi}{2}=\alpha^2\Rightarrow1-\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=2\alpha^2\Rightarrow\underline{\underline{\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)=1-2\alpha^2}}$

(β) $\eta\mu\chi+\eta\mu\psi=1\Rightarrow2\eta\mu\dfrac{\chi+\psi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=1\overset{(\alpha)}{\Rightarrow}2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\chi-\psi}{2}=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow\underline{\underline{\sigma\upsilon\nu\frac{\chi-\psi}{2}=\frac{1}{2\alpha}}}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi-\psi}{2}=\frac{1}{4\alpha^2}\Rightarrow1+\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\frac{1}{2\alpha^2}\Rightarrow$$

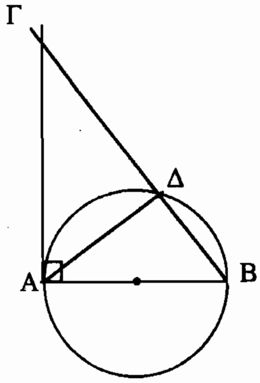
$$\Rightarrow\underline{\underline{\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\frac{1-2\alpha^2}{2\alpha^2}}}$$

(γ) $\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\psi=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)+\sigma\upsilon\nu(\chi-\psi)=\dfrac{3}{2}\overset{(\alpha),(\beta)}{\Longrightarrow}1-2\alpha^2+\dfrac{1-2\alpha^2}{2\alpha^2}=\dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow2\alpha^2-4\alpha^4+1-2\alpha^2=3\alpha^2\Rightarrow4\alpha^4+3\alpha^2-1=0\Rightarrow\underline{\underline{\alpha=\pm\frac{1}{2}}}$$

3. (α) Οι κύκλοι με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές ΑΒ, και ΑΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Δ της υποτείνουσας που τη χωρίζει σε λόγο 1:3. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

(β) Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$



Λύση

(α) $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{1}{3}$

$$\left.\begin{aligned}(AB)^2=(B\Gamma)\cdot(\Delta B)\\(A\Gamma)^2=(B\Gamma)\cdot(\Delta\Gamma)\end{aligned}\right\}\overset{\div}{\Rightarrow}\frac{(AB)^2}{(A\Gamma)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

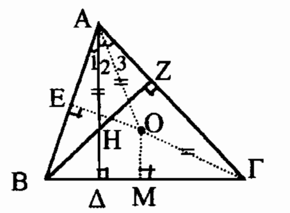
$$3(AB)^2=(B\Gamma)^2-(AB)^2\Rightarrow 4(AB)^2=(B\Gamma)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(B\Gamma)=2\cdot(AB)\Rightarrow\underline{\underline{\hat{\Gamma}=30^\circ}},\ \underline{\underline{\hat{B}=60^\circ}},\ \underline{\underline{A=90^\circ}}$$

(β) $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}-\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}=\frac{2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}-2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7}+2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}}$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{14}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}-\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{14}-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{14}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{14}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{2}$$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου με ΑΗ=R, να υπολογίσετε τη γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

ΑΗ=ΟΑ=ΟΓ=R

Η: ορθόκεντρο

$\hat{A}=;$

$$\left.\begin{aligned}&\text{Από το τρίγωνο } AB\Delta \Rightarrow \hat{A}_1+A\hat{B}\Delta=90^\circ\Rightarrow 2\hat{A}_1+2A\hat{B}\Delta=180^\circ\\&\text{Από το τρίγωνο } AO\Gamma \Rightarrow 2\hat{A}_3+A\hat{O}\Gamma=180^\circ\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1+2A\hat{B}\Delta=2\hat{A}_3+A\hat{O}\Gamma \xrightarrow{2A\hat{B}\Delta=A\hat{O}\Gamma}\hat{A}_1=\hat{A}_3$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{AEO}$ *και* $A\hat{Z}H$ *έχουν :*

$$\left.\begin{aligned}&\text{i) } AO=AH=R\\&\text{ii) } \hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{A}_2+\hat{A}_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\overset{\Delta}{AEO}=\overset{\Delta}{AZH}\Rightarrow AE=AZ\Rightarrow AZ=\frac{AB}{2}\Rightarrow\underline{\underline{\hat{A}=60^\circ}}$$

5. (α) Να βρεθούν οι πέντε πρώτοι όροι της ακολουθίας που ορίζεται από τον αναγωγικό τύπο $\alpha_{\nu+1}=5\,\alpha_\nu-6\,\alpha_{\nu-1}$ με $\alpha_1=5$ και $\alpha_2=13$.
Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι: $\alpha_\nu=3^\nu+2^\nu$.
(β) Σε μια ακολουθία με φυσικούς αριθμούς, ο πρώτος όρος είναι το 100, ο δεύτερος όρος της είναι αριθμός μικρότερος του 100 και κάθε επόμενος όρος είναι η διαφορά των δύο προηγούμενων όρων. Ποιος πρέπει να είναι ο δεύτερος όρος της ακολουθίας ώστε,η ακολουθία που θα σχηματιστεί να έχει όσο το δυνατό περισσότερους όρους;

Λύση

(α) $\alpha_{\nu+1}=5\,\alpha_\nu-6\,\alpha_{\nu-1}$ *με* $\alpha_1=5$ *και* $\alpha_2=13$

Για $\nu=2\Rightarrow\alpha_3=65-30=35$. *Για* $\nu=3\Rightarrow\alpha_4=175-78=97$

Για $\nu=4\Rightarrow\alpha_5=485-210=275$

$\alpha_\nu \overset{?}{=} 3^\nu + 2^\nu$ Επαγωγικά

Για $\nu=1 \Rightarrow \alpha_1 = 3^1 + 2^1 = 5$, αληθεύει Για $\nu=2 \Rightarrow \alpha_2 = 3^2 + 2^2 = 13$, αληθεύει.

Έστω ότι ισχύει για $\nu = \kappa - 1$ και $\nu = \kappa$, δηλ. έστω ότι :

$\alpha_{\kappa-1} = 3^{\kappa-1} + 2^{\kappa-1}$ (1) και $\alpha_\kappa = 3^\kappa + 2^\kappa$ (2)

Θα αποδείξω ότι: $\alpha_{\kappa+1} = 3^{\kappa+1} + 2^{\kappa+1}$

Πράγματι: $\alpha_{\kappa+1} = 5\,\alpha_\kappa - 6\,\alpha_{\kappa-1} \overset{(1)(2)}{=} 5(3^\kappa + 2^\kappa) - 6(3^{\kappa-1} + 2^{\kappa-1}) =$

$= 5\cdot 3^\kappa + 5\cdot 2^\kappa - 2\cdot 3^\kappa - 3\cdot 2^\kappa = 3\cdot 3^\kappa + 2\cdot 2^\kappa = 3^{\kappa+1} + 2^{\kappa+1}$

Άρα, $\alpha^\nu = 3^\nu + 2^\nu$, $\forall \nu \in N$.

(β) $\alpha_1 = 100$.

Έστω $\alpha_2 = \chi$. Τότε $\alpha_3 = 100 - \chi$, $\alpha_4 = 2\chi - 100$, $\alpha_5 = 200 - 3\chi$, $\alpha_6 = 5\chi - 300$,

$\alpha_7 = 500 - 8\chi$, $\alpha_8 = 13\chi - 800$, $\alpha_9 = 1300 - 21\chi$, $\alpha_{10} = 34\chi - 2100$, ...

Πρέπει: $\alpha_3 = 100 - \chi > 0 \Rightarrow \chi < 100$

$\alpha_4 = 2\chi - 100 > 0 \Rightarrow \chi > 50$

$\alpha_5 = 200 - 3\chi > 0 \Rightarrow \chi < 66{,}6 \Rightarrow \chi \leq 66$

$\alpha_6 = 5\chi - 300 > 0 \Rightarrow \chi > 60$

$\alpha_7 = 500 - 8\chi > 0 \Rightarrow \chi < 62{,}5 \Rightarrow \chi \leq 62$

$\alpha_8 = 13\chi - 800 > 0 \Rightarrow \chi > 61{,}5 \Rightarrow \chi \geq 62$. Άρα, πρέπει $\chi = 62$.

* * * * *

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
"ΕΥΑΓΟΡΑΣ ΠΑΛΛΗΚΑΡΙΔΗΣ"

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης
13.02.99
9.30΄ – 12.30΄

Επιμέλεια
Σάββας Ιωαννίδης
Φώτης Μαλαής

Να λυθούν και οι 5 ασκήσεις.

1. Να γράψετε τον περιοδικό αριθμό 0,084373737… σαν ανάγωγο κλάσμα.

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)=2-\dfrac{3}{\chi^2-2\chi+4}$ είναι θετική για κάθε πραγματική τιμή του χ.

3. Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με (ΑΔ) = (ΒΓ) έχει (ΑΒ) = (6χ+12) m , ύψος (ΑΕ)=$\dfrac{36}{\chi}$ m , (ΓΕ) = (9χ+8) m και εμβαδό του ΑΒΓΔ ίσο με 420 m². Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου (ΑΔΕ).

4. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα κάθε τετραψήφιου φυσικού αριθμού και του ανάστροφου του είναι πολλαπλάσιο του αριθμού 11.
(π.χ. ο αριθμός 7826 έχει ανάστροφο 6287)

5. Δίδεται η ισότητα $\dfrac{27\chi^5-16\psi^5}{27\chi^5+16\psi^5}=-\dfrac{7}{11}$.

   Να βρεθεί η τιμή του κλάσματος $\dfrac{5\chi^3+2\psi^3}{3\chi^3-7\psi^3}$

* * * * *

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Να γράψετε τον περιοδικό αριθμό 0,084373737… σαν ανάγωγο κλάσμα.

Λύση Α

Έστω $A = 0{,}084373737\ldots \Rightarrow 100\,000\,A = 8437{,}373737\ldots$

$$1\,000\,A = 84{,}37373737\ldots \quad -$$

$$99\,000\,A = 8353 \Rightarrow A=\frac{8353}{99000}$$

Λύση Β

$A = 0{,}084373737\ldots \Rightarrow$

$$A=\frac{84}{1000}+37\cdot10^{-5}+37\cdot10^{-7}+37\cdot10^{-9}+\ldots=\frac{84}{1000}+\frac{37\cdot10^{-5}}{1-10^{-2}}$$

$$=\frac{84}{1000}+\frac{37}{100000-1000}=\frac{84}{1000}+\frac{37}{99000}=\frac{84\cdot99+37}{99000}=\frac{8353}{99000}$$

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)=2-\dfrac{3}{\chi^2-2\chi+4}$ είναι θετική για κάθε πραγματική τιμή του χ.

Λύση

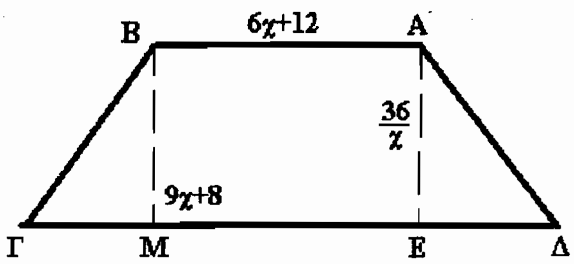
$$f(\chi) = 2-\frac{3}{\chi^2-2\chi+4}=\frac{2\cdot(\chi^2-2\chi+4)-3}{\chi^2-2\chi+4}=\frac{2\chi^2-4\chi+8-3}{\chi^2-2\chi+4}=\frac{2\chi^2-4\chi+5}{\chi^2-2\chi+4}$$

$$=\frac{\chi^2+\chi^2-4\chi+4+1}{\chi^2-2\chi+1+3}=\frac{\chi^2+(\chi-2)^2+1}{(\chi-1)^2+3}>0$$

$\Rightarrow f(\chi)>0 \quad \forall\ \chi\in \mathbf{R}$ *ως άθροισμα και πηλίκο θετικών όρων.*

3. Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με (ΑΔ) = (ΒΓ) έχει (ΑΒ) = (6χ+12) m, ύψος (ΑΕ)=$\dfrac{36}{\chi}$ m, (ΓΕ) = (9χ+8) m και εμβαδό του ΑΒΓΔ ίσο με 420 m². Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου (ΑΔΕ).

Λύση



$E_{(ΑΒΓΔ)} = 420\ m^2$

$ΔΕ = ΓΜ = 9\chi + 8 - (6\chi + 12)$

$= 9\chi + 8 - 6\chi - 12$

$= 3\chi - 4$

$ΓΔ = 9\chi + 8 + 3\chi - 4 = 12\chi + 4$

$$E=\frac{(AB+ΓΔ)\cdot AE}{2}\Rightarrow 420=\frac{(12\chi+4+6\chi+12)\cdot\frac{36}{\chi}}{2}\Rightarrow 420=\frac{(18\chi+16)36}{2\chi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 420=\frac{(18\chi+16)18}{\chi}\Rightarrow 70=\frac{2(9\chi+8)3}{\chi}\Rightarrow 35=\frac{27\chi+24}{\chi}\Rightarrow 35\chi-27\chi=24$$

$$\Rightarrow 8\chi=24 \quad\Rightarrow \underline{\chi=3}\Rightarrow AE=\frac{36}{3}=12\ m \quad \textit{και} \quad EΔ=9-4=5m.$$

$$E_{(AEΔ)}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=30\ m^2$$

4. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα κάθε τετραψήφιου φυσικού αριθμού και του ανάστροφου του είναι πολλαπλάσιο του αριθμού 11.
(π.χ. ο αριθμός 7826 έχει ανάστροφο 6287)

Λύση

$\overline{αβγδ} + \overline{δγβα} = 1000α + 100β + 10γ + δ + 1000δ + 100γ + 10β + α$

$= 1001α + 110β + 110γ + 1001δ = 1001\cdot(α + δ) + 110\cdot(β + γ)$

$= 91\cdot 11(α + δ) + 10\cdot 11(β + γ) = 11[\,91(α + δ) + 10(β + γ)\,]$

$= 11\cdot λ \ ,\quad λ \in N$

5. Δίδεται η ισότητα $\dfrac{27\chi^5-16\psi^5}{27\chi^5+16\psi^5}=-\dfrac{7}{11}$.

Να βρεθεί η τιμή του κλάσματος $\dfrac{5\chi^3+2\psi^3}{3\chi^3-7\psi^3}$

Λύση

$$\frac{27\chi^5-16\psi^5}{27\chi^5+16\psi^5}=-\frac{7}{11}\Rightarrow\frac{\psi^5\left[27\left(\dfrac{\chi}{\psi}\right)^5-16\right]}{\psi^5\left[27\left(\dfrac{\chi}{\psi}\right)^5+16\right]}=-\frac{7}{11}\Rightarrow\frac{27\omega-16}{27\omega+16}=-\frac{7}{11}\ \text{όπου}\ \omega=\left(\frac{\chi}{\psi}\right)^5$$

$$\Rightarrow 297\omega-176=-189\omega-112\Rightarrow 486\omega=64\Rightarrow\omega=\frac{64}{486}\Rightarrow\omega=\frac{32}{243}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\chi}{\psi}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^5\Rightarrow\frac{\chi}{\psi}=\frac{2}{3}\qquad \text{Άρα}$$

$$\frac{5\chi^3+2\psi^3}{3\chi^3-7\psi^3}=\frac{\psi^3\left(5\cdot\dfrac{\chi^3}{\psi^3}+2\right)}{\psi^3\left(3\cdot\dfrac{\chi^3}{\psi^3}-7\right)}=\frac{5\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+2}{3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+7}=\frac{5\cdot\dfrac{8}{27}+2}{3\cdot\dfrac{8}{27}-7}=\frac{5\cdot8+2\cdot27}{3\cdot8-7\cdot27}=$$

$$=\frac{40+54}{24-189}=-\frac{94}{165}$$

* * * * *

<u>ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ</u>

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
"ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΓΙΑΛΛΟΥΡΟΣ"

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης*</u>
Σάββατο 13 Φεβρουαρίου 1999
Χρόνος: 9:30′ - 12:30′

<u>*Επιμέλεια*</u>
Σάββας Αντωνίου
Λοΐζος Λοΐζου

Να λυθούν και τα πέντε θέματα.

1. Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) και τα σημεία Ε ,Ζ πάνω στις ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΑ}} = \frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΖΒ}} = \frac{\mu}{\nu}$. Να υπολογιστεί το μήκος του ΕΖ συναρτήσει των α, β, μ, ν (ΑΒ=α , ΓΔ=β).

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\frac{x+1}{2x+1} = \frac{3y-1}{2y-1} = \frac{4x+12y}{3}$$

3. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y και είναι ανάλογοι πρός τους 2x-24y, -x+4y με $x \neq 0, y \neq 0$.

α) Να δείξετε: x = 6y ή x = -4y

β) Αν $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ είναι δύο ζεύγη από τους πιο πάνω αριθμούς και

$$\alpha = \left(\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2}\right)^2$$ τότε να δείξετε ότι $\alpha = 0$ ή $\alpha = \frac{25}{144}$

4. Αν $\gamma \neq 0$ και ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\rho + \rho^{-1}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) \equiv \alpha\gamma x^2 + \beta(\alpha+\gamma)x + \beta^2 + (\alpha-\gamma)^2 = 0$$

5. Από σημείο Β εκτός του κύκλου (Ο, R) φέρουμε εφαπτομένη ΑΒ (όπου Α σημείο επαφής) και την τέμνουσα ΒΓΔ. Αν ΑΒ=2R και γωνία $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Δ} = 30^o$, να δείξετε ότι

$$\text{ΓΔ} = R\sqrt{4\sqrt{3}-3}\ .$$

* * * * *

<u>ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ</u>

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
"ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΓΙΑΛΛΟΥΡΟΣ"

<u>*Ημερομηνία και ώρα εξέτασης*</u>
Σάββατο 13 Φεβρουαρίου 1999
Χρόνος: 9:30΄ - 12:30΄

<u>*Επιμέλεια*</u>
Σάββας Αντωνίου
Λοΐζος Λοΐζου

Να λυθούν και τα πέντε θέματα.

1. Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) και τα σημεία Ε ,Ζ πάνω στις ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\frac{\Delta E}{EA} = \frac{\Gamma Z}{ZB} = \frac{\mu}{\nu}$. Να υπολογιστεί το μήκος του ΕΖ συναρτήσει των α, β, μ, ν (ΑΒ=α , ΓΔ=β).

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\frac{x+1}{2x+1} = \frac{3y-1}{2y-1} = \frac{4x+12y}{3}$$

3. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y και είναι ανάλογοι πρός τους 2x-24y, -x+4y με $x \neq 0, y \neq 0$.

α) Να δείξετε: x = 6y ή x = -4y

β) Αν $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ είναι δύο ζεύγη από τους πιο πάνω αριθμούς και

$$\alpha = \left(\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2}\right)^2$$ τότε να δείξετε ότι $\alpha = 0$ ή $\alpha = \frac{25}{144}$

4. Αν $\gamma \neq 0$ και ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\rho + \rho^{-1}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) \equiv \alpha\gamma x^2 + \beta(\alpha+\gamma)x + \beta^2 + (\alpha-\gamma)^2 = 0$$

5. Από σημείο Β εκτός του κύκλου (Ο, R) φέρουμε εφαπτομένη ΑΒ (όπου Α σημείο επαφής) και την τέμνουσα ΒΓΔ. Αν ΑΒ=2R και γωνία $A\hat{B}\Delta = 30^o$, να δείξετε ότι

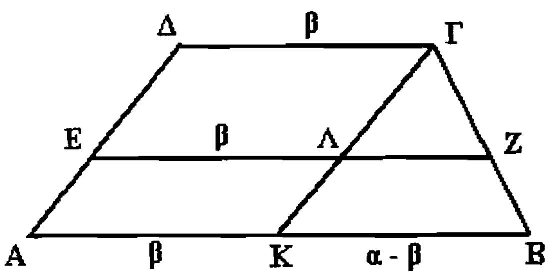
$$\Gamma\Delta = R\sqrt{4\sqrt{3}-3}$$.

* * * * *

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) και τα σημεία Ε ,Ζ πάνω στις ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΑ}}=\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΖΒ}}=\frac{\mu}{\nu}$. Να υπολογιστεί το μήκος του ΕΖ συναρτήσει των α, β, μ, ν (ΑΒ=α , ΓΔ=β).

Λύση



Φέρω από το Γ την ΓΚ // ΑΔ ⇒ ΔΓΚΑ #

$\Rightarrow \Delta\Gamma = AK = \beta \Rightarrow KB = \alpha - \beta \;(I)$

Επειδή $\frac{\Delta E}{EA}=\frac{\Gamma Z}{ZB} \Rightarrow EZ \,//\, \Delta\Gamma \,//\, AB$

$\Rightarrow \Lambda Z \,//\, KB \Rightarrow \overset{\Delta}{\Gamma\Lambda Z} \approx \overset{\Delta}{\Gamma KB} \Rightarrow$

$\frac{\Lambda Z}{KB}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma B} \;(II)$

$$\frac{\Gamma Z}{ZB}=\frac{\mu}{\nu} \Rightarrow \frac{\Gamma Z}{\Gamma Z+ZB}=\frac{\mu}{\mu+\nu} \Rightarrow \frac{\Gamma Z}{\Gamma B}=\frac{\mu}{\mu+\nu} \;(III)$$

$$\overset{I,II,III}{\Rightarrow} \frac{\Lambda Z}{\alpha-\beta}=\frac{\mu}{\mu+\nu} \text{ ή } \Lambda Z=\frac{(\alpha-\beta)\mu}{\mu+\nu}$$

$$EZ = E\Lambda + \Lambda Z = \beta + \frac{(\alpha-\beta)\mu}{\nu+\mu} \Rightarrow \underline{\underline{EZ=\frac{\beta\nu+\alpha\mu}{\mu+\nu}}}$$

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\frac{x+1}{2x+1}=\frac{3y-1}{2y-1}=\frac{4x+12y}{3}$$

Λύση

$$\frac{\chi+1}{2\chi+1}=\frac{3\psi+1}{2\psi-1}=\frac{4\chi+12\psi}{3}=\omega$$

$$\frac{\chi+1}{2\chi+1}=\omega \Rightarrow \chi+1=2\chi\omega+\omega \Rightarrow \chi(1-2\omega)=\omega-1 \Rightarrow \chi=\frac{\omega-1}{1-2\omega} \;(I)\; \left(\omega\neq\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\frac{3\psi-1}{2\psi-1}=\omega \Rightarrow 3\psi-1=2\psi\omega-\omega \Rightarrow (3-2\omega)\psi=1-\omega \Rightarrow \psi=\frac{1-\omega}{3-2\omega} \;(II)\; \left(\omega\neq\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\frac{4\chi+12\psi}{3}=\omega \;(III)$$

$$I \wedge II \wedge III \Rightarrow \frac{4\omega-4}{1-2\omega}+\frac{12-12\omega}{3-2\omega}=3\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{12\omega}-\cancel{12}-8\omega^2+8\omega+\cancel{12}-\cancel{12\omega}-24\omega+24\omega^2=3\omega(3-8\omega+4\omega^2)$$

$$\Rightarrow 16\omega^2-16\omega=9\omega-24\omega^2+12\omega^3$$

$$\Rightarrow 12\omega^3-40\omega^2+25\omega=0 \Rightarrow \omega(12\omega^2-40\omega+25)=0 \Rightarrow \omega(6\omega-5)(2\omega-5)=0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = 0 \text{ ή } \omega_2 = \frac{5}{6} \text{ ή } \omega_3 = \frac{5}{2}$$

$$(\chi,\psi) = \left(1, \frac{1}{3}\right) \quad \text{ή} \quad (\chi,\psi) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) \quad \text{ή} \quad (\chi,\psi) = \left(-\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right)$$

3. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y και είναι ανάλογοι πρός τους 2x-24y, -x+4y με $x \neq 0, y \neq 0$.

(α) Να δείξετε x = 6y ή x = -4y

(β) Αν $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ είναι δύο ζεύγη από τους πιο πάνω αριθμούς και

$$\alpha = \left(\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2}\right)^2 \text{ τότε να δείξετε ότι } \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = \frac{25}{144}$$

<u>Λύση</u>

(α) $\dfrac{\chi}{2\chi - 24\psi} = \dfrac{\psi}{-\chi + 4\psi}$ $\qquad 2\chi - 24\psi \neq 0 \quad \text{και} \quad -\chi + 4\psi \neq 0$

$\Leftrightarrow \chi(-\chi + 4\psi) = \psi(2\chi - 24\psi) \quad \Leftrightarrow \quad -\chi^2 + 4\chi\psi = 2\chi\psi - 24\psi^2$

$\Leftrightarrow \chi^2 - 4\chi\psi + 2\chi\psi - 24\psi^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi^2 - 2\chi\psi - 24\psi^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\chi - 6\psi)(\chi + 4\psi) = 0$

$\Leftrightarrow \chi = 6\psi \quad \text{ή} \quad \chi = -4\psi$

(β) i) $\chi_1 = 6\psi_1 \text{ και } \chi_2 = 6\psi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\psi_1}{\chi_1} = \dfrac{\psi_2}{\chi_2} = \dfrac{1}{6}$

$$\Rightarrow \alpha = \left(\frac{\chi_1\psi_2 - \chi_2\psi_1}{\chi_1\chi_2}\right)^2 = \left(\frac{\psi_2}{\chi_2} - \frac{\psi_1}{\chi_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)^2 = 0$$

ii) $\chi_1 = -4\psi_1 \text{ και } \chi_2 = -4\psi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\psi_1}{\chi_1} = \dfrac{\psi_2}{\chi_2} = -\dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{\psi_2}{\chi_2} - \frac{\psi_1}{\chi_1}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^2 = 0$$

iii) $\chi_1 = 6\psi_1 \text{ και } \chi_2 = -4\psi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\psi_1}{\chi_1} = \dfrac{1}{6} \text{ και } \dfrac{\psi_2}{\chi_2} = -\dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow \alpha = \left(\frac{\psi_2}{\chi_2} - \frac{\psi_1}{\chi_1}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)^2 = \left(-\frac{10}{24}\right)^2 = \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

iv) $\chi_1 = -4\psi_1 \text{ και } \chi_2 = 6\psi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\psi_1}{\chi_1} = -\dfrac{1}{4} \text{ και } \dfrac{\psi_2}{\chi_2} = \dfrac{1}{6}$

$$\Rightarrow \alpha = \left(\frac{\psi_2}{\chi_2} - \frac{\psi_1}{\chi_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{10}{24}\right)^2 = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

4. Αν $\gamma \neq 0$ και ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\rho + \rho^{-1}$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) \equiv \alpha\gamma x^2 + \beta(\alpha+\gamma)x + \beta^2 + (\alpha-\gamma)^2 = 0$$

Λύση

Επειδή ρ είναι ρίζα της $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$

$$f(\rho + \frac{1}{\rho}) = \alpha\gamma(\rho + \frac{1}{\rho})^2 + \beta(\alpha+\gamma)(\rho + \frac{1}{\rho}) + \beta^2 + (\alpha-\gamma)^2$$

$$= \alpha\gamma(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2) + \alpha\beta + \beta\gamma)(\rho + \frac{1}{\rho}) + \beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma$$

$$= \alpha\gamma\rho^2 + \frac{\alpha\gamma}{\rho^2} \cancel{2\alpha\gamma} + \alpha\beta\rho + \frac{\alpha\beta}{\rho} + \beta\gamma\rho + \frac{\beta\gamma}{\rho}\ \beta^2 + \gamma^2 - \cancel{2\alpha\gamma}$$

$$= \alpha\gamma\rho^2 + \beta\gamma\rho + \gamma^2 + \frac{\alpha\gamma}{\rho^2} + \alpha\beta\rho + \frac{\alpha\beta}{\rho} + \frac{\beta\gamma}{\rho} + \beta^2 + \alpha^2$$

$$= \gamma(\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma) + \frac{\beta\rho(\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma) + \alpha(\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma)}{\rho^2}$$

$$= \left[\gamma + \frac{\beta\rho + \alpha}{\rho}\right](\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma) = 0$$

$\Rightarrow \rho + \dfrac{1}{\rho}$ *είναι ρίζα της* $f(\chi) = 0$

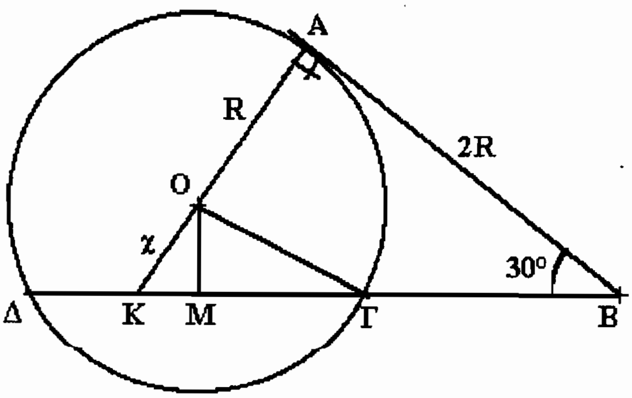
5. Από σημείο Β εκτός του κύκλου (Ο, R) φέρουμε εφαπτομένη ΑΒ (όπου Α σημείο επαφής) και την τέμνουσα ΒΓΔ. Αν ΑΒ=2R και γωνία $A\hat{B}\Delta = 30^o$, να δείξετε ότι

$$\Gamma\Delta = R\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\ .$$

Λύση

Φέρω την $OM \perp \Delta\Gamma$.
Θέτω $OK = \chi$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΒ έχουμε:



$$\left.\begin{array}{l} AK = R + \chi \\ AK = \dfrac{KB}{2} \Rightarrow KB = 2(R+\chi) \\ AB = 2R \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4(R+\chi)^2 = (R + \chi)^2 + 4R^2$

$$\Rightarrow 3(R+\chi)^2 = 4R^2 \Rightarrow (R+\chi)^2 = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow \chi + R = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow \chi = \frac{2R}{\sqrt{3}} - R \Rightarrow \chi = \frac{R(2\sqrt{3} - 3)}{3}$$

$K\hat{O}M = 30^0$ *(διότι έχει τις πλευρές της κάθετες με την* $\hat{B} = 30^0$*)*

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΟΜ έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} OK = \chi \\ KM = \dfrac{\chi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (OM)^2 = \chi^2 - \frac{\chi^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{(OM)^2 = \frac{3\chi^2}{4}}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΓ έχουμε :

$$(M\Gamma)^2 = (O\Gamma)^2 - (OM)^2 \Rightarrow (M\Gamma)^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} \Rightarrow 4(M\Gamma)^2 = 4R^2 - \chi^2$$

$$\Rightarrow (\Gamma\Delta)^2 = 4R^2 - \frac{3R^2\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}{9} \Rightarrow (\Gamma\Delta)^2 = \frac{\left[12 - \left(2\sqrt{3}-3\right)^2\right]R^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow (\Gamma\Delta)^2 = R^2\left(4\sqrt{3}-3\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{(\Gamma\Delta) = R\sqrt{4\sqrt{3}-3}}}$$

* * * *

* * * * *

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
«ΖΗΝΩΝ»

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης
Σαββατο, 27.2.1999
9:30΄–12:30΄

Επιμέλεια
Ανδρέας Φαλάς
Τάνια Παναγιώτου

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

1. Να λύσετε το σύστημα: $\chi - \psi + \omega = 1$, $\chi^2 + \psi^2 - \omega^2 = 5$, $-\chi^3 + \psi^3 + \omega^3 = 1$.

2. Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές της παράστασης:
$$\psi = \frac{4\chi}{\chi^2+4} - \frac{6}{3\eta\mu\theta - 4\sigma\upsilon\nu\theta + 7},$$ όπου $\chi,\theta \in \mathbf{R}$.

3. ν παράλληλες ευθείες τέμνονται από 5 άλλες παράλληλες ευθείες. Με κορυφές τα σημεία τομής να σχηματίσετε τρίγωνα με μιαν τουλάχιστον πλευράν να βρίσκεται πάνω σε μιαν από τις πιο πάνω ευθείες. Αν τα πιο πολλά τρίγωνα που μπορείτε να σχηματίσετε είναι 2700, να βρείτε το ν.

4. Τα τετράγωνα ΑΒΓΔ (ΑΒ=4cm) και ΕΖΗΘ (ΕΖ=2cm) έχουν το ίδιο κέντρο και τις πλευρές τους παράλληλες. Αν S είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων τυχαίου σημείου P πάνω στην ΕΖ, από τις κορυφές του ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του S, καθώς και την θέση του P στην κάθε περίπτωση.

5. Να βρείτε την συνάρτηση f: $\mathbf{R}-\{0,\pm1,2,\frac{1}{2}\} \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει:
$$f(\chi) - \frac{\chi}{\chi+1}\cdot f\left(1-\frac{1}{\chi}\right) = \frac{1}{1-\chi}, \quad \forall \chi \in \mathbf{R}-\{0,\pm1,2,\tfrac{1}{2}\}.$$

* * * * *

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Να λύσετε το σύστημα: $\chi - \psi + \omega = 1$, $\chi^2 + \psi^2 - \omega^2 = 5$, $-\chi^3 + \psi^3 + \omega^3 = 1$.

Λύση

$\chi - \psi + \omega = 1 \Rightarrow \chi-\psi=1-\omega \Rightarrow \chi^2+\psi^2-2\chi\psi = 1-2\omega+\omega^2 \Rightarrow$

$\chi^2 + \psi^2 - \omega^2 = 5 \qquad \Rightarrow \omega^2+5-2\chi\psi=1-2\omega+\omega^2 \Rightarrow \chi\psi=\omega+2$

$-\chi^3 + \psi^3 + \omega^3 = 1 \Rightarrow -(\chi^3-\psi^3) = 1-\omega^3 \Rightarrow (\chi-\psi)(\chi^2+\psi^2+\chi\psi)=\omega^3-1$

$\Rightarrow (1-\omega)(\omega^2+5+\omega+2) = \omega^3-1 \Rightarrow \omega^2+\omega+7-\omega^3-\omega^2-7\omega=\omega^3-1$

$\Rightarrow \omega^3+3\omega-4=0 \Rightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+4)=0 \Rightarrow \omega=1$ *οπότε:*

$\Rightarrow \chi-\psi=0$

$\chi\psi=3 \Rightarrow \chi=\psi=\pm\sqrt{3} \Rightarrow (\chi,\psi,\omega)=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$

$(\chi,\psi,\omega)=(-\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$

2. Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές της παράστασης:

$$\psi = \frac{4\chi}{\chi^2+4} - \frac{6}{3\eta\mu\theta - 4\sigma\upsilon\nu\theta + 7},$$ όπου $\chi,\theta \in \mathbf{R}$.

Λύση

Θέτω

$$\alpha = \frac{4\chi}{\chi^2+4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha\chi^2 - 4\chi + 4\alpha = 0 \\ \chi \in R \end{matrix}\right\} \Rightarrow 16 - 16a^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (a-1)(a+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

$$\beta = -\frac{6}{3\eta\mu\theta - 4\sigma\upsilon\nu\theta + 7} = -\frac{6}{5\eta\mu(\theta+\theta_1)+7} \Rightarrow -\frac{6}{5\cdot(-1)+7} \leq \beta \leq -\frac{6}{5\cdot 1+7} \Rightarrow$$

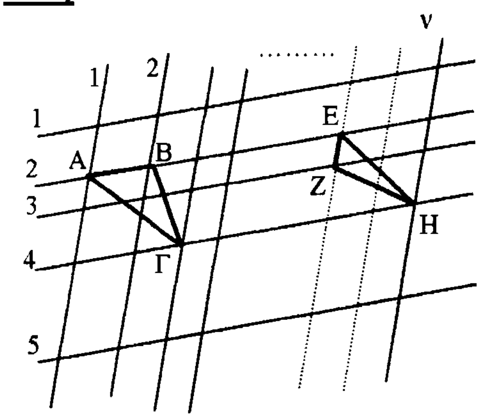
$$\Rightarrow -3 \leq \beta \leq -\frac{1}{2}$$

$$\underline{-1 \leq \alpha \leq 1} \quad +$$

$$-4 \leq \alpha + \beta \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -4 \leq \psi \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \psi \in \{-4,-3,-2,-1,0\}$$

3. ν παράλληλες ευθείες τέμνονται από 5 άλλες παράλληλες ευθείες. Με κορυφές τα σημεία τομής να σχηματίσετε τρίγωνα με μιαν τουλάχιστον πλευρά να βρίσκεται πάνω σε μιαν από τις πιο πάνω ευθείες. Αν τα πιο πολλά τρίγωνα που μπορείτε να σχηματίσετε είναι 2700, να βρείτε το ν.

Λύση



Για να σχηματίσουμε ένα τρίγωνο με κορυφές τρία από τα σημεία τομής των πιο πάνω // ευθειών παίρνουμε 2 σημεία πάνω σε μιαν από τις 5 // και ένα από τις άλλες ν // δηλαδή :

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{\nu}{2}\cdot\binom{4\nu}{1} \quad (\mathrm{A,B,\Gamma})$$

ή 2 σημεία πάνω σε μιαν από τις ν // και ένα πάνω στις άλλες 5 // δηλαδή:

$$\binom{\nu}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{5(\nu-1)}{1} \quad (\mathrm{E,Z,H})$$

Αφαιρούμε τώρα τα τρίγωνα που μετρήσαμε 2 φορές και που είναι όλα τα τρίγωνα που έχουν τις κορυφές τους πάνω σε ένα οποιοδήποτε # σχηματίζονται με τις πιο πάνω ευθείες δηλαδή: $\binom{4}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{\nu}{2}$

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{\nu}{2}\cdot\binom{4\nu}{1} + \binom{\nu}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{5(\nu-1)}{1} - \binom{4}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{\nu}{2} = 2700 \Rightarrow$$

$$5\cdot\nu\cdot(\nu-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\nu + \nu\cdot 10\cdot 5(\nu-1) - 4\cdot 10\cdot \nu(\nu-1)\cdot\frac{1}{2} = 2700 \Rightarrow$$

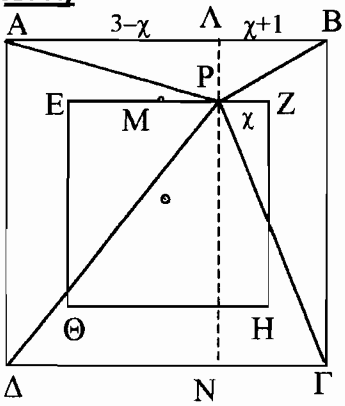
$\nu^3 - \nu^2 + 5\nu^2 - 5\nu - 2\nu^2 + 2\nu = 270 \Rightarrow \nu^3 + 2\nu^2 - 3\nu - 270 = 0 \Rightarrow$

$(\nu - 6)\cdot(\nu^2 + 8\nu + 45 = 0 \Rightarrow$ **$\nu = 6$** λύση (η μόνη) β΄ τρόπος   όπως πιο πάνω αλλά για τα τρίγωνα ΕΖΗ παίρνουμε τα σημεία τομής 3 από τις 5 // και ν – 1 από τις ν // οπότε : $\binom{5}{1}\cdot\binom{\nu}{2}\cdot\binom{4\nu}{1}+\binom{\nu}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot 3(\nu-1)=270$

$\Rightarrow \nu^3+2\nu^2-3\nu-270=0 \Rightarrow$ **ν = 6 .**

4. Τα τετράγωνα ΑΒΓΔ (ΑΒ=4cm) και ΕΖΗΘ (ΕΖ=2cm) έχουν το ίδιο κέντρο και τις πλευρές τους παράλληλες. Αν S είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων τυχαίου σημείου Ρ πάνω στην ΕΖ, από τις κορυφές του ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του S, καθώς και την θέση του Ρ στην κάθε περίπτωση.

Λύση



Αν είναι ΡΖ=χ (όπου $0 \le \chi \le 1$) τότε :

ΛΒ=χ+1=ΝΓ, ΑΛ=3–χ=ΝΔ, ΡΛ=1, ΡΝ=3

$S(\chi)=(P\Lambda)^2+(PB)^2+(P\Gamma)^2+(P\Delta)^2=$

$\quad = 2[(3-\chi)^2+1^2+(\chi+1)^2+3^2]= 2\cdot(2\chi^2-4\chi+20)$

$\Rightarrow S(\chi) = 4\cdot(\chi^2-2\chi+10)=4\cdot[(\chi-1)^2+9]$

για $\chi=0 \Rightarrow S=4\cdot(1+9)=40$

δηλαδή $S_{max}=40$ *με* $P\equiv Z$ *ή Ε*

για $\chi=1 \Rightarrow S=4(0+9)=36$

δηλαδή $S_{min}=36$ *με* $P\equiv M$

5. Να βρείτε την συνάρτηση f: $\mathbf{R}-\{0,\pm1,2,\frac{1}{2}\} \to \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(\chi)-\frac{\chi}{\chi+1}\cdot f\left(1-\frac{1}{\chi}\right)=\frac{1}{1-\chi},\quad \forall\, \chi\in \mathbf{R}-\{0,\pm1,2,\tfrac{1}{2}\}.$$

Λύση

$$f(\chi)=\frac{\chi}{\chi+1}\cdot f\left(1-\frac{1}{\chi}\right)+\frac{1}{1-\chi}\qquad (A)$$

$$\alpha\nu\ \chi\to 1-\frac{1}{\chi}\ \Rightarrow f\left(1-\frac{1}{\chi}\right)=\frac{1-\frac{1}{\chi}}{1-\frac{1}{\chi}+1}\cdot f\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{\chi}}\right)+\frac{1}{1-1+\frac{1}{\chi}}$$

$$\Rightarrow f\left(1-\frac{1}{\chi}\right)=\frac{\chi-1}{2\chi-1}\cdot f\left(\frac{1}{1-\chi}\right)+\chi\qquad (B)$$

$$\alpha\nu\ \chi\to \frac{1}{1-\chi}\ \Rightarrow f\left(\frac{1}{1-\chi}\right)=\frac{\frac{1}{1-\chi}}{\frac{1}{1-\chi}+1}\cdot f\left(1-\frac{1}{\frac{1}{1-\chi}}\right)+\frac{1}{1-\frac{1}{1-\chi}}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{1-\chi}\right)=\frac{1}{2-\chi}\cdot f(\chi)+1-\frac{1}{\chi}\qquad (\Gamma)\quad \text{οπότε:}$$

$$(B),(\Gamma)\Rightarrow f\left(1-\frac{1}{\chi}\right)=\frac{\chi-1}{2\chi-1}\cdot\left[\frac{1}{2-\chi}f(\chi)+1-\frac{1}{\chi}\right]+\chi\ \Rightarrow$$

$$f\left(1-\frac{1}{\chi}\right)=\frac{\chi-1}{2\chi-1}\cdot\frac{1}{2-\chi}\cdot f(\chi)+\frac{2\chi^3-2\chi+1}{\chi(2\chi-1)}\quad\Rightarrow$$

$$f(\chi)=\frac{\chi}{\chi+1}\left[\frac{\chi-1}{2\chi-1}\cdot\frac{1}{2-\chi}\cdot f(\chi)+\frac{2\chi^3-2\chi+1}{\chi(2\chi-1)}\right]+\frac{1}{1-\chi}\quad\Rightarrow$$

$$f(\chi)\left[1-\frac{\chi}{\chi+1}\cdot\frac{\chi-1}{2\chi-1}\cdot\frac{1}{2-\chi}\right]=\frac{\chi}{\chi+1}\cdot\frac{2\chi^3-2\chi+1}{\chi(2\chi-1)}+\frac{1}{1-\chi}\quad\Rightarrow$$

$$f(\chi)\cdot\frac{-2\chi^3+3\chi^2+3\chi-2-\chi^2+\chi}{(\chi+1)(2\chi-1)(2-\chi)}=\frac{2\chi^3-2\chi+1-2\chi^4+2\chi^2-\chi+2\chi^2+\chi-1}{(\chi+1)(1-\chi)(2\chi-1)}$$

$$f(\chi)=\frac{2-\chi}{1-\chi}\cdot\frac{2\cdot\chi\left(\chi^3-\chi^2-2\chi+1\right)}{2\cdot\left(\chi^3-\chi^2-2\chi+1\right)}\quad\Rightarrow\quad f(\chi)=\frac{\chi(\chi-2)}{\chi-1}$$

* * * * *

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ "ΜΙΧΑΗΛ ΓΙΩΡΓΑΛΛΑΣ" 1999

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης	*Επιμέλεια*
27 Μαρτίου 1999	Γρηγόρης Μακρίδης
10.00 – 14.30	Πέτρος Πέτρου

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΘΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ ΠΕΝΤΕ ΘΕΜΑΤΑ.
Η ΧΡΗΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΗΣ ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ.

1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Ο κύκλος με διάμετρο την ΑΒ τέμνει το ύψος ΓΓ′ και την προέκταση του στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Ο κύκλος με διάμετρο την ΑΓ τέμνει το ύψος ΒΒ′ και την προέκταση της στα Ρ και Σ. Να δείξετε ότι τα σημεία Μ, Ν, Ρ, Σ βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου.

2. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών x_ν ορίζεται ως εξής:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 3$$

$$x_{\nu+2} = \frac{1 + x_{\nu+1}}{x_\nu} \qquad ,\nu = 0,1,2,\ldots$$

Να βρεθεί το x_{1999}

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, πλευράς α, εγγεγραμμένο σε περιφέρεια κύκλου. Φέρνουμε τη χορδή ΓΕ μήκους $\frac{3\alpha}{\sqrt{5}}$ (το Ε στο μικρό τόξο ΑΒ). Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου (ΕΑΒ) προς το εμβαδό του τετραγώνου (ΑΒΓΔ).

4. Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $\{f_\nu(x)\}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}$$

$$f_{\nu+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_\nu(x)} \qquad \text{για} \qquad \nu \geq 1$$

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $f_\nu(x) = 2x$.

5. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τα σημεία (χ,ψ) που ικανοποιούν τη σχέση:

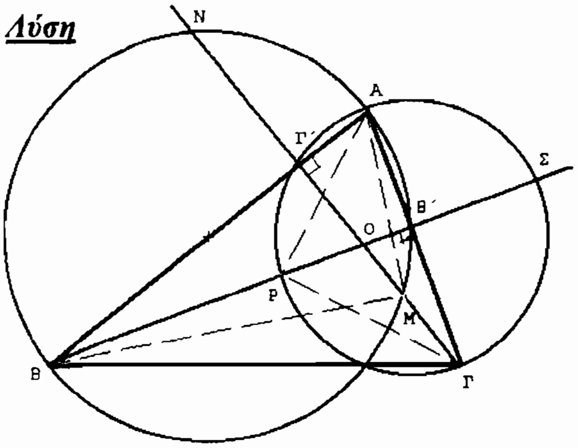
$$45\chi^2 + 4\psi^2\chi + 9\chi^2\psi = 20\psi^2 + 9\chi^3 + 4\psi^3$$

* * * * *

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Ο κύκλος με διάμετρο την ΑΒ τέμνει το ύψος ΓΓ′ και την προέκταση του στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα . Ο κύκλος με διάμετρο την ΑΓ τέμνει το ύψος ΒΒ′ και την προέκταση της στα Ρ και Σ. Να δείξετε ότι τα σημεία Μ, Ν, Ρ, Σ βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου.

Λύση



Η ΑΒ είναι μεσοκάθετη της ΜΝ διότι ΑΒ διάμετρος του πρώτου κύκλου και η ΑΓ μεσοκάθετη της ΡΣ.
Η ΑΜ=ΑΝ και ΑΡ=ΑΣ αρκεί να δείξω ότι ΑΜ=ΑΡ.

Φέρνω τη ΒΜ άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο ($\widehat{AMB} = 90°$) $\Rightarrow$
$(AM)^2=(A\Gamma')\cdot(A\Gamma) = (AB)(A\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{BA\Gamma})$ (1)

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΡΓ έχουμε
$(AP)^2=(AB')\cdot(AB)=(A\Gamma)\cdot(AB)\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{BA\Gamma})$ (2)

(1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow AM = AP \Rightarrow AN = AP = AM = A\Sigma \Rightarrow$ *τα σημεία Ν, Ρ, Μ, Σ ομοκυκλικά με κέντρο το Α.*

2. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών x_ν ορίζεται ως εξής:

$x_0 = 1$

$x_1 = 3$

$$x_{\nu+2} = \frac{1+x_{\nu+1}}{x_\nu} \qquad ,\nu = 0,1,2,\ldots \qquad \text{Να βρεθεί το } x_{1999}$$

Λύση

$\chi_0 = 1,\ \chi_1=3 \qquad \chi_{\nu+2}=\dfrac{1+\chi_{\nu+1}}{\chi_\nu},\ \ \nu=0,1,2\ \ldots$

$$\chi_2 = \frac{1+\chi_1}{\chi_0} = 4, \qquad \chi_3 = \frac{1+\chi_2}{\chi_1} = \frac{1+\dfrac{1+\chi_1}{\chi_0}}{\chi_1} = \frac{1+\chi_0+\chi_1}{\chi_0\chi_1} = \frac{5}{3}$$

$$\chi_4 = \frac{1+\chi_3}{\chi_2} = \frac{1+\dfrac{1+\chi_0+\chi_1}{\chi_0\chi_1}}{\chi_2} = \frac{\chi_0\chi_1+1+\chi_0+\chi_1}{\chi_0\chi_1\chi_2} = \frac{\chi_1(1+\chi_0)+1+\chi_0}{\chi_0\chi_1\chi_2} = \frac{(1+\chi_0)(1+\chi_1)}{\chi_0\chi_1\chi_2} =$$
$$= \frac{(1+\chi_0)\chi_0\chi_2}{\chi_0\chi_1\chi_2} = \frac{1+\chi_0}{\chi_1} = \frac{2}{3}$$

$$\chi_5 = \ldots = \frac{1+\chi_0+\chi_1}{\chi_1\chi_3} = \chi_0 = 1 \qquad \chi_6 = \frac{1+\chi_5}{\chi_4} = \chi_1 = 3$$

$\vdots$

$\chi_{5\nu+\kappa} = \chi_\kappa$ *για* $\kappa = 0,1,2,3,4$ *και* $\nu=1,2,3\ \ldots$

Για κάθε κ μπορεί να αποδειχθεί και επαγωγικά στο Ν.
$\kappa=0 \quad \chi_{5\nu} = \chi_0, \qquad \kappa=1 \quad \chi_{5\nu+1} = \chi_1, \qquad \kappa=2 \quad \chi_{5\nu+2} = \chi_2, \qquad \kappa=3 \quad \chi_{5\nu+3} = \chi_3,$

$\kappa=4 \quad \chi_{5\nu+4} = \chi_4$ *Απόδειξη με επαγωγή για* $\nu=1$ $\chi_9 = \chi_4$ *να δειχθεί (διαδοχικά)*

$$\chi_{5\kappa+4} = \chi_4, \quad \chi_{5\kappa+9} = \frac{1+\chi_{5\kappa+8}}{\chi_{5\kappa+7}} = \frac{1+\chi_3}{\chi_2} = \chi_4$$

Επαγωγή $\chi_{1999} = \chi_{5\nu+4} = \chi_4 = \dfrac{2}{3}$

$\chi_{5\nu+\kappa} = \chi_\kappa$, $\kappa = 0,1,2,3,4$ και $\nu = 1,2,3, \ldots$

για $\nu = 1$, $\kappa = 0$ $\chi_{5\cdot 1+0} = \chi_0$

$\kappa = 1$ $\chi_{5+1} = \chi_6 = \chi_1$

$\kappa = 2$ $\chi_{5+2} = \chi_7 = \chi_2$

$\kappa = 3$ $\chi_{5+3} = \chi_8 = \chi_3$

$\kappa = 4$ $\chi_{5+4} = \chi_9 = \chi_4$

Έστω ότι ισχύει για $\nu = \kappa$ *δηλ.*

$\chi_{5\kappa} = \chi_0$

$\chi_{5\kappa+1} = \chi_1$

$\chi_{5\kappa+2} = \chi_2$

$\chi_{5\kappa+3} = \chi_3$

$\chi_{5\kappa+4} = \chi_4$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa+1$

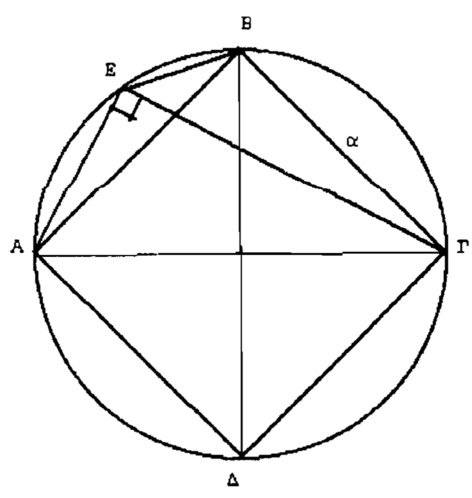
αλλά συγκεκριμένα το $\chi_{5(\kappa+1)+4} = \chi_4$ *λόγω* $\chi_{1999} = \chi_{5\lambda+4}$

<u>*Αλλά*</u>

$$\left.\begin{aligned}
\chi_{5\kappa+5} &= \frac{1+\chi_{5\kappa+4}}{\chi_{5\kappa+3}} = \frac{1+\chi_4}{\chi_3} = \chi_0 \\
\chi_{5\kappa+6} &= \frac{1+\chi_{5\kappa+5}}{\chi_{5\kappa+4}} = \frac{1+\chi_0}{\chi_4} = \chi_1 \\
\chi_{5\kappa+7} &= \frac{1+\chi_{5\kappa+6}}{\chi_{5\kappa+5}} = \frac{1+\chi_1}{\chi_0} = \chi_2 \\
\chi_{5\kappa+8} &= \frac{1+\chi_{5\kappa+7}}{\chi_{5\kappa+6}} = \frac{1+\chi_2}{\chi_1} = \chi_3
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}
\chi_{5(\kappa+1)+4} &= \chi_{5\kappa+9} = \frac{1+\chi_{5\kappa+8}}{\chi_{5\kappa+7}} = \frac{1+\chi_3}{\chi_2} \\
&= \frac{1+\frac{5}{3}}{4} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{2}{3} = \chi_4 \quad \text{ο.ε.δ}
\end{aligned}$$

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, πλευράς α , εγγεγραμμένο σε περιφέρεια κύκλου. Φέρνουμε τη χορδή ΓΕ μήκους $\dfrac{3\alpha}{\sqrt{5}}$ (το Ε στο μικρό τόξο ΑΒ). Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου (ΕΑΒ) προς το εμβαδό του τετραγώνου (ΑΒΓΔ).

<u>*Λύση*</u>



$$\text{ΓΕ} = \frac{3\alpha}{\sqrt{5}} \qquad \alpha = R\sqrt{2}$$

$$\text{ΑΓ} = 2R = 2\frac{a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$$

$$\text{ΑΕ} = \sqrt{(\text{ΑΓ})^2 - (\text{ΕΓ})^2} = \sqrt{2\alpha^2 - \frac{9\alpha^2}{5}} = \sqrt{\frac{10\alpha^2 - 9\alpha^2}{5}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{5}} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$$

Θ. Πτολ. $(\text{ΑΕ})\cdot(\text{ΒΓ}) + (\text{ΕΓ})\cdot(\text{ΑΓ}) = (\text{ΕΓ})\cdot(\text{ΑΒ})$

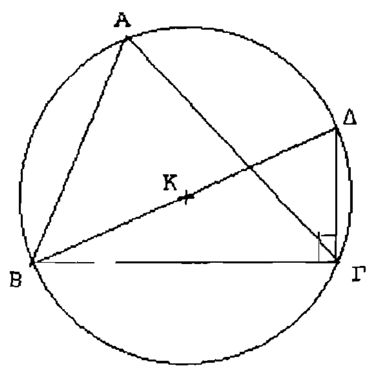
$$\frac{a}{\sqrt{5}}\cdot a+(EB)\cdot a\sqrt{2}=\frac{3a}{\sqrt{5}}\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{5}}+\sqrt{2}(EB)=\frac{3a}{\sqrt{5}}\Rightarrow (EB)\sqrt{2}=\frac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow (EB)=\frac{2a}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow E_{(ABE)}=\frac{(AE)(EB)(AB)}{4R}=\frac{\frac{a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2a}{\sqrt{10}}\cdot a}{4\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{2a^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}}=\frac{a^2}{10}=\frac{1}{10}E_{(AB\Gamma\Delta)}$$

ΛΗΜΜΑ: Δείξετε ότι κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,R) το εμβαδό του

$$E_{(AB\Gamma)}=\frac{(AB)(A\Gamma)(B\Gamma)}{4R}$$



$$E=\frac{1}{2}(AB)(A\Gamma)\ \eta\mu A=\frac{1}{2}(AB)(A\Gamma)\ \eta\mu\Delta=$$

$$=\frac{1}{2}(AB)(A\Gamma)\frac{(B\Gamma)}{(B\Delta)}=\frac{1}{2}\frac{(AB)(A\Gamma)(B\Gamma)}{2R}=\frac{(AB)(A\Gamma)(B\Gamma)}{4R}$$

4. Δίνεται η ακολουθία των συναρτήσεων $\{f_\nu(x)\}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$f_1(x)=\sqrt{x^2+48}$

$f_{\nu+1}(x)=\sqrt{x^2+6f_\nu(x)}$ για $\nu\geq 1$

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $f_\nu(x)=2x$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $f_\nu(\chi)$ είναι θετικό για κάθε ν και για κάθε χ ώστε $f_\nu(\chi)=2\chi$ δέχεται μόνο θετικές λύσεις.

Για ν = 1 έχουμε $f_1(x)=\sqrt{\chi^2+48}=2x \Rightarrow \chi^2+48=4\chi^2 \Rightarrow 3\chi^2=48 \Rightarrow \chi^2=16 \Rightarrow$

$\chi=\pm 4 \Rightarrow \chi=4$ *μια ρίζα της.*

$\Rightarrow f_1(4)=\sqrt{4^2+48}=\sqrt{16+48}=\sqrt{64}=8=2\cdot x$

Θα δείξουμε ότι $\chi=4$ είναι και λύση της $f_\nu(\chi)=2\chi$.

Δεχόμαστε ότι ισχύει $\nu=\kappa$ δηλαδή $f_\kappa(4)=8$ και θα αποδείξω ότι ισχύει για $\nu=\kappa+1$ δηλαδή $f_{\kappa+1}(4)=8$

Αλλά $f_{\kappa+1}(4)=\sqrt{4^2+6f_\kappa(4)}=\sqrt{16+6\cdot 8}=\sqrt{16+48}=\sqrt{64}=8$

Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν άλλες λύσεις

Για κάθε ν το $\dfrac{f_\nu(\chi)}{\chi}$ *φθίνει όταν το χ αυξάνει στο (0,∞) ώστε δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2 περισσότερο από μια φορά. Αν ν = 1 έχουμε* $\dfrac{f_1(\chi)}{\chi}=\dfrac{\sqrt{\chi^2+8}}{\chi}=\sqrt{1+\dfrac{48}{\chi^2}}$ *η οποία είναι φθίνουσα καθώς το χ αυξάνει.*

Για ν = κ έχουμε $\dfrac{f_\kappa(\chi)}{\chi}$ *φθίνει όταν το χ αυξάνει ώστε*

$\dfrac{f_{\kappa+1}(\chi)}{\chi}=\dfrac{\sqrt{\chi^2+6f_\kappa(\chi)}}{\chi}=\sqrt{1+\dfrac{6f_\kappa(\chi)}{\chi^2}}=\sqrt{1+\dfrac{6}{\chi}\cdot\dfrac{f_\kappa(\chi)}{\chi}}$ *η οποία και πάλιν φθίνει όταν το χ αυξάνει επομένως η χ = 4 είναι η μόνη ρίζα.*

5. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τα σημεία (χ,ψ) που ικανοποιούν τη σχέση: $45\chi^2+4\psi^2\chi+9\chi^2\psi=20\psi^2+9\chi^3+4\psi^3$

Λύση

$45\chi^2+4\psi^2\chi+9\chi^2\psi=20\psi^2+9\chi^3+4\psi^3 \Rightarrow (9\chi^2-4\psi^2)\,\psi-(9\chi^2-4\psi^2)\,\chi+(9\chi^2-4\psi^2)\,5=0$

$\Rightarrow (9\chi^2-4\psi^2)(\psi-\chi+5)=0 \Rightarrow (3\chi-2\psi)(3\chi+2\psi)(\psi-\chi+5)=0 \Rightarrow$

$3\chi-2\psi=0$ *(i)*

$3x+2\psi=0$ *(ii)* *Τρείς μη παράλληλες ευθείες περικλείουν τρίγωνο.*

$\psi-\chi+5=0$ *(iii)*

(i) + (ii)

$3\chi-2\psi=0$

$\underline{3x+2\psi=0}$

$6x=0\Rightarrow x=0$

$\psi=0 \quad (0,0)$

(i) + (iii)

$\left.\begin{array}{l}3\chi-2\psi=0\\ \psi-\chi+5=0\end{array}\right|\begin{array}{l}\\3\end{array}\quad \begin{array}{l}3\chi-2\psi=0\\ \underline{3\psi-3\chi+15=0}\end{array}$

$\psi+15=0\Rightarrow\psi=-15$

$\chi=-10 \quad (-10,-15)$

(ii) + (iii)

$\left.\begin{array}{l}3x+2\psi=0\\ \psi-\chi+5=0\end{array}\right|\begin{array}{l}\\3\end{array}\quad \begin{array}{l}3x+2\psi=0\\ \underline{3\psi-3\chi+15=0}\end{array}$

$5\psi+15=0\Rightarrow\psi=-3$

$\chi=2 \quad (2,-3)$

$$E=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&0&1\\-10&-15&1\\2&-3&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-10&-15\\2&-3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(30+30)=30$$

* * * * *

<u>ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ</u>

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ $15\frac{1}{2}$ ΕΤΩΝ

«ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» 1999

<u>Ημερομηνία και ώρα εξέτασης</u>
27.03.1999
10.00′-14.30′

<u>Επιμέλεια</u>
Μάριος Αντωνιάδης
Σάββας Αντωνίου

1) Αν $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ και $x \neq y \neq z$ να δείξετε ότι :

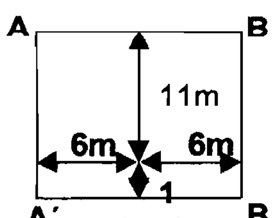
$$\frac{x\cdot\left(y^3-z^3\right)}{y-z}+\frac{y\cdot\left(z^3-x^3\right)}{z-x}+\frac{z\cdot\left(x^3-y^3\right)}{x-y}=0$$

2) Ο Ανδρέας μοίρασε ένα ποσό χρημάτων στα παιδιά του ως εξής : Το πρώτο παιδί πήρε £50 και το $\frac{1}{7}$ του υπόλοιπου, το δεύτερο πήρε £100 και το $\frac{1}{7}$ του νέου υπόλοιπου, το τρίτο παιδί πήρε £150 και το $\frac{1}{7}$ του νέου υπόλοιπου και συνέχισε να μοιράζει με τον ίδιο τρόπο μέχρι που εξαντλήθηκαν τα χρήματα. Στο τέλος όλα τα παιδιά πήραν το ίδιο ποσό χρημάτων. Να βρείτε το πλήθος των παιδιών του Ανδρέα.

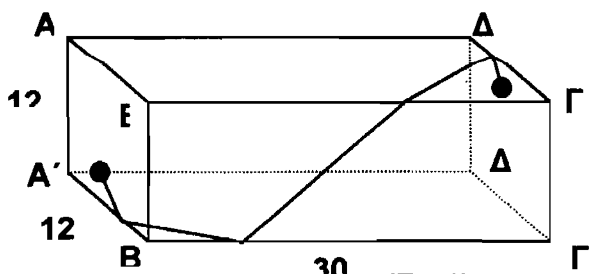
3) α. Να βρείτε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x,y) για τα οποία ισχύει: $x+y=x\cdot y$
β. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ το κλάσμα $\frac{\kappa^2+3}{\kappa+1}$ είναι φυσικός αριθμός

4) Στην αρχαία Αίγυπτο το εμβαδόν ενός κυρτού τετραπλεύρου με μέτρα διαδοχικών πλευρών $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ το υπολόγιζαν με τον τύπο $E=\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{\beta+\delta}{2}$. Να αποδείξετε ότι το αποτέλεσμα αυτού του τύπου είναι μεγαλύτερο ή ίσο του πραγματικού.

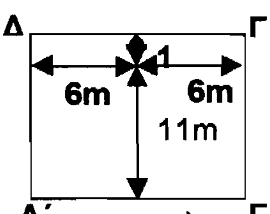
5) ,να δωμάτιο έχει διαστάσεις 12m ,12m , 30m (Σχ.1). Στους απέναντι τοίχους (ΑΒΒ′Α′) και (ΔΓΓ′Δ′) υπάρχουν δύο πρίζες όπως φαίνονται στα σχήματα (Σχ.2) και (Σχ.3). Οι πρίζες θα ενωθούν με σύρμα που σε όλο του το μήκος πρέπει να εφάπτεται σε τοίχο ή στο πάτωμα ή στο ταβάνι. Να δείξετε ότι το ελάχιστο μήκος σύρματος που χρειαζόμαστε είναι μικρότερο των 42m και να βρείτε αυτό το μήκος.



(Σχ.2)



(Σχ.1)



(Σχ.3)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Από $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow yz+xz+xy=0$ (1)

Α΄ μέλος:

$$\frac{x\cdot(y^3-z^3)}{y-z}+\frac{y\cdot(z^3-x^3)}{z-x}+\frac{z\cdot(x^3-y^3)}{x-y}=$$
$$=x\cdot(y^2+yz+z^2)+y\cdot(z^2+zx+x^2)+z\cdot(x^2+xy+y^2)=$$
$$=\underline{xy^2}+\underline{xyz}+\overline{xz^2}+\overline{yz^2}+\overline{xyz}+yx^2+zx^2+xyz+\underline{zy^2}=$$
$$=y\cdot(xy+xz+yz)+z\cdot(xy+xz+yz)+x\cdot(xy+xz+yz)=$$
$$=(xy+xz+yz)\cdot(x+y+z)\underset{(1)}{=}0$$

2. ,στω χ τα λεφτά που θα μοιράσει ο Ανδρέας.

Το 1ον παιδί πήρε : α=$50+\frac{x-50}{7}=\frac{x+300}{7}$

Το 2ον παιδί πήρε : β=$100+\frac{x-\frac{x+300}{7}-100}{7}=\frac{6x+3900}{49}$.

Από τα δεδομένα έχομε ότι α=β ¢ρα $\frac{x+300}{7}=\frac{6x+3900}{49}\Rightarrow x=£1800$

και α=£300. Επομένως Αριθμός παιδιών=$\frac{1800}{300}=6$

3. α) $x+y=x\cdot y \Leftrightarrow y=x\cdot y-x=x\cdot(y-1)\overset{y\neq 1}{\Rightarrow} x=\frac{y}{y-1}$.Οι αριθμοί y και $y-1$ σαν συνεχόμενοι ακέραιοι αριθμοί, είναι πρώτοι μεταξύ τους και αφού x ακέραιος το $y-1=\pm 1\Rightarrow \begin{cases} y=0, x=0 \\ y=2, x=2 \end{cases}$

β) $A=\frac{\kappa^2+3}{\kappa+1}=\frac{\kappa^2-1+4}{\kappa+1}=\kappa-1+\frac{4}{\kappa+1}$. Ο Α είναι φυσικός αριθμός αν $\frac{4}{\kappa+1}$ φυσικός αριθμός και κ φυσικός. Ο $\frac{4}{\kappa+1}$ είναι φυσικός αν (κ+1)/4 άρα

$$\kappa+1=\begin{cases} \pm 1\Rightarrow \kappa=0\Rightarrow A=3 \\ \pm 2\Rightarrow \kappa=1\Rightarrow A=2 \\ \pm 4\Rightarrow \kappa=3\Rightarrow A=3 \end{cases}$$

4.

$$(ΑΒΓΔ)=(ΑΒΓ)+(ΑΔΓ)=(ΑΒΔ)+(ΒΓΔ)$$

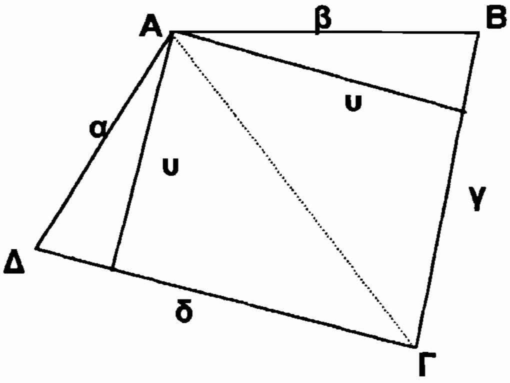
$$(ΑΒΓ)=\frac{\gamma\cdot\upsilon_2}{2}\le\frac{\beta\cdot\gamma}{2} \quad \text{αφού} \quad \upsilon_2\le\beta$$

$$(ΑΔΓ)=\frac{\delta\cdot\upsilon_1}{2}\le\frac{\delta\cdot\alpha}{2} \quad \text{αφού} \quad \upsilon_1\le\alpha$$

$$(ΑΒΔ)=\frac{\alpha\cdot\upsilon_3}{2}\le\frac{\alpha\cdot\beta}{2} \quad \text{αφού} \quad \upsilon_3\le\beta$$

$$(ΒΓΔ)=\frac{\delta\cdot\upsilon_4}{2}\le\frac{\delta\cdot\gamma}{2} \quad \text{αφού} \quad \upsilon_4\le\gamma$$

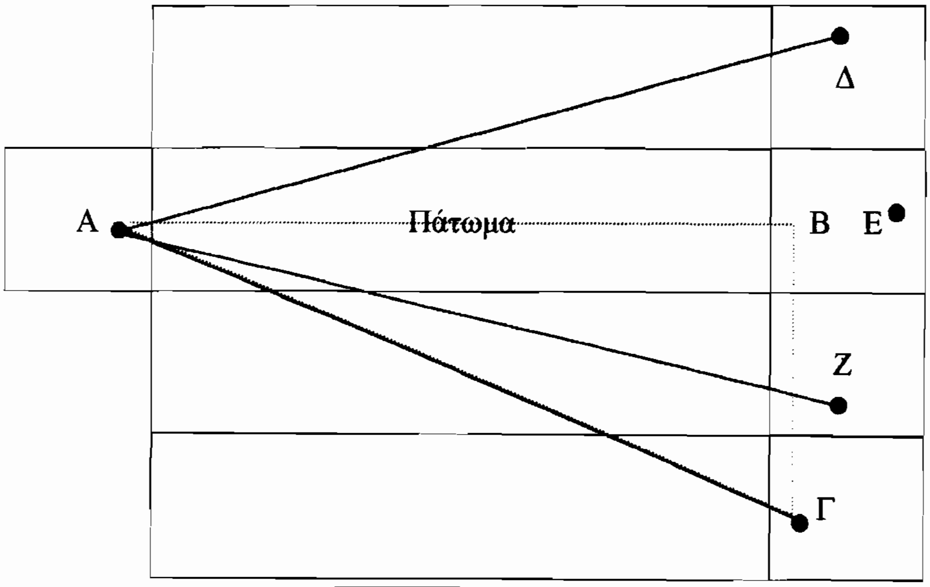
$$+$$



$$2(ΑΒΓΔ)\le\frac{\beta\cdot\gamma}{2}+\frac{\delta\cdot\alpha}{2}+\frac{\alpha\cdot\beta}{2}+\frac{\delta\cdot\gamma}{2}$$

$$(ΑΒΓΔ)\le\frac{\alpha(\beta+\delta)+\gamma(\beta+\delta)}{4}=\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\frac{\beta+\delta}{2}$$

5.



$$ΑΕ=42\ge ΑΔ=ΑΖ=\sqrt{37^2+17^2}=\sqrt{1658}\ge ΑΓ=\sqrt{32^2+24^2}=40$$

16^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

FYROM , 5 – 10 Μαΐου 1999

Επιμέλεια
Sava Grozdev

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες 30 λεπτά

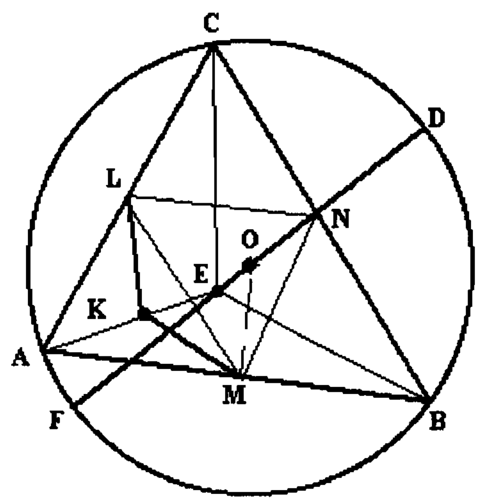
Πρόβλημα 1. Δίνεται ένα οξυγώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ABC}$, και D το μέσο του τόξου BC του περιγεγραμμένου κύκλου, που δεν περιέχει το σημείο A. Τα συμμετρικά σημεία του σημείου D ως προς την ευθεία BC και το κέντρο του κύκλου είναι τα E και F, αντίστοιχα . Εάν K είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος EA, να αποδείξετε ότι:

(α) Ο κύκλος που ορίζεται από τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $\overset{\Delta}{ABC}$ περνά από το K.

(β) Η ευθεία που ορίζεται από το σημείο K και το μέσο της πλευράς BC είναι κάθετη στην ευθεία AF.

Λύση

Έστω M, N, L τα μέσα των πλευρών AB, BC, και CA, αντίστοιχα.



(α) Είναι αρκετό να δείξουμε ότι:

$L\hat{K}M + L\hat{N}M = \pi$

Το AMNL είναι παραλληλόγραμμο άρα

$L\hat{N}M = \alpha$

Από το τρίγωνο ACE έχουμε LK // CE, και από το τρίγωνο AEB έχουμε MK // BE άρα

$L\hat{K}M = C\hat{E}B$. (πλευρές γωνιών παράλληλες)

Όμως $C\hat{E}B = C\hat{D}B$ επειδή το E είναι συμμετρικό του D ως προς την ευθεία BC.

Είναι $C\hat{D}B = \pi - \alpha$. Άρα $L\hat{K}M = \pi - \alpha$ και τελικά

$L\hat{K}M + L\hat{N}M = \pi - \alpha + \alpha = \pi$.

(β) Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AED}$ τα σημεία K και N είναι τα μέσα των πλευρών AE και ED, αντίστοιχα. Άρα, KN // AD. Στην άλλη πλευρά AD $\perp$ AF επειδή FD είναι διάμετρος και έτσι έχουμε KN $\perp$ AF.

Πρόβλημα 2 Εάν p > 2 είναι πρώτος αριθμός ο οποίος το 3 διαιρεί το p – 2. Έστω $S = \{\psi^2 - \chi^3 - 1 : \chi, \psi$ είναι ακέραιοι, $0 \le \chi, \psi \le p-1$. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον p-1 στοιχεία του συνόλου S είναι διαιρετά με το p.

Λύση Ο αριθμός p δίνεται από τον τύπο p=3κ+2 και συνεπάγεται p-1=3κ+1.

Λήμμα: Εάν χ_1 και χ_2 είναι ακέραιοι οι οποίοι $0 \le \chi_1, \chi_2 \le p-1$ και $\chi_1^3 \equiv \chi_2^3 \pmod p$, όπου p-1=3κ+1. Τότε, $\chi_1 = \chi_2$.

Απόδειξη: Από το θεώρημα του Ferma έχουμε $\chi_1^{p-1} \equiv \chi_2^{p-1} \pmod p$, άρα $\chi_1^{3\kappa+1} \equiv \chi_2^{3\kappa+1} \pmod p$. Αλλά $\chi_1^3 \equiv \chi_2^3 \pmod p$ και $\chi_1, \chi_2 \le p-1$ θα έχουμε $\chi_1 = \chi_2$.

Τώρα, έστω $\psi^3 - \chi^3 - 1 \in S$ και p διαιρεί το $\psi^3 - \chi^3 - 1$.

Υπολογίζουμαι το ψ. Υπάρχει μόνο μια πιθανή τιμή του ψ έτσι ώστε $0 \le \chi \le p-1$, $\psi^2-\chi^3-1 \in S$ και το p διαιρεί το $\psi^2-\chi^3-1$. Εάν υπάρχουν δύο τιμές χ_1 και χ_2 έχουμε την ακόλουθη αντίφαση για την σταθερά ψ: $\psi^2-1 \equiv \chi_1^3 \pmod p$ και $\psi^2-1 \equiv \chi_2^3 \pmod p$. Άρα $\chi_1^3 \equiv \chi_2^3 \pmod p$ και εφαρμόζοντας το λήμμα έχουμε $\chi_1=\chi_2$. Τώρα εφόσον $0 \le \psi \le p-1$, έχουμε p πιθανότητες για το ψ και από αυτό υπάρχουν τουλάχιστον p πιθανότητες για τα στοιχεία ψ του συνόλου S για τα οποία είναι διαιρετά με p. Αλλά $0 \in S$ και το 0 είναι διαιρετό με p. Παίρνομε ψ=1, χ=1. Άρα $0=1^2-0-1$. Εάν ψ=3, χ=2 έχουμε $0=3^2-2^3-1$. Αυτό δείχνει ότι υπάρχουν δύο ίσα στοιχεία μέσα στο σύνολο S, τα οποία είναι διαιρετά με p. Άρα συμπερένουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον p-1 στοιχεία του S, τα οποία διαιρούνται με p.

Πρόβλημα 3.

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{ABC}$ με οξείες γωνιές, M, N και P είναι τα σημεία τομής των καθέτων από το κέντρο βάρους G με τις πλευρές AB, BC και CA, αντοίσοιχα. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{4}{27} < \dfrac{\text{Εμβαδό}(MNP)}{\text{Εμβαδό}(ABC)} \le \dfrac{1}{4}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας το παρακάτω θεώρημα του Euller's : Εάν D είναι ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου $\overset{\Delta}{ABC}$ και M, N, P είναι τα σημεία τομής των κάθετων από το D με τις πλευρές, τότε : (Εμβαδό MNP) = $\dfrac{1}{4}$ Εμβαδό$(ABC)\left(1-\dfrac{OD^2}{R^2}\right)$ όπου O και R είναι το κέντρο και η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του $\overset{\Delta}{ABC}$ αντίστοιχα.

Το δεξιό μέλος της ανίσωσης εξάγεται άμεσα από το θεώρημα του Euller's όταν πάρουμε D≡G. Υπάρχει η ισότητα μόνο στην περίπτωση όπου O≡G, δηλαδή όταν $\overset{\Delta}{ABC}$ είναι ισόπλευρο.

Για το αριστερό μέλος της ανίσωσης θα πρέπει να αποδείξουμε ακριβώς ότι

$$:\frac{2}{9}<\frac{\text{Εμβδό}(MNP)}{\text{Εμβαδό}(ABC)} \quad \left(\text{Ισχύει, } \frac{4}{27}<\frac{2}{9}\right)$$

Εάν H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $\overset{\Delta}{ABC}$. Είναι γνωστό ότι $OG=\frac{1}{3}OH$. Άρα

$1-\frac{OG^2}{R^2}=1-\frac{1}{9}\frac{OH^2}{R^2}$ και επειδή το $\overset{\Delta}{ABC}$ είναι οξυγώνιο, έχουμε $OH<R$, Άρα

$1-\frac{OG^2}{R^2}>1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$. Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα του Euller's παίρνουμε

$\frac{\text{Εμβαδό}(MNP)}{\text{Εμβαδό}(ABC)}>\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{9}$. Η σταθερά $\frac{2}{9}$ δεν μπορεί να γίνει καλύτερη διότι στην περίπτωση ενός ορθογωνίου τριγώνου θα έχουμε $OH = R$.

Πρόβλημα 4.

Εάν $0\le \chi_0\le \chi_1\le \dots \le \chi_n\le \dots$ είναι μια αυξουσα ακολουθία από θετικούς ακέραιους για τους οποίους για κάθε $\kappa\ge 0$ ο αριθμός των όρων οι οποίοι είναι μικρότεροι από το κ είναι πεπερασμένοι και ορίζουμε αυτούς τους αριθμούς με ψ_κ. Να αποδείξετε ότι για όλους τους θετικούς ακέραιους m, n ισχύει: $\sum_{i=0}^{n}\chi_i+\sum_{j=0}^{m}\psi_j\ge(n+1)(m+1)$.

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της Επαγωγής για m+n.

Έστω m+n=2, δηλ. m=n=1 . Έξι περιπτώσειςείναι πιθανές.

1) $\chi_0=\chi_1=0$. Τότε $\psi_0=2$, $\psi_1=2$ και $\sum_{i=0}^{1}\chi_i+\sum_{j=0}^{1}\psi_j=4(1+1)(1+1)=(n+1)(m+1)$;

2) $\chi_0=0$, $\chi_1=1$. Τότε $\psi_0=1$, $\psi_1=2$ και $\sum_{i=0}^{1}\chi_i+\sum_{j=0}^{1}\psi_j=4=(n+1)(m+1)$;

3) $\chi_0=0$, $\chi_1>1$. Τότε $\psi_0=1$, $\psi_1=1$ και

$\sum_{i=0}^{1}\chi_i+\sum_{j=0}^{1}\psi_j=0+\chi_1+2=\chi_1+2\ge 2+2=4=(n+1)(m+1)$;

4) $\chi_0=1$, $\chi_1=1$. Τότε $\psi_0=0$, $\psi_1=2$ και $\sum_{i=0}^{1}\chi_i+\sum_{j=0}^{1}\psi_j=2+2=4=(n+1)(m+1)$;

5) $\chi_0=1,\ \chi_1>1$. Τότε $\psi_0=0,\ \psi_1=1$ και

$$\sum_{i=0}^{1}\chi_i+\sum_{j=0}^{1}\psi_j=1+\chi_1+1=2+\chi_1\geq 2+2=4=(n+1)(m+1);$$

6) $\chi_0>0,\ \chi_1>1$. Τότε $\psi_0=0,\ \psi_1=0$ και

$$\sum_{i=0}^{1}\chi_i+\sum_{j=0}^{1}\psi_j=\chi_0+\chi_1\geq 2+2=4=(n+1)(m+1);$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει για m+n-1. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για m+n.

Πρώτη περίπτωση: $\chi_n\geq m+1$

$$\sum_{i=0}^{n}\chi_i+\sum_{j=0}^{m}\psi_j=\sum_{i=0}^{n-1}\chi_i+\sum_{j=0}^{m}\psi_j+\chi_n\geq(n-1+1)(m+1)+\chi_n=$$
$$=n(m+1)+\chi_n\geq n(m+1)+m+1=(n+1)(m+1)$$

Δεύτερη περίπτωση: $\chi_n<m+1$. Τότε $\chi_n\leq m$ και $\psi_m\geq n+1$.

$$\sum_{i=0}^{n}\chi_i+\sum_{j=0}^{m}\psi_j=\sum_{i=0}^{n}\chi_i+\sum_{j=0}^{m-1}\psi_j+\psi_m\geq(n+1)(m-1+1)+\psi_m=$$
$$=(n+1)m+\psi_m\geq(n+1)m+n+1=(n+1)(m+1)$$

Τρίτη Βαλκανική Ολυμπιάδα Νέων

Plovdiv (Φιλιππούπολης)- Βουλγαρία, 25 Ιουνίου 1999

Διαθέσιμος χρόνος : 4,5 ώρες.

Επιμέλεια
Γρηγόρης Μακρίδης
Ανδρέας Φιλίππου

Πρόβλημα 1. Έστω α , b , c , χ, y αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\alpha^3 + \alpha\chi + y = 0 , \quad b^3 + b\chi + y = 0 \quad \text{και} \quad c^3 + c\chi + y = 0 .$$

Αν $\alpha \neq b \neq c \neq \alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha + b + c = 0$.

Πρόβλημα 2. Για κάθε $n = 0, 1, \dots , 1999$ ο αριθμός A_n ορίζεται ως $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Να βρείτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών $A_0 , A_1 , \dots , A_{1999}$.

Πρόβλημα 3. Δίνεται τετράγωνο S με πλευρά μήκους 20. Έστω M το σύνολο των τεσσάρων κορυφών του S μαζί με 1999 τυχαία σημεία στο εσωτερικό του S. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τρίγωνο με κορυφές σημεία του M και με εμβαδό μικρότερο ή ίσο του $\frac{1}{10}$.

Πρόβλημα 4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC με AB = AC. Έστω D τυχαίο σημείο πάνω στην πλευρά BC, ώστε BC > BD > DC > 0. Ονομάζουμε k_1 και k_2 τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων ABD και ADC, αντίστοιχα. Έστω BB′ και CC′ διάμετροι των κύκλων k_1 και k_2 , αντίστοιχα , και έστω M το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος B′C′ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου MBC είναι σταθερό, δηλαδή ότι δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου D.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Έστω α , b , c , χ, y αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$a^3 + ax + y = 0 , \quad b^3 + bx + y = 0 \quad \text{και} \quad c^3 + cx + y = 0 .$$

Αν $\alpha \neq b \neq c \neq \alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha + b + c = 0$.

Λύση

$(a^3 + ax + y) - (b^3 + bx + y) = 0 \Rightarrow a^3 - b^3 + x(a - b) = 0 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) + x(a - b) = 0$

Ισχύει $a \neq b$ άρα $a - b \neq 0 \quad \Rightarrow a^2 + b^2 + ab + x = 0 \quad (1)$

$(a^3 + ax + y) - (c^3 + cx + y) = 0 \Rightarrow a^3 - c^3 + x(a - c) = 0 \Rightarrow (a - c)(a^2 + ac + c^2) + x(a - c) = 0$

Ισχύει $a \neq c$ άρα $a - c \neq 0 \quad \Rightarrow a^2 + c^2 + ac + x = 0 \quad (2)$

$(1)-(2) \Rightarrow \left(a^2+b^2+ab+x\right)-\left(a^2+c^2+ac+x\right)=0 \Rightarrow a^2+b^2+ab+x-a^2-c^2-ac-x=0$

$\Rightarrow b^2-c^2+a(b-c)=0 \quad \Rightarrow \quad (b-c)(b+c)+a(b-c)=0 \Rightarrow (b-c)(b+c+a)=0$

Ισχύει $b \neq c$ άρα $b-c \neq 0$ $\quad \Rightarrow \quad a+b+c=0$

<u>**Πρόβλημα 2.**</u> Για κάθε $n = 0, 1, \ldots, 1999$ ο αριθμός A_n ορίζεται ως $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Να βρείτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών $A_0, A_1, \ldots, A_{1999}$.

<u>**Λύση**</u>

- $A_0 = 2^0 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 5 \cdot 7$. *Άρα πρέπει να εξετάσουμε αν οι αριθμοί 5 ή 7 διαιρούν τους αριθμούς* A_n.
- *Εξετάζουμε τον αριθμό 5*

$A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2} \equiv 2^{3n} + 9^{3n+1} + 0 \equiv 2^{3n} + (-1)^{3n+1}$

Για $n = 1$, $A_1 \equiv 9 \neq 0$, *άρα ο 5 δεν είναι κοινός διαιρέτης.*

- *Εξετάζουμε τον αριθμό 7*

$2 \equiv 2(mod7)$	$3 \equiv 3(mod7)$	$5 \equiv 5(mod7)$
$2^2 \equiv 4(mod7)$	$3^2 \equiv 9(mod7) \equiv 2(mod7)$	$5^2 \equiv 25(mod7) \equiv 4(mod7)$
$2^3 \equiv 8(mod7) \equiv 1(mod7)$	$3^3 \equiv 6(mod7)$	$5^3 \equiv 20(mod7) \equiv 6(mod7)$
$\Rightarrow 2^{3n} \equiv 1(mod7)$	$3^4 \equiv 18(mod7) \equiv 4(mod7)$	$5^4 \equiv 30(mod7) \equiv 2(mod7)$
	$3^5 \equiv 12(mod7) \equiv 5(mod7)$	$5^5 \equiv 10(mod7) \equiv 3(mod7)$
	$3^6 \equiv 15(mod7) \equiv 1(mod7)$	$5^6 \equiv 15(mod7) \equiv 1(mod7)$
	$\Rightarrow 3^{6n} \equiv 1(mod7)$	$\Rightarrow 5^{6n} \equiv 1(mod7)$
	$3^{6n+1} \equiv 3(mod7)$	$5^{6n+1} \equiv 5(mod7)$
	$3^{6n+2} \equiv 9(mod7) \equiv 2(mod7)$	$5^{6n+2} \equiv 25(mod7) \equiv 4(mod7)$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{3n} \equiv 1(mod7) \\ 3^{6n+2} \equiv 2(mod7) \\ 5^{6n+2} \equiv 4(mod7) \end{array}\right\} \Rightarrow 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2} \equiv (1+2+4)(mod7) \equiv 7(mod7) \equiv 0(mod7)$$

$$\Rightarrow 7 \,/\, 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$$

ή εξετάζουμε

$$\left.\begin{array}{l} 2^{3n} = 8^n \equiv 1(mod7) \\ 3^{6n+2} = 9^{3m+1} \equiv 2(mod7) \\ 5^{6n+2} = 25^{3n+1} \equiv 4(mod7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2} \equiv (1+2+4)(mod7) \equiv 7(mod7) \equiv 0(mod7) \\ \Rightarrow 7 \,/\, 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2} \end{array}$$

Άρα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του $\{A_n\}$ *για* $0 \leq n \leq 1999$ *είναι το 7.*

<u>**Πρόβλημα 3**</u>. Δίνεται τετράγωνο S με πλευρά μήκους 20. Έστω Μ το σύνολο των τεσσάρων κορυφών του S μαζί με 1999 τυχαία σημεία στο εσωτερικό του S. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τρίγωνο με κορυφές σημεία του Μ και με εμβαδό μικρότερο ή ίσο του $\frac{1}{10}$.

__Λύση__

Θα χωρίσουμε το τετράγωνο χρησιμοποιώντας όλα τα δοθέντα σημεία δηλαδή τις 4 κορυφές του τετραγώνου μαζί με τα 1999 εσωτερικά σημεία. (2003 σημεία)

- *Το πρώτο εσωτερικό σημείο μαζί με τις τέσσερις κορυφές του τετραγώνου χωρίζουν το τετράγωνο σε 4 τρίγωνα*
- *Για το δεύτερο σημείο υπάρχουν δύο περιπτώσεις*

  (α) είναι εσωτερικό ενός από τα 4 προηγούμενα τρίγωνα και το χωρίζει σε τρία άλλα τρίγωνα δηλαδή 3+3= 6 τρίγωνα

  (β) ανήκει σε μια πλευρά ενός από τα τέσσερα προηγούμενα τρίγωνα του και χωρίζει τα δύο τρίγωνα τα οποία έχουν κοινή αυτή την πλευρά σε δύο άλλα τρίγωνα δηλαδή έχουμε $2 + 2\cdot 2 = 6$ τρίγωνα.

  Τελικά και στις δύο περιπτώσεις τα 4 τρίγωνα έγιναν 6 δηλαδή αυξήθηκαν κατά 2.
- *Κάθε νέο τρίγωνο που προσθέτουμε θα αυξάνει τα τρίγωνα κατά δύο ακριβώς όπως το δεύτερο σημείο δηλαδή τα τρίγωνα θα γίνονται 4,6,8,... έτσι έχουμε αριθμητική πρόοδο με 1999 όρους ($\nu=1999$) με πρώτο όρο $\alpha_1=4$ και διαφορά $\delta=2$*

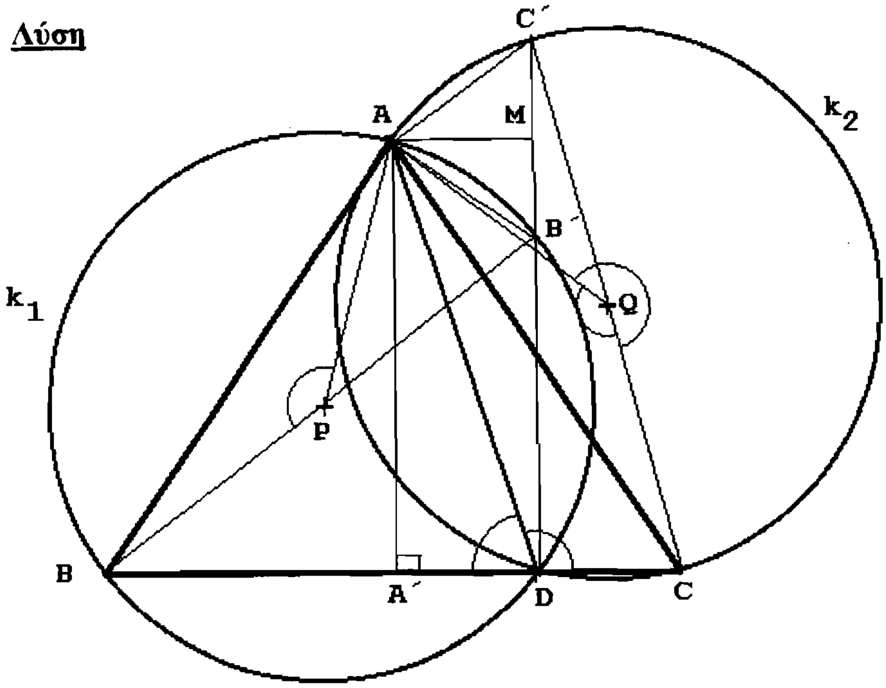
  άρα $\alpha_{1999}=4 + (1999-1)\cdot 2 = 4 + 1998\cdot 2 = 4000$ τρίγωνα.
- *Το εμβαδό του τετραγώνου είναι $20\cdot 20=400$ τετραγωνικές μονάδες*

  Το άθροισμα των εμβαδών όλων των τριγώνων είναι ίσο με το εμβαδό του τετραγώνου δηλαδή 400 τετραγωνικές μονάδες. Αν όλα τα τρίγωνα είχαν το κάθε ένα εμβαδό μεγαλύτερο από $\frac{1}{10}$ τετραγωνικής μονάδας τότε το άθροισμα των εμβαδών τους θα είναι μεγαλύτερο από τις 400 τετραγωνικές μονάδες του τετραγώνου το οποίο όμως είναι αδύνατο.

  Άρα υπάρχει τουλάχιστο τετράγωνο μικρότερο η ίσο του $\frac{1}{10}$

__Πρόβλημα 4.__ Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC με AB = AC. Έστω D τυχαίο σημείο πάνω στην πλευρά BC, ώστε $BC > BD > DC > 0$. Ονομάζουμε k_1 και k_2 τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων ABD και ADC, αντίστοιχα. Έστω BB' και CC' διάμετροι των κύκλων k_1 και k_2, αντίστοιχα, και έστω M το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $B'C'$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου MBC είναι σταθερό, δηλαδή ότι δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου D.

Λύση



ABC ισοσκελές τρίγωνο
(AB = AC)
D σημείο BC
(BC > BD > DC > 0)
k_1 (A,B,D) , k_2(A,D,C)
M μέσο του B΄C΄

E_{MBC} =; σταθερό

$\widehat{BDA} + \widehat{CDA} = 180^0 \Rightarrow 2\cdot\widehat{BDA} + 2\cdot\widehat{CDA} = 360^0 \Rightarrow \widehat{BPA} + \widehat{CQA} = 360^0 \Rightarrow \widehat{BPA} = 360^0 - \widehat{CQA}$

$\Rightarrow \widehat{BPA} = \widehat{CQA} \Rightarrow B\hat{P}A = C\hat{Q}A$ *(ισοσκελή τρίγωνα , AB = AC , γωνιές κορυφής ίσες)* $\Rightarrow$

$\Rightarrow BP = PA = QB = QC = R$ *δηλαδή έχουμε ίσους κύκλους.*

$B\hat{D}B' = 90^0$ *(βαίνει σε ημικύκλιο)* $\Rightarrow C\hat{D}B' = 90^0 \Rightarrow B'D \perp BC$ (1)

CC΄ διάμετρος $\Rightarrow \widehat{C'DC} = 90^0 \Rightarrow C'D \perp BC$ (2) . (1)$\wedge$(2) $\Rightarrow$ C΄, B΄, D *συνευθειακά σημεία*

Φέρνουμε AA΄ ⊥ BC (ύψος του τριγώνου ABC)

Το σημείο D βρίσκεται μεταξύ των σημείων A΄ και C (BC >BD >DC)

$\widehat{BDA} < 90^0 < \widehat{CDA}$ (BC >BD >DC)

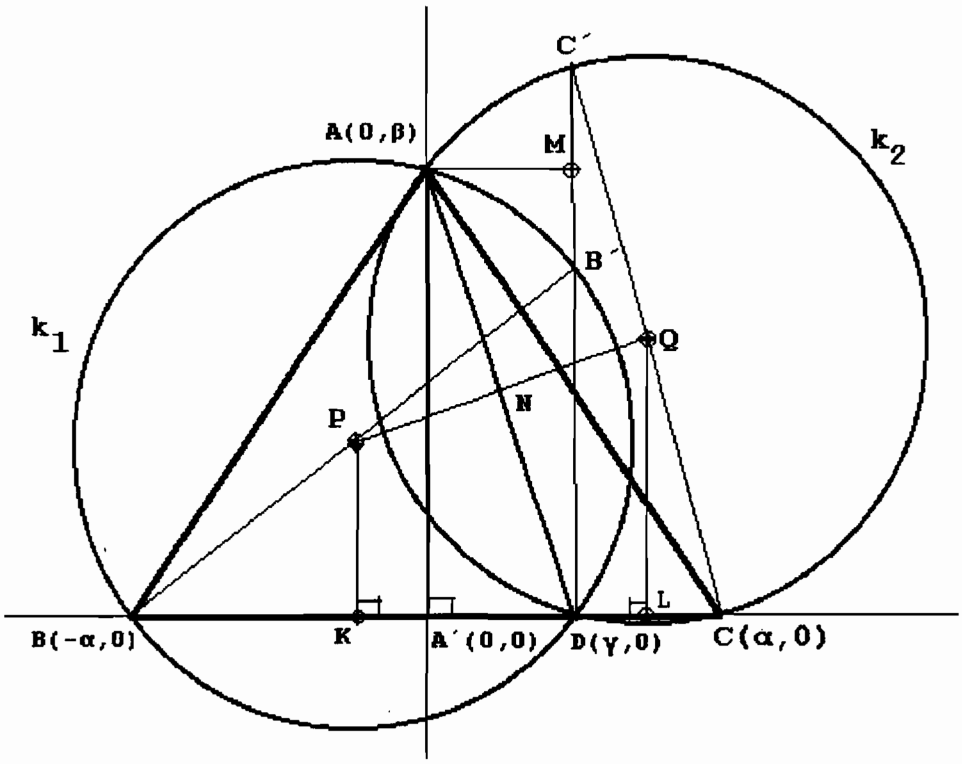
$\widehat{BDB'} = 90^0$ *(βαίνει σε ημικύκλιο)* (3)

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABB'}$ *και* $\overset{\triangle}{ACC'}$ $\widehat{BAB'} = \widehat{CAC'} = 90^0$ *(βαίνουν σε ημικύκλια)* *AB = AC (δεδομένο) ,* *BB΄ = CC΄ (διάμετροι ίσων κύκλων)*	$\Rightarrow A\hat{B}B' = A\hat{C}C' \Rightarrow AB' = AC' \Rightarrow$ $A\overset{\triangle}{B'}C'$ *ισοσκελές τρίγωνο* *AM διάμεσος* $\Rightarrow AM \perp B'C' \Rightarrow$ $\widehat{AMD} = 90^0$ (4)

(1) $\wedge$ (3) $\wedge$ (4) $\Rightarrow$ *A΄DMA ορθογώνιο παραλληλόγραμμο* $\Rightarrow MD = AA'$

$E_{MBC} = ½\, BC\cdot MD = ½\, BC\cdot AA' = ½\cdot 2E_{ABC} = E_{ABC}$ = *σταθερό .*

Λύση με χρήση Αναλυτικής Γεωμετρίας



Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(0,\beta)$, $B(-\alpha,0)$, $C(\alpha,0)$, $A'(0,0)$.

$\widehat{BDB'}=90^0$ *(βαίνει σε ημικύκλιο)* $\Rightarrow B'D \perp BC$

Φέρουμε τα αποστήματα PK, QL *των χορδών* BD *και* DC *αντίστοιχα*

$\Rightarrow PK \perp BD$ *και* K *μέσο* BD, $QL \perp DC$ *και* L *μέσο* DC

Φέρουμε τη διάκεντρο $PQ \Rightarrow N$ *μέσο της κοινής χορδής* AD *και* $PQ \perp AD$

$$\Rightarrow \chi_{B''} = \gamma\,,\quad \chi_K = \chi_P = \frac{\gamma - a}{2}\,,\quad \chi_\Lambda = \chi_Q = \frac{a+\gamma}{2}\,,\quad \text{N } \textit{μέσο } AD \Rightarrow N\left(\frac{\gamma}{2},\frac{\beta}{2}\right)$$

$$PQ \perp AD,\quad \lambda_{A\Delta} = \frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \lambda_{PQ} = -\frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow (PQ):\ \psi - \frac{\beta}{2} = -\frac{\gamma}{\beta}\left(\chi - \frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow 2\gamma\chi + 2\beta\psi = \beta^2 + \gamma^2$$

Σημείο $P \in (PQ)$:

$$x_P = \frac{\gamma - \alpha}{2},\quad 2\gamma\chi + 2\beta\psi = \beta^2 + \gamma^2 \quad \Rightarrow \psi_P = \frac{\beta^2 + \alpha\gamma}{2\beta} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}, \frac{\beta^2+\alpha\gamma}{2\beta}\right)$$

Σημείο $Q \in (PQ)$:

$$x_Q = \frac{\alpha + \gamma}{2},\quad 2\gamma\chi + 2\beta\psi = \beta^2 + \gamma^2 \quad \Rightarrow \psi_Q = \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{2\beta} \quad \Rightarrow \quad Q\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}, \frac{\beta^2-\alpha\gamma}{2\beta}\right)$$

$$P\,\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\, BB' \Rightarrow \psi_P = \frac{\psi_B + \psi_{B'}}{2} \Rightarrow \psi_B = \frac{\beta^2 + \alpha\gamma}{\beta} \Rightarrow B'\left(\gamma, \frac{\beta^2 + \alpha\gamma}{\beta}\right)$$

$$Q\,\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\ CC' \Rightarrow \chi_Q = \frac{x_C + x_{C'}}{2}, \quad \psi_Q = \frac{\psi_C + \psi_{C'}}{2} \Rightarrow \chi_Q = \gamma, \ \ \psi_{C'} = \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad C'\left(\gamma, \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\beta}\right)$$

M μέσο B΄C΄⇒ M(γ,β) ⇒d(M, XX΄)=β ⇒d(M,BC) = β = AA΄= ύψος αρχικού τριγώνου ABC
Άρα το εμβαδό του τριγώνου MBC ισούται με το εμβαδό του αρχικού τριγώνου το οποίο είναι σταθερό.

40η ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Βουκουρέστι, 16 Ιουλίου 1999

Επιμέλεια
Μάριος Αντωνιάδης
Ευθύβουλος Λιασίδης

ΠΡΩΤΗ ΜΕΡΑ

Πρόβλημα 1.

Προσδιορίστε όλα τα σύνολα σημείων S του επιπέδου, που είναι πεπερασμένα, με τρία τουλάχιστον στοιχεία, τα οποία ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση :

Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία A και B του S, η μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι άξονας συμμετρίας του S.

Πρόβλημα 2.

Έστω n ένας σταθερός ακέραιος, με $n \geq 2$.

α) Προσδιορίστε την ελάχιστη σταθερά C που είναι τέτοια, ώστε η ανισότητα

$$\sum_{1 \leq i \leq j} x_i x_j \left(x_i^2 + x_j^2\right) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

να αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x_1, \ldots, x_n \geq 0$

β) Για αυτήν τη σταθερά C που θα βρείτε, προσδιορίστε πότε ισχύει η ισότητα.

Πρόβλημα 3.

Θεωρείστε ένα πίνακα σχήματος τετραγώνου πλευράς n, όπου n είναι ένας σταθερός άρτιος θετικός ακέραιος. Ο πίνακας διαιρείται σε n^2 μοναδιαία τετράγωνα. Λέμε ότι δύο διαφορετικά μοναδιαία τετράγωνα του πίνακα είναι γειτονικά, αν αυτά έχουν μία κοινή πλευρά.

N μοναδιαία τετράγωνα του πίνακα σημαδεύονται έτσι ώστε κάθε μοναδιαίο τετράγωνο (σημαδεμένο ή μη σημαδεμένο) να είναι γειτονικό σε ένα τουλάχιστον σημαδεμένο μοναδιαίο τετράγωνο.

Προσδιορίστε την ελάχιστη δυνατή τιμή του N.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1.

Σημειώνουμε με $\Sigma_{K\Lambda}$ τη συμμετρία ως προς την μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ, και συμβολίζουμε το κέντρο βάρους του συνόλου S με M.

Από $\Sigma_{AB}(S)=S$ έχουμε $\Sigma_{AB}(M)=M$ για κάθε $A,B \in S$, οπότε όλα τα σημεία του S βρίσκονται σε ίση απόσταση από το M, άρα βρίσκονται πάνω στη περιφέρεια του κύκλου με κέντρο το M και θα είναι οι κορυφές του κυρτού πολυγώνου $A_1A_2\ldots A_\nu$. Η συμμετρία ως προς τη μεσοκάθετη του A_1A_3 μετασχηματίζει το μισό του επιπέδου στο άλλο μισό οπότε το σημμετρικό του A_2 δεν μπορεί να είναι άλλο από το ίδιο το A_2, $\Sigma_{A_1A_3}(A_2)=A_2$ άρα $A_1A_2=A_2A_3$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι $A_2A_3=A_3A_4=\ldots=A_\nu A_1$ και αφού το S βρίσκεται πάνω σε κύκλο το πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ είναι κανονικό.

Πρόβλημα 2.

Η ανισότητα είναι συμμετρική και ομογενής, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$ και $\sum_i x_i = 1$. Σ'αυτή την περίπτωση αρκεί να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα $F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i<j} x_i x_j \left(x_i^2+x_j^2\right)$.

Προσπαθούμε να αυξήσουμε την τιμή του F αντικαθιστώντας το διάνυσμα $x=(x_1,\ldots,x_K,x_{k+1},0,\ldots,0)$ με το διάνυσμα $x'=(x_1,\ldots,x_{K-1},x_k+x_{k+1},0,\ldots,0)$ όπου x_{k+1} είναι η τελευταία μη μηδενική συντεταγμένη και υποθέτουμε ότι $k \geq 2$:

$$F(x')-F(x)=x_k x_{kl}\left[3(x_k+x_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k^2 - x_{k+1}^2\right]=$$

$$=x_k x_{k+1}\left[3(x_k+x_{k+1})(1-x_k-x_{k+1})-x_k^2-x_{k+1}^2\right]=x_k x_{k+1}\left[(x_k+x_{k+1})(3-4(x_k+x_{k+1}))+2x_k x_{k+1}\right]$$

Από $1 \geq x_1+x_k+x_{k+1} \geq \frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})+x_k+x_{k+1}$ έχουμε $\frac{2}{3} \geq x_k+x_{k+1}$ και $F(x')-F(x)>0$

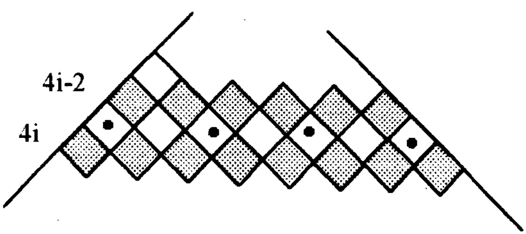
Εφαρμόζοντας το πιο πάνω αρκετές φορές καταλήγουμε στο

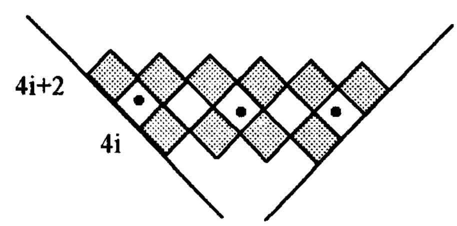
$$F(x) \leq F(a,b,0,\ldots,0)=ab\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{2}(2ab)(1-2ab) \leq \frac{1}{8}=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right).$$

Από αυτό συμπερένουμε ότι $C=\frac{1}{8}$ και η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε αν δύο από τα x_i είναι ίσα (πιθανώς μηδέν) και τα υπόλοιπα ίσα με μηδέν.

Πρόβλημα 3.

Πρώτα χρωματίζουμε τον πίνακα με μαύρο άσπρο όπως ακριβώς στο σκάκι. Έστω $N=f(n)$ ο ζητούμενος αριθμός και $f_w(n)$ ο ελάχιστος αριθμός των άσπρων σημαδεμένων τετραγώνων ώστε κάθε μαύρο τετράγωνο να έχει γειτονικό ένα άσπρο σημαδεμένο τετράγωνο. Ορίζουμε με αντίστοιχο τρόπο και το $f_b(n)$. Από την συμμετρία του πίνακα-σκακιού ($n=2\kappa$) έχομε ότι $f_w(n)=f_b(n)$ και $f(n)=f_w(n)+f_b(n)$. Εάν τοποθετήσουμε τον πίνακα έτσι ώστε οι διαγώνιές του να γίνουν οριζόντιες γραμμές τότε το "μήκος" των μαύρων γραμμών θα είναι $2,4,\ldots,2\kappa,\ldots,4,2$. Σημαδεύουμε τα άσπρα τετράγωνα που βρίσκονται στις μονές θέσεις στη γραμμή $4i-2$





Στην πρώτη περίπτωση υπάρχουν $2i$ σημαδεμένα τετράγωνα ενώ στη δεύτερη $2i+1$ οπότε θα έχουμε $2+4+\ldots+\kappa+\ldots+3+1=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ άσπρα σημαδεμένα. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε μαύρο τετράγωνο έχει γειτονικό του ένα σημαδεμένο άσπρο και άρα $f_w(n)\leq\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$. Τα $\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ σημαδεμένα άσπρα τετράγωνα δεν έχουν κανένα κοινό γειτονικό μαύρο άρα θα χρειαστούμε το λιγότερο και $\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ σημαδεμένα μαύρα τετράγωνα δηλαδή $f_b(n)\geq\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$.

Συμπέρασμα από τα πιο πάνω είναι ότι $f_w(n)=f_b(n)=\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ και $f(n)=\kappa(\kappa+1)$.

ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΡΑ

Βουκουρέστι, 17 Ιουλίου 1999

Πρόβλημα 4.

Προσδιορίστε όλα τα ζεύγη (n,p) θετικών ακεραίων έτσι ώστε :

Ο p είναι πρώτος

$n \le 2p$, και ο

$(p-1)^n + 1$ διαιρείται με το n^{p-1}

Πρόβλημα 5.

Δύο κύκλοι Γ_1 και Γ_2 βρίσκονται στο εσσωτερικό του κύκλου Γ και εφάπτονται του Γ στα διαφορετικά σημεία M και N, αντίστοιχα. Ο κύκλος Γ_1 περνάει από το κέντρο του Γ_2. Η ευθεία που περνάει από τα δύο σημεία τομής των κύκλων Γ_1 και Γ_2, τέμνει τον κύκλο Γ στα σημεία A και B. Οι ευθείες MA και MB τέμνουν τον κύκλο Γ_1 στα σημεία C και D, αντίστοιχα.

Δείξτε ότι η ευθεία CD εφάπτεται του Γ_2.

Πρόβλημα 6.

Προσδιορίστε όλες τις συναρτήσεις $f : R \to R$ που είναι τέτοιες ώστε

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

για όλα τα $x, y \in R$

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

Πρόβλημα 4.

Είναι προφανές ότι έχομε τις λύσεις (1,p) και (2,2). Οι λύσεις (x,p) που μένουν να βρούμε είναι για $x \geq 2$ και $p \geq 3$.

Υσχυριζόμαστε ότι σε αυτή την περίπτωση το χ είναι διαιρετό με το p και x<2p, οπότε x=p.

Αυτό οδηγεί στο ότι : $p^{p-1}/(p-1)^p + 1 = p^2\left(p^{p-2} - \binom{p}{1}p^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-3}p - \binom{p}{p-2} + 1\right)$. Επειδή όλοι οι όροι του αναπτύγματος είναι διαιρετοί με το p συμπεραίνουμε ότι $p-1 \leq 2$ ότι p=3 και x=3.

Αποδεικνύουμε τώρα τον ισχυρισμό μας.

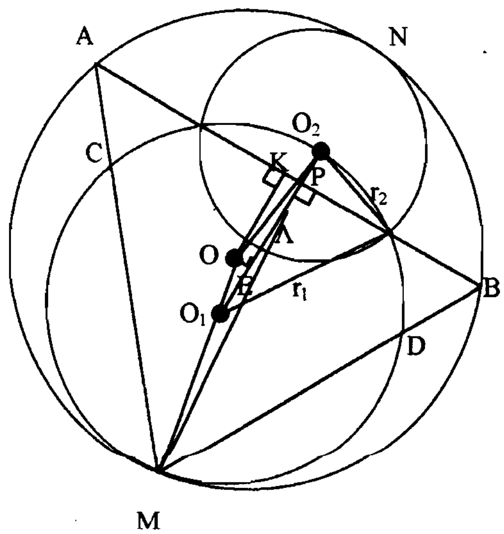
Αφού το $(p-1)^x + 1$ είναι περιττός και ο x είναι περιττός (x<2p). Έστω τώρα ότι ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του x είναι ο q, τότε από $q/(p-1)^x + 1$ παίρνουμε $(p-1)^x \equiv -1 \bmod q$ και (q,p-1)=1 . Όμως (x,q-1)=1 και από το ότι ο μέγιστος διαιρέτης των x , q-1 είναι το 1 μπορούμε να βρούμε δύο ακέραιους α και β τέτοιους ώστε αx+β(p-1)=1 οπότε

$$p-1 \equiv (p-1)^{\alpha x} \cdot (p-1)^{\beta(q-1)} \equiv (-1)^{\alpha} \cdot 1^{\beta} \equiv -1 \bmod q \text{ επειδή το α πρέπει να είναι περιττός.}$$

Αυτό δείχνει ότι q/p, οπότε p=q.

Οι ζητούμενες λύσεις είναι (2,2) , (3,3), (1,p) όπου ο p πρώτος άριθμος.

Πρόβλημα 5.



Έστω $\Gamma(O,r)$, $\Gamma_1(O,r_1)$, $\Gamma_2(O,r_2)$ οι δεδομένοι κύκλοι. Το $r_1>r_2$ (για τις περιπτώσεις $r_1=r_2$ και $r_1<r_2$) η λύση είναι ανάλογη.

Το τρίγωνο $MO_1\Lambda$ είναι όμοιο με το τρίγωνο MOK και ως εκ τούτου $O_1\Lambda=\frac{r}{r_1}OK=\frac{r}{r_1}(O_1P-O_1E)=\frac{r}{r_1}\left(\frac{2r_1^2-r_2^2}{2r_1^2}\cdot r_1-\frac{(r-r_1)^2+r_1^2-(r-r_2)^2}{2(r-r_1)r_1}\cdot(r-r_1)\right)=r_1-r_2$ {από το νόμο των συνημιτόνων},άρα $O_2\Lambda=r_2$ και Λ ανήκει στον κύκλο Γ_2.

Εάν h είναι η ομοιοθεσία με κέντρο το M και δύναμη $\frac{r_1}{r}$ τότε h: $AB \to CD$ και $h: K \to \Lambda$ οπότε το $\Lambda \varepsilon CD$ και επειδή $AB//CD$ (ομοιοθεσία) έπεται ότι $CD \perp O_2\Lambda$ και άρα η CD είναι εφαπτομένη του Γ_2.

Πρόβλημα 6.

Έστω A=πεδίο τιμών της f (Imf) και $c=f(0)$. Θέτοντας $x=y=0$ παίρνουμε $f(-c)=f(c)+c-1$, άρα $c\neq0$.

Είναι εύκολο να δούμε την μορφή της f/A: παίρνοντας $x=f(y)$ τότε η $f(x)=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2}$ (1)

Το σημαντικό όμως είναι να δείξουμε ότι $A-A=R$. Πράγματι για $y=0$ παίρνουμε :
$\{f(x-c)-f(x)/x\in R\}=\{cx+f(c)-1/x\in R\}=R$ επειδή το c δεν είναι μηδέν.

Τώρα μπορούμε να βρούμε τον τύπο $f(x)$ για κάθε x εάν εκλέξουμε κατάλληλα y_1 ,y_2 τέτοια ώστε $x=y_1-y_2$.

$$f(x)=f(y_1-y_2)=f(y_2)+y_1y_2+f(y_1)-1=\frac{c+1}{2}-\frac{y_2^2}{2}+y_1y_2+\frac{c+1}{2}-\frac{y_1^2}{2}-1=c-\frac{(y_1-y_2)^2}{2}=c-\frac{x^2}{2} \quad (2)$$

Συγκρίνοντας την (1) και (2) έχουμε ότι $c=1$ και $f(x)=1-\frac{x^2}{2}$ για όλα τα $x\varepsilon R$.

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ
(Λ.Ε.Μ.) ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ : Σ1, Σ4, Σ5

Επιμέλεια: Μαρία Φαλά

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

Να απαντήσετε σε 12 μόνο από τις 15 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 7$.

2. Να βρείτε την γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης $εφ2x = εφ60^o$

3. Η Μαρία θα πάει εκδρομή και θέλει να πάρει μαζί της 3 παντελόνια. Αν η Μαρία έχει συνολικά 8 παντελόνια, κατάλληλα για την εκδρομή, κατά πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει τα 3 που θα πάρει μαζί της;

4. Μια εταιρεία θα προσλάβει τρεις υπαλλήλους για το ταμείο, το λογιστήριο και τις δημόσιες σχέσεις. Για κάθε θέση είναι εξίσου δυνατό να προσλάβει άνδρα (Α) ή γυναίκα (Γ).
   (α) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο του «πειράματος» (δυνατές περιπτώσεις πρόσληψης).
   (β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου από τους τρεις υπαλλήλους που θα προσληφθούν οι δυο ακριβώς να είναι γυναίκες.

5. Πόσα χρήματα, με σταθερό επιτόκιο 5% και απλό τόκο, πρέπει κάποιος να καταθέσει σήμερα ώστε μετά από 10 χρόνια να πάρει τόκους £7500;

6. Να βρείτε τον όγκο κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με βάση τετράγωνο πλευράς 5 cm και ύψος 12 cm.

7. Στον πιο κάτω πίνακα φαίνονται οι ψήφοι που συγκέντρωσαν 4 κόμματα σε ένα χωριό κατά τις βουλευτικές εκλογές.

Κόμμα	K_1	K_2	K_3	K_4	Λευκά / Άκυρα / Αποχές
Ψήφοι	35	45	60	40	20

   (α) Να βρείτε το σύνολο των ψηφοφόρων του χωριού.
   (β) Να βρείτε το ποσοστό (%) που συγκέντρωσε κάθε κόμμα στο πιο πάνω σύνολο.
   (γ) Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων γι' αυτόν τον πίνακα.

8. Να βρείτε τις λύσεις, σε μοίρες, της τριγωνομετρικής εξίσωσης $συν(3x + 30^o) = ημ30^o$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $0^o \leq x \leq 360^o$.

9. Ένας κώνος έχει βάση κύκλο με διάμετρο 6 cm. Το εμβαδό της κυρτής επιφάνειάς του είναι $E_κ = 15\ cm^2$. Να βρείτε το ύψος και το όγκο του κώνου.

10. Τα σημεία Β(4, 3) και Γ(2α, $α^2$) ανήκουν στην ευθεία (ε). Αν η ευθεία (ε) έχει κλίση 3 να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.

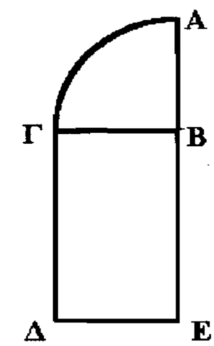
11. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη των ψηφίων; Πόσοι από αυτούς περιέχουν μόνο άρτια ψηφία;

12. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 4 cm, πλάτος 3 cm και όγκο V = 120 cm^3. Να βρείτε το ύψος και το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς του.

13. Σ΄ ένα ανελκυστήρα μπήκαν τέσσερα άτομα με μέσο όρο βάρους 65 κιλά. Κατέβηκε ένας και ο μέσος όρος των τριών που απέμειναν είναι 70 κιλά. Πόσο είναι το βάρος του ατόμου που κατέβηκε;

14. Να υπολογίσετε το ν αν $\binom{\nu}{5} = \binom{\nu}{7}$.

15. Στο διπλανό σχήμα το ΒΓΔΕ είναι ορθογώνιο και το ΑΒΓ είναι τεταρτοκύκλιο κύκλου με κέντρο το Β και ακτίνα ΑΒ. Αν ΒΓ = 6 cm και ΒΕ = 10 cm να βρείτε την επιφάνεια του στερεού που παράγεται από ολόκληρη στροφή του σχήματος γύρω από τον άξονα ΑΒΕ.



ΜΕΡΟΣ Β΄

Να απαντήσετε σε 4 μόνο από τις 6 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα σημεία της $\psi=2\chi^3-15\chi^2-36\chi$.
   (β) Η συνάρτηση $\psi=\alpha\chi^2+6\chi+\beta$ έχει ελάχιστο στο σημείο,(–3,–1). Να βρείτε τις τιμές των α και β.

2. Να βρείτε στο διάστημα $0° \leq \chi \leq 540°$, της ειδικές λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης $2\eta\mu\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi - 2\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi + 1 = 0$.

3. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις εισπράξεις που έκαμαν τα τμήματα της Γ΄ τάξης ενός σχολείου για το χριστουγεννιάτικο λαχνό.

Τμήμα	$Γ_1$	$Γ_2$	$Γ_3$	$Γ_4$	$Γ_5$	$Γ_6$	$Γ_7$	$Γ_8$	$Γ_9$	$Γ_{10}$
Εισπράξεις	15	20	18	13	25	16	13	30	12	18

   Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο και την τυπική απόκλιση των εισπράξεων (κατά προσέγγιση δεκάτου.

4. Ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης 6cm και ύψος 21cm είναι γεμάτο κρασί. Διαθέτω ποτήρια σε σχήμα κόλουρου κώνου με ακτίνα μεγάλης βάσης 4cm, ακτίνα μικρής βάσης 2cm και ύψος 6cm. Αν τα ποτήρια γεμίζουν κρασί κατά 75% της χωρητικότητας τους να βρείτε πόσα τέτοια ποτήρια μπορούν να γεμίσουν με όλο το κρασί του δοχείου.

5. Σ’ ένα σακούλι υπάρχουν 3 κόκκινοι και 5 πράσινοι βώλοι. Παίρνουμε διαδοχικά 2 βώλους (χωρίς επανατοποθέτηση). Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: Και οι δύο βώλοι να είναι κόκκινοι.
Β: Ο ένας μόνο βώλος να είναι κόκκινος.
Γ: Τουλάχιστο ένας βώλος να είναι κόκκινος.

6. Ένας καταστηματάρχης καθορίζει την τιμή πώλησης ενός κασετοφώνου έτσι ώστε να έχει κέρδος 60% πάνω στο κόστος. Κατά την περίοδο των εκπτώσεων μειώνει τις τιμές κατά 25% πάνω στην τιμή πώλησης. Αν ο Μιχάλης αγόρασε το κασετόφωνο και του έγινε έκπτωση £36 να βρείτε:
(α) Πόσα αγόρασε το κασετόφωνο ο Μιχάλης;
(β) Πόσα κέρδισε ο καταστηματάρχης;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $y=x^2-4x+7 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x-4$

2. $\varepsilon\varphi 2x=\varepsilon\varphi 60^0 \Rightarrow 2x=180^0k+60^0,\ k\in\mathbf{Z} \Rightarrow x=90^0k+30^0,\ k\in\mathbf{Z}$

3. $T=\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} \Rightarrow T=56$ τρόποι

4. (α) $\Omega=\{ААА, ААГ, АГА, ГАА, АГГ, ГАГ, ГГА, ГГГ\} \Rightarrow |\Omega|=8$

(β) $B=\{ΑΓΓ, ΓΑΓ, ΓΓΑ\} \Rightarrow |B|=3 \Rightarrow P(B)=\frac{3}{8}$

5. $T=\frac{KEX}{100} \Rightarrow £7500=\frac{K\cdot 5\cdot 10}{100}=\frac{K}{2} \Rightarrow K=£15000.$

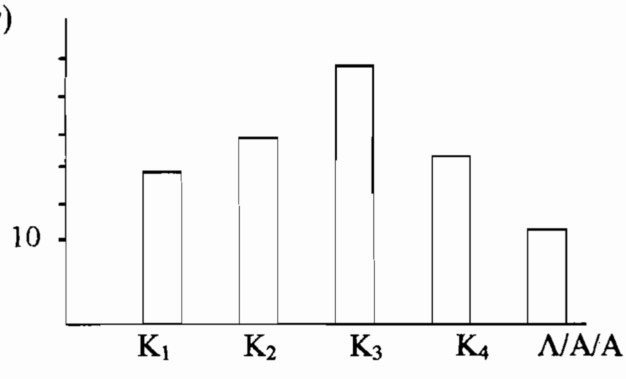
6. $V=\frac{1}{3}\cdot E_\beta\cdot \upsilon=\frac{1}{3}\cdot 5^2\cdot 12\ cm^3 \Rightarrow V=100cm^3$

7. (α) $\Psi=35+45+60+40+20 \Rightarrow \Psi=200$

(β) $ΠΚ1=\frac{35\cdot 100}{200} \Rightarrow ΠΚ1=17{,}5\%$, $ΠΚ2=\frac{45\cdot 100}{200} \Rightarrow ΠΚ2=22{,}5\%$

$ΠΚ3=\frac{60\cdot 100}{200} \Rightarrow ΠΚ3=30\%$, $ΠΚ4=\frac{40\cdot 100}{200} \Rightarrow ΠΚ4=20\%$

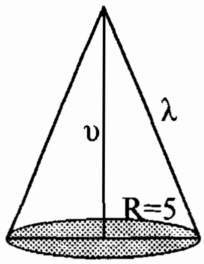
(γ)



8. $\sigma\upsilon\nu(3x+30^0)=\eta\mu 30^0=\sigma\upsilon\nu 60^0 \Rightarrow 3x+30^0=360^0k\pm 60^0,\ k\in \mathbf{Z} \Rightarrow x+10^0=120^0k\pm 20^0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=120^0k+10^0,\ k\in\mathbf{Z} \\ x=120^0k-30^0,\ k\in\mathbf{Z} \\ 0^0\le x\le 360^0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=10^0,\ x=90^0,\ x=130^0,\ x=210^0,\ x=250^0,\ x=330^0$$

9.



$$\left.\begin{array}{l} E_\kappa=15\pi cm^2 \\ E_\kappa=\pi R\lambda \\ R=3cm \end{array}\right\} \Rightarrow \pi\cdot 3\cdot\lambda=15\pi \Rightarrow \lambda=5cm$$

$$\lambda^2=\upsilon^2+R^2 \Rightarrow 25=\upsilon^2+9 \Rightarrow \upsilon^2=16 \Rightarrow \upsilon=4cm$$

$$V=\frac{1}{3}E_\beta\cdot\upsilon=\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon=\frac{1}{3}\pi\cdot 9\cdot 4 \Rightarrow \mathbf{V=12\pi cm^3}$$

10. $(\varepsilon)\ y=\lambda x+\beta,\ \lambda=3,\quad B(4,3),\ \Gamma(2\alpha,\alpha^2)\in(\varepsilon),\quad \lambda=\dfrac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}$

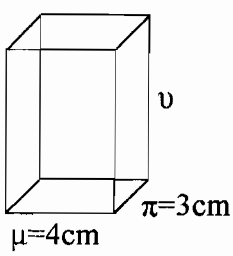
$$\lambda=\frac{\alpha^2-3}{2\alpha-4}=3 \Rightarrow \alpha^2-3=6\alpha-12 \Rightarrow \alpha^2-6\alpha+9=0 \Rightarrow (\alpha-3)^2=0 \Rightarrow \alpha=3 \Rightarrow \mathbf{\Gamma(6,9)}$$

11. $\{2,3,4,5,6,7,8\}$

(α) $7\cdot 6\cdot 5 \Rightarrow \alpha=7\cdot 6\cdot 5 \Rightarrow \mathbf{\alpha=210}$

(β) άρτια ψηφία: 2,4,6,8 $\Rightarrow 4\cdot 3\cdot 2 \Rightarrow \beta=4\cdot 3\cdot 2 \Rightarrow \mathbf{\beta=24}$

12.



$$\left.\begin{array}{l} V=120cm^3 \\ V=\mu\cdot\pi\cdot\upsilon \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot 3\cdot\upsilon=120 \Rightarrow \mathbf{\upsilon=10cm}$$

$$E_{o\lambda}=2(\mu\pi+\mu\upsilon+\pi\upsilon)=2(4\cdot 3+4\cdot 10+3\cdot 10)=2\cdot 82$$

$$\Rightarrow \mathbf{E_{o\lambda}=164cm^2}$$

13. $$\overline{B}=\frac{\sum B_i}{V} \Rightarrow 65kg=\frac{B_1+B_2+B_3+B_4}{4} \Rightarrow (B_1+B_2+B_3+B_4)=260kg$$

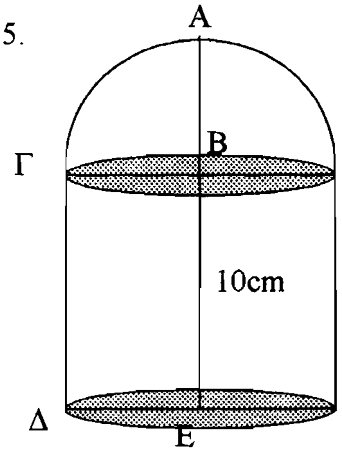
$$70kg=\frac{B_1+B_2+B_3}{3} \Rightarrow (B_1+B_2+B_3)=210kg$$

$$B_4=(B_1+B_2+B_3+B_4)-(B_1+B_2+B_3)=(260-210)\,kg \Rightarrow \mathbf{B_4=50kg}$$

14. $$\binom{\nu}{5}=\binom{\nu}{7} \Rightarrow \frac{\nu!}{(\nu-5)!\cdot 5!}=\frac{\nu!}{(\nu-7)!\cdot 7!} \Rightarrow (\nu-7)!\cdot 7!=(\nu-5)!\cdot 5! \Rightarrow 7\cdot 6=(\nu-5)(\nu-6)$$

$\Rightarrow \nu^2-11\nu-12=0 \Rightarrow (\nu-12)(\nu+1)=0 \Rightarrow$ λύσεις: ν= -1 απορρίπτεται, **ν=12**

15.



$B\Gamma$=6cm, BE=10cm

$E=E_{ημισ.}+E_{κυλ.}+E_{β.κ.}$

$=2\pi(B\Gamma)^2+2\pi(B\Gamma)(BE)+\pi(B\Gamma)^2$

$=2\pi\cdot 6^2+2\pi\cdot 6\cdot 10+\pi.6^2$

$=72\pi+120\pi+36\pi \Rightarrow$ $\mathbf{E=228\pi\ cm^2}$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

1. (α) $y=2x^3-15x^2+36x \Rightarrow y'=6x^2-30x+36=6(x^2-5x+6)=6(x-2)(x-3) \Rightarrow$ λύσεις: $x=2$, $x=3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
y΄		+	0	-	0	+	
y		$\nearrow$	$\cap$	$\searrow$	$\cup$	$\nearrow$	

(β) $y=\alpha x^2+6x+\beta \Rightarrow y'=2\alpha x+6$
(-3,-1) ελάχιστο $\Rightarrow y'|_{(-3,-1)}=0$ $\Big\} \Rightarrow 0=2\cdot\alpha\cdot(-3)+6 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha=1}$

$(-3,-1)\in y \Rightarrow -1=\alpha(-3)^2+6(-3)+\beta=9-18+\beta \Rightarrow$ $\boldsymbol{\beta=8}$

2. $2ημx\cdot συνx-2συνx-ημx+1=0 \Rightarrow 2συνx\cdot(ημx-1)-(ημx-1)=0 \Rightarrow (2συνx-1)(ημx-1)=0$
$\Rightarrow$ λύσεις: $2συνx=1$, $ημx=1$

- $συνx=\dfrac{1}{2}=συν60^0 \Rightarrow x=360^0k\pm 60^0$, $0^0\le x\le 540^0$, $k\in\mathbf{Z}$ $\Big\} \Rightarrow$ $\mathbf{x_1=60^0, x_2=300^0, x_3=420^0}$

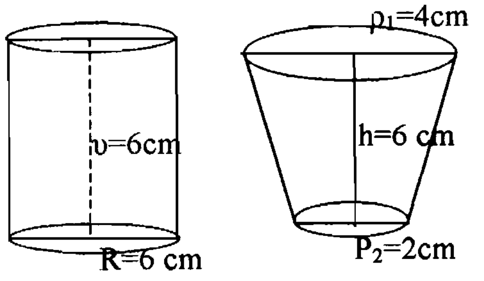
- $ημx=1=ημ90^0 \Rightarrow x=360^0k+90^0$, $x=360^0k+180^0-90^0$, $0^0\le x\le 540^0$, $k\in\mathbf{Z}$ $\Big\} \Rightarrow$ $\mathbf{x_4=90^0, x_5=450^0}$

3. $\bar{x}=\dfrac{\sum x_i}{10}=\dfrac{15+20+18+13+25+16+13+30+12+18}{10}=\dfrac{180}{10} \Rightarrow \bar{x}$=**18**

$$\sigma^2=\frac{(18-15)^2+(18-20)^2+(18-18)^2.2+(18-13)^2+(18-25)^2+(18-16)^2+(18-30)^2+(18-12)^2}{10}$$

$$\sigma^2=\frac{9+4+2\cdot 25+49+4+144+36}{10}=\frac{296}{10}=29,6 \Rightarrow \sigma=\sqrt{29,6} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma=5,4}$$

4.



$V_{κυλ.}=E_{β.κυλ.}\cdot υ_{κυλ.}=π\cdot 6^2\cdot 21=756πcm^3$

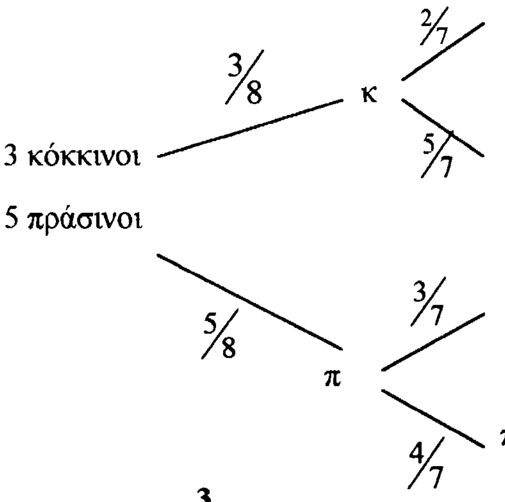
$V_{κων}=\frac{1}{3}\cdot π\cdot h(ρ_1^2+ρ_1ρ_2+ρ_2^2)$

$=\frac{1}{3}\cdot π\cdot 6(4+2\cdot 4+16)=56πcm^3$

$\frac{75}{100}\cdot 56πcm^3=42πcm^3$ όγκος κρασιού στο ποτήρι

Αριθμός ποτηριών$=\frac{75πcm^3}{42πcm^3}\Rightarrow$ **18 ποτήρια**

5.



κ $\Rightarrow P(κκ)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$

π $\Rightarrow P(κπ)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$

κ $\Rightarrow P(πκ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$

π $\Rightarrow P(ππ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$

$\Rightarrow \mathbf{P(A)=P(κκ)=\frac{3}{20}}$

$P(B)=P(κπ)+P(πκ)=\frac{15}{56}+\frac{15}{56}\Rightarrow \mathbf{P(B)=\frac{15}{28}}$

$P(Γ)=P(κπ)+P(πκ)+P(κκ)=P(B)+P(A)\Rightarrow \mathbf{P(Γ)=\frac{9}{14}}$

6.(α) τιμή πώλησης 100 } $\Rightarrow$ τιμή έκπτωσης £75
έκπτωση 25%

τιμή έκπτωσης	έκπτωση
£75	£25
χ	£36

$\Rightarrow x=\frac{75\cdot 36}{25}=108\Rightarrow$ ο Μιχάλης αγόρασε το κασετόφωνο **£108**

(β) τιμή πώλησης=£108+£36=£144

τιμή πώλησης	κέρδος
160	60
144	ψ

$ψ=\frac{144\cdot 60}{160}=54\Rightarrow$ **£54 κέρδος**

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 1998-99

ΣΥΝΔΙΑΣΜΟΣ: Σ2, 3 Λ.Ε.Μ + 10-ΩΡΟ Ε.Λ.

Επιμέλεια: Μαρία Φαλά

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε τις 12. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu x dx$

2. Να βρείτε πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΑΓΓΛΙΑ.

3. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών, τις συντεταγμένες των εστιών, την εκκεντρότητα και τις εξισώσιες των διευθετουσών της.

4. Στο ανάπτυγμα του $\left(x-\frac{3}{x}\right)^8$ να βρείτε τον συντελεστή του x^2.

5. Αν $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\eta\mu\alpha x}{e^x-\sigma\upsilon\nu x}=3$ να βρείτε την τιμή του α.

6. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ και $\vec{\beta}=3\vec{i}+4\vec{j}$.

7. Κάποιος προσελήφθει ως πωλητής σε μια εταιρεία με τη συμφωνία να παίρνει βασικό εβδομαδιαίο μισθό £60 και επιπλέον προμήθεια επί των πωλήσεων ως εξής: «για τις πρώτες £120 να μην παίρνει προμήθεια ενώ για το υπόλοιπο ποσό πέραν των £120 να παίρνει προμήθεια 10%».
Να υπολογίσετε το συνολικό μισθό του για μια βδομάδα κατά την οποία οι εισπράξεις από τις πωλήσεις ήταν £880.

8. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$. Να βείτε τον πίνακα $A\cdot B^{-1}$.

9. Η συνάρτηση $y=f(x)$ επαληθεύει τη διαφορικήν εξίσωση $\frac{dy}{dx}=2x-4$ και έχει ελάχιστη τιμή $y_{\varepsilon\lambda}=2$. Να βρείτε την εξίσωσή της.

10. Δίνεται η ορίζουσα
$\alpha_\nu=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & \nu & \nu^2\end{vmatrix}$. Να βρείτε το άθροισμα $\sum_{\nu=1}^{10}\alpha_\nu$.

11. Ο πίνακας $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ορίζει μετασχηματισμό φ

(α) Να βρείτε την εικόνα της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο μετασχηματισμό φ.

(β) Να εξηγήσετε τι σχήμα είναι η εικόνα αυτή και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

12. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου, δίνονται οι πιθανότητες

$P(A'/B') = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{3}{7}$ και $P(B/A) = \frac{1}{2}$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: Να μη συμβεί κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β

Δ: Να μη συμβεί το Α.

Ε: Να συμβεί τουλάχιστον το ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

13. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από το σημείο Α(-1,2), έχει το κέντρο του στην ευθεία $x = -3y$ και τέμνει ορθογώνια τον κύκλο $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 9 = 0$.

14. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = ημθ$, $-\frac{\pi}{2} \leq θ < 0$, να βρείτε το ολοκληρωμα

$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx$, $1 \leq x < 0$.

15. Σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε κώνο. Αν V_1είναι ο όγκος του κώνου και E_1 το εμβαδό της ολικής επιφάνειας, V_2 ο όγκος της σφαίρας και E_2 το εμβαδό της επιφάνειάς της, να δείξετε ότι: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Από τις 6 ερωτήσιες να απαντησετε στις 4. Κάθε ερώτηση βαθμολογελιτε με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(α) Να βρείτε την γενική της λύση.

(β) Να βρείτε την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης, της οποίας το ανάπτυγμα κατά Maclaurin (μέχρι και τον όρο που περιέχει το x^2) είναι

$$y = 2 - 3x + \frac{5}{2}x^2.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{4(x-1)}{x^2 - 2x + 2}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα , τις ασύμτωτες και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης, του άξονα των x και της ευθείας $x=\alpha+1$, $\alpha>0$ έχει εμβαδόν $E=2$ τ.μ. Να βρείτε την τιμή του α.

3. Δίνεται η υπερβολή $xy=36$ και το σημείο $P(9,4)$ αυτής. Η εφαπτόμενη της υπερβολής στο σημείο P τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο $N(\alpha,0)$.
   (α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της υπερβολής στο σημείο P.
   (β) Να βρείτε την τιμή του α.
   (γ) Το χωρίο που περικλείεται από την υπερβολή, το ευθύγραμμο τμήμα PN και την ευθεία $x=\alpha$, στρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των x. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

4. Να βρείτε:
   (α) Μια διανυσματική εξίσωση (στη μορφή $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$) του επιπέδου που περνά από τα σημεία $A(1,0,0)$, $B\left(0,\frac{1}{2},0\right)$, $\Gamma\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$.
   (β) Μια διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από την αρχή O των αξόνων και
   είναι κάθετη στο επίπεδο ΑΒΓ.
   (γ) Τη διανυσματική ακτίνα του ίχνους Δ της ευθείας (ε) πάνω στο επίπεδο ΑΒΓ.
   (δ) Τα διευθύνοντα συνημίτονα της ευθείας ΟΔ.
   (ε) Τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OE}$ του σημείου E πάνω στην προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος ΟΔ το οποίο διαιρεί το ΟΔ εξωτερικά σε λόγο 3:1.
   (στ) Τον όγκο του τετραέδρου ΑΒΓΕ.

5. Πάνω σ' ένα τραπέζι υπάρχουν 5 επιστολές οι οποίες απευθύνονται σε 5 διαφορετικά πρόσωπα και οι αντίστοιχοι φάκελοι με τις διευθύνσεις των 5 προσώπων. Αν σε κάθε φάκελο τοποθετήσουμε μια επιστολή τυχαία, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
   Α: Μόνο 2 από τις επιστολές να μπουν στο δικό τους φάκελο.
   Β: Τουλάχιστον 3 από τις επιστολές να μπουν στο δικό τους φάκελο.

6. Δίνεται η καμπύλη $y=x^2-1$, το σημείο $\Lambda(0,1)$ και $P(x,y)$ μεταβλητό σημείο της καμπύλης.
   (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων P_1 και P_2 της καμπύλης για τα οποία η απόσταση ΛP γίνεται ελάχιστη και να δείξετε ότι η ελάχιστη αυτή απόσταση είναι ίση με $\frac{\sqrt{7}}{2}$.
   (β) Με κέντρο το σημείο $\Lambda(0,1)$ και ακτίνα $R=\frac{\sqrt{7}}{2}$ γράφουμε κύκλο (Κ) που τέμνει το θετικό ημιάξονα των y στο σημείο Γ. Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα των x και ονομάζουμε Ω το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y=x^2-1$ και την ευθεία (ε). Το χωρίο Ω στρέφεται κατά π ακτίνια γύρω από τον άξονα των y. Να βρείτε τον όγκο V του στερεού που περάγεται από το μέρος του χωρίου Ω που βρίσκεται έξω από τον κύκλο (Κ).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $I=\int_0^{\pi/6} \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x\Big|_0^{\pi/6} = \eta\mu\frac{\pi}{6} - \eta\mu 0 = \frac{1}{2} - 0 \Rightarrow \mathbf{I=\frac{1}{2}}$

2. ΑΓΓΛΙΑ $\quad \alpha=\frac{6!}{2!\cdot 2!} \Rightarrow \mathbf{\alpha=180}$

3. (Ε) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{5^2}=1 \quad \Rightarrow$ κορυφές: **Α(13,0), Α΄(-13,0), Β(0,5), Β΄(0,-5)**

$\beta^2=\alpha^2(1-\varepsilon^2) \Rightarrow \varepsilon^2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=\frac{169-25}{169}=\frac{144}{169} \Rightarrow \mathbf{\varepsilon=\frac{12}{13}}$

εστίες: Ε(αε,0), Ε΄(-αε,0) $\Rightarrow$ **Ε(12,0), Ε΄(-12,0)**

διευθετούσες: $\delta{:}x=\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\delta'{:}x=-\frac{\alpha}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\delta{:}\ x=\frac{169}{12},\ \delta'{:}x=-\frac{169}{12}}$

4. $f(x)=(x-\frac{3}{x})^8$, $T_{k+1}=\binom{8}{k}.x^{8-k}\cdot(-\frac{3}{x})^k=\binom{8}{k}\cdot x^{8-k-k}(-3)^k$

$x^{8-2k}=x^2 \Rightarrow 8\text{-}2k=2 \Rightarrow k=3 \Rightarrow T_{3+1}=\binom{8}{3}(-3)^3x^2 \Rightarrow$ συντελεστής του x^2=-56·27

$\Rightarrow$ **συντ. x^2= -1512**

5. $L=\lim_{x\to 0}\frac{x+\eta\mu\alpha x}{e^x-\sigma\upsilon\nu x}=3$

$L=\frac{0+0}{1-1}$ απροσ. $\Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\eta\mu\alpha x)'}{(e^x-\sigma\upsilon\nu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha x}{e^x+\eta\mu x}=\frac{1+\alpha}{1+0}$

$\Rightarrow 1+\alpha=3 \Rightarrow \alpha=\mathbf{2}$

6. $\vec{\alpha}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}, \vec{\beta}=3\vec{i}+4\vec{j} \Rightarrow$ συνθ=$\frac{|2\cdot 3+2\cdot 4+(-1)0|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+4^2+0}}=\frac{14}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}}$

$\Rightarrow$ **συνθ=$\frac{14}{15}$**

7. $\left.\begin{array}{l}\text{πωλήσεις £880}\\ \text{για τις πρώτες £120 δεν παίρνει προμήθεια}\end{array}\right\} \Rightarrow$ £880-£120=£760

η προμήθεια που θα πάρει είναι: £760·$\frac{10}{100}$=£76 $\Rightarrow$ £60+£76=£136

$\Rightarrow$ **μισθός=£136**

8. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow |B| = 2\cdot 3-1\cdot 5 = 1 \Rightarrow \exists B^{-1}$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow AB^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-15 & -2+6\\ 3-20 & -1+8\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{AB^{-1}}=\begin{pmatrix}\mathbf{-9} & \mathbf{4}\\ \mathbf{-17} & \mathbf{7}\end{pmatrix}$$

9. $y=f(x)$, $\dfrac{dy}{dx}=2x-4 \Rightarrow \int dy=\int(2x-4)dx \Rightarrow y=x^2-4x+k$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2\\ \qquad\qquad y_{\varepsilon\lambda}=2\end{array}\right\} \Rightarrow \ (2,2) \ \text{επαληθεύει την } y$$

$\Rightarrow 2=2^2-4\cdot 2+k \Rightarrow k=6 \Rightarrow$ $\mathbf{y= f(x)=x^2-4x+6}$

10. $$\alpha_\nu=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & \nu & \nu^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 3\\ 1-\nu & \nu-\nu^2 & \nu^2\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1-\nu & \nu(1-\nu)\end{vmatrix}=-\nu(1-\nu)+(1-\nu)$$

$$\alpha_\nu=(1-\nu)^2=1-2\nu+\nu^2$$

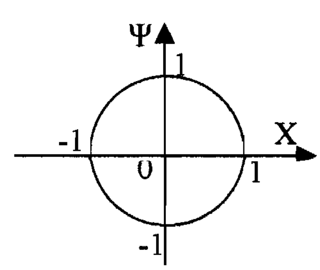
$$\sum_{\nu=1}^{10}\alpha_\nu=\sum_{\nu=1}^{10}(1-2\nu+\nu^2)=\sum_{\nu=1}^{10}1-2\sum_{\nu=1}^{10}\nu+\sum_{\nu=1}^{10}\nu^2 \ =10-2\cdot\frac{1}{2}10(10+1)+\frac{1}{6}\cdot 10(10+1)\cdot 21$$

$$\sum_{\nu=1}^{10}\alpha_\nu = 10-110+385 \ \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{10}\alpha_\nu=285$$

11. $$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow |T|=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{6}-0=\frac{1}{6}\Rightarrow T^{-1}=\frac{1}{1/6}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

(α) $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x'\\ 2y'\end{pmatrix}$

(E) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \dfrac{(3x')^2}{9}+\dfrac{(2y')^2}{4}=1 \Rightarrow$ **(E′) $\mathbf{x^2+y^2=1}$**



(β) Η έλλειψη (E) με τον μετασχηματισμό φ, μετασχηματίζεται σε **κύκλο** με κέντρο **O(0,0)** και ακτίνα **R=1**

12. $P(A'/B') = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{3}{7}$, $P(B/A) = \frac{1}{2}$

$$P(\Gamma) = P(A' \cap B') = P(B')P(A'/B') = [1 - P(B)]P(A'/B') = \left(1 - \frac{3}{7}\right)\cdot\frac{3}{4} = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P(\Gamma) = \frac{3}{7}}$$

$P(\Delta) = P(A')$, $\quad P(E) = P(A \cup B)$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(A)$$

$$P(A \cup B) = 1 - P\left[(A \cup B)'\right] = 1 - P(A' \cap B') = 1 - P(\Gamma) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \Rightarrow \mathbf{P(E) = \frac{4}{7}}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow \frac{1}{2}P(A) = P(A) + \frac{3}{7} - \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{7} \Rightarrow$$

$$P(A') = 1 - \frac{2}{7} \Rightarrow \mathbf{P(\Delta) = \frac{5}{7}}$$

13. εξ. κύκλου: (K_1): $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$

$A(-1,2) \in \mathbf{K_1} \Rightarrow (-1)^2+2^2+2g_1(-1)+2f_1.2+c=0 \Rightarrow -2g_1+4f_1+c_1+5=0 \quad (1)$

$K(-g,-f)$ βρίσκεται στην ευθεία $x=-3y \Rightarrow -g_1=3f_1 \quad (2)$

(K_2): $x^2+y^2+8x+10y+9=0 \Rightarrow g_2=4,\ f_2=5,\ c_2=9$

$(K_1),(K_2)$ ορθογώνιοι $\Rightarrow 2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2 \Rightarrow 2\cdot4\cdot g_1+2.5\cdot f_1=c_1+9$

$$\Rightarrow \quad 8g_1+10f_1-c_1-9=0 \quad (3)$$
$$\underline{-2g_1+4f_1+c_1+5=0 \; + \quad (1)}$$
$$\left.\begin{array}{l} 6g_1+14f_1-4=0 \\ -g_1=3f_1 \end{array}\right\} \Rightarrow -18f_1+14f_1-4=0$$

$$\Rightarrow \mathbf{f_1=-1} \overset{(2)}{\Rightarrow} \mathbf{g_1=3} \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathbf{c_1=5} \Rightarrow \mathbf{(K_1)\quad x^2+y^2+6x-2y+5=0}$$

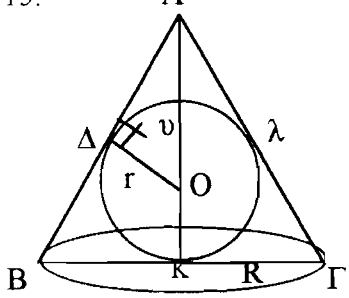
14. $I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$, $\quad -1 \le x \langle 0$

θέτω $x=\eta\mu\theta \Rightarrow dx=\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \langle 0$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}}{\eta\mu^4\theta}.\sigma\upsilon\nu\theta d\theta = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^4\theta}d\theta = \int \sigma\phi^2\theta\cdot\sigma\tau\epsilon\mu^2\theta d\theta = \int -\sigma\phi^2\theta d(\sigma\phi\theta)$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{3}\sigma\phi^3\theta + \kappa = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\right)^3 + \kappa \Rightarrow \mathbf{I = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 + \kappa}$$

15.



$V_1=\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon$, $E_1=\pi R(R+\lambda)$, $V_2=\frac{4}{3}\pi r^3$, $E_2=4\pi r^2$

$$\overset{\Delta}{AO\Delta} \approx \overset{\Delta}{ABK} \Rightarrow \frac{BK}{O\Delta}=\frac{AB}{AO} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{\lambda}{\upsilon - r} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{\lambda+R}{\upsilon}$$

$$\Rightarrow r=\frac{R\upsilon}{R+\lambda} \Rightarrow V_2=\frac{4}{3}\pi\frac{R^3\upsilon^3}{(R+\lambda)^3}, \quad E_2=4\pi\frac{R^2\upsilon^2}{(R+\lambda)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon}{\frac{4}{3}\pi\frac{R^3\upsilon^3}{(R+\lambda)^3}}=\frac{1}{4}\frac{(R+\lambda)^3}{R\upsilon^2}, \quad \frac{E_1}{E_2}=\frac{\pi R(R+\lambda)}{4\pi\frac{R^2\upsilon^2}{(R+\lambda)^2}}=\frac{1}{4}\frac{(R+\lambda)^3}{R\upsilon^2} \Rightarrow \mathbf{\frac{V_1}{V_2}=\frac{E_1}{E_2}}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. (α) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0 \Rightarrow d^2+3d+2=0 \Leftrightarrow (d+2)(d+1)=0$

$\Rightarrow$ λύσεις: $d_1=-1$, $d_2=-2$, $d_1 \neq d_2$, $d_1,d_2 \in \mathbf{R}$

$\Rightarrow$ **(Γ.Λ)** $\mathbf{y=Ae^{-x}+Be^{-2x}}$

(β) $y=2-3x+\frac{5}{2}x^2$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots \quad \Rightarrow y=A\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)+B\left(1-2x+\frac{(-2x)^2}{2}\right)$

$\Rightarrow A+B-(A+2B)x+\left(\frac{A}{2}+2B\right)x^2 \equiv 2-3x+\frac{5}{2}x^2$

$\Rightarrow$ A+B=2 (1)

A+2B=3 (2) $\Big\}$ (1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow$ B=1 $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ A=1

$\frac{A}{2}+2B=\frac{5}{2}$ (3) επαληθεύουν και την (3), άρα συμβιβαστό το σύστημα

$\Rightarrow$ (Ε.Λ) $\mathbf{y=e^{-x}+e^{-2x}}$

2. $y=\frac{4(x-1)}{x^2-2x+2}$, $\Delta=4-8=-4 \langle 0 \Rightarrow x^2-2x+2 \rangle 0\ \forall x \in \mathbf{R}$

(α) πεδίο ορισμού: $\mathbf{x \in R}$

$x=0 \Rightarrow y=\frac{-4}{2}=-2 \Rightarrow \mathbf{A(0,-2)}$

$y=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ **B(1,0)**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4(x^2-2x+2)-4(x-1)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{4x^2-8x+8-4(2x^2-4x+2)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{-4x^2+8x}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \quad \text{για} \quad x=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0,\ y=-2$$

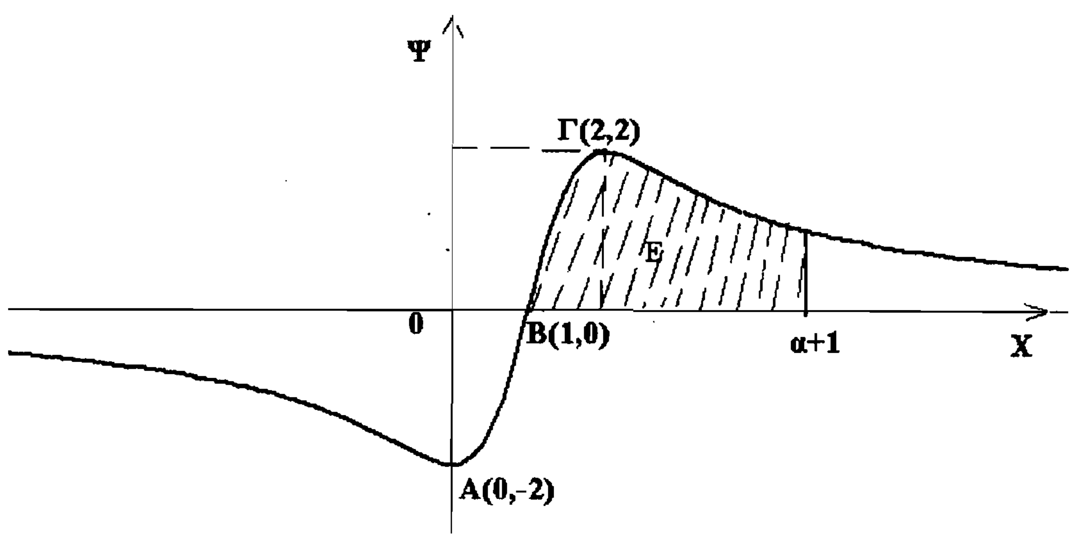
$$x=2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0,\ y=2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
dy/dx		-	0	+	0	-	
y		↘	∪	↗	∩	↘	

$\Rightarrow$ **min A(0,-2), max Γ(2,2)**

Δεν έχει κατακόρυφες και πλάγιες ασύμπτωτες. Ελέγχω για οριζόντιες:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4(x-1)}{x^2-2x+2}=0 \Rightarrow$ **O.A. y=0**



(β) Ε=2τ.μ., $E=\int_1^{\alpha+1}\frac{4(x-1)}{x^2-2x+2}dx=\int_1^{\alpha+1}2.\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx=2\ln(x^2-2x+2)\Big|_1^{\alpha+1}$

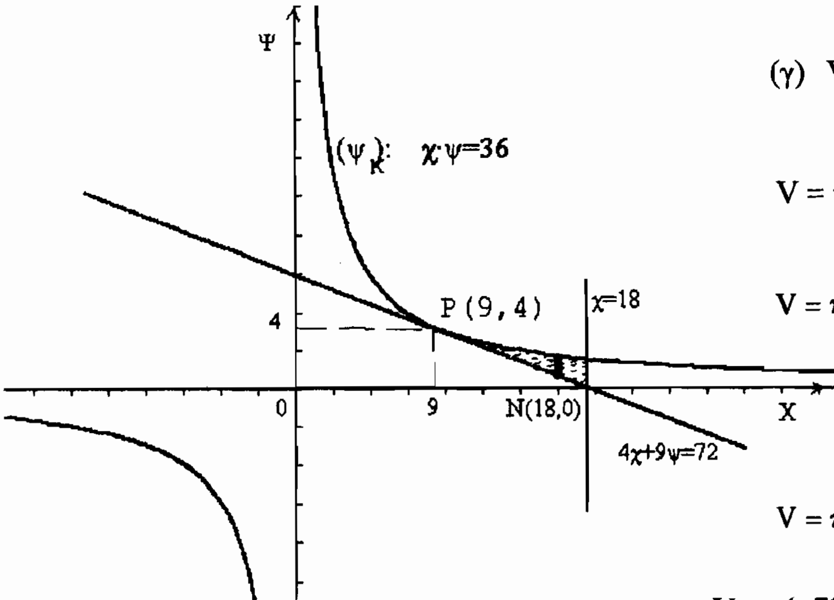
$$\Rightarrow 2\ln(\alpha^2+2\alpha+1-2\alpha-2+2)-2\ln(1-2+2)=2 \Rightarrow 2\ln(\alpha^2+1)=2 \Leftrightarrow \ln(\alpha^2+1)=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\Leftrightarrow \alpha^2+1=e \Leftrightarrow \alpha^2=e-1 \\ \qquad\qquad \alpha > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha=\sqrt{e-1}}$$

3. $\left.\begin{array}{l}(Y)\ xy=36 \Rightarrow y+x\cdot\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \\ P(9,4)\in(Y)\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{4}{9}$

(εφ) $y-y_P=\lambda_{\varepsilon\varphi}(x-x_P) \Rightarrow y-4=-\frac{4}{9}(x-9) \Rightarrow 9y-36=-4x+36$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (\varepsilon\varphi)\ \mathbf{4x+9y=72} \\ \quad y=0\end{array}\right\} \Rightarrow 4x=72 \Rightarrow x=18 \Rightarrow$ **α=18** $\Rightarrow$ **N(18,0)**



(γ) $V=\pi\int_9^{18}\left[y_Y{}^2-y_{\varepsilon\varphi}{}^2\right]dx$

$$V=\pi\int_9^{18}\left[\frac{36^2}{x^2}-\frac{(72-4x)^2}{9^2}\right]dx$$

$$V=\pi\left[-\frac{36}{x}+\frac{1}{12}\frac{(72-4x)^3}{9^2}\right]_9^{18}$$

$$V=\pi\left[\left(-\frac{36^2}{18}+0\right)-\left(-\frac{36^2}{9}+\frac{36^3}{1281}\right)\right]$$

$V=\pi(-72+144-48)\ \Rightarrow\ $ **V=24π κ.μ.**

4. (α) $A(1,0,0),\ B(0,\frac{1}{2},0),\ \Gamma(0,0,\frac{1}{3})$

$\overrightarrow{AB}=-\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\ ,\qquad \overrightarrow{A\Gamma}=-\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{k}$

$$\vec{\eta}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{A\Gamma}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&\frac{1}{2}&0\\-1&0&\frac{1}{3}\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{6}\vec{i}+0+0\right)-\left(-\frac{1}{2}\vec{k}-\frac{1}{3}\vec{j}+0\right)\Rightarrow\vec{\eta}=\frac{1}{6}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$$

$$(\Pi)\quad \left.\begin{array}{l}\vec{r}\cdot\vec{\eta}=d\\ A\in(\Pi)\end{array}\right\}\Rightarrow 1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{2}=d\Rightarrow d=\frac{1}{6}\Rightarrow\vec{r}\cdot\left(\frac{1}{6}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}\right)=\frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ **(Π) :** $r\cdot\left(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right)=1$

$$(\beta)\quad \left.\begin{array}{l}\vec{\varepsilon}\perp(\Pi)\\ \vec{\eta}\perp(\Pi)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{\varepsilon}\,//\,\vec{\eta}\quad\Rightarrow\ \vec{\varepsilon}=\lambda\left(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right)\Rightarrow\chi=\lambda,\psi=2\lambda,\ z=3\lambda$$

$$(\gamma)\quad \left.\begin{array}{l}\Delta\in(\Pi)\\ \Delta\in(\vec{\varepsilon})\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda\cdot1+2\lambda\cdot2+3\lambda\cdot3=1\Rightarrow14\lambda=1\Rightarrow\lambda=\frac{1}{14}\Rightarrow\Delta\left(\frac{1}{14},\frac{2}{14},\frac{3}{14}\right)$$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{O\Delta}=\frac{1}{14}\vec{i}+\frac{2}{14}\vec{j}+\frac{3}{14}\vec{k}$

(δ) $|\vec{\eta}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

$l=\frac{1}{\sqrt{14}}$ ή $l=-\frac{1}{\sqrt{14}}$, $m=\frac{2}{\sqrt{14}}$ ή $m=-\frac{2}{\sqrt{14}}$, $n=\frac{3}{\sqrt{14}}$ ή $n=-\frac{3}{\sqrt{14}}$

(ε) $\dfrac{EO}{E\Delta}=\dfrac{3}{1}\Rightarrow \mathbf{OE}=\dfrac{3}{2}\,\mathbf{O\Delta}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{14}\vec{i}+\dfrac{2}{14}\vec{j}+\dfrac{3}{14}\vec{k}\right)\Rightarrow \mathbf{OE}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{28}}\vec{\mathbf{i}}+\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{28}}\vec{\mathbf{j}}+\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{28}}\vec{\mathbf{k}}$

(στ) $V=\dfrac{1}{6}\left|AB\times A\Gamma\cdot AE\right|=\dfrac{1}{6}\left|\left(\dfrac{1}{6}\vec{i}+\dfrac{1}{3}\vec{j}+\dfrac{1}{2}\vec{k}\right)\cdot\left[\left(\dfrac{3}{28}-1\right)\vec{i}+\dfrac{6}{28}\vec{j}+\dfrac{9}{28}\vec{k}\right]\right|$

$$\mathbf{V}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\left|\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\left(-\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{28}}\right)+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{28}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{28}}\right|=\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{6\cdot 6\cdot 28}}\Rightarrow \mathbf{V}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{72}}\,\mathbf{\kappa.\mu.}$$

5. $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5,\ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$

5! Διαφορετικοί τρόποι να μπουν οι επιστολές στους φακέλους.

Ευνοϊκές περιπτώσεις: $\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1}$ όπου $\binom{5}{2}$ οι τρόποι που μπορούν να επιλεγούν οι δύο αντίστοιχοι φακέλοι των δύο επιστολών.

Π.χ. $E_1\rightarrow\Phi_1$ και $E_2\rightarrow\Phi_2$. Για τους υπόλοιπους 3 φακέλους, για κάθε επιστολή , π.χ. για την E_3 έχω 2 επιλογές, τις Φ_4 και Φ_5 οπότε:

$$P(A)=\frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{2}{1}}{5!}=\frac{20}{120}\ \Rightarrow\ \mathbf{P(A)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

Για να μπουν 3 ακριβώς επιστολές στον φακελό τους έχουμε $\binom{5}{3}$ επιλογές. Δεν υπάρχει επιλογή για να μπουν 4 ακριβώς επιστολές στο φάκελό τους. Για να μπουν όλες οι επιστολές στο φάκελό τους υπάρχει μια επιλογή, οπότε:

$$P(B)=\frac{\binom{5}{2}+1}{5!}=\frac{10+1}{120}\Rightarrow\ \mathbf{P(B)}=\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{120}}$$

6. $y=x^2-1$, $\Lambda(0,1)$, $P(x,y)$

(α)

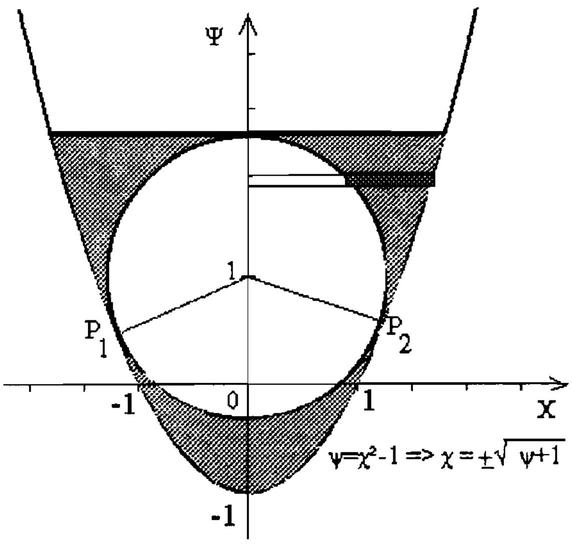
$$(\Lambda P)=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}=\sqrt{x^2+x^4-4x^2+4}=\sqrt{x^4-3x^2+4}$$

$$\frac{d(\Lambda P)}{dx}=\frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}=\frac{4x\left(x-\sqrt{3/2}\right)\left(x+\sqrt{3/2}\right)}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}$$

$x=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \mathbf{P_1}\left(-\sqrt{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}},\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$, $x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \mathbf{P_2}\left(\sqrt{\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}},\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$

x		$-\sqrt{3/2}$		0		$\sqrt{3/2}$	
$\dfrac{d(\Lambda P)}{dx}$	-	0	+	0	-	0	+
(ΛP)	↘	∪	↗	∩	↘	∪	↗

$$(\Lambda P)_{min} = \sqrt{\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 - 3\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - 3.\frac{3}{2} + 4} = \sqrt{\frac{7}{4}} \Rightarrow \mathbf{(\Lambda P)_{min}} = \frac{\sqrt{7}}{\mathbf{2}}$$



$$V = \pi \int_{-1}^{1+\frac{\sqrt{7}}{2}} x^2 dy - V_{\sigma\varphi}$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1+\frac{\sqrt{7}}{2}} (y+1) dy - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^3$$

$$V = \pi\frac{1}{2}(y+1)^2\Big|_{-1}^{1+\frac{\sqrt{7}}{2}} - \frac{4}{3}\pi\frac{7\sqrt{7}}{8}$$

$$V = \frac{\pi}{2}\left[\left(2+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 0\right] - \frac{7\sqrt{7}}{6}\pi$$

$$V = \frac{\pi}{2}\left(4 + 2\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{4}\right) - \frac{7\sqrt{7}}{6}\pi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{8}}\pi - \frac{\sqrt{7}}{\mathbf{6}}\pi$$

<u>Οι τρεις διαφορετικές ασκήσεις του μέρους Α΄για το Ενιαίο Λύκειο είναι:</u>

9. Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\left|\frac{z+i}{z+2}\right| = 3$, όπου z μιγαδικός αριθμός.

$$\left|\frac{z+i}{z+2}\right| = 3, \ z = x + iy$$

$$|z+i|^2 = 9|z+2|^2 \Rightarrow |x+i(y+1)|^2 = 9|(x+2)+iy|^2 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 9(x+2)^2 + 9y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 \Rightarrow \mathbf{8x^2+8y^2+36x-2y+35=0}$$

13. Χωρίζοντας το διάστημα [0, 0,6] σε τρία ίσα υποδιαστήματα και χρησιμοποιώντας τιν κανόνα του τραπεζίου να υπολογίσετε με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{0,6} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$.

$$d = \frac{0,6-0}{3} = 0,2 \Rightarrow x_0 = 0, x_1 = 0,2, x_2 = 0,4, x_3 = 0,6$$

$$I = \int_0^{0,6} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx. \approx \frac{1}{2}\cdot d.(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3)$$

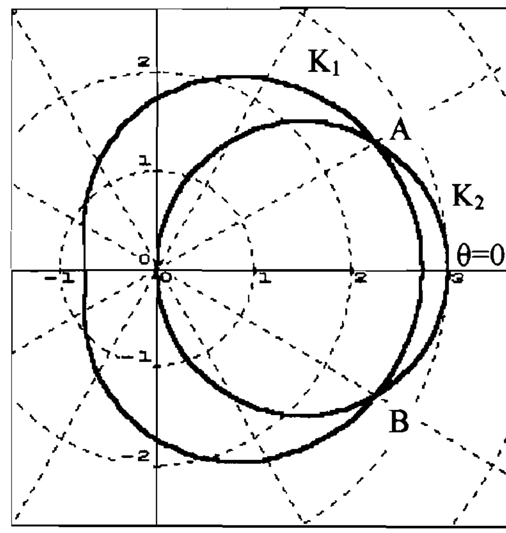
$$I = \frac{1}{2}.0,2.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{1+0,2^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{1+0,4^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1+0,6^2}}\right)$$

$$\Rightarrow I = 0,1\cdot(1 + 2\cdot 0,9870 + 2\cdot 0,9517 + 0,9026) = 0,1\cdot 5,780 \Rightarrow \mathbf{I=0,578}$$

15. Στο διπλανό σχήμα δίνονται
Τα διαγράμμα των καμπύλων
(K_1): $\rho = \sqrt{3} + \sigma\upsilon\nu\theta$
(K_2): $\rho = 3\sigma\upsilon\nu\theta$

(α) Να βρείτε τις πολικές συντεταγμένες των σημείων τομής των δυο καμπύλων.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του κοινού μέρους των χωρίων που περικλείονται από τις δυο καμπύλες.



(α)

$$(K_1)=(K_2) \Rightarrow \sqrt{3} + \sigma\upsilon\nu\theta = 3\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}, \theta_2 = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right), B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(\beta)\ E = 2.\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\sqrt{3} + \sigma\upsilon\nu\theta\right)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sigma\upsilon\nu\theta)^2 d\theta\right]$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(3 + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta\right)d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 9\sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta$$

$$\mathbf{E} = \left(\mathbf{3\theta + 2\sqrt{3}\eta\mu\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\eta\mu 2\theta}\right)_{\mathbf{0}}^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{\theta + \frac{\eta\mu 2\theta}{2}}\right)_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$E = \left(3.\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0 + \frac{9}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2}\right)\right]$$

$$\mathbf{E = \frac{7}{2}.\frac{\pi}{6} + \frac{9}{8}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\pi - \frac{9}{8}\sqrt{3} \Rightarrow E = \frac{25}{12}\pi}$$

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 1998-99

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 6-ωρου (Ε.Λ.)

Επιμέλεια : Μαρία Φαλά

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε μόνο τις 12. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx$.

2. Ένα αυτοκίνητο πωλείται προς £16.308. Στην τιμή αυτή περιλαμβάνεται και το 8% του Φ.Π.Α. Πόσα θα πρέπει να πωληθεί χωρίς τον Φ.Π.Α;

3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \eta\mu x - 1}{\ln(x+1)}$.

4. Να βρείτε πόσους άρτιους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1,2,3,6,7,9, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων.

5. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y = e^{2x}\left(x^2 + \sigma\upsilon\nu x\right)$

6. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$. Αν Α·Χ=Β να βρείτε τον πίνακα Χ.

7. Η μέση τιμή του βάρους μιας ομάδας 10 μαθητών είναι 56 κιλά. Αν δυο μαθητές με βάρη 54 και 60 κιλά αποχωρήσουν από την ομάδα και προστεθούν άλλοι δυο με βάρη 58 και 62 κιλά να βρείτε πόση θα είναι η μέση τιμή του βάρους της νέας ομάδας.

8. Δίνεται η καμπύλη $y = x^2 + 2x - 13$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης στα σημεία της που έχουν τεταγμένη ίση με 2.

9. Να δείξετε ότι:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ zy & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

10. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = 2 - x^2$ περιστρέφεται κατά π ακτίνια γύρω από τον άξονα Oy. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

11. Σε ένα σχολείο, η πιθανότητα κάποιος τελειόφοιτος να πάρει το βραβείο των Μαθηματικών είναι $\frac{2}{5}$, η πιθανότητα να μην πάρει το βραβείο της φυσικής είναι $\frac{3}{4}$ και η πιθανότητα να πάρει τουλάχιστον το ένα από αυτά τα δυο βραβεία είναι $\frac{9}{20}$. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: να πάρει και τα δυο βραβεία
Β: να πάρει μόνο το βραβείο των Μαθηματικών
Γ: να πάρει μόνο το ένα από τα δυο βραβεία
Δ: να μην πάρει κανένα από τα δυο βραβεία.

12. Να λύσετε την εξίσωση: Τοξημ x + Τοξημ(1-x) = Τοξσυνx

13. Μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα, έχει πλευρά βάσης 6cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_\pi=60cm^2$. Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας.

14. Να βρείτε στη μορφή y=f(x) τη λύση της διαφορικής εξίσωσης
$x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^3$ για την οποία y=2 όταν x=-1.

15. Δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου πρόκειται να κατασκευασθεί από λαμαρίνα, έτσι ώστε η βάση του να είναι τετράγωνο πλευράς x, να είναι ανοικτό στο ένα άκρο και ο όγκος του να είναι ίσος με V.
(α) Αν Ε είναι το εμβαδόν της λαμαρίνας που θα χρησιμοποιηθεί να δείξετε ότι ισχύει
$E=\chi^2+\dfrac{4V}{\chi}$
(β) Αν h το ύψος του δοχείου να βρείτε το λόγο $\dfrac{h}{\chi}$ ώστε το εμβαδόν της λαμαρίνας που θα χρησιμοποιηθεί να είναι ελάχιστο.

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε τις 4. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y=\dfrac{x}{x-2}$.
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα, τις ασύμπτωτες και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.
(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των x και τις ευθείες x=-2 και x=-1.

2. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση x=2ημθ, $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$
να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$.

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται του άξονα των x και περνά από τα σημεία Α(1,-2) και Β(3,-4).

4. Να βρείτε στη μορφή y=f(x) τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $x\dfrac{dy}{dx}=y^2+y$ για την οποία y=3 όταν x=1.

5. Τρεις στρατιώτες μπαίνουν σε τραίνο με 5 βαγόνια. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: να μπουν ο καθένας σε διαφορετικό βαγόνι
Β: να μπουν όλοι στο ίδιο βαγόνι
Γ: να μπουν δύο τουλάχιστον στο ίδιο βαγόνι
Δ: να μπουν δύο ακριβώς στο ίδιο βαγόνι και ο άλλος σε διαφορετικό.

6. Δίνεται η υπερβολή $xy=c^2$

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης της υπερβολής στο σημείο $T\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ είναι

$x + t^2 y - 2ct = 0$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της υπερβολής στο σημείο $T\left(ct, \frac{c}{t}\right)$.

(γ) Η εφαπτόμενη της υπερβολής στο σημείο $T\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ τέμνει τον άξονα των x στο σημείο Γ και τον άξονα των y στο σημείο Δ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΔ είναι ανεξάρτητο του t (Ο είναι η αρχή των αξόνων).

(δ) Αν $|t| \neq 1$ η κάθετη της υπερβολής στο σημείο $T\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ τέμνει την ευθεία y=x στο σημείο Κ. Να δείξετε ότι $(TK)^2 = \dfrac{c^2(t^4+1)}{t^2}$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α

1. $I = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 \Rightarrow \mathbf{I = 1}$

2. Έστω x η τιμή του αυτοκινήτου χωρίς ΦΠΑ $\Rightarrow x + \frac{8}{100}x = 16308 \Rightarrow \frac{108}{100}x = 16308$

$\Rightarrow x = 16308 \cdot \frac{100}{108} \Rightarrow$ **x=£15100**

3. $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + \eta\mu x - 1}{\ln(x+1)} = \dfrac{1+0+1}{\ln 1} = \dfrac{0}{0}$ απροσ.

$\Rightarrow L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(e^x + \eta\mu x - 1\right)'}{\left(\ln(x+1)\right)'} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + \sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{x+1}} = \dfrac{1+1}{\frac{1}{1}} \Rightarrow$ **L=2**

4. 1,2,3,6,7,9 . Αφού θέλω να φτιάξω άρτιους αριθμούς, στην τελευταία θέση θα είναι ένα από τα ψηφία 2, 6. $\Rightarrow$ 5·4·3·2=**120 αριθμοί**

5. $y = e^{2x}\left(x^2 + \sigma\upsilon\nu x\right) \Rightarrow y' = 2e^{2x}\left(x^2 + \sigma\upsilon\nu x\right) + e^{2x}(2x - \eta\mu x)$

$\Rightarrow \mathbf{y' = e^{2x}\left(2x^2 + 2x + 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\right)}$

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$|A| = 12 - (-2) = 14 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -14 & 28 \\ 42 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

7. $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow 56 = \dfrac{\sum f_i x_i}{10} \Rightarrow \sum f_i x_i = 560$

$$\left(\sum f_i x_i\right)' = 560 - (54+60) + (58+62) = 566 \Rightarrow \bar{x}' = \frac{\left(\sum f_i x_i\right)'}{10} \Rightarrow \bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{56{,}6kg}$$

8. $\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 2x + 3 \\ y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 2 = x^2 + 2x - 13 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-3) = 0 \\ \Rightarrow \text{λύσεις: } x = -5, x = 3 \Rightarrow A(-5,2), B(3,2) \end{array}$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2 \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_A = \lambda_A = 2(-5) + 2 = -8$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_B = \lambda_B = 2(3) + 2 = 8$$

$$(\varepsilon\varphi)_A : y - y_A = \lambda_A (x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -8(x+5) \Rightarrow (\varepsilon\phi)_A : \quad y + 8x + 38 = 0$$

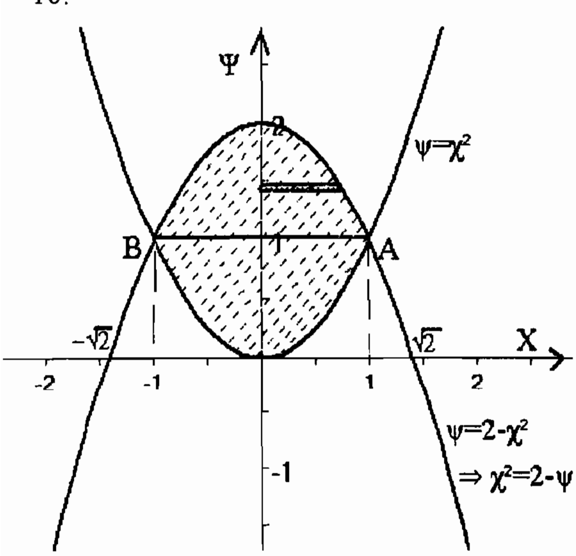
$$(\varepsilon\varphi)_B : \ y - y_B = \lambda_B (x - x_B) \Rightarrow y - 2 = 8(x-3) \Rightarrow \quad (\varepsilon\phi)_B : \quad y - 8x + 22 = 0$$

9.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ zy & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ zy-zx & zx-xy & xy \end{vmatrix} = 0 - 0 + \begin{vmatrix} x-y & y-z \\ z(y-x) & x(z-y) \end{vmatrix}$$

$$A = (x-y)\cdot x \cdot (z-y) - (y-z)\cdot z \cdot (y-x) = (x-y)(y-z)(-x+z)$$
$$\Rightarrow \mathbf{A = (x-y)(y-z)(z-x)}$$

10.



$$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$A(1,1),\ B(-1,1)$

$$V = \pi\int_0^1 {x_1}^2 dy + \pi\int_1^2 {x_2}^2 dy \Rightarrow$$

$$V = \pi\int_0^1 y\,dy + \pi\int_1^2 (2-y)dy \Rightarrow$$

$$V = \pi\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 + \pi\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)_1^2 \Rightarrow$$

$$V = \pi\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \pi\left[(4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

V= π κ.μ.

11. $P(M)=\frac{2}{5}$, $P(\Phi')=\frac{3}{4}$, $P(M\cup\Phi)=\frac{9}{20}$

$P(A)=P(\Phi\cap M)=P(M)+P(\Phi)-P(M\cup\Phi)=P(M)+1-P(\Phi')-P(M\cup\Phi)$

$$P(A)=\frac{2}{5}+1-\frac{3}{4}-\frac{9}{20}\Rightarrow \mathbf{P(A)=\frac{1}{5}}$$

$P(B)=P(M\cap\Phi')=P(M)-P(M\cap\Phi)=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\Rightarrow \mathbf{P(B)=\frac{1}{5}}$

$P(\Gamma)=P(M\cap\Phi')+P(M'\cap\Phi)=P(B)+P(\Phi)-P(M\cap\Phi)=\frac{1}{5}+\left(1-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \mathbf{P(\Gamma)=\frac{1}{4}}$

$P(\Delta)=P(M'\cap\Phi')=P\left[(M\cup\Phi)'\right]=1-P(M\cup\Phi)=1-\frac{9}{20}\Rightarrow \mathbf{P(\Delta)=\frac{11}{20}}$

12. Τοξημx+Τοξημ(1-x)=Τοξσυνx

Θέτω Τοξημx=α $\Rightarrow$ ημα=x , $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $-1\le x\le 1$

Τοξημ(1-x)=β $\Rightarrow$ ημβ=1-x , $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$, $-1\le 1-x\le 1$

Τοξσυνx=γ $\Rightarrow$ συνγ=x , $0\le\gamma\le\pi$

$\Rightarrow \alpha+\beta=\gamma\Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\gamma\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu\gamma$

$\Rightarrow\left(+\sqrt{1-x^2}\right)\left(+\sqrt{1-(1-x)^2}\right)-x(1-x)=x\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}-x+x^2=x$

$\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\sqrt{2x-x^2}=2x-x^2\Rightarrow(1-x^2)(2x-x^2)=(2x-x^2)^2$

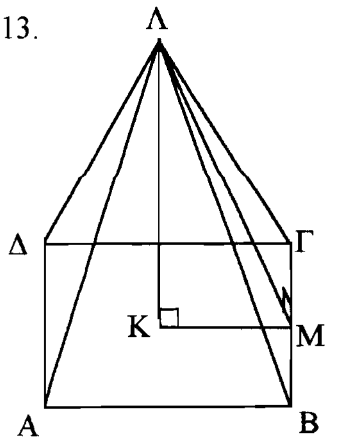
$\Rightarrow(2x-x^2)(1-x^2-2x+x^2)=0\Rightarrow x(2-x)(1-2x)=0$

Λύσεις: $x=0\Rightarrow$ Τοξημ0 + Τοξημ1 $=0+\frac{\pi}{2}=$ Τοξσυν0 $\Rightarrow$ **x=0 δεκτή**

$x=2\rangle 1$ απορρίπτεται

$x=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Τοξημ$\frac{1}{2}$ + Τοξημ$\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}=$ Τοξσυν$\frac{1}{2}\Rightarrow \mathbf{x=\frac{1}{2}}$ δεκτή

13.



(ΑΒ)=(ΒΓ)=6cm

$E_\pi=\frac{1}{2}\cdot\Pi_\beta\cdot(\Lambda M)\Rightarrow\frac{1}{2}(4\cdot 6)(\Lambda M)=60cm^2$

$\Rightarrow(\Lambda M)=5cm,\ \ KM=\frac{6}{2}=3cm$

$(\Lambda M)^2=(KM)^2+(K\Lambda)^2\Rightarrow 25=9+(\Lambda K)^2\Rightarrow(\Lambda K)=4\ cm$

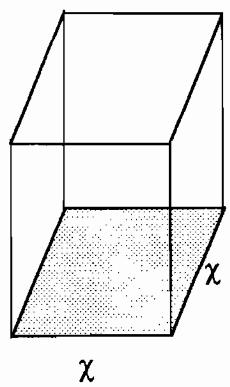
$V=\frac{1}{3}\cdot E_\beta\cdot(K\Lambda)=\frac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 4\Rightarrow \mathbf{V=48\ cm^3}$

14. $x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2}{x}\cdot y=x^2$

$$I=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2 \Rightarrow x^2\cdot\frac{dy}{dx}+2x\cdot y=x^4 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2y\right)=x^4$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow x^2y=\int x^4dx \Rightarrow x^2y=\frac{1}{5}x^5+k\\ x=-1, y=2\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Rightarrow (-1)^2\cdot 2=\frac{1}{5}(-1)^5+k \Rightarrow k=2+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}\\ \Rightarrow \mathbf{x^2y=\frac{x^2}{5}+\frac{11}{5} \Rightarrow y=\frac{x^3}{5}+\frac{11}{5x^2}}\end{array}$$

15.



(α) $V=E_\beta\cdot h=x^2\cdot h \Rightarrow h=\dfrac{V}{x^2}$

$$E=E_\beta+4.E_\pi=x^2+4\cdot xh=x^2+4x\cdot\frac{V}{x^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E=x^2+\frac{4V}{x^2}}$$

(β) $\dfrac{dE}{dx}=2x-\dfrac{4V}{x^2}$

E ελάχιστο $\Rightarrow \dfrac{dE}{dx}=0 \Rightarrow 2x\cdot x^2-4V=0 \Rightarrow x^3-2V=0 \Rightarrow x^3=2V$

x	0		$\sqrt[3]{2V}$	
$\dfrac{dE}{dx}$		-	0	+
E		↘	∪	↗

$$\left.\begin{array}{l}x^3=2V\\ V=x^2h\end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2h=x^3 \Rightarrow \mathbf{\frac{h}{x}=\frac{1}{2}}$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

1. $y=\dfrac{x}{x-2} \Rightarrow x\in R-\{2\}$

$$\left.\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0\\ y=0\Rightarrow x=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$ **O(0,0)** το μόνο σημείο τομής με τους άξονες

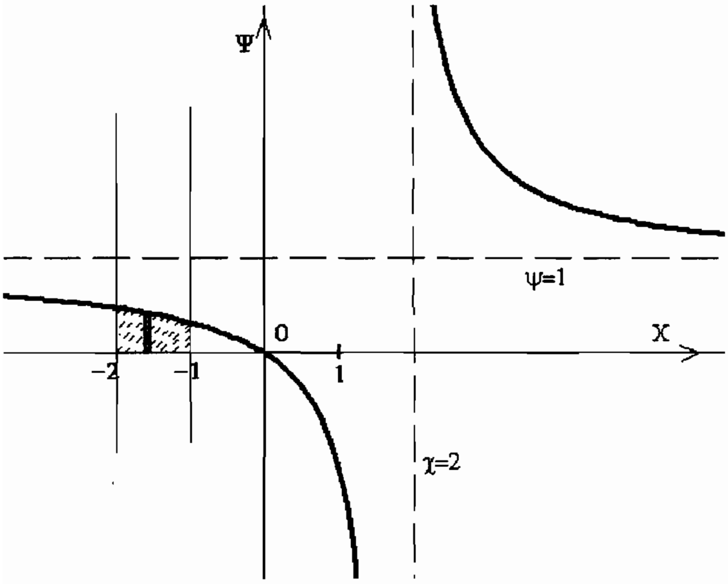
$$y'=\frac{1(x-2)-x\cdot 1}{(x-2)^2}=-\frac{2}{(x-2)^2}\langle 0\ \forall x\in R-\{2\}$$

Κ.Α. x=2

Δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη

x	$-\infty$		2		∞
y'		-	‖	-	
y		↘	‖	↘	

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{απρ.}\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1}=1 \Rightarrow \textbf{O.A. y=1}$$



$$E=\int_{-2}^{-1} y\,dx=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x-2}dx$$

$$E=\int_{-2}^{-1}\frac{x-2+2}{x-2}dx$$

$$E=\int_{-2}^{-1}\left(1+\frac{2}{x-2}\right)dx$$

$$E=\left(x+2\ln|x-2|\right)_{-2}^{-1}$$

$$E=(-1+2\ln 3)-(-2+2\ln 4)$$

$$\mathbf{E=1+2\ln\frac{3}{4}}$$

2. $I=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$

θέτω $x=2\eta\mu\theta \Rightarrow dx=2\sigma\upsilon\nu\theta d\theta, \qquad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$x=0\Rightarrow 2\eta\mu\theta=0\Rightarrow\theta=0$

$x=1\Rightarrow \eta\mu\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\eta\mu^2\theta}\cdot 2\sigma\upsilon\nu\theta d\theta$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot 2\sigma\upsilon\nu\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)d\theta=2\left(\theta+\frac{\eta\mu 2\theta}{2}\right)_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow I=2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-2(0+0)\Rightarrow\ \mathbf{I=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

3. $\left.\begin{array}{l}(K)\ \ x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\\ A(1,-2)\in(K)\end{array}\right\}\Rightarrow 1^2+(-2)^2+2g\cdot 1+2f(-2)+c=0$

$\Rightarrow 5+2g-4f+c=0 \quad (1)$

$B(3,-4)\in(K)\Rightarrow 3^2+(-4)^2+2g\cdot 3+2f(-4)+c=0\Rightarrow 25+6g-8f+c=0 \quad (2)$

Εφάπτεται του άξονα των x $\Rightarrow (x_1,0)\in(K)\Rightarrow x_1^2+2gx_1+c=0$

$\Delta=0\Rightarrow 4g^2-4c=0\Rightarrow g^2=c \quad (3)$

(1) x 2 $\Rightarrow 10+4g-8f+2c=0$ -

(2) $\quad\underline{\Rightarrow 25+6g-8f+c=0}$

(3) $\left.\begin{array}{l}15+3g-c=0\\ g^2=c\end{array}\right\}\Rightarrow 15+2g-g^2=0\Rightarrow(g-5)(g+3)=0\Rightarrow g=5$ ή $g=-3$

- $g=5\Rightarrow c=25\Rightarrow f=10\Rightarrow$ **(K_1) $x^2+y^2+10x+20y+25=0$**
- $g=-3\Rightarrow c=9\Rightarrow f=2\Rightarrow$ **(K_2) $x^2+y^2-6x+4y+9=0$**

4. $x\dfrac{dy}{dx}=y^2+y \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y^2+y}=\int \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y(y+1)}=\int \dfrac{dx}{x}$

$$\frac{1}{y(y+1)} \equiv \frac{A}{y}+\frac{B}{y+1} \Rightarrow 1=A(y+1)+By$$

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow A=1 \\ y=-1 \Rightarrow B=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{y(y+1)}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}\right)dy=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y|-\ln|y+1|=\ln|x|+k \quad ,x=1,y=3$$

$$\Rightarrow \ln 3-\ln 4=\ln 1+k \Rightarrow k=\ln\frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \ln\left|\dfrac{y}{y+1}\right|=\ln|x|+\ln\dfrac{3}{4} \Rightarrow \ln\left|\dfrac{y}{y+1}\right|=\ln\left|\dfrac{3}{4}x\right| \Rightarrow \dfrac{y}{y+1}=\pm\dfrac{3}{4}x \\ x=1,y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{y+1}=\frac{3}{4}x \Rightarrow \boldsymbol{y=\frac{3x}{4-3x}}$$

5. Δυνατές περιπτώσεις: 5^3

(α) ευνοϊκές περιπτώσεις: $5\cdot4\cdot3 \Rightarrow P(A)=\dfrac{5.4.3}{5^3} \Rightarrow P(A)=\dfrac{12}{25}$

(β) ευνοϊκές περιπτώσεις: $\dbinom{5}{1} \Rightarrow P(B)=\dfrac{\binom{5}{1}}{5^3}=\dfrac{5}{5^3} \Rightarrow \boldsymbol{P(B)=\dfrac{1}{25}}$

(γ) $P(\Gamma)=1-P(A) \Rightarrow \boldsymbol{P(\Gamma)=\dfrac{13}{25}}$

Διαφορετικά: $\dbinom{3}{2}$ για να διαλέξω τους 2 που θα μπουν στο ίδιο βαγόνι και $5\cdot4$ για να μπουν σε 2 διαφορετικά βαγόνια οι 3.

$$P(\Gamma)=\frac{\binom{3}{2}\cdot5\cdot4+\binom{5}{1}}{5^3}=\frac{60+5}{3^3}=\frac{13}{25}$$

(δ) $P(\Delta)=\dfrac{\binom{3}{2}\cdot5\cdot4}{5^3}=\dfrac{60}{5^3} \Rightarrow \boldsymbol{P(\Delta)=\dfrac{12}{25}}$

6. $(\Upsilon)\ xy=c^2$, $T\left(ct,\dfrac{c}{t}\right)\in(\Upsilon)$

(α) $y+x\dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x} \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_T=\lambda_{\varepsilon\phi}=-\dfrac{c/t}{ct}=-\dfrac{1}{t^2}$

(εφ): $y-y_T=\lambda_{\varepsilon\phi}(x-x_T) \Rightarrow y-\dfrac{c}{t}=-\dfrac{1}{t^2}(x-ct) \Rightarrow t^2y-ct+x-ct=0$

$\Rightarrow$ **(εφ):** $\boldsymbol{x+t^2y-2ct=0}$

(β) $\lambda_\kappa = -\dfrac{1}{\lambda_{\varepsilon\phi}} = t^2 \Rightarrow$ (καθ): $\psi - \psi_\tau = \lambda_\kappa(\chi - \chi_\tau) \Rightarrow \psi - \dfrac{c}{t} = t^2(\chi - ct)$

$\Rightarrow ty - c = t^3x - ct^4 \Rightarrow$ (καθ): $\mathbf{t^3x - ty - ct^4 + c = 0}$

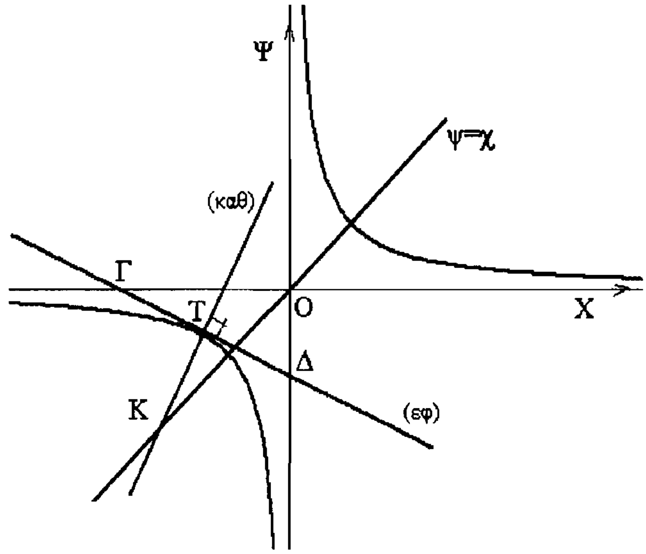
(γ) $\left.\begin{array}{l} x + t^2y - 2ct = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow x = 2ct \Rightarrow \Gamma(2ct, 0)$

$x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{2ct}{t^2} = \dfrac{2c}{t} \Rightarrow \Delta\left(0, \dfrac{2c}{t}\right)$

$E_{O\Gamma\Delta} = \dfrac{1}{2}(O\Gamma)(O\Delta) = \dfrac{1}{2}|2ct|\left|\dfrac{2c}{t}\right| \Rightarrow$

$\mathbf{E_{O\Gamma\Delta} = 2c^2}$



(δ) $\left.\begin{array}{r} y = x \\ (\kappa\alpha\theta)\text{: } t^3x\text{-}ty\text{-}ct^4\text{+}c\text{=}0 \end{array}\right\} \Rightarrow t^3x\text{-}tx\text{-}ct^4\text{+}c\text{=}0 \Rightarrow x = \dfrac{ct^4 - c}{t^3 - t} = y, \quad |t| \neq 1$

$$(TK)^2 = (x_K - x_T)^2 + (y_K - y_T)^2 = \left(\frac{ct^4 - c}{t^3 - t} - ct\right)^2 + \left(\frac{ct^4 - c}{t^3 - t} - \frac{c}{t}\right)^2$$

$$= \frac{(ct^4 - c - ct^4 + ct^2)^2 + (ct^4 - c - ct^2 + c)^2}{(t^3 - t)^2} = \frac{(ct^2 - c)^2 + (ct^4 - ct^2)^2}{t^2(t^2 - 1)}$$

$$= \frac{c^2(t^2 - 1)^2 + c^2t(t^2 - 1)^2}{t^2(t^2 - 1)^2} \Rightarrow \mathbf{(TK)^2 = \frac{c^2}{t^2}(1 + t^4)}$$

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ (ΤΕΧΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ)

Ιούνιος 1999

Επιμέλεια
Κώστας Δεληγιάννης

Μέρος Α΄
Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 12.
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το $\int(4x^3+6x)dx$

2. Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης εφ(3χ+15°) = 1

3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x+\eta\mu x}$.

4. Στο ανάπτυγμα του $\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^7$ να βρείτε το συντελεστή του χ^8.

5. Αν $\dfrac{\nu!}{(\nu-2)!}=30$ όπου ν φυσικός αριθμός, να βρείτε το ν.

6. Ένας κύκλος έχει κέντρο Κ(3,-4) και περνά από το σημείο Α(15,1).
(α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου
(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α(15,1)

7. Η καμπύλη με εξίσωση $\psi=\alpha\chi^2+\beta\ln\chi$, $\chi>0$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο Α(1,3). Να υπολογίσετε τα α και β.

8. Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{d\psi}{dx}$ στις πιο κάτω περιπτώσεις :
(α) $\psi=e^{\chi}\eta\mu\chi$, (β) $\psi=\sqrt{1-2\eta\mu 5x}$

9. Από μια ομάδα 10 ατόμων θα εκλεγεί μια πενταμελής επιτροπή .
(α) Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός;
(β) Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν οι δύο είναι αδέλφια και δεν μπορούν να είναι μαζί στην επιτροπή;

10. Να δείξετε χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής ότι: $\tau o\xi\varepsilon\phi\dfrac{5}{6}+\tau o\xi\varepsilon\phi\dfrac{1}{11}=\dfrac{\pi}{4}$

11. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 5\alpha+\eta\mu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 7\alpha}=\varepsilon\phi 5\alpha$

12. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $(\chi^2+3)\dfrac{d\psi}{dx}=\chi(\psi+5)$
για την οποία $\psi=1$ όταν $\chi=3$

13. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi=\chi^3-3\chi^2$.
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα και να κάμετε τη γραφική παράσταση .

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Μέρος Α΄ Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 12.
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το $\int(4x^3+6x)dx$

Λύση

$$\int(4x^3+6x)dx = 4\frac{\chi^4}{4}+6\frac{\chi^2}{2}+c = \chi^4 + 3\chi^2 + c$$

2. Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης εφ(3χ+15°) = 1

Λύση

$$\varepsilon\varphi(3\chi+15°) = 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi(3\chi+15°) = \varepsilon\varphi 45° \Rightarrow 3\chi + 15° = 180°\kappa + 45°\ ,\ \kappa \in \mathbf{Z}$$
$$\Rightarrow 3\chi = 180°\kappa + 30°,\ \kappa \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad \chi = 60°\kappa + 10°,\ \kappa \in \mathbf{Z}$$

3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x+\eta\mu x}$.

Λύση

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x+\eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu 0-1}{0+\eta\mu 0} = \frac{1-1}{0-0} = \frac{0}{0}\ (\text{Απροσδιορ.})$$
$$L = \lim_{x\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)'}{(x+\eta\mu x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{0}{1+1} = 0$$

4. Στο ανάπτυγμα του $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^7$ να βρείτε το συντελεστή του χ^8.

Λύση

$$T_{\kappa+1} = \binom{7}{\kappa}\cdot(\chi^2)^{7-\kappa}\cdot\left(\frac{3}{\chi}\right)^{\kappa} = \binom{7}{\kappa}\cdot\chi^{14-2\kappa}\cdot 3^{\kappa}\cdot\chi^{-\kappa} = \binom{7}{\kappa}\cdot 3^{\kappa}\cdot\chi^{14-3\kappa} \Rightarrow$$
$$14-3\kappa=8 \Rightarrow 3\kappa=6 \Rightarrow \kappa=2.$$
$$T_3 = \binom{7}{2}\cdot 3^2\cdot\chi^8 = \frac{7!}{5!\cdot 2!}\cdot 9\cdot\chi^8 = \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot 9\cdot\chi^8 = 189\chi^8$$

Άρα ο συντελεστής του χ^8 είναι 189

5. Αν $\frac{\nu!}{(\nu-2)!} = 30$ όπου ν φυσικός αριθμός, να βρείτε το ν.

Λύση

$$\frac{\nu!}{(\nu-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{(\nu-2)!\,(\nu-1)\cdot\nu}{(\nu-2)!} = 30 \Rightarrow (\nu-1)\cdot\nu=30 \Rightarrow \nu^2-\nu-30=0 \Rightarrow$$

$(\nu-6)(\nu+5)=0 \Rightarrow \nu = 6$ *δεκτή* , $\nu = -5$ *απορρίπτεται γιατί ν φυσικός αριθμός.*

6. Ένας κύκλος έχει κέντρο Κ(3,-4) και περνά από το σημείο Α(15,1).
(α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου
(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α(15,1)

Λύση

(α) Η γενική εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(-g,-f)$ και ακτίνα $R=\sqrt{g^2+f^2-c}>0$ είναι (κ) : $\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0$. Από τα δεδομένα $g=-3, f=4, x=15, \psi=1 \Rightarrow$ $15^2+1^2+2\cdot(-3)\cdot 15+2\cdot 4\cdot 1+c=0 \Rightarrow c=-144 \Rightarrow$ $\underline{(\kappa):\ \chi^2+\psi^2-6\chi+8\psi-144=0}$

(β) Εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου (κ) στο σημείο του (χ_1,ψ_1) είναι :
(ε): $\chi_1\chi+\psi_1\psi+g(\chi+\chi_1)+f(\psi+\psi_1)+c=0$ Από τα δεδομένα έχουμε :
$15\chi+1\psi-3(\chi+15)+4(\psi+1)-144=0 \Rightarrow \underline{(\varepsilon):\ 12\chi+5\psi-185=0}$

7. Η καμπύλη με εξίσωση $\psi=\alpha\chi^2+\beta\ln\chi$, $\chi>0$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο Α(1,3). Να υπολογίσετε τα α και β.

Λύση

$$\psi=\alpha\chi^2+\beta\ln\chi \Rightarrow \psi'=2\alpha\chi+\frac{\beta}{\chi},\quad \psi'\big|_{\chi=1}=0 \Rightarrow 2\alpha+\beta=0 \quad (1)$$

Η καμπύλη περνά από το σημείο $A(1,3) \Rightarrow 3=\alpha+0 \Rightarrow \underline{\alpha=3} \overset{(1)}{\Rightarrow} 6+\beta=0 \Rightarrow \underline{\beta=-6}$

8. Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{d\psi}{dx}$ στις πιο κάτω περιπτώσεις :

(α) $\psi=e^{\chi}\eta\mu\chi$, (β) $\psi=\sqrt{1-2\eta\mu 5x}$

Λύση

$$(\alpha)\quad \psi=e^{\chi}\eta\mu\chi \Rightarrow \frac{d\psi}{dx}=e^{\chi}\eta\mu\chi+e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$(\beta)\quad \psi=\sqrt{1-2\eta\mu 5x} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}=\frac{-2\cdot 5\cdot\sigma\upsilon\nu 5\chi}{2\sqrt{1-2\eta\mu 5\chi}}=-\frac{5\sigma\upsilon\nu 5\chi}{\sqrt{1-2\eta\mu 5\chi}}$$

9. Από μια ομάδα 10 ατόμων θα εκλεγεί μια πενταμελής επιτροπή .
(α) Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός;
(β) Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν οι δύο είναι αδέλφια και δεν μπορούν να είναι μαζί στην επιτροπή;

Λύση

$$(\alpha)\quad \binom{10}{5}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252$$

$$(\beta)\quad \binom{10}{5}-\binom{8}{3}=252-\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=252-56=196$$

ή με άλλο τρόπο : $\binom{8}{5}+\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{4}=\binom{8}{3}+2\cdot\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=56+140=196$

10. Να δείξετε χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής ότι: $\tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{5}{6}+\tau\alpha\xi\varepsilon\varphi\dfrac{1}{11}=\dfrac{\pi}{4}$

Λύση

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{5}{6}=\alpha \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha=\frac{5}{6},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$$

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{11}=\beta \Rightarrow \varepsilon\varphi\beta=\frac{1}{11},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{4}$$

$$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$$

Η σχέση που θα αποδείξουμε γίνεται: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\frac{5}{6}+\frac{1}{11}}{1-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{11}}=\frac{\frac{61}{66}}{\frac{61}{66}}=1\Rightarrow \varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=1\Rightarrow\alpha+\beta=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\\ 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \kappa=0 \;\;\kappa\alpha\iota\;\; \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}\qquad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\qquad \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{5}{6}+\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{11}=\frac{\pi}{4}$$

11. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 5\alpha+\eta\mu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 7\alpha}=\varepsilon\varphi 5\alpha$

Λύση

$$\frac{\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 5\alpha+\eta\mu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 7\alpha}=\frac{(\eta\mu 7\alpha+\eta\mu 3\alpha)+\eta\mu 5\alpha}{(\sigma\upsilon\nu 7\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha)+\sigma\upsilon\nu 5\alpha}=\frac{2\eta\mu 5\alpha\;\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 5\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 5\alpha\;\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha}$$

$$=\frac{\eta\mu 5\alpha(2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1)}{\sigma\upsilon\nu 5\alpha(2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+1)}=\frac{\eta\mu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu 5\alpha}=\varepsilon\varphi 5\alpha$$

12. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $(\chi^2+3)\dfrac{d\psi}{dx}=\chi(\psi+5)$

για την οποία $\psi=1$ όταν $\chi=3$

Λύση

$$(\chi^2+3)\frac{d\psi}{dx}=\chi(\psi+5)\Rightarrow\frac{d\psi}{\psi+5}=\frac{\chi}{\chi^2+3}d\chi\Rightarrow\int\frac{d\psi}{\psi+5}=\int\frac{\chi}{\chi^2+3}d\chi\Rightarrow$$

$$\ln|\psi+5|=\frac{1}{2}\ln(\chi^2+3)+c\Rightarrow 2\ln|\psi+5|=\ln(\chi^2+3)+2c\Rightarrow$$

$$\ln(\psi+5)^2=\ln(\chi^2+3)+\ln\kappa\Rightarrow\ln(\psi+5)^2=\ln\kappa(\chi^2+3)\Rightarrow(\psi+5)^2=\kappa(\chi^2+3)\quad \gamma\iota\alpha\;\psi=1,\;\chi=3$$

$$\Rightarrow 36=\kappa(9+3)\Rightarrow\kappa=3$$

άρα η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι: $(\psi+5)^2=3(\chi^2+3)$

13. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi=\chi^3-3\chi^2$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα και να κάμετε τη γραφική παράσταση.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των χ.

$$\frac{dV}{dt}=800\pi\ cm^3/s,\quad V=\frac{4}{3}\pi R^3\quad και\quad \frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dR}\cdot\frac{dR}{dt}$$

$$Άρα\quad 800\pi=4\pi R^2\cdot\frac{dR}{dt}\quad\Rightarrow\quad\frac{dR}{dt}=\frac{200}{R^2}$$

$$E=4\pi R^2\ και\ \frac{dE}{dt}=\frac{dE}{dR}\cdot\frac{dR}{dt}=8\pi R\cdot\frac{200}{R^2}=\frac{1600\pi}{R}\Rightarrow\left.\frac{dE}{dR}\right|_{R=10cm}=\frac{1600\pi}{10}=160\pi\,cm^2/s$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄:</u> Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 4.

Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να βρείτε στη μορφή $\psi = f(\chi)$, τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\chi\frac{d\psi}{dx}+2\psi=\chi\, e^{\chi}$

<u>Λύση</u>

$$\chi\frac{d\psi}{dx}+2\psi=\chi\,e^{\chi}\Rightarrow\frac{d\psi}{dx}+\frac{2}{\chi}\psi=e^{\chi},\qquad I(\chi)=e^{\int\frac{2}{\chi}d\chi}=e^{2\ln\chi}=e^{\ln\chi^2}=\chi^2$$

$$\chi^2\frac{d\psi}{dx}+2\chi\psi=\chi^2e^{\chi}\Rightarrow\frac{d}{d\chi}(\chi^2\psi)=\chi^2e^{\chi}\Rightarrow\chi^2\psi=\int\chi^2e^{\chi}\,d\chi$$

$$Αλλά\ το\ \int\chi^2e^{\chi}\,d\chi=\int\chi^2\,d(e^{\chi})=\chi^2e^{\chi}-2\int\chi e^{\chi}\,d\chi=\chi^2e^{\chi}-2\int\chi\,d(e^{\chi})$$

$$=\chi^2e^{\chi}-2\chi e^{\chi}+2\int e^{\chi}\,d\chi=\chi^2e^{\chi}-2\chi e^{\chi}+2e^{\chi}+c$$

$$Άρα\ \chi^2\psi=\chi^2e^{x}-2x\,e^{x}+2\,e^{x}+c\Rightarrow\psi=e^{\chi}-\frac{2}{\chi}e^{\chi}+\frac{2}{\chi^2}e^{\chi}+\frac{c}{\chi^2}$$

2. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\beta+\gamma=\alpha\,\sigma\varphi\frac{A}{2}$ να δείξετε ότι είναι ορθογώνιο.

<u>Λύση</u>

$$\beta+\gamma=\alpha\,\sigma\varphi\frac{A}{2}\Rightarrow 2R\,(\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)=2R\,\eta\mu A\,\sigma\varphi\frac{A}{2}\Rightarrow$$

$$2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=2\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}\Rightarrow$$

$$\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\quad και\quad \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\neq 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\right)=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\Rightarrow\frac{B-\Gamma}{2}=\pm\frac{A}{2}$$

$$(\alpha)\ \frac{B-\Gamma}{2}=\frac{A}{2}\Rightarrow B-\Gamma=A\Rightarrow B=A+\Gamma\Rightarrow B=180^\circ-B\Rightarrow 2B=180^\circ\Rightarrow B=90^\circ$$

$$(\beta)\ \frac{B-\Gamma}{2}=-\frac{A}{2}\Rightarrow B-\Gamma=-A\Rightarrow B+A=\Gamma\Rightarrow 180^\circ-\Gamma=\Gamma\Rightarrow\Gamma=90^\circ$$

3. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\chi = \eta\mu\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\chi^2}{\sqrt{1-\chi^2}} dx$

Λύση

$\chi = \eta\mu\theta \Rightarrow d\chi = \sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta$. Για $\chi=0 \Rightarrow \eta\mu\theta=0 \Rightarrow \theta=0$, Για $\chi=\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$

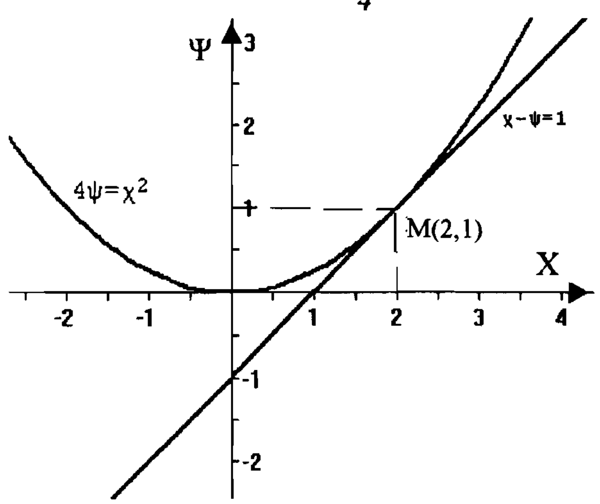
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\chi^2}{\sqrt{1-\chi^2}} d\chi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\theta}{\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}} \sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{\eta\mu 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

4. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $4\psi = \chi^2$, $\chi \in \mathbf{R}$.
(α) Να κάμετε την γραφική της παράσταση.
(β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο Μ, που έχει τετμημένη $\chi=2$, είναι $\chi - \psi = 1$.
(γ) Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $4\psi = \chi^2$, την εφαπτομένη της στο σημείο Μ και τον άξονα των χ, περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των χ και παράγει στερεό μα όγκο V_1. Το ίδιο χωρίο περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των ψ και παράγει στερεό με όγκο V_2. Να βρείτε το λόγο $\frac{V_1}{V_2}$.

Λύση

(α) $4\psi=\chi^2$, $\chi \in \mathbf{R} \Rightarrow \psi = \frac{1}{4}\chi^2$ *(Παραβολή)*



χ	0	2	-2	4	-4
ψ	0	1	1	4	4

ή διαφορετικά

$\psi' = \frac{1}{2}\chi$

χ		0	
ψ'	−	0	+
ψ	↘	min	↗
		(0,0)	

$\chi=2 \Rightarrow \psi = \frac{1}{4}\cdot 2^2 = 1$ $(2,1)$

(β) $\psi = \frac{1}{4}\chi^2 \Rightarrow \psi' = \frac{1}{2}\chi \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

Εξίσωση εφαπτομένης $\psi - 1 = \chi - 2 \Rightarrow \chi - \psi = 1$

(γ) $$V_1 = \pi\int_0^2 \frac{\chi^4}{16} d\chi - \pi\int_1^2 (\chi-1)^2 d\chi = \left[\frac{\pi\chi^5}{5\cdot 16}\right]_0^2 - \left[\frac{\pi(\chi-1)^3}{3}\right]_1^2 = \frac{32\pi}{80} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{15}\ \kappa.\mu.$$

$$V_2 = \pi\int_0^1 \chi_\varepsilon^{\,2}\, d\psi - \pi\int_0^1 \chi_\kappa^{\,2} d\psi = \pi\int_0^1 \left(\psi^2 + 2\psi + 1 - 4\psi\right)d\psi = \pi\left[\frac{\psi^3}{3} + \psi^2 + \psi - 2\psi^2\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{3} + 1 + 1 - 2\right) = \frac{\pi}{3}\ \kappa.\mu. \qquad Άρα\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi}{15}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{5}$$

5. Δίνεται τα ψηφία 3, 4, 5, 6, 7.
(α) Να βρείτε πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με αυτά τα ψηφία, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων. Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι;
(β) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω ψηφία χωρίς επανάληψη, να βρείτε πόσους ακέραιους θετικούς αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε που να είναι μικρότεροι του 5000.

(α)

Ε	Δ	Μ
5	4	3

5·4·3 = 60 τριψήφιοι

Ε	Δ	Μ
4	3	2

4·3·2 = 24 άρτιοι

(β)

Χ	Ε	Δ	Μ
2	4	3	2

2·4·3·2 = 48 τετραψήφιοι

Ε	Δ	Μ
5	4	3

5·4·3 = 60 τριψήφιοι

Δ	Μ
5	4

5·4 = 20 διψήφιοι

Μ
5

5 = 5 μονοψήφιοι

Συνολικά μπορούν να σχηματιστούν 48+60+20+5 = 133 αριθμοί μικρότεροι του 5000

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α(1,-1), Β(-1,1), και τέμνει ορθογώνια τον κύκλο $\chi^2+\psi^2+4\chi+6\psi+12 = 0$. Στη συνέχεια αν Κ και Λ είναι τα κέντρα των δύο κύκλων και Μ ένα από τα σημεία τομής τους, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΚΛΜ.

Έστω η εξίσωση του κύκλου είναι $\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0$.
Τα $A(1,-1)$, $B(-1,1)$ *είναι σημεία του κύκλου*

$A(1,-1):\ 1+1+2g-2f+c=0 \Rightarrow 2+2g-2f+c=0$

$B(-1,1):\ 1+1-2g+2f+c=0 \Rightarrow \underline{2-2g+2f+c=0}$

$4 + 2c = 0 \Rightarrow c = -2$

Ο κύκλος $\chi^2+\psi^2+4\chi+6\psi+12=0$ *έχει* $g_1=2,\ f_1=3,\ c_1=12$

Αφού οι κύκλοι τέμνονται ορθογώνια ισχύει $2g_1\cdot g+2f_1\cdot f=c_1+c \Rightarrow 2\cdot 2\cdot g+2\cdot 3\cdot f=12-2$

$\Rightarrow 4g+6f=10 \Rightarrow 2g+3f=5$, *Όμως* $2+2g-2f+c=0$ *και* $c=-2$ *άρα* $2g-2f=0$

$2g+3f=5 \qquad 2g+3\cdot 1=5$

$\underline{-2g+2f=0} \qquad 2g=2 \qquad$ *Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι :* $\chi^2+\psi^2+2\chi+2\psi-2=0$

$5f = 5 \qquad g = 1 \qquad K(-1,-1)$ *και* $R_1=\sqrt{1+1+2} = 2$

$\Rightarrow f = 1 \qquad \Lambda(-2,-3)$ *και* $R_2= \sqrt{4+9-12} = 1$

Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4

Επιμέλεια: Μαρία Φαλά

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Η καμπύλη με εξίσωση $y = (x^2 + \alpha x + \beta)e^x$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $\left(-1, -\frac{8}{e}\right)$.

   Να βρείτε την τιμή των α και β.

2. Κάποιος αγοράζει λαμπτήρες προς £72 τη δώδεκάδα. Από αυτούς, ποσοστό 10% σπάζει κατά τη μεταφορά και πωλεί τους υπόλοιπους προς £7 τον ένα. Να βρείτε το επί τοις εκατό (%) κέρδος του.

3. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν οι 30 μαθητές ενός τμήματος σε κάποιο διαγώνισμα Μαθηματικών:

12	9	15	11	16	18	15	12	18	11
15	11	16	12	18	9	18	15	12	15
15	18	9	11	15	20	11	16	9	18

   Να βρείτε το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (Η τυπική απόκλιση να δοθεί με τρία δεκαδικά ψηφία).

4. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι:

   (α) $A^3=-I$ όπου $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (β) $A^2-A+I=(O)$ όπου $(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (γ) $(A-I)^{19}=A^{19}-I$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ της οποίας υπάρχουν η πρώτη παράγωγος $f'(x)$ και η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι συνεχείς. Η εφαπτόμενη της καμπύλης με εξίσωση $y = f(x)$, στο σημείο με τετμημένη $x = \alpha$ σχηματίζει προσανατολισμένη γωνιά $\frac{\pi}{4}$ ακτινίων με τον άξονα Οx και η εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο με τετμημένη $x=\beta$ σχηματίζει προσανατολισμένη γωνιά $\frac{\pi}{3}$ ακτινίων με τον άξονα Οx. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f''(x)dx$.

6. Δυο μαθητές Α και Β βρίσκονται σε διαφορετικές αίθουσες και προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα.. Η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα ο μαθητής Β είναι $\frac{1}{3}$ και η

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μία από τις πέντε ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \dfrac{\chi^2}{(\chi-2)^2}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τα σημεία καμπής, τις ασύμπτωτες και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

2. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\dfrac{dy}{dx} = u$ να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης : $\chi\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = x^3$ συνx.

3. Δίνεται η καμπύλη $\psi = \chi^2 - \lambda\chi$, $\lambda > 0$ και η ευθεία $\psi = 2\chi$. Ονομάζουμε E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \chi^2 - \lambda\chi$, την ευθεία $\psi = 2\chi$ και τον άξονα των χ και E_2 το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \chi^2 - \lambda\chi$ και τον άξονα των χ. Αν $E_1 = 7\,E_2$ να υπολογίσετε την τιμή του λ.

4. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $\chi\,\psi = 16$ και τα σημεία $T\left(ct\,,\,\dfrac{4}{t}\right)$ και $P\left(4\rho\,,\,\dfrac{4}{\rho}\right)$ αυτής.

   (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας TP.

   (β) Αν τα σημεία Τα και P κινούνται πάνω στην υπερβολή έτσι ώστε η ευθεία TP να περνά από το σημείο Γ(8,4) να βρείτε στη μορφή ψ=f(χ) την εξίσωση της καμπύλης (κ) πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της χορδής TP.

   (γ) Να βρείτε τιε εξισώσεις των ασυμπτώτων της καμπύλής (κ).

5. Μια έρευνα έδειξε ότι το 16% του συνολικού πληθησμού μιας πόλης είναι συνταξιούχοι και 18% του συνολικού πληθησμού έχει πρόβλημα ακοής. Επίσης 65% των συνταξιούχων έχει πρόβλημα ακοής.

   i) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο από τον πληθησμό της πόλης, να βρείτε με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων την πιθανότητα το άτομο αυτό:
      (α) να μην είναι συνταξιούχο και να έχει πρόβλημα ακοής.
      (β) να είναι συνταξιούχο και να μην έχει πρόβλημα ακοής.
      (γ) να είναι συνταξιούχο δεδομένου ότι δεν έχει πρόβλημα ακοής.
      (δ) να είναι συνταξιούχο ή να έχει προβλημαα ακοής ή και τα δύο.

   ii) Αν επιλέξουμε τυχαία δύο άτομα από τον πληθυσμό της πόλης, να βρείτε με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων την πιθανότητα του ενδεχομένου :
      Η : “ τουλάχιστο το ένα από αυτά να είναι συνταξιούχο και τουλάχιστον το ένα από αυτά να έχει πρόβλημα ακοής “ .

$$f'(\alpha)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1,\quad f'(\beta)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}f''(x)dx=f'(x)\Big|_{\alpha}^{\beta}=f'(\beta)-f'(\alpha)\Rightarrow \mathbf{I=\sqrt{3}-1}$$

6. $P(B)=\frac{1}{3},\quad P(A\cup B)=\frac{1}{2}$, A, B ανεξάρτητα $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

(α) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$

$$\Rightarrow P(A)[1-P(B)]+P(B)=P(A\cup B)\Rightarrow P(A)\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{3}P(A)=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P(A)=\frac{1}{4}}$$

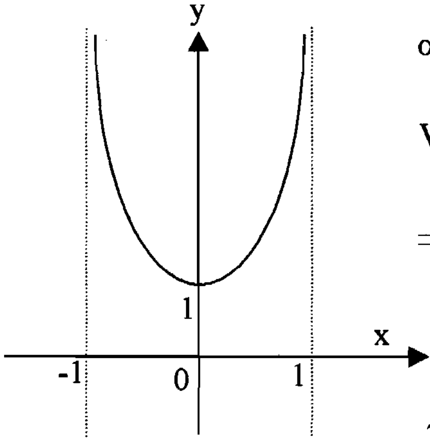
(β) $P(\beta)=P(A'\cup B')=P[(A\cap B)']=1-P(A\cap B)=1-P(A)P(B)=1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \mathbf{P(\beta)=\frac{11}{12}}$$

(γ) $P(\gamma)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow P(\gamma)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{12}\Rightarrow \mathbf{P(\gamma)=\frac{5}{12}}$$

7.



$\alpha>0,\ \alpha<1$

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\alpha\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}\right)^2dx=\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow\int_{\alpha}^{\alpha\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \text{τοξημ}x\Big|_{\alpha}^{\alpha\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \text{τοξημ}\alpha\sqrt{3}-\text{τοξημ}\alpha=\frac{\pi}{6}$$

$\text{τοξημ}\alpha\sqrt{3}=x\Rightarrow \text{ημ}x=\alpha\sqrt{3},\ \text{συν}x=\sqrt{1-3\alpha^2}$

$0<\alpha\sqrt{3}<\sqrt{3}$

$\text{τοξημ}\alpha=y\Rightarrow \text{ημ}y=\alpha,\ \text{συν}y=\sqrt{1-\alpha^2},\ 0<\alpha<1$

$$\Rightarrow x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow \text{συν}(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{συν}x\,\text{συν}y+\text{ημ}x\,\text{ημ}y=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sqrt{1-3\alpha^2}\sqrt{1-\alpha^2}+\alpha\sqrt{3}\cdot\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1-4\alpha^2+3\alpha^4}+\sqrt{3}\alpha^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left(1-4\alpha^2+3\alpha^4\right)=3\left(\frac{1}{2}-\alpha^2\right)^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 1-4\alpha^2+3\alpha^4=\frac{3}{4}-3\alpha^2+3\alpha^4\Rightarrow\alpha^2-\frac{1}{4}=0\Rightarrow\alpha=\pm\frac{1}{2}\\ \alpha>0\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}\ \text{δεκτή}$$

8. $(K_1): x^2+y^2=20\Rightarrow\qquad \mathbf{K_1(0,0),\ R_1=\sqrt{20}}$

$(K_2): x^2+y^2-6x+2y=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2-10=0 \Rightarrow$ $\mathbf{K_2(3,-1),\ R_2=\sqrt{10}}$

$(K_2)-(K_1) \Rightarrow (x^2+y^2-6x+2y)-(x^2+y^2-20)=0 \Rightarrow -6x+2y+20=0$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow y=3x-10 \\ &x^2+y^2=20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+(3x-10)^2=20 \Rightarrow 10x^2-60x+100-20=0$$

$$\Rightarrow x^2-6x+8=0 \Rightarrow (x-2)(x-4)=0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_1=2 \Rightarrow y_1=-4 \\ &x_2=4 \Rightarrow y_2=2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \mathbf{A(2,-4),\ B(4,2)} \Rightarrow x_M=\frac{2+4}{2}=3,\ y_M=\frac{-4+2}{2}=-1$$

$$\Rightarrow M(3,-1)\equiv K_2 \Rightarrow AB \text{ διάμετρος του } (K_2)$$

εξίσωση εφαπτομένης στο Α:

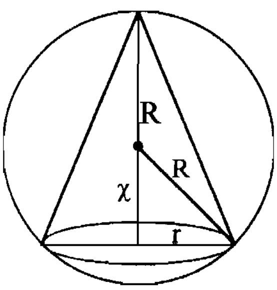
$$(K_1): 2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \Rightarrow \lambda_1=-\frac{2}{-4}=\frac{1}{2}$$

$$(K_2): 2x+2y\frac{dy}{dx}-6+2\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{6-2x}{2y+2} \Rightarrow \lambda_2=\frac{6-4}{2(-4)+2}=-\frac{1}{3}$$

$$\varepsilon\varphi\theta=\left|\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\right|=\frac{5/6}{5/6}=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

Η γωνία των εφαπτόμενων στο Β είναι η ίδια.

9.



R=αcm
υ=(α+x)cm

(α) $V=\frac{1}{3}\pi r^2\upsilon=\frac{1}{3}\pi(R^2-x^2)\upsilon=\frac{1}{3}\pi(\alpha^2-x^2)(\alpha+x)$

$$\mathbf{V=\frac{1}{3}\pi(\alpha-x)(\alpha+x)^2}$$

(β) $V_{max} \Rightarrow \frac{dV}{dx}=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(-1)(\alpha+x)^2+\frac{1}{3}\pi(\alpha-x)\cdot 2\cdot(\alpha+x)=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi(\alpha+x)(-\alpha-x+2\alpha-2x)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(\alpha+x)(\alpha-3x)=0$$

$\Rightarrow$ ρίζες: $x=-\alpha\langle 0$ απορρίπτεται, $\mathbf{x=\frac{\alpha}{3}}$ δεκτή

(γ) $V_{max}=\frac{1}{3}\pi\left(\alpha-\frac{\alpha}{3}\right)\left(\alpha+\frac{\alpha}{3}\right)^2=\frac{1}{3}\pi\frac{2\alpha}{3}\left(\frac{4\alpha}{3}\right)^2$

$\Rightarrow \mathbf{V_{MAX}=\frac{32}{3^4}\pi\alpha^3}$ **κ.μ.**

x	0	α/3	α
V′	+	0	-
V	↗	∩	↘

10. $x=\alpha\left[\ln\left(\sigma\varphi\frac{\theta}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\theta\right]$

$y=\alpha\eta\mu\theta$

$\alpha>0\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$

(α) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}\quad\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx}=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\frac{1}{\frac{-\alpha\left(\frac{1}{2}\sigma\tau\varepsilon\mu^2\theta\right)}{\sigma\varphi\frac{\theta}{2}}+\alpha\eta\mu\theta}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{-1}{2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}+\eta\mu\theta}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta}{-1+\eta\mu^2\theta}\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\eta\mu\theta.\sigma\upsilon\nu\theta}{-\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow\mathbf{\frac{dy}{dx}}=-\varepsilon\phi\theta$$

(β) εξίσωση εφαπτομένης στο P: $y-y_\rho=\lambda_\varphi(x-x_\rho)$

$$\Rightarrow y-\alpha\eta\mu\theta=-\varepsilon\phi\theta\left[x-\alpha\ln\left(\sigma\varphi\frac{\theta}{2}\right)+\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\right]$$

$$y=0\Rightarrow-\alpha\eta\mu\theta=-\varepsilon\phi\theta\left[x-\alpha\ln\left(\sigma\varphi\frac{\theta}{2}\right)+\alpha\sigma\upsilon\nu\theta\right]$$

$$\Rightarrow-\alpha\eta\mu\theta=-\varepsilon\phi\theta\left[x-\alpha\ln\left(\sigma\phi\frac{\theta}{2}\right)\right]-\alpha\eta\mu\theta\Rightarrow x=\alpha\ln\left(\sigma\varphi\frac{\theta}{2}\right)\Rightarrow T\left(\alpha\ln\left(\sigma\varphi\frac{\theta}{2}\right),0\right)$$

$$(PT)=\sqrt{(x_T-x_P)^2+(y_T-y_P)^2}=\sqrt{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\alpha^2\eta\mu^2\theta}\Rightarrow\mathbf{(PT)=\alpha}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. $y=\frac{x^2}{(x-2)^2},\quad \mathbf{x\in R-\{2\}}$

$$\left.\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0\\ y=0\Rightarrow x=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$ **Ο (0,0)** το μόνο σημείο τομής με τους άξονες

$$y'=\frac{2x(x-2)^2-x^2\cdot2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{(x-2)}{(x-2)^4}(2x^2-4x-2x^2)=-\frac{4x}{(x-2)^3}$$

$$y''=\frac{-4(x-2)^3+4x\cdot3\cdot(x-2)^2}{(x-2)^6}=\frac{-4(x-2)^2(x-2-3x)}{(x-2)^6}=\frac{-4(-2x-2)}{(x-2)}=\frac{8(x+1)}{(x-2)^4}$$

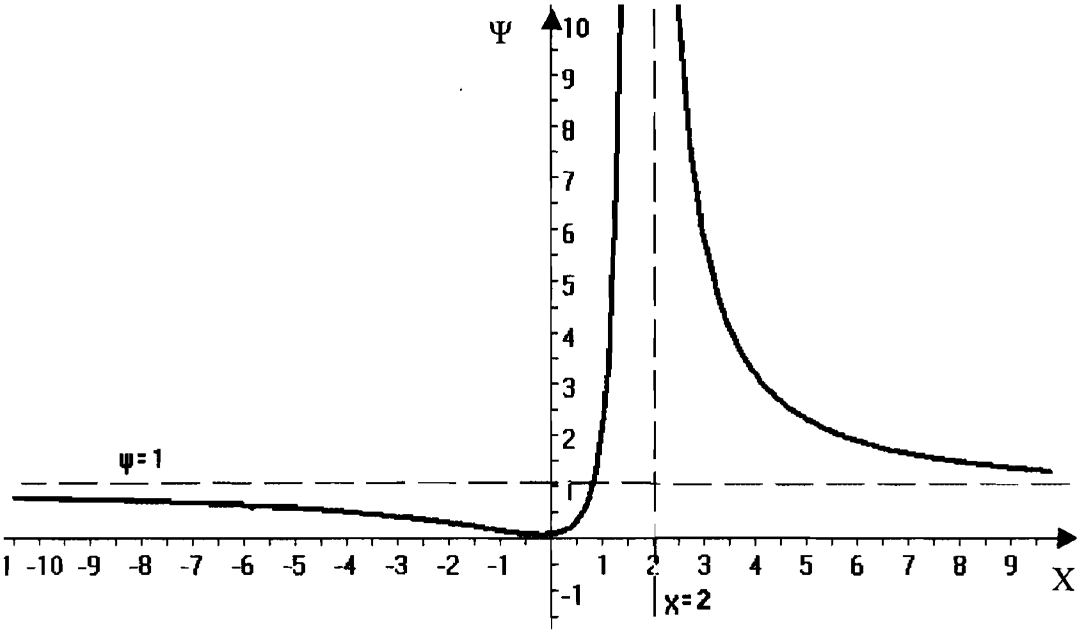
x	$-\infty$		-1		0		2		∞
y′		-		-	0	+	||	-	
y″		-	0	+		+	||	+	
y		∩ ↘		↘	∪	↗		↘	

$y'=0\Rightarrow\chi=0\Rightarrow\psi=0\Rightarrow$ **min(0,0)**

$\mathbf{y''=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=\frac{1}{9}}\Rightarrow$

Σ.Κ. (1, $\frac{1}{9}$)

Κ.Α. χ=2 , Ο.Α. y=1



2. $\dfrac{dy}{dx}=u \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{du}{dx}$, $\quad x\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}=x^3\sigma\upsilon\nu x$

$\Rightarrow x\dfrac{dy}{dx}-2\cdot u=x^3\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}\cdot u=x^2\sigma\upsilon\nu x$

$\Rightarrow I(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}\frac{du}{dx}-\frac{2}{x^3}u=\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \frac{u}{x^2}=\int \sigma\upsilon\nu x dx=\eta\mu x+\kappa$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}\frac{du}{dx}=\eta\mu x+\kappa \Rightarrow y=\int\left(x^2\eta\mu x+\kappa x^2\right)dx=-\int x^2 d\sigma\upsilon\nu x+\int \kappa x^2 dx$$

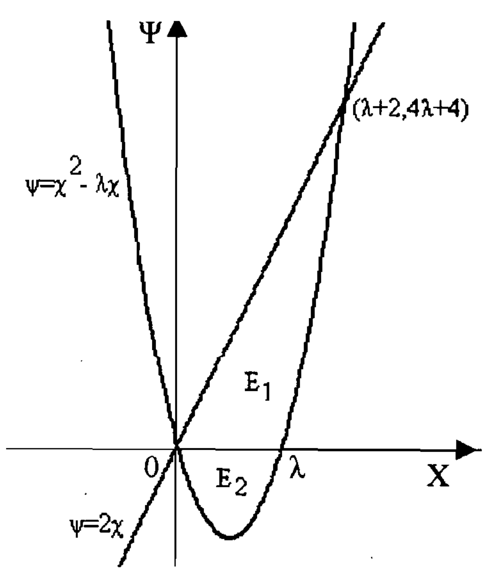
$$\Rightarrow y=-x^2\sigma\upsilon\nu x+\int \sigma\upsilon\nu x\cdot 2x dx+\kappa\frac{x^3}{3}=-x^2\sigma\upsilon\nu x+\int 2x d\eta\mu x+\kappa\frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow y=-x^2\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x-\int 2\eta\mu x dx+\kappa\frac{x^3}{3} \quad \Rightarrow \mathbf{y=-x^2\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x+\kappa\frac{x^3}{3}+c}$$

3. $y=x^2-\lambda x=x(x-\lambda), \quad \lambda>0$

$y=2x$

$\chi^2-\lambda\chi=2\chi \Rightarrow \chi^2-(\lambda+2)\chi=0 \Rightarrow \chi=0, \chi=\lambda+2$



$$E_1+E_2=\int_0^{\lambda+2}\left[2x-\left(x^2-\lambda x\right)\right]dx=\int\left[(2+\lambda)x-x^2\right]dx$$

$$E_1+E_2=\frac{2+\lambda}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\lambda+2}=\left[\frac{(\lambda+2)^3}{2}-\frac{(\lambda+2)^3}{3}\right]-0$$

$$E_1+E_2=\frac{1}{6}(\lambda+2)^3 \text{ τ.μ.}$$

$$E_2=-\int_0^{\lambda}\left(x^2-\lambda x\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{\lambda}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{\lambda}=-\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^3}{2}=\frac{\lambda^3}{6}\text{ τ.μ.}$$

$E_1=E_1+E_2-E_2=\frac{1}{6}\left[(\lambda+2)^3-\lambda^3\right]$

$E_1=7E_2 \Rightarrow \frac{1}{6}\left[(\lambda+2)^3-\lambda^3\right]=7\cdot\frac{1}{6}\cdot\lambda^3 \Rightarrow (\lambda+2)^3-(2\lambda)^3=0$

$\Rightarrow(\lambda+2-2\lambda)\left[(\lambda+2)^2+(\lambda+2)2\lambda+(2\lambda)^2\right]=0$

$\Rightarrow(2-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4+2\lambda^2+4\lambda+4\lambda^2)=0 \quad \Rightarrow(2-\lambda)(7\lambda^2+8\lambda+4)=0\Rightarrow \boldsymbol{\lambda=2}$

(διότι $7\lambda^2+8\lambda+4>0\ \forall x\in \mathbf{R}$)

4. (Υ) $xy=16$, $T\left(4t,\frac{4}{t}\right)$, $P\left(4p,\frac{4}{p}\right)\in(Y)$

(α) $(TP)\ \frac{y-y_T}{x-x_T}=\frac{y_P-y_T}{x_P-x_T}\Rightarrow\frac{y-\frac{4}{t}}{x-4t}=\frac{\frac{4}{p}-\frac{4}{t}}{4p-4t}$

$\Rightarrow 4(p-t)y-\frac{16}{t}(p-t)=4\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)x-16t\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{t}\right)$

$\Rightarrow (p-t)y-\frac{16}{t}(p-t)=\frac{4}{pt}(t-p)x-\frac{16t}{pt}(t-p)$

$\Rightarrow (p-t)pty-4p(p-t)=(t-p)x-4t(t-p)\Rightarrow pty-4p=-x+4t$

$\Rightarrow$ **(TP): pty+x=4(p+t)**

(β) $\Gamma(8,4)\in(TP)\Rightarrow 4pt+8=4(p+t)\Rightarrow 2+tp=t+p\Rightarrow tp=t+p-2$

$x_M=\frac{4t+4p}{2}=2(t+p)\Rightarrow t+p=\frac{x_M}{2}$,

$y_M=\frac{\frac{4}{t}+\frac{4}{p}}{2}=2\frac{p+t}{pt}=2\frac{\frac{x_M}{2}}{pt}=\frac{x_M}{\frac{x_M}{2}-2}\Rightarrow \qquad \textbf{(K)}\ \mathbf{y=\frac{2x}{x-4}}$

(γ) Ασύμπτωτες: K.A. **x-4=0,** O.A. $y=\frac{2}{1}\Rightarrow$ **y=2**

5. 16% συνταξιούχοι, 18% πρόβλημα ακοής — Σ: Συνταξιούχος
65% των συνταξιούχων έχει πρόβλημα ακοής — Π: πρόβλημα ακοής

$P(\Sigma)=\frac{16}{100}, P(\Pi)=\frac{18}{100}, P(\Sigma\cap\Pi)=\frac{16}{100}\cdot\frac{65}{100}=\frac{104}{1000}$

(i) $P(A)=P(\Sigma'\cap\Pi)=P(\Pi)-P(\Sigma\cap\Pi)=\frac{8}{100}-\frac{104}{1000}\Rightarrow P(A)=\frac{76}{1000}=\mathbf{0{,}076}$

$P(B)=P(\Sigma\cap\Pi')=P(\Sigma)-P(\Sigma\cap\Pi)=\frac{16}{100}-\frac{104}{1000}\Rightarrow P(B)=\frac{56}{1000}=\mathbf{0{,}056}$

$$P(\Gamma)=P(\Sigma/\Pi')=\frac{P(\Sigma\cap\Pi')}{P(\Pi')}=\frac{\frac{56}{1000}}{1-\frac{18}{100}}=\frac{56/1000}{82/100}\Rightarrow P(\Gamma)=\frac{56}{820}=\mathbf{0{,}068}$$

$$P(\Delta)=P(\Sigma\cup\Pi)=P(\Sigma)+P(\Pi)-P(\Sigma\cap\Pi)=\frac{16}{100}+\frac{18}{100}-\frac{104}{1000}\Rightarrow$$

$P(\Delta)$ =**0,236**

(ii) Έστω τα δύο άτομα (Κ) και (Μ)

	Κ	Μ	
(α)	Σ Π	Σ Π	1 περίπτωση $\Rightarrow P(\alpha)=P(\Sigma\cap\Pi)P(\Sigma\cap\Pi)=\frac{104}{1000}\cdot\frac{104}{1000}$
(β)	Σ Π	Σ Π′	2 περιπτώσεις $\Rightarrow P(\beta)=2\cdot P(\Sigma\cap\Pi)\cdot P(\Sigma\cap\Pi')=2\cdot\frac{104}{1000}\cdot\frac{56}{1000}$
(γ)	Σ Π	Σ′ Π	2 περιπτώσεις $\Rightarrow P(\gamma)=2\cdot P(\Sigma\cap\Pi)\cdot P(\Sigma'\cap\Pi)=2\cdot\frac{104}{1000}\cdot\frac{76}{1000}$
(δ)	Σ Π	Σ' Π′	2 περιπτώσεις $\Rightarrow P(\delta)=2P(\Sigma\cap\Pi)P(\Sigma'\cap\Pi')=2P(\Sigma\cap\Pi)\left[1-P(\Sigma\cup\Pi)'\right]$

$$=2\cdot\frac{104}{1000}\left(1-\frac{236}{1000}\right)=2\cdot\frac{104}{1000}\cdot\frac{764}{1000}$$

(ε)	Σ′ Π	Σ Π′	2 περιπτώσεις $\Rightarrow P(\varepsilon)=2P(\Sigma'\cap\Pi)P(\Sigma\cap\Pi')=2\frac{76}{1000}\frac{56}{1000}$

Προσθέτω κατά μέλη

$$\Rightarrow\quad P(H)=\frac{1}{1000^2}(10816+11648+15808+158912+8512)=\frac{205696}{1000^2}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{P(H)\approx 0{,}206}$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 8

Επιμέλεια
Μαρία Φαλά

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \text{συν}x}{x^2}$.

2. Για τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου P(x,y) πάνω σε μια καμπύλη (κ) ισχύει η σχέση $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{y}$ και η καμπύλη περνά από το σημείο (-2,4). Να βρείτε την εξίσωση της (κ) και να την κατονομάσετε.

3. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$.
   (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής και των ακρότατων της.
   (β) Αν ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι αντίστοιχα οι τετμημένες του σημείου καμπής, του τοπικού ελάχιστου και του τοπικού μέγιστου, να υπολογίσετε το $\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)dx - \int_{\rho_2}^{\rho_3} f(x)dx$

4. Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ είναι ανά δύο διαφορετικοί μεταξύ τους να δείξετε ότι:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{vmatrix} \neq 0$$

5. Σε ένα διαγωνισμό υπάρχουν τρεις ασκήσεις με διαφορετική δυσκολία. Η πιθανότητα να απαντηθεί ορθά, από ένα άτομο Α, η i άσκηση είναι $\dfrac{4-i}{4}$, i=1,2,3 και το ενδεχόμενο να απαντηθεί ορθά μια από τις ασκήσεις είναι ανεξάρτητο από το αν απαντηθούν ορθά ή όχι οι άλλες δύο ασκήσεις. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
   Β: το άτομο Α να απαντήσει ορθά και τις τρεις ασκήσεις.
   Γ: το άτομο Α να απαντήσει ορθά ακριβώς 2 από τις 3 ασκήσεις.

6. Δίνονται τα ολοκληρώματα: $A = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\text{σφ}x} \frac{dt}{t(1+t^2)}$ και $B = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\text{εφ}x} \frac{tdt}{1+t^2}$.
   (α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $t = \dfrac{1}{z}$, να δείξετε ότι: $A = \displaystyle\int_{\text{εφ}x}^{e} \frac{zdz}{1+z^2}$.
   (β) Με τη βοήθεια του πιο πάνω αποτελέσματος ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το άθροισμα Α+Β.

7. Δίνεται το επίπεδο Π με εξίσωση $2x + y - 2z = 8$ και τα σημεία Α(2,-1,4), Β(3,2,0) και Γ(2,6,1). Μια ευθεία (ε) περνά από το σημείο Α και είναι κάθετη στο Π.
   (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) σε παραμετρική μορφή, καθώς επίσης και τις συντεταγμένες του σημείου Δ, που αυτή τέμνει το επίπεδο Π.
   (β) Να δείξετε ότι η ευθεία που περνά από τα σημεία Β και Γ ανήκει στο Π.

8. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της πιο κάτω κατανομής συχνοτήτων:

χ	1	2	3	4	...	ν-1	ν
f	m	m	m	M	...	m	m

Όπου ν,m φυσικοί αριθμοί με ν≥2.

9. Δίνεται η καμπύλη (C), με εξίσωση $y = f(x) = \dfrac{10-2x}{x-2}$.
   (α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της (C).
   (β) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη (C) αντιστοιχεί σε φθίνουσα συνάρτηση σε όλο το πεδίο ορισμού της.
   (γ) Αφού βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της (C) με τους άξονες συντεταγμένων, να κάμετε την γραφική της παράσταση και
   (δ) Να βρείτε το εμβαδό, Ε, του χωρίου που ορίζεται από τη (C), τον άξονα των x και τη ευθεία $x = \dfrac{5}{2}$. Να βάλετε την απάντηση στην μορφή $E=\ln a^c - b$ όπου a,b,c φυσικοί αριθμοί.

10. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα είναι εγγεγραμμένη σε σφαίρα ακτίνας R, έτσι ώστε όλες οι κορυφές της πυραμίδας να βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Το ύψος της πυραμίδας είναι h.
   (α) Να δείξετε ότι οι τέσσερις κορυφές της βάσης της πυραμίδας βρίσκονται πάνω σε κύκλο ακτίνας r, όπου $r^2=2Rh-h^2$.
   (β) Αν η ακτίνα R είναι σταθερή το δε ύψος h μεταβάλλεται, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του όγκου V της πυραμίδας.

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y = z^{-\frac{1}{2}}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης
   $$\frac{dy}{dx} = y - xe^{-2x}y^3.$$
   Για τη λύση y που έχετε προσδιορίσει να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

2. (α) Να βρείτε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $g(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}$ σε σειρά Maclaurin, μέχρι τον όρο x^4, και να προσδιορίσετε τις τιμές του για τις οποίες αυτό το ανάπτυγμα έχει έννοια.

(β) Αν x>0 και αν οι γωνίες που εμπλέκονται στην πιο κάτω έκφραση είναι όλες οξείες, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\text{συν}\left[\text{Τοξεφ}\left\{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-\text{τοξεφ}x\right)\right\}\right]=\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(γ) Θεωρώντας το ανάπτυγμα που βρήκατε στο (α), να υπολογίσετε με προσέγγιση χιλιοστού την τιμή του

$$\text{συν}\left[\text{Τοξεφ}\left\{\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-\text{τοξεφ}(0{,}1)\right)\right\}\right]$$

3. Δίνονται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, σταθερού μήκους 7 μονάδων, και το σημείο Ρ πάνω σ΄ αυτό έτσι ώστε $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{4}$. Το σημείο Α κινείται πάνω στον άξονα των x και το σημείο Β πάνω στον άξονα των y, σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xOy.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ρ.

(β) Να προσδιορίσετε το είδος της καμπύλης αυτής, και

(γ) Δοθέντος ότι η καμπύλη αυτή κάτω από το γραμμικό μετασχηματισμό που περιγράφεται από τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, a⟩0, b⟩0, μετασχηματίζεται στον κύκλο $x^2+y^2=1$, να βρείτε τις τιμές των a, b.

4. (α) Δίνονται η καμπύλη $y=e^{-x}$ και το σημείο $P\left(t,e^{-t}\right)$ πάνω σ΄ αυτή. Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου της καμπύλης στο σημείο Ρ. Αν η κάθετος στο Ρ τέμνει τον άξονα των χ στο σημείο Κ να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει κέντρο Κ και εφάπτεται της καμπύλης $y=e^{-x}$ στο σημείο Ρ.

(β) Αν τώρα $P_\nu\left(\nu,e^{-\nu}\right)$, ν=1,2,3,... μια ακολουθία σημείων πάνω στην καμπύλη $y=e^{-x}$, K_ν τα αντίστοιχα κέντρα των κύκλων, που προκύπτουν όπως στο (α), και E_ν τα αντίστοιχα εμβαδά των κυκλικών δίσκων που ορίζονται, να βρείτε την τιμή της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty}E_\nu$.

Επιπλέον να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $\left(K_\nu,K_\nu P_\nu\right)$ ν=1,2,3,... δεν τέμνονται ανά δύο.

5. Δίνονται τα πιο κάτω επίπεδα:

(Π_1): $\vec{r}\cdot\left(\vec{j}+\vec{k}\right)=0$

(Π_2): $\vec{r}\cdot\left(\vec{j}+\vec{k}\right)=10\sqrt{2}$

(Π_3): $\vec{r}\cdot\vec{i}=0$

(Π_4): $\vec{r}\cdot\left(\vec{j}-\vec{k}\right)=0$

(Π_5): $\vec{r}\cdot\left(4\sqrt{2}\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}\right)=12\sqrt{2}$

(α) Να δείξετε ότι τα επίπεδα αυτά ορίζουν τις έδρες ενός ορθού τριγωνικού πρίσματος.

(β) Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας αυτού του πρίσματος.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}\alpha\pi\rho o\delta.$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2x}=\frac{0}{0}\alpha\pi\rho\sigma.$$

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}\Rightarrow \mathbf{L=\frac{1}{2}}$$

2. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{y}\Rightarrow\int ydy=-4\int dx\Rightarrow\dfrac{y^2}{2}=-4x+c\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (-2,4)\in(K)\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{4^2}{2}=-4(-2)+c\Rightarrow c=0$

$\Rightarrow$ **(K)** $\mathbf{y^2=-8x}$ παραβολή

3.(α) $y=f(x)=-x^3+3x^2\Rightarrow y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)\Rightarrow$ ρίζες:x=0, x=2

$y''=-6x+6\Rightarrow$ ρίζα: x=1

$x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow O(0,0),\ \ y''(0)=6>0\Rightarrow$ **O(0,0) ελάχιστο**

$x=2\Rightarrow y=-8+3\cdot 4=4,\ y''(2)=-12+6=-6<0\Rightarrow$ **A(2,4) μέγιστο**

$x=1\Rightarrow y=-1+3=2\Rightarrow$ **Σ.Κ. (1,2)** $\quad$ **[ψ΄(1)≠0]**

(β) $I=\int_{\rho_1}^{\rho_2}f(x)dx-\int_{\rho_2}^{\rho_3}f(x)dx=\int_1^0\left(-x^3+3x^2\right)dx-\int_0^2\left(-x^3+3x^2\right)dx$

$$I=\left(-\frac{x^4}{4}+x^3\right)_1^0-\left(-\frac{x^4}{4}+x^3\right)_0^2=\left[0-\left(-\frac{1}{4}+1\right)\right]-\left[-\frac{16}{4}+8-0\right]=\frac{1}{4}-1+4-8$$

$$\Rightarrow \mathbf{I=-\frac{19}{4}}$$

4. $$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\ \alpha&\beta&\gamma&\delta\\ \alpha^2&\beta^2&\gamma^2&\delta^2\\ \alpha^3&\beta^3&\gamma^3&\delta^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\ \alpha&\beta-\alpha&\gamma-\alpha&\delta-\alpha\\ \alpha^2&\beta^2-\alpha^2&\gamma^2-\alpha^2&\delta^2-\alpha^2\\ \alpha^3&\beta^3-\alpha^3&\gamma^3-\alpha^3&\delta^3-\alpha^3\end{vmatrix}$$

$$\Delta=1\cdot\begin{vmatrix}\beta-\alpha&\gamma-\alpha&\delta-\alpha\\ (\beta-\alpha)(\beta+\alpha)&(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha)&(\delta-\alpha)(\delta+\alpha)\\ (\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)&(\gamma-\alpha)(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)&(\delta-\alpha)(\delta^2+\delta\alpha+\alpha^2)\end{vmatrix}-0+0-0$$

$$\Delta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\begin{vmatrix}1&1&1\\ \beta+\alpha&\gamma+\alpha&\delta+\alpha\\ \beta^2+\beta\alpha+\alpha^2&\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2&\delta^2+\delta\alpha+\alpha^2\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \beta+\alpha & \gamma-\beta & \delta-\beta\\ \beta^2+\alpha\beta+\alpha^2 & \gamma^2+\alpha\gamma-\beta^2-\alpha\beta & \delta^2+\alpha\delta-\beta^2-\alpha\beta\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\begin{vmatrix}\gamma-\beta & \delta-\beta\\ (\gamma+\beta)(\gamma-\beta)+\alpha(\gamma-\beta) & (\delta+\beta)(\delta-\beta)+\alpha(\delta-\beta)\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\begin{vmatrix}\gamma-\beta & \delta-\beta\\ (\gamma-\beta)(\alpha+\beta+\gamma) & (\delta-\beta)(\alpha+\beta+\delta)\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\begin{vmatrix}1 & 1\\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\delta\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)((\alpha+\beta+\delta-\alpha-\beta-\gamma)$$

$$\Delta=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)\Rightarrow\ \Delta\neq 0$$

5. $P(A)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{4-1}{4}\cdot\frac{4-2}{4}\cdot\frac{4-3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\ \mathbf{P(A)=\frac{3}{32}}$

$$P(B)=P\left[(A_1\cap A_2\cap A_3')\cup(A_1\cap A_2'\cap A_3)\cup(A_1'\cap A_2\cap A_3)\right]$$

$$P(B)=P(A_1)P(A_2)P(A_3')+P(A_1)P(A_2')P(A_3)+P(A_1')P(A_2)P(A_3)$$

$$P(B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow\ \mathbf{P(B)=\frac{13}{32}}$$

6. $A=\int_{\frac{1}{e}}^{\sigma\phi x}\frac{dt}{t(1+t^2)}\quad B=\int_{\frac{1}{e}}^{\varepsilon\varphi x}\frac{tdt}{1+t^2}$

$$\left.\begin{array}{l} t=\frac{1}{z}\Rightarrow dt=-\frac{1}{z^2}dz\\ \\ t=\frac{1}{e}\Rightarrow z=e\\ t=\sigma\phi x\Rightarrow z=\varepsilon\phi x\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\Rightarrow A=\int_{e}^{\varepsilon\phi x}-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}dz=\int_{e}^{\varepsilon\phi x}-\frac{z}{z^2+1}dz\\ \\ \Rightarrow \mathbf{A=\int_{\varepsilon\phi x}^{e}\frac{zdz}{1+z^2}}\end{array}$$

$$A+B=\int_{\varepsilon\phi\chi}^{e}\frac{zdz}{z^2+1}+\int_{\frac{1}{e}}^{\varepsilon\phi x}\frac{tdt}{1+t^2}=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{tdt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{d\left(1+t^2\right)}{(1+t^2)}=\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$A+B=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+e^2\right)-\ln\left(1+\frac{1}{e^2}\right)\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^2}{1+\frac{1}{e^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2\left(1+e^2\right)}{1+e^2}=\frac{1}{2}\ln e^2\quad\Rightarrow\quad \mathbf{A+B=1}$$

7. (Π) 2x+y-2z=8 $\quad$ A(2,-1,4), B(3,2,0), Γ(2,6,1)

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon)\perp(\Pi)\\ A\in(\varepsilon)\end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon)\ \vec{r}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}+\lambda\left(2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right) \Rightarrow (\varepsilon)\ \mathbf{x=2\lambda+2,\ y=\lambda-1,\ z=-2\lambda+4}$$

$$\Delta\in(\varepsilon),(\Pi) \Rightarrow 2(2\lambda+2)+(\lambda-1)-2(-2\lambda+4)=8 \Rightarrow 9\lambda=8-4-1+8 \Rightarrow \lambda=\frac{13}{9} \Rightarrow \Delta\left(\mathbf{\frac{44}{9},\frac{4}{9},\frac{10}{9}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}B(3,2,0)\in(\Pi)\\ \Gamma(2,6,1)\in(\Pi)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{(B\Gamma)\in(\Pi)}$$

8. $$\bar{x}=\frac{1\cdot m+2\cdot m+\ldots+\nu\cdot m}{m+m+\ldots+m}=\frac{m(1+2+\ldots+\nu)}{\nu\cdot m}=\frac{\nu(\nu+1)}{2\nu}\Rightarrow \mathbf{\bar{x}=\frac{\nu+1}{2}}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu} f_i\cdot x_1^2}{\sum_{i=1}^{\nu} f_i}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{m(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)}{m\cdot\nu}-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6\nu}-\frac{(\nu+1)^2}{4}}=\sqrt{\frac{(\nu+1)(4\nu+2-3\nu-3)}{12}}=\sqrt{\frac{(\nu+1)(\nu-1)}{12}}$$

$$\Rightarrow \sigma=\sqrt{\mathbf{\frac{\nu^2-1}{12}}}$$

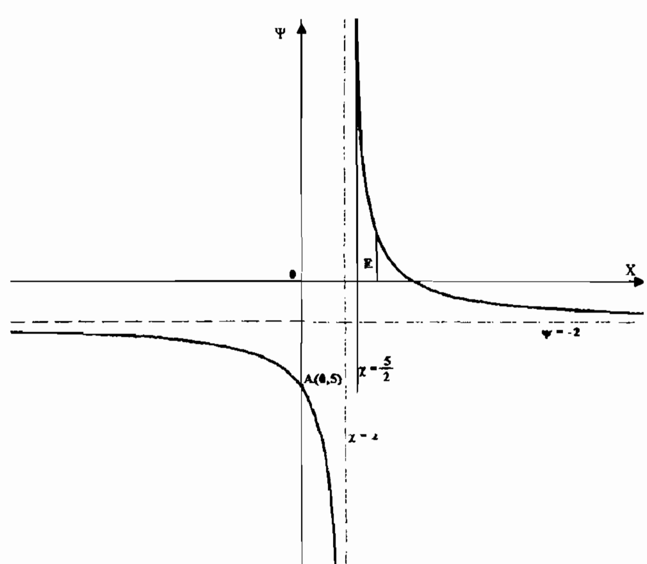
9. (C) $y=f(x)=\dfrac{10-2x}{x-2}\Rightarrow$ K.A. $x-2=0\Rightarrow$ **K.A. x = 2** , O.A. $y=\dfrac{-2}{1}\Rightarrow$ **O.A. ψ=-2**

$$y'=\frac{-2(x-2)-(10-2x)\cdot 1}{(x-2)\cdot 2}=\frac{-2x+4-10+2x}{(x-2)^2}=-\frac{6}{(x-2)^2}\langle 0\ \forall x\in R-\{2\}$$

$\Rightarrow$ y φθίνουσα $\forall x\in R-\{2\}$

$x=0\Rightarrow y=-5\Rightarrow A(0,-5)$

$y=0\Rightarrow x=5 \quad \Rightarrow B(5,0)$



$$E=\int_{\frac{5}{2}}^{5} y\,dx=\int_{\frac{5}{2}}^{5}\frac{10-2x}{x-2}dx=-2\int_{\frac{5}{2}}^{5}\frac{x-5}{x-2}dx$$

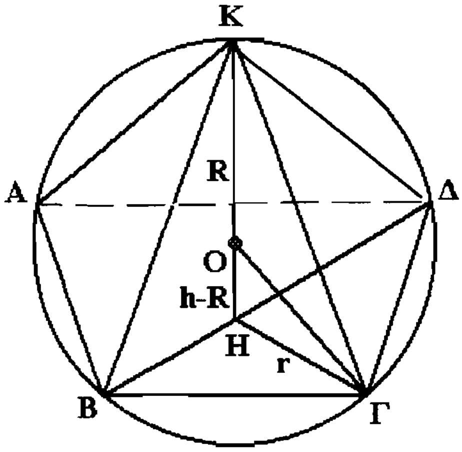
$$=-2\int_{\frac{5}{2}}^{5}\frac{x-2-3}{x-2}dx$$

$$E=-2x\Big|_{\frac{5}{2}}^{5}+6\ln|x-2|\Big|_{\frac{5}{2}}^{5}$$

$$E=-2\left(5-\frac{5}{2}\right)+6\ln\frac{3}{1/2} \quad \Rightarrow$$

$$E=-10+6+6\ln 6 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E=\ln 6^6-5}$$

10.



(α) $r^2=R^2-(h-R)^2=R^2-h^2+2hR-R^2 \Rightarrow \mathbf{r^2=2hR-h^2}$

(ΗΑ)=(ΗΒ)=(ΗΓ)=(ΗΔ)=r

ΑΒΓΔ τετράγωνο

(β) $(2r)^2=2(B\Gamma)^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2=2r^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2=2h(2R-h)$

$$V=\frac{1}{3}(AB\Gamma\Delta)\cdot h=\frac{1}{3}\cdot[2h(2R-h)]\cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{V(h)=\frac{2}{3}\left(2Rh^2-h^3\right)}$$

$$\Rightarrow V'(h)=\frac{2}{3}\left(4Rh-3h^2\right)=\frac{2}{3}h(4R-3h)\Rightarrow \text{ ρίζες: } h=0 \text{ αδύνατο, } h=\frac{4}{3}R$$

h	0	$\frac{4}{3}R$	2R
V'(h)	+	0	-
V(h)	↗	∩	↘

$$V_{max}=V\left(\frac{4}{3}R\right)$$

$$V_{max}=\frac{2}{3}\left[2R\left(\frac{4}{3}R\right)^2-\left(\frac{4}{3}R\right)^3\right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{V_{max}=\frac{64}{81}R^3} \text{ κ.μ.}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. $\frac{dy}{dx}=y-xe^{-2x}\cdot y^3, \quad y=z^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{dz}{dx}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\cdot z^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{dz}{dx}=z^{-\frac{1}{2}}-x\cdot e^{-2x}\cdot z^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dz}{dx}+2\cdot z=2x\cdot e^{-2x}$$

$$\Rightarrow I(x)=e^{\int 2dx}=e^{2x} \Rightarrow e^{2x}\cdot\frac{dz}{dx}+2e^{2x}\cdot z=2x \Rightarrow e^{2x}\cdot z=\int 2xdx=x^2+c$$

$$\Rightarrow e^{2x}\cdot\frac{1}{y^2}=x^2+k \Rightarrow \mathbf{y^2=\frac{e^{2x}}{x^2+k}}$$

$$L=\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{e^{2x}}{x^2+k}}=\sqrt{\frac{e^{-\infty}}{-\infty+k}}=\sqrt{\frac{0}{\infty}}=0\Rightarrow \mathbf{L=0}$$

2. $g(x)=\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$g(x)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^4}{2}\right]\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{x^4}{2\cdot 4}\right]$$

$$g(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)\left(1-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^4}{32}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{3x^4}{32}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{8}\right)$$

$$\mathbf{g(x)} \approx \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{5x^4}}{\mathbf{32}}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} \Delta.\Sigma.\ \left|x^2\right|<1 \\ \left|\dfrac{x^2}{2}\right|<1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta.\Sigma.\ |x|<1$$

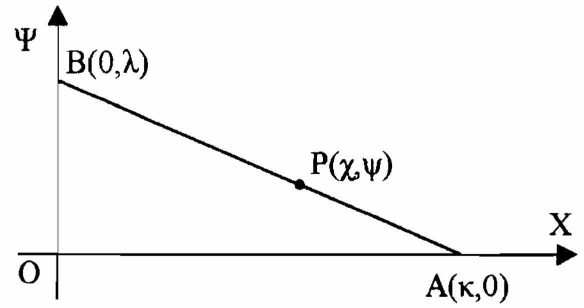
$$A = \sigma\upsilon\nu\left[\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\tau o\xi\varepsilon\varphi x\right)\right)\right] = \sigma\upsilon\nu\left[\tau o\xi\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu\tau o\xi\varepsilon\varphi x)\right]$$

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x=\alpha \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha = x \ \text{ κ κασυνα} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$A=\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{1+x^2}}} \Rightarrow \mathbf{A}=\left(\frac{\mathbf{1+x^2}}{\mathbf{2+x^2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x>0$$

$$A(0,1) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(1+\frac{(0.1)^2}{4}-\frac{5\cdot(0.1)^4}{32}\right) \Rightarrow \mathbf{A(0,1) \approx 0,709}$$

3.



$$\frac{AP}{PB}=\frac{3}{4}$$

(AB) =7 μονάδες

$\Rightarrow$ -7 < κ, λ<7

Από το σχήμα παίρνουμε $\kappa=\frac{7}{4}x,\ \lambda=\frac{7}{3}y$ και $(AB)^2=\kappa^2+\lambda^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{4}x\right)^2+\left(\frac{7}{3}y\right)^2=7^2 \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{4^2}}+\frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{3^2}}=\mathbf{1}, \quad \text{έλλειψη γ.τ. P}$$

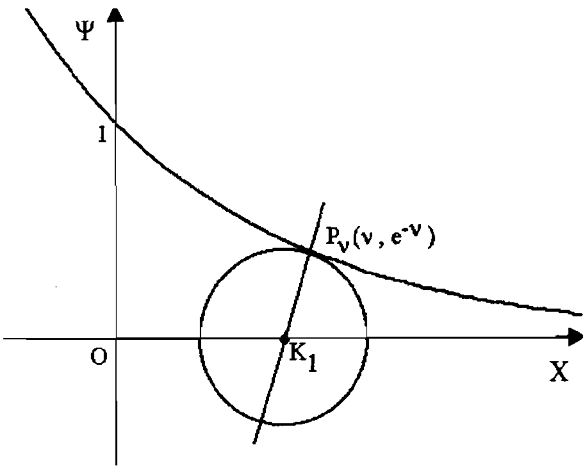
$$(E)\ \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1 \xrightarrow{A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}} (K)\ x^2+y^2=1$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\ by\end{pmatrix} \Rightarrow x=\frac{x_1}{\alpha},\ y=\frac{y_1}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\dfrac{x_1}{\alpha}\right)^2}{4^2}+\frac{\left(\dfrac{y_1}{b}\right)^2}{3^2}=1 \Rightarrow (E')\ \frac{{x_1}^2}{16\alpha^2}+\frac{{y_1}^2}{9b^2}=1,\ (E')\equiv(K)$$

$$\Rightarrow 16\alpha^2=1\Rightarrow \ \boldsymbol{\alpha=\frac{1}{4}} \qquad (\alpha>0) \quad , \qquad 9b^2=1\Rightarrow \ \boldsymbol{b=\frac{1}{3}} \qquad (b>0)$$

4.



$$y=e^{-x}\Rightarrow y'=-e^{-x}\Rightarrow \lambda_\phi=-e^{-t}\Rightarrow \lambda_\kappa=e^t$$

$$(K)\ \ y-e^{-t}=e^t(x-t)$$

$$\mathbf{(K)}\ \ y=e^t x+e^{-t}-te^t$$

$$y=0\Rightarrow K\left(t-e^{-2t},0\right)$$

$$R^2=(KP)^2=\left(t-e^{-2t}-t\right)^2+\left(e^{-t}\right)^2=e^{-4t}+e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \mathbf{(K)}\ \left(\mathbf{x-t+e^{-2t}}\right)^2+\mathbf{y^2=e^{-4t}+e^{-2t}}$$

$$E=\sum_{V=1}^{\infty}E_V=\sum_{V=1}^{\infty}\pi R_V{}^2=\pi\sum_{V=1}^{\infty}\left(e^{-4v}+e^{-2v}\right)=\pi\left[\frac{e^{-4}}{1-e^{-4}}+\frac{e^{-2}}{1-e^{-2}}\right]$$

$$E=\pi\left(\frac{1}{e^4-1}+\frac{1}{e^2-1}\right)=\pi\frac{1+e^2+1}{e^4-1}\Rightarrow\ \mathbf{E=\frac{e^2+2}{e^4-1}}\pi$$

η διάμετρος $(K_{v-1}K_v)^2=\left[\left(v-e^{-2v}\right)-\left(v-1-e^{-2(v-1)}\right)\right]=\left(e^2.e^{-2v}-e^{-2v}+1\right)$

$$R_v+R_{v-1}=\sqrt{e^{-4v}+e^{-2v}}+\sqrt{e^{-4(v-1)}+e^{-2(v-1)}}=e^{-v}\sqrt{e^{-2v}+1}+e^{-v}\sqrt{e^{-2v+4}+e^2}$$

Με τη βοήθεια της σχέσης $\sqrt{x^2+1}\langle x+1$ αποδεικνύεται ότι $R_v+R_{v-1}<K_vK_{v-1}$,
Οπότε οι κύκλοι δεν τέμνονται. (Η απόδειξη αφήνεται στους αναγνώστες)

5. $(\Pi_1)\ \ \vec r\left(\vec j+\vec k\right)=0\Rightarrow \vec n_1=\vec j+\vec k$
$(\Pi_2)\ \ \vec r\left(\vec j+\vec k\right)=10\sqrt2\Rightarrow \vec n_2=\vec j+\vec k$ $\Big\}\Rightarrow(\Pi_1)\ //\ (\Pi_2)$

$(\Pi_3)\ \ \vec r.\vec i=0\Rightarrow \vec n_3=\vec i\Rightarrow \vec n_3.\vec n_1=0\Rightarrow(\Pi_3)\perp(\Pi_1)$

$(\Pi_4)\ \ \vec r\left(\vec j-\vec k\right)=0\Rightarrow \vec n_4=\vec j-\vec k\Rightarrow \vec n_4.\vec n_1=0\Rightarrow(\Pi_4)\perp(\Pi_1)$

$(\Pi_5)\ \ \vec r\left(4\sqrt2\vec i+3\vec j-3\vec k\right)=12\sqrt2\Rightarrow \vec n_5=4\sqrt2\vec i+3\vec j-3\vec k\Rightarrow \vec n_5.\vec n_1=0\Rightarrow(\Pi_5)\perp(\Pi_1)$

(Π_1): y+z=0, (Π_2): y+z=$10\sqrt2$, (Π_3): x=0, (Π_4): y-z=0
(Π_5): $4\sqrt2$ x+3y-3z=$12\sqrt2$

$(\Pi_1)\cap(\Pi_3)\cap(\Pi_4)\ \ x=0, y+z=0, y-z=0\Rightarrow O(0,0,0)$

$(\Pi_1)\cap(\Pi_3)\cap(\Pi_5)\ \ x=0,\ \ y+z=0,\ \ 4\sqrt2x+3y-3z=0\Rightarrow A\left(0,2\sqrt2,-2\sqrt2\right)$

$(\Pi_1)\cap(\Pi_4)\cap(\Pi_5)\ \ y+z=0,\ y-z=0,\ 4\sqrt2x+3y-3z=0\Rightarrow B(3,0,0)$

Από τα πιο πάνω φαίνεται καθαρά ότι το στερεό που σχηματίζεται είναι ορθό τριγωνικό πρίσμα με ύψος h=απόσταση των (Π_1), (Π_2)

$$h = \frac{\left|0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 10\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+1}} = 10$$ και Εμβαδό βάσης=(ΟΑΒ)

$$\left.\begin{aligned} \triangleleft OAB:\ (OA)^2 &= 0^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 16 \\ (OB)^2 &= 3^2 + 0^2 + 0^2 = 9 \\ (AB)^2 &= 3^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 \Rightarrow \triangleleft OAB \text{ ορθογώνιο}$$

$$\Rightarrow E_\beta = \frac{1}{2} \cdot (OA)(OB) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \Rightarrow E_{o\lambda} = 2 \cdot (OAB) + h(OA + OB + O\Gamma)$$

$$\Rightarrow E_{o\lambda} = 2 \cdot 6 + 10(4 + 3 + 5) \Rightarrow \mathbf{E_{o\lambda} = 132\text{τ.μ.}}$$

$$V_{\pi\rho} = (OAB) \cdot h = 6 \cdot 10 \Rightarrow V_{\pi\rho} = 60\text{κ.μ.}$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Τ Ε Ι

Επιμέλεια: Μαρία Φαλά

Από τα 6 ζητήματα να λύσετε μόνο τα 4.

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

(α) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 2x + 5\sigma\upsilon\nu\, x - 2 = 0$

(Μονάδες 8)

(β) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\eta\mu(3x+10^\circ)=\sigma\upsilon\nu(2x-30^\circ)$

(Μονάδες 8)

(γ) (i) Να δείξετε ότι $\eta\mu 2x-2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1=(\sigma\upsilon\nu x-1)(2\eta\mu x+1)$

(ii) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu 2x-2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1=0$ που βρίσκονται στο διάστημα $0^\circ \le x < 360^0$.

(Μονάδες 9)

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

(α) (i) Να δείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu x + \eta\mu 3x + \eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 5x} = \varepsilon\phi 3x$.

(ii)Να βρείτε στο διάστημα $0^\circ \le x \le 180^\circ$ τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x + \eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 5x} = \sqrt{3}$$

(Μονάδες 8)

(β) Να δείξετε ότι $\dfrac{\varepsilon\phi\alpha\left(1-\varepsilon\phi^2\alpha\right)}{\left(1+\varepsilon\phi^2\alpha\right)^2} = \dfrac{\eta\mu 4\alpha}{4}$

(Μονάδες 8)

(γ) Αν $\alpha+\beta=45^\circ$ και $\varepsilon\phi\alpha = \dfrac{\nu}{\nu+1}$ να δείξετε ότι

$\varepsilon\phi\beta = \dfrac{1}{2\nu+1}$ και $\varepsilon\phi(\alpha-\beta) = \dfrac{2\nu^2-1}{2\nu^2+4\nu+1}$.

Ακολούθως αν $\varepsilon\phi(\alpha-\beta) = -\dfrac{7}{23}$ να βρείτε τις τιμές του ν.

(Μονάδες 9)

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

(α) Η βάση ενός ορθού πρίσματος είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου το μήκος είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 5cm και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του 126cm^2 να υπολογίσετε:

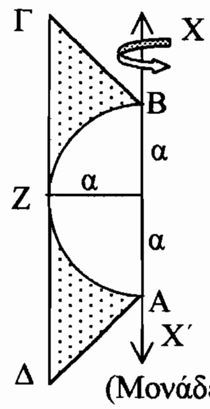
(i) τις διαστάσεις της βάσης του πρίσματος

(ii) τον όγκο του πρίσματος

(iii) το μήκος της διαγωνίου του πρίσματος.

(Μονάδες 8)

(β) Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ=2α cm και ΓΔ=4α cm. Με διάμετρο την πλευρά ΑΒ γράφουμε ημικύκλιο που εφάπτεται της πλευράς ΓΔ. Το μικτόγραμμο σχήμα ΑΖΒΓΔΑ (δηλαδή το γραμμοσκιασμένο) στρέφεται πλήρως γύρω από την πλευρά ΑΒ. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.



(Μονάδες 8)

(γ) Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι $36\sqrt{2}\ cm^2$ και η παράπλευρη έδρα σχηματίζει με τη βάση γωνία 45^o. Να βρείτε:

(i) το μήκος της πλευράς της βάσης της πυραμίδας
(ii) το ύψος της πυραμίδας
(iii) τον όγκο της πυραμίδας.

(Μονάδες 9)

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4ο</u>

(α) Μεταξύ της ακτίνας R και του ύψους υ ενός κυλίνδρου ισχύει η σχέση $\frac{1}{R}+\frac{1}{\upsilon}=3$.

Αν V είναι ο όγκος του κυλίνδρου και $E_{o\lambda}$ το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας, να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{E_{o\lambda}}{V}=6$

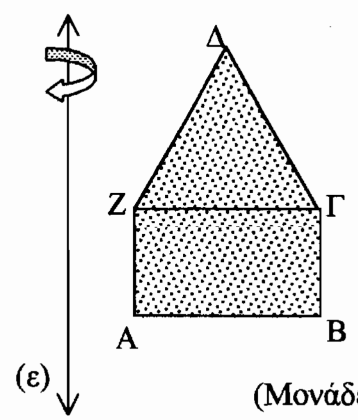
(Μονάδες 8)

(β) Κανονικής κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας, η πλευρά της μιας βάσης είναι διπλάσια από την πλευρά της άλλης βάσης, το παράπλευρο ύψος είναι 10 cm και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς της είναι 1440 cm^2. Να βρείτε:

(i) το μήκος της πλευράς της κάθε βάσης
(ii) το ύψος της κόλουρης πυραμίδας
(iii) τον όγκο της κόλουρης πυραμίδας.

(Μονάδες 8)

(γ) Το γραμμοσκασμένο χωρίο (τ) του διπλανού σχήματος αποτελείται από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΖ με διαστάσεις ΑΒ=2α cm και ΒΓ=α cm και από το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΖΓ. Η ευθεία (ε) είναι παράλληλη της ΑΖ και απέχει από αυτή α cm.
Το χωρίο (τ) στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



(Μονάδες 9)

ΖΗΤΗΜΑ 5ο

(α)Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int 20\eta\mu 7x\sigma\upsilon\nu 3x dx$

(Μονάδες 8)

(β) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y = \dfrac{2x+3}{x^2+4}$

(i) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της (ελάχιστα, μέγιστα).

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της καμπύλης στο σημείο της που έχει τετμημένη x=0.

(Μονάδες 8)

(γ) Η καμπύλη $y = x^2 - 2x + \alpha$ περνά από το σημείο Α(1,-9). Να βρείτε:

(i) την τιμή του α

(ii) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των x.

(Μονάδες 9)

ΖΗΤΗΜΑ 6ο

(α) Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx$. (Μονάδες 8)

(β) Αν $y = x^2\eta\mu x$ να δείξετε ότι ισχύει:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = -x^2y$$

(Μονάδες 8)

(γ) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y = x^2 - 4x + 3$.

(i) Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, το τοπικό της ακρότατο και να κάμετε την γραφική της παράσταση.

(ii) Αν Α είναι εκείνο από τα σημεία τομής της καμπύλης με τον άξονα των x το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή Ο των αξόνων, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο Α.

(iii) Αν η εφαπτόμενη και η κάθετη της καμπύλης στο σημείο Α τέμνουν τον άξονα των y στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΝ.

(Μονάδες 9)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

(α) συν2x+5συνx-2=0 $\Rightarrow$ $2\sigma\upsilon\nu^2 x$-1+5συνx-2=0 $\Rightarrow$ $2\sigma\upsilon\nu^2 x$+5συνx-3=0

$\Rightarrow$ (2συνx-1)(συνx+3)=0 $\Rightarrow$ $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu 60^\circ \Rightarrow$ $\mathbf{x = 360^\circ k \pm 60^\circ,\ k \in Z}$

συνx=-3 < -1 απορ.

(β) ημ(3x+10°)=συν(2x-30°) $\Rightarrow$ ημ(3x+10°)=ημ(90°-2x+30°)=ημ(120°-2x)

$\Rightarrow$ (i) 3x+10°=360°k+(120°-2x) $\Rightarrow$ 5x=360°k+110° $\Rightarrow$ $\mathbf{x=72^\circ k+22^\circ,\ k \in Z}$

(ii) 3x+10°=360°k+180°-(120°-2x) $\Rightarrow$ x=360°k+180°-120°-10°

$\Rightarrow$ **$x=360^o k+50^o, \quad k \in Z$**

(γ) (i) $\eta\mu 2x-2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1=2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x-1)+(\sigma\upsilon\nu x-1)$
$=(2\eta\mu x+1)(\sigma\upsilon\nu x-1)$

(ii) $\eta\mu 2x-2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1=0 \Rightarrow (2\eta\mu x+1)(\sigma\upsilon\nu x-1)=0 \Rightarrow \eta\mu x=-\frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu x=1$

$$\bullet\ \eta\mu x-\frac{1}{2}=\eta\mu(-30^o) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=360^o\kappa-30^o \\ x=360^o\kappa+180^o+30^o \\ 0^o \le x \le 360^o \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x=330^o, \quad x=210^o}$$

$$\bullet\ \sigma\upsilon\nu x=1=\sigma\upsilon\nu 0^o \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=360^o\kappa \pm 10^o \\ 0^o \le x < 360^o \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x=0^o}$$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 2ο</u>

$$(\alpha)\ (i)\ A=\frac{\eta\mu x+\eta\mu 3x+\eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu 5x}=\frac{2\eta\mu\frac{x+5x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x-5x}{2}+\eta\mu 3x}{2\sigma\upsilon\nu\frac{x+5x}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x-5x}{2}+\sigma\upsilon\nu 3x}$$

$$A=\frac{2\eta\mu 3x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x+\eta\mu 3x}{2\sigma\upsilon\nu 3x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu 3x}=\frac{\eta\mu 3x(2\sigma\upsilon\nu 2x+1)}{\sigma\upsilon\nu 3x(2\sigma\upsilon\nu 2x+1)}\Rightarrow \mathbf{A=\varepsilon\varphi 3x}$$

$$(ii)\ \frac{\eta\mu x+\eta\mu 3x+\eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu 5x}=\sqrt{3}\Rightarrow \varepsilon\varphi 3x=\sqrt{3}=\varepsilon\varphi 60^o \Rightarrow 3x=180^o k+60^o,\ k\in Z$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x=60^o k+20^o,\ k\in Z \\ 0^o \le x \le 180^o \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x=20^o, \quad x=140^o}$$

$$(\beta)\quad B=\frac{\varepsilon\varphi\alpha\left(1-\varepsilon\varphi^2\alpha\right)}{\left(1+\varepsilon\varphi^2\alpha\right)^2}=\frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\left(1-\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\right)}{\tau\varepsilon\mu^4\alpha}=\frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4\alpha}}$$

$$B=\frac{\frac{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^3\alpha}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4\alpha}}\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\frac{1}{2}\cdot\eta\mu 2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha\Rightarrow\ \mathbf{B=\frac{1}{4}\eta\mu 4\alpha}$$

$$(\gamma)\quad \alpha+\beta=45^o,\ \varepsilon\varphi\alpha=\frac{\nu}{\nu+1}$$

$$\varepsilon\varphi\beta=\varepsilon\varphi(45^o-\alpha)=\frac{\varepsilon\varphi 45^o-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi 45^o\cdot\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{1-\frac{\nu}{\nu+1}}{1+\frac{\nu}{\nu+1}}=\frac{\frac{\nu+1-\nu}{\nu+1}}{\frac{\nu+1+\nu}{\nu+1}}\Rightarrow \mathbf{\varepsilon\varphi\beta=\frac{1}{2\nu+1}}$$

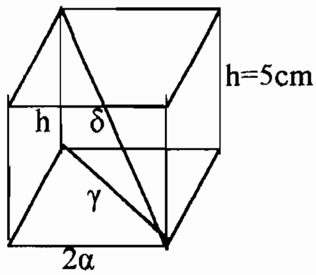
$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\frac{\nu}{\nu+1}-\frac{1}{2\nu+1}}{1+\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{1}{2\nu+1}}=\frac{2\nu^2-1}{2\nu^2+3\nu+1+\nu}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{2\nu^2-1}{2\nu^2+4\nu+1}}\Rightarrow\quad\frac{2\nu^2-1}{2\nu^2+4\nu+1}=-\frac{7}{23}\Rightarrow 46\nu^2-23=-14\nu^2-28\nu-7$$

$$\Rightarrow 60\nu^2+28\nu-16=0\Rightarrow 30\nu^2+14\nu-8=0\Rightarrow(5\nu+4)(6\nu-2)=0$$

$\nu=-\frac{4}{5}$ απορ., **ν=3**

ΖΗΤΗΜΑ 3ο



(α) (i) $E_{ολ}=2\cdot E_\beta+E_\pi=126\text{cm}^2$

$\Rightarrow 2\cdot\alpha\cdot 2\alpha+2\cdot\alpha h+2\cdot 2\alpha\cdot h=126\Rightarrow 4\alpha^2+2\alpha\cdot 5+4\alpha\cdot 5=0$

$\Rightarrow 4\alpha^2+30\alpha-126=0\Rightarrow 2\alpha^2+15\alpha-63=0$

$\Rightarrow(2\alpha+21)(\alpha-3)=0\Rightarrow\alpha=-\frac{21}{2}\langle 0$ απορ.

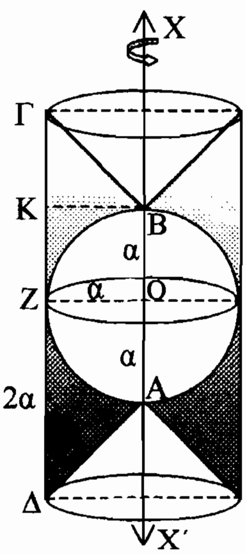
α=3, ⇒ μήκος=6cm, πλάτος=3cm

(ii) $V=E_\beta\cdot h=2\alpha\cdot\alpha\cdot h=6\cdot 3\cdot 5\Rightarrow \boldsymbol{V=90cm^3}$

(iii) $\gamma^2=\alpha^2+(2\alpha)^2=\alpha^2+4\alpha^2=5\alpha^2=5\cdot 3^2=45\text{ cm}^2$

$\delta^2=\gamma^2+h^2=45+5^2=45+25=70\text{ cm}^2\Rightarrow\ \delta=\sqrt{70}\text{ cm}$

(β)



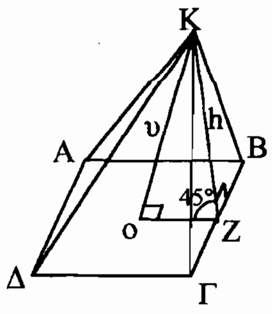
AB=2α, ΓΔ=4α, ZK=α ⇒ ΓK=α

$V=V_{κυλ}-V_{σφ}-2V_{κων}$

$$V=E_\beta\cdot(\Gamma\Delta)-\frac{4}{3}\pi\alpha^3-2\cdot\frac{1}{3}\cdot E_\beta\cdot(\Gamma K)$$

$$V=\pi\alpha^2\cdot 4\alpha-\frac{4}{3}\pi\alpha^3-\frac{2}{3}\pi\alpha^2\cdot\alpha=4\pi\alpha^3-\frac{4}{3}\pi\alpha^3-\frac{2}{3}\pi\alpha^3$$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{V=2\pi\alpha^3\ cm^3}$



(γ) $E_\pi=36\sqrt{2}\text{cm}^2$, $\quad E_\pi=4\cdot\frac{1}{2}\alpha h$

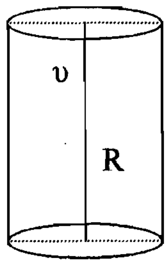
$\triangleleft$ZOK ισοσκελές, OZ=OK $\Rightarrow\ \upsilon=\frac{\alpha}{2}$

$$h=\sqrt{\upsilon^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2\alpha^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha \quad \Rightarrow E_\pi=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\alpha.\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha \Rightarrow 36\sqrt{2}=\alpha^2\sqrt{2}\Rightarrow \ \mathbf{\alpha=6cm}$$

$$\Rightarrow \upsilon=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \ \mathbf{\upsilon=3cm} \quad , \quad V=\frac{1}{3}E_\beta\cdot\upsilon=\frac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 3\Rightarrow \ \mathbf{V=36cm^3}$$

<u>ΖΗΤΗΜΑ4ο</u>

(α)

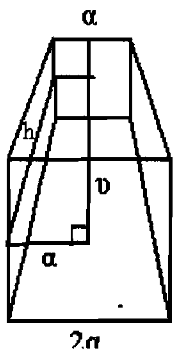


$$\frac{1}{R}+\frac{1}{\upsilon}=\beta\Rightarrow\frac{\upsilon+R}{R\upsilon}=3 \qquad V=E_\beta\cdot\upsilon=\pi R^2\upsilon$$

$$E_{o\lambda}=2E_\beta+E_{\kappa\upsilon\rho\tau\eta\varsigma}=2\pi R^2+2\pi R\upsilon=2\pi R(R+\upsilon)$$

$$\Rightarrow\frac{E_{o\lambda}}{V}=\frac{2\pi R(R+\upsilon)}{\pi R^2\upsilon}=2\cdot\frac{R+\upsilon}{R\upsilon}=2\cdot 3\Rightarrow \ \frac{\mathbf{E_{o\lambda}}}{\mathbf{V}}=\mathbf{6}$$

(β)

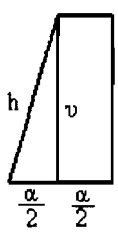


h=10cm, $E_{o\lambda}$=1440 cm² $\qquad E_{o\lambda}=E_{\beta1}+E_{\beta2}+\left(\Pi_{\beta1}+\Pi_{\beta2}\right)\cdot\frac{h}{2}$

$$E_{o\lambda}=(2\alpha)^2+\alpha^2+(8\alpha+4\alpha)\cdot\frac{10}{2}\Rightarrow 5\alpha^2+12\alpha\cdot 5=1440$$

$$\Rightarrow \alpha^2+12\alpha-228=0\Rightarrow(\alpha-12)(\alpha+24)=0$$

$$\Rightarrow \alpha=-24\langle 0 \ \alpha\pi o\rho., \quad \alpha=\mathbf{12cm}\ \Rightarrow 2\alpha=24\text{cm}$$

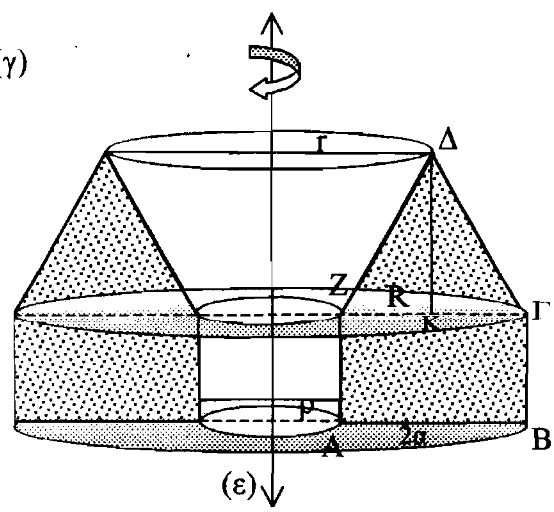


$$\upsilon^2=h^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=10^2-6^2=64\Rightarrow \ \mathbf{\upsilon=8cm}$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\upsilon\cdot\left(E_{\beta1}+\sqrt{E_{\beta1}E_{\beta2}}+E_{\beta2}\right)=\frac{1}{3}\cdot 8\left((2\alpha)^2+\sqrt{(2\alpha)^2\cdot\alpha^2}+\alpha^2\right)$$

$$V=\frac{8}{3}\left(12^2+\sqrt{12^2\cdot 6^2}+6^2\right)=\frac{8}{3}(144+72+36)\Rightarrow \ \mathbf{V=672cm^3}$$

(γ)



ΑΒ=2αcm , ΒΓ=αcm , ΔΖ=2αcm

$$\Rightarrow(\Delta K)^2=(2\alpha)^2-\alpha^2\Rightarrow \Delta K=\sqrt{3}\alpha\text{cm}$$

$E_{o\lambda}=E_{AB}+E_{\Gamma\Delta}+E_{\Delta Z}+E_{ZA}$

$$E_{o\lambda}=\pi\left(R^2-\rho^2\right)+2\pi R\left(B\Gamma\right)+\pi(R+r)(\Delta\Gamma)+\pi(r+\rho)(\Delta Z)+2\pi\rho\alpha$$

R=2α+α=3α, r=α+α=2α, ρ=α

$$E_{ολ}=\pi\left((3\alpha)^2-\alpha^2\right)+2\pi\cdot 3\alpha\cdot\alpha+\pi(3\alpha+2\alpha)\alpha+\pi.\alpha(2\alpha+\alpha)+2\pi\alpha^2$$

$$E_{ολ}=\pi 9\alpha^2+6\pi\alpha^2+5\pi\alpha^2+3\pi\alpha^2 \Rightarrow \mathbf{E_{ολ}=24\pi\alpha^2\ cm^2}$$

$$V=V_{κυλ1}-V_{κυλ2}+V_{κωλ.κων1}-V_{κωλ.κων2}$$

$$V=\pi R^2\cdot\alpha-\pi\rho^2\alpha+\frac{1}{3}\pi(\Delta K)\left(R^2+Rr+r^2\right)-\frac{1}{3}\pi(\Delta K)\left(r^2+r\rho+\rho^2\right)$$

$$V=\pi(2\alpha+\alpha)^2\alpha-\pi\alpha^2\cdot\alpha+\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}\alpha\left((3\alpha)^2+3\alpha\cdot 2\alpha+(2\alpha)^2\right)-\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}\alpha\left((2\alpha)^2+2\alpha\cdot\alpha+\alpha^2\right)$$

$$V=\pi.9\alpha^2\cdot\alpha-\pi\alpha^3+\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}\alpha\left(9\alpha^2+6\alpha^2+4\alpha^2\right)-\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}\alpha\left(4\alpha^2+2\alpha^2+\alpha^2\right)$$

$$V=8\pi\alpha^3+4\pi\sqrt{3}\alpha^3 \Rightarrow V=4\pi\alpha^3\left(2+\sqrt{3}\right)cm^3$$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 5ο</u>

(α) $I=\int 20\eta\mu 7x\cdot\sigma\upsilon\nu 3x dx=10\int\left[\eta\mu(7x-3x)+\eta\mu(7x+3x)\right]dx$

$$I=10\int\eta\mu 4x dx+10\int\eta\mu 10x dx=-10\frac{\sigma\upsilon\nu 4x}{2}-10\frac{\sigma\upsilon\nu 10x}{10}+\kappa$$

$$I=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu 4x-\sigma\upsilon\nu 10x+\kappa}$$

(β) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+4}\Rightarrow y'=\dfrac{2\left(x^2+4\right)-(2x+3)(2x)}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{2x^2+8-4x^2-6x}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{-2x^2-6x+8}{\left(x^2+4\right)^2}$

$$y'=\frac{-2\left(x^2+3x-4\right)}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{-2(x+4)(x-1)}{\left(x^2+4\right)^2}\Rightarrow \text{ρίζες: } x=-4,\ x=1$$

x	-∞	-4		1	+∞
y′	-	0	+	0	-
y	↘	U	↗	∩	↘

$$y(1)=\frac{2\cdot 1+3}{1^2+4}=1\Rightarrow \mathbf{max(1,1)}$$

$$y(4)=\frac{2\cdot(-4)+3}{(-4)^2+4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow \mathbf{min\left(-4,-\frac{1}{4}\right)}$$

$y'(0)=\dfrac{8}{4^2}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\phi}=\dfrac{1}{2}$, (εφ): $y-y_1=\lambda(x-x_1)\Rightarrow y-y(0)=\dfrac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}x$

$\Rightarrow$**(εφ): 4y − 2x = 3**

(γ) $\left.\begin{array}{l}(K)\ y=x^2-2x+\alpha\\ A(1,-9)\in(K)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow -9=1^2-21+\alpha\Rightarrow\alpha=-9+1\Rightarrow \boldsymbol{\alpha=-8}\\ \Rightarrow y=x^2-2x-8\end{array}$

$$y=0\Rightarrow x^2-2x-8=0\Rightarrow(x-4)(x+2)=0\Rightarrow x=-2, x=4$$

$$y'=2x-2,\quad y'(0)=2\rangle 0\Rightarrow \text{ελάχιστο}$$

$$\Rightarrow E=-\int_{-2}^{4}ydx=-\int_{-2}^{4}\left(x^2-2x-8\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-x^2-8x\right)_{-2}^{4}$$

$$E=-\left(\frac{4^3}{3}-4^2-8\cdot 4\right)+\left(\frac{(-2)^3}{3}-(-2)^2-8(-2)\right)=-\left(\frac{64}{3}-16-32\right)+\left(-\frac{8}{3}-4+16\right)$$

$$E=-\frac{64}{3}+48-\frac{8}{3}+12=-\frac{72}{3}+60=-24+60\Rightarrow \mathbf{E=36τ.μ.}$$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 6ο</u>

(α) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{4}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2\cdot 2}-\frac{\sigma\upsilon\nu\pi}{4}\right)-(0-1)$

$$I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\Rightarrow\ I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

(β) $y=x^2\eta\mu x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=2\eta\mu x+2x\sigma\upsilon\nu x+2x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x=2\eta\mu x+4x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=x^2\left(2\eta\mu x+4x\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu x\right)-4x\left(2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x\right)+6x^2\eta\mu x$$

$$=2x^2\eta\mu x+4x^3\sigma\upsilon\nu x-x^4\eta\mu x-8x^2\eta\mu x-4x^3\sigma\upsilon\nu x+6x^2\eta\mu x$$

$$=-x^4\eta\mu x=-x^2x^2\eta\mu x=-x^2\cdot y$$

(γ) $y=x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

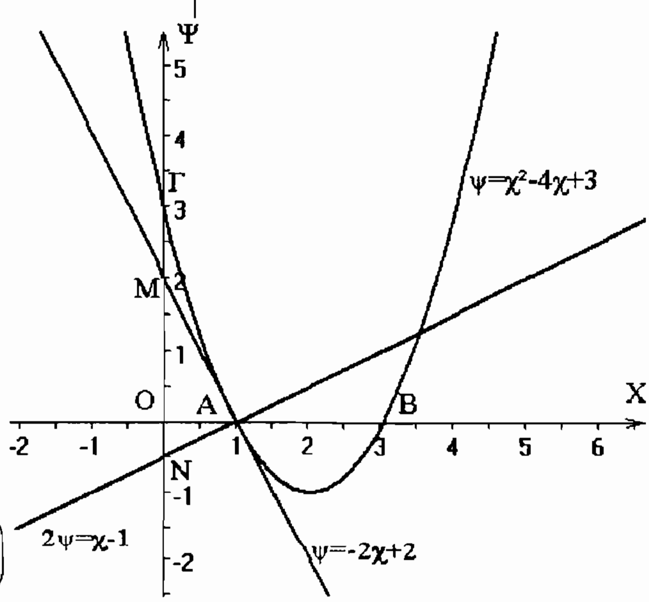
$y=0\Rightarrow x=1, x=3\Rightarrow$ **A(1,0) , B(3,0)**

$x=0\Rightarrow y=3\Rightarrow$ **Γ(0,3)**

$y'=2x-4=2(x-2)\Rightarrow$ ρίζα $x=2$

$y(2)=2^2-4.2+3=-1\Rightarrow$ **min(2,-1)**

x	-∞	2	∞
y′	-	0	+
y	↘	U	↗



$y'(1)=2\cdot 1-4=-2\ \Rightarrow\ \lambda_{\varepsilon\phi}=-2\ \Rightarrow$

$\lambda_\kappa=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow$ (καθ) $y-y_A=\lambda_\kappa(x-x_A)$

$\Rightarrow y-0=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow$ **(καθ) 2y=x-1**

(εφ) $y-y_A=\lambda_{\varepsilon\phi}(x-x_A)$

$\Rightarrow y-0=-2(x-1)\Rightarrow$ **(εφ) y= -2x+2**

(καθ) $\left.\begin{array}{l}2y=x-1\\ x=0\end{array}\right\}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\Rightarrow N\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

(εφ) $\left.\begin{array}{l}y=-2x+2\\ x=0\end{array}\right\}\Rightarrow y=2\Rightarrow M(0,2)$

$(AM) = \sqrt{(0-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ Διαφορετικά: $(AMN) = \frac{1}{2}(OA)(MN)$

$(AN) = \sqrt{(0-1)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $(AMN) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right)$

$(AMN) = \frac{1}{2}(AM)(AN) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$ $\mathbf{E = \frac{5}{4}}$ **τ.μ.**

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΓΙΑ ΑΠΟΦΟΙΤΟΥΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης

Πέμπτη 1 Ιουλίου 1999
11.00 π.μ. – 2.00 μ.μ.

Επιμέλεια

Κώστας Δεληγιάννης

Μέρος Α
Να λυθούν όλες οι ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{d\chi}{\chi^2 - 1}$

2. (α) Δίνεται ο κύκλος (κ_1): $\chi^2+\psi^2-4\chi=0$.
(i) Να βρεθεί η εξίσωση ενός δεύτερου κύκλου (κ_2) που έχει το ίδιο κέντρο με το δοθέντα και περνά από το σημείο $(-1, \sqrt{7})$.
(ii) Να βρεθεί ο λόγος των ακτίνων των κύκλων (κ_1) και (κ_2).
(β) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ υπάρχουν; Πόσοι από αυτούς έχουν τα γράμματα Κ και Ν συνεχόμενα;
(Η απάντηση να μείνει σε παραγοντική μορφή).

3. Επτά άτομα επιλέγονται για να αποτελέσουν τη σκακιστική ομάδα ενός συλλόγου. Η επιλογή θα γίνει μεταξύ 8 γυναικών και 12 ανδρών. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αν:
(α) θα συμμετάσχουν στην ομάδα 3 γυναίκες και 4 άνδρες;
(β) θα συμμετάσχουν στην ομάδα τουλάχιστον 6 άνδρες;

4. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi \to 0} \frac{\ln(1+\chi) - \eta\mu\chi}{\chi^2}$

5. Στο ανάπτυγμα του $\left(\chi^2 - \frac{1}{2\chi}\right)^\nu$, το άθροισμα των συντελεστών των δυνάμεων του χ στο δεύτερο και τρίτο όρο είναι $\frac{51}{2}$. Να βρεθεί το ν.

6. Μια καμπύλη έχει παραμετρική μορφή : $\chi = e^t \,\eta\mu t$
$y = e^t \,\sigma\upsilon\nu t \qquad 0 \leq t < 2\pi$

Να βρεθούν τα σημεία της στα οποία $\frac{dy}{dx} = 1$

7. Να βρεθούν οι γενικές λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης:
$\eta\mu 7\chi - \eta\mu 3\chi = \sigma\upsilon\nu 6\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi$

8. Να βρεθεί για ποια τιμή της παραμέτρου α το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \alpha^2\chi^2 + \alpha\chi + 1$ και τις ευθείες $\psi = 0$, $\chi = 0$ και $\chi=1$ είναι ελάχιστο. Να βρεθεί το ελάχιστο εμβαδό.

9. Ένας ορθός κυκλικός κώνος έχει σταθερό ύψος h=40cm και μεταβλητή ακτίνα R που μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/s.
(α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κώνου όταν R=20cm.
(β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κυρτής επιφάνειας του κώνου όταν R=30cm.

10. Αν $f'(\chi)$ και $f''(\chi)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha , \beta]$.
(α) Να δειχθεί ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} \chi f''(\chi)d\chi = [\beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha)] - [f(\beta) - f(\alpha)]$
(β) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις $\psi=\chi^2$ και $\psi=\chi$ γύρω από τον άξονα των χ.

ΜΕΡΟΣ Β

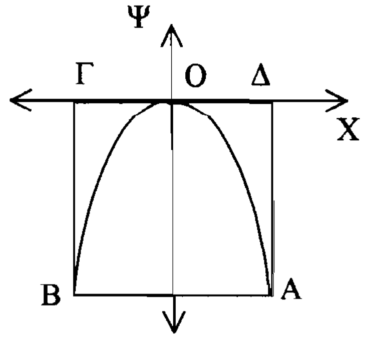
Να λυθούν όλες οι ασκήσεις. Κάθε μία από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \dfrac{\chi^2 - 4\chi + 7}{\chi - 1}$.
(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού, οι ασύμπτωτες και τα ακρότατα σημεία της.
(β) Να γίνει η γραφική παράστασή της.
(γ) Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των χ και τις ευθείες $\chi=3$ και $\chi=4$.

2. Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\chi\dfrac{d\psi}{d\chi} + 2\psi = \eta\mu\chi$ για την οποία $\psi=0$ όταν $\chi=\dfrac{\pi}{2}$.

3. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi=2\chi^2$ και το σημείο Α πάνω σ' αυτή που έχει τεταγμένη $\psi=8$ και τετμημένη θετική.
(α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α.
(β) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των χ και την εφαπτομένη της καμπύλης στο Α.

4. Στο διπλανό σύστημα αξόνων το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2 α και η αρχή των αξόνων Ο είναι το μέσο του ΓΔ. Η καμπύλη $\psi=\kappa\chi^2$ περνά από το σημείο Ο και από τις κορυφές Α και Β του τετραγώνου.
(α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της καμπύλης είναι $\psi = -\dfrac{2}{\alpha}\chi^2$



(β) Αν E_1 και E_2 τα εμβαδά των μεικτογράμμων τριγώνων ΟΓΒ και ΟΔΑ αντίστοιχα και E_3 το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και την πλευρά ΑΒ του τετραγώνου, να δειχθεί ότι ο λόγος $\frac{E_1+E_2}{E_3}=\frac{1}{2}$.

5. Δίνονται οι κύκλοι:

(1) : $\chi^2+\psi^2=9$

(2) : $\chi^2+\psi^2-2\alpha\chi+6\alpha-9=0$

(3) : $\chi^2+\psi^2-2\alpha\psi+6\alpha-9=0$ με $\alpha>3$

(α) Να βρεθούν τα κέντρα και οι ακτίνες των τριών κύκλων.

(β) Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος (1) εφάπτεται εξωτερικά τόσο στον κύκλο (2) όσο και στον κύκλο (3).

(γ) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε και οι κύκλοι (2) και (3) να εφάπτονται εξωτερικά.

* * * * *

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Μέρος Α

Να λυθούν όλες οι ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int\frac{d\chi}{\chi^2-1}$

Λύση

$$\frac{1}{\chi^2-1}=\frac{1}{(\chi-1)(\chi+1)}\equiv\frac{A}{\chi-1}+\frac{B}{\chi+1}\Rightarrow 1\equiv A(\chi+1)+B(\chi-1)$$

για $\chi=1$ $\;1=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}$, για $\chi=-1$ $\;1=-2B\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$

$$\int\frac{d\chi}{\chi^2-1}=\int\frac{d\chi}{(\chi-1)(\chi+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\chi}{\chi-1}-\frac{1}{2}\int\frac{d\chi}{\chi+1}=\frac{1}{2}\ln|\chi-1|-\frac{1}{2}\ln|\chi+1|+c=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\chi-1}{\chi+1}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{\chi-1}{\chi+1}\right|^{\frac{1}{2}}+c$$

2. (α) Δίνεται ο κύκλος (κ_1): $\chi^2+\psi^2-4\chi=0$.

(i) Να βρεθεί η εξίσωση ενός δεύτερου κύκλου (κ_2) που έχει το ίδιο κέντρο με το δοθέντα και περνά από το σημείο $(-1, \sqrt{7})$.

(ii) Να βρεθεί ο λόγος των ακτίνων των κύκλων (κ_1) και (κ_2).

(β) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ υπάρχουν; Πόσοι από αυτούς έχουν τα γράμματα Κ και Ν συνεχόμενα;

(Η απάντηση να μείνει σε παραγοντική μορφή).

Λύση

(α) (κ_1): $\chi^2+\psi^2-4\chi=0\Rightarrow g=-2\,, f=0$

(i) $K(2,0)$ (κ_2) : $x^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0\Rightarrow\chi^2+\psi^2-4\chi+c=0$ $\;(-1, \sqrt{7})$ *σημείο του* (κ_2)

$\Rightarrow 1+7+4+c=0\Rightarrow c=-12$ *Άρα* (κ_2) : $\chi^2+\psi^2-4\chi-12=0$

(ii) $R^2=g^2+f^2-c \Rightarrow R_1^2=4+0-0 \Rightarrow R_1=2$, $\quad R_2^2=4+0+12=16 \Rightarrow R_2=4$. Άρα

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(β) $A,Y,T,T,O,O,K,N,I,H \quad \dfrac{10!}{2!\,2!}$

$A,Y,T,T,O,O,K,N,I,H \quad \dfrac{9!}{2!\,2!}\cdot 2!$

3. Επτά άτομα επιλέγονται για να αποτελέσουν τη σκακιστική ομάδα ενός συλλόγου. Η επιλογή θα γίνει μεταξύ 8 γυναικών και 12 ανδρών. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αν:
(α) θα συμμετάσχουν στην ομάδα 3 γυναίκες και 4 άνδρες;
(β) θα συμμετάσχουν στην ομάδα τουλάχιστον 6 άνδρες;

Λύση

(α) $\binom{8}{3}\cdot\binom{12}{4}=\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot\dfrac{12!}{8!\cdot 4!}=\dfrac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\dfrac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=27720$ τρόποι

(β) $\binom{12}{6}\cdot\binom{8}{1}+\binom{12}{7}=\dfrac{12!}{6!\cdot 6!}\cdot 8+\dfrac{12!}{5!\cdot 7!}=7392+792=8184$ τρόποι

4. Να βρεθεί το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{ln(1+\chi)-\eta\mu\chi}{\chi^2}$

Λύση

$$L=\lim_{\chi\to 0}\frac{ln(1+\chi)-\eta\mu\chi}{\chi^2}=\frac{0}{0}\quad (Απροσδ.)$$

$$L=\lim_{\chi\to 0}\frac{[ln(1+\chi)-\eta\mu\chi]'}{[\chi^2]'}=\lim_{\chi\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+\chi}-\sigma\upsilon\nu\chi}{2\chi}=\frac{0}{0}\quad (Απροσδ.)$$

$$L=\lim_{\chi\to 0}\frac{\left[\dfrac{1}{1+\chi}-\sigma\upsilon\nu\chi\right]'}{[2\chi]'}=\lim_{\chi\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(1+\chi)^2}+\eta\mu\chi}{2}=\frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2}$$

5. Στο ανάπτυγμα του $\left(\chi^2-\dfrac{1}{2\chi}\right)^\nu$, το άθροισμα των συντελεστών των δυνάμεων του χ στο δεύτερο και τρίτο όρο είναι $\dfrac{51}{2}$. Να βρεθεί το ν.

$$T_2=T_{1+1}=\binom{\nu}{1}(\chi^2)^{\nu-1}\cdot\left(-\frac{1}{2\chi}\right)^1=\binom{\nu}{1}\chi^{2\nu-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^1\cdot\chi^{-1}=\binom{\nu}{1}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\chi^{2\nu-3}$$

$$T_3=T_{2+1}=\binom{\nu}{2}\cdot(\chi^2)^{\nu-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\chi^{-2}=\binom{\nu}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\chi^{2\nu-6}$$

$$\binom{\nu}{1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\binom{\nu}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{51}{2}\Rightarrow\ -2\nu+\frac{\nu(\nu-1)}{2}=102\Rightarrow\ -4\nu+\nu^2-\nu-204=0\Rightarrow$$

$\nu^2 - 5\nu - 204 = 0 \Rightarrow (\nu - 17)\cdot(\nu+12)=0 \Rightarrow \underline{\nu = 17}$, $\nu = -12$ *απορρίπτεται γιατί* $\nu \in N^*$

6. Μια καμπύλη έχει παραμετρική μορφή : $\chi = e^t$ ημt, $y = e^t$ συνt $\quad 0 \le t < 2\pi$

Να βρεθούν τα σημεία της στα οποία $\frac{dy}{dx} = 1$

<u>Λύση</u>

$\frac{dx}{dt} = e^t\,\eta\mu t + e^t\sigma\upsilon\nu t = e^t(\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t)$, $\qquad \frac{dy}{dt} = e^t\,\sigma\upsilon\nu t + e^t(-\eta\mu t) = e^t(-\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t)$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t}\\[2ex] \dfrac{dy}{dx}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t}=1\Rightarrow -\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t=\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t\Rightarrow\eta\mu t=0$$

$\Rightarrow \eta\mu t=\eta\mu 0 \Rightarrow t = 2\kappa\pi$ *ή* $t = 2\kappa\pi+\pi \quad (0 \le t < 2\pi) \Rightarrow \kappa = 0$ *άρα* $t = 0$ *ή* $t = \pi$

Για $t=0 \Rightarrow x=e^0\cdot\eta\mu 0 \Rightarrow \chi=0$, $\quad y=e^0\cdot\sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow y=1$, $\quad (0, 1)$

Για $t=\pi \Rightarrow x=e^{\pi}\cdot\eta\mu\pi \Rightarrow \chi=0$, $\quad y=e^{\pi}\cdot\sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow y=-e^{\pi}$, $\quad (0, -e^{\pi})$

7. Να βρεθούν οι γενικές λύσεις της τριγωνομετρικής εξίσωσης:
ημ7χ – ημ3χ = συν6χ + συν4χ

<u>Λύση</u>

$\eta\mu 7\chi - \eta\mu 3\chi = \sigma\upsilon\nu 6\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi \Rightarrow 2\eta\mu 2\chi\,\sigma\upsilon\nu 5\chi - 2\sigma\upsilon\nu 5\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Rightarrow$

$2\sigma\upsilon\nu 5\chi(\eta\mu 2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi) = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 5\chi = 0$ *ή* $\eta\mu 2\chi=\sigma\upsilon\nu\chi$

i) $\sigma\upsilon\nu 5\chi=\sigma\upsilon\nu 90° \Rightarrow 5\chi = 360°\kappa \pm 90° \Rightarrow \chi = 72°\kappa \pm 18°$

ii) $\eta\mu 2\chi=\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow \eta\mu 2\chi=\eta\mu(90°-\chi) \Rightarrow$

$2\chi = 360°\kappa+90°-\chi$ *ή* $2\chi = 360°\kappa + 180° - 90° + \chi$

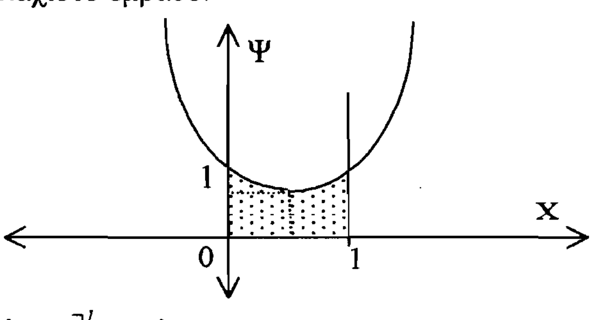
$\Rightarrow \chi = 120°\kappa + 30° \qquad \Rightarrow \chi = 360°\kappa + 90° \qquad \kappa \in Z$

8. Να βρεθεί για ποια τιμή της παραμέτρου α το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \alpha^2\chi^2 + \alpha\chi + 1$ και τις ευθείες $\psi = 0$, $\chi = 0$ και $\chi=1$ είναι ελάχιστο. Να βρεθεί το ελάχιστο εμβαδό.

<u>Λύση</u>

$\Delta=\alpha^2 - 4\alpha^2 = -3\alpha^2 < 0 \Rightarrow$ *η καμπύλη δεν τέμνει τον άξονα των χ και επειδή* $\alpha^2>0$ *παρουσιάζει ελάχιστο.*

Για $\chi= 0 \Rightarrow \psi=1$



$$E=\int_0^1\left(\alpha^2\chi^2+\alpha\chi+1\right)dx=\left[\frac{\alpha^2\chi^3}{3}+\frac{\alpha\chi^2}{2}+\chi\right]_0^1=\frac{\alpha^2}{3}+\frac{\alpha}{2}+1$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dE}{da}=\dfrac{2\alpha}{3}+\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{dE}{da}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2\alpha}{3}+\frac{1}{2}=0\Rightarrow \alpha=-\frac{3}{4}$$

α		$-\frac{3}{4}$	
$\frac{dE}{da}$	-	0	+
E	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$E_{min}=\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{3}+\frac{-\frac{3}{4}}{2}+1=\frac{13}{16}\ \tau.\mu.$$

9. Ένας ορθός κυκλικός κώνος έχει σταθερό ύψος h=40cm και μεταβλητή ακτίνα R που μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/s.
(α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κώνου όταν R=20cm.
(β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κυρτής επιφάνειας του κώνου όταν R=30cm.

Λύση

$$\frac{dR}{dt}=2cm/s,\quad ύψος=h=40cm$$

$$a)\ V=\frac{1}{3}\pi R^2 h,\quad \frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dR}\cdot\frac{dR}{dt}\Rightarrow\quad \frac{dV}{dt}=\frac{2}{3}\pi\cdot R\cdot h\cdot 2=\frac{2\pi R\cdot 40\cdot 2}{3}=\frac{160\pi R}{3}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{R=20cm}=\frac{160\pi\cdot 20}{3}=\frac{3200\pi}{3}\ cm^3/s$$

$$\beta)\ E_\kappa=\pi R\lambda,\quad \frac{dE}{dt}=\frac{dE}{dR}\cdot\frac{dR}{dt}$$

$$h=40cm,\ R=30cm\Rightarrow \lambda^2=h^2+R^2\Rightarrow \lambda^2=40^2+30^2\Rightarrow \lambda^2=2500\Rightarrow \lambda=50cm$$

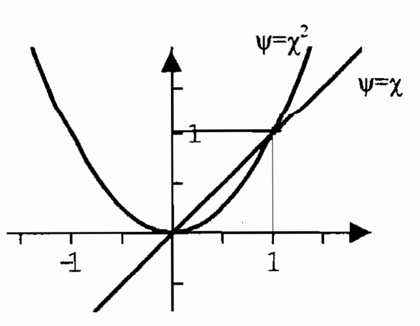
$$\frac{dE}{dt}=\pi\cdot\lambda\cdot 2=\pi\cdot 50\cdot 2=100\pi\ cm^2/s$$

10. Αν f΄(χ) και f΄΄(χ) είναι συνεχής στο διάστημα [α , β].
(α) Να δειχθεί ότι: $\int_\alpha^\beta \chi f''(\chi)d\chi=[\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)]-[f(\beta)-f(\alpha)]$
(β) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις $\psi=\chi^2$ και $\psi=\chi$ γύρω από τον άξονα των χ.

Λύση

$$(\alpha)\ \int_\alpha^\beta xf''(x)dx=\int_\alpha^\beta x\,df'(x)=[x\cdot f'(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)dx=[x\cdot f'(x)-f(x)]_\alpha^\beta=$$
$$=\beta\cdot f'(\beta)-f(\beta)-\alpha\cdot f'(\alpha)+f(\alpha)=[\beta f'(\beta)-\alpha f'(\alpha)]-[f(\beta)-f(\alpha)]$$

(β)



$$\left.\begin{array}{l}\psi=\chi^2\\ \psi=\chi\end{array}\right\}\Rightarrow \chi^2=\chi\Rightarrow \chi(\chi-1)=0\Rightarrow \chi=0\ ή\ \chi=1$$

$$V=\pi\int_0^1(\psi_E^2-\psi_K^2)dx=\pi\int_0^1(\chi^2-\chi^4)dx$$

$$=\pi\left[\frac{\chi^3}{3}-\frac{\chi^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2\pi}{15}\kappa.\mu.$$

ΜΕΡΟΣ Β

Να λυθούν όλες οι ασκήσεις. Κάθε μία από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \dfrac{\chi^2 - 4\chi + 7}{\chi - 1}$.

   (α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού, οι ασύμπτωτες και τα ακρότατα σημεία της.
   (β) Να γίνει η γραφική παράσταση της.
   (γ) Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των χ και τις ευθείες χ=3 και χ=4.

<u>Λύση</u>

(α) π.ο. $\boldsymbol{R} - \{1\}$, *κατακόρυφη ασύμπτωτη* $\chi = 1$,

$$\begin{array}{r|l} \chi^2 - 4\chi + 7 & \chi - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-\chi^2 + 4\chi} & \chi - 3 \\ -3\chi + 7 & \\ \underline{3\chi - 3} & \\ 4 & \end{array}$$

$\psi = \chi - 3$ *πλάγια ασύμπτωτη*

$$\psi' = \frac{(2\chi - 4)(\chi - 1) - (\chi^2 - 4\chi + 7)}{(\chi - 1)^2} = \frac{\chi^2 - 2\chi - 3}{(\chi - 1)^2}$$

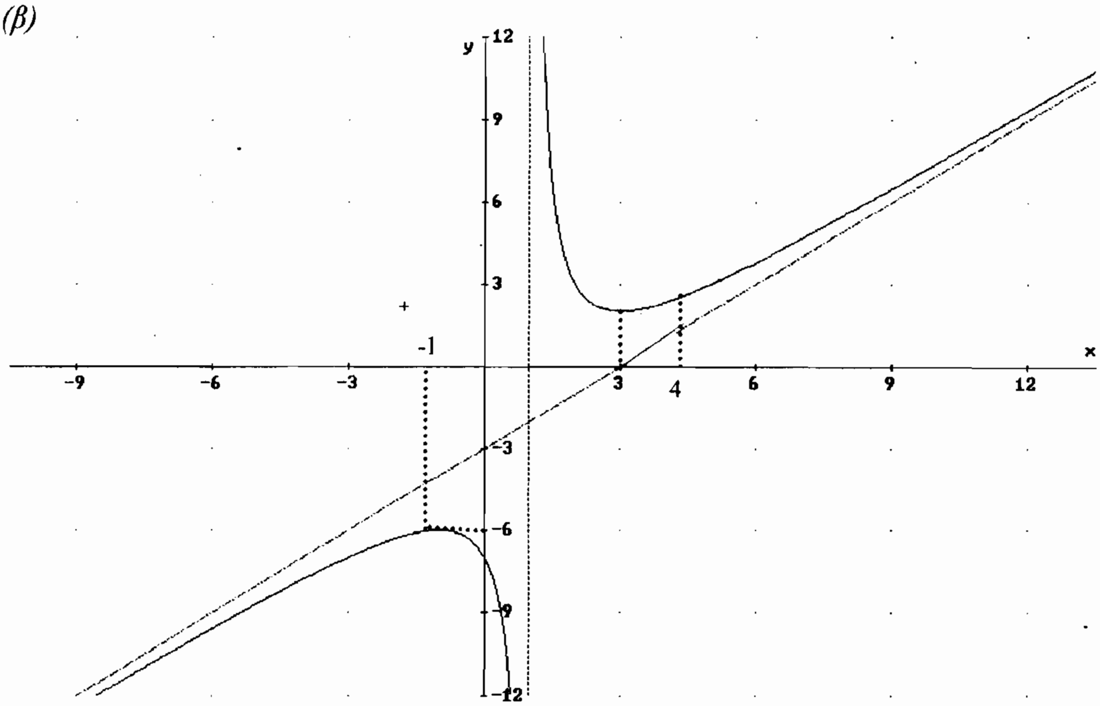
$\psi' = 0 \Rightarrow \chi^2 - 2\chi - 3 = 0 \Rightarrow (\chi - 3)(\chi + 1) = 0 \Rightarrow \chi = 3,\ \chi = -1$

χ	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
ψ′		+	0	-	0	+	
ψ		↗	max	↘	min	↗	

$$\psi_{max} = \frac{(-1)^2 - 4(-1) + 7}{-1 - 1} = -6 \qquad \max(-1, -6)$$

$$\psi_{min} = \frac{3^2 - 4 \cdot 3 + 7}{3 - 1} = 2 \qquad \min(3, 2)$$

(β)



$$(\gamma)\ E = \int_3^4 \frac{\chi^2 - 4\chi + 7}{\chi - 1} dx = \int_3^4 (\chi - 3) dx + \int_3^4 \frac{4}{\chi - 1} dx = \left[\frac{\chi^2}{2} - 3\chi\right]_3^4 + 4\left[ln|\chi - 1|\right]_3^4 =$$

$$= (8 - 12) - \left(\frac{9}{2} - 9\right) + 4[ln 3 - ln 2] = \left(\frac{1}{2} + 4 ln \frac{3}{2}\right)\ \tau.\mu.$$

2. Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης $\chi\frac{d\psi}{d\chi}+2\psi=\eta\mu\chi$ για την οποία ψ=0 όταν $\chi=\frac{\pi}{2}$.

$$x\frac{dy}{dx}+2y=\eta\mu\chi \Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{\eta\mu x}{x} \quad , \quad I=e^{\int\frac{2}{\chi}d\chi}=e^{2\ln\chi}=e^{\ln x^2}=\chi^2$$

$$x^2\frac{dy}{dx}+2x\,y=x\,\eta\mu x \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2y\right)=x\eta\mu x \Rightarrow x^2y=\int x\,\eta\mu x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2y=\int x\,d(-\sigma\upsilon\nu x)=-x\,\sigma\upsilon\nu x+\int\sigma\upsilon\nu x\,dx \Rightarrow x^2y=-x\,\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x+c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x^2}+\frac{c}{x^2} \,, \qquad x=\frac{\pi}{2} \,,\ y=0$$

$$0=\frac{-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}+\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}}+\frac{c}{\frac{\pi^2}{4}} \Rightarrow 0=0+\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}}+\frac{c}{\frac{\pi^2}{4}} \Rightarrow c=-1 \Rightarrow y=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x^2}-\frac{1}{x^2}$$

3. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi=2\chi^2$ και το σημείο Α πάνω σ' αυτή που έχει τεταγμένη ψ=8 και τετμημένη θετική.
(α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α.
(β) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των χ και την εφαπτομένη της καμπύλης στο Α.

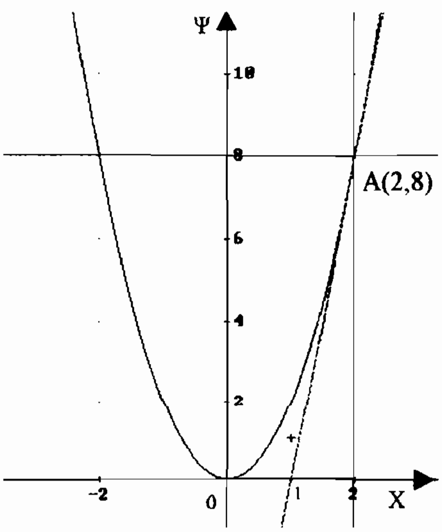
Λύση

$\psi=2\chi^2$, $\psi=8 \Rightarrow 8=2\chi^2 \Rightarrow \chi^2=4 \Rightarrow \chi=\pm2 \ (\chi>0) \Rightarrow \chi=2 \Rightarrow A(2,8)$

(α) $\psi'=4\chi \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=4\cdot2=8$

εξίσωση εφαπτομένης στο Α: $\psi-8=8(\chi-2) \Rightarrow \psi=8\chi-8$

(β)



$\psi=2\chi^2$, $\psi=8\chi-8 \Rightarrow 2\chi^2=8\chi-8 \Rightarrow \chi^2-4\chi+4=0$

$\Rightarrow (\chi-2)^2=0 \Rightarrow \chi=2$

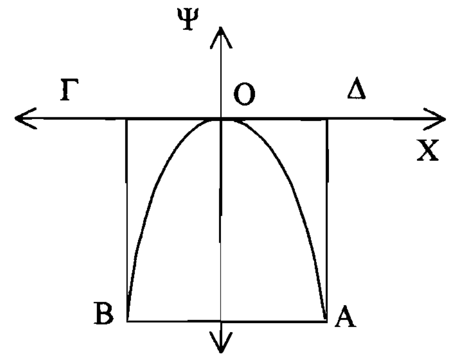
$$E=\int_0^2 2x^2dx-\int_1^2(8x-8)dx$$

$$=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^2-\left[4x^2-8x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{16}{3}-0\right)-\left[(16-16)-(4-8)\right]=\frac{16}{3}-4$$

$$E=\frac{4}{3}\,\tau.\mu.$$

4. Στο διπλανό σύστημα αξόνων το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2 α και η αρχή των αξόνων Ο είναι το μέσο του ΓΔ. Η καμπύλη $\psi=\kappa\chi^2$ περνά από το σημείο Ο και από τις κορυφές Α και Β του τετραγώνου.



(α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της καμπύλης είναι $\psi = -\dfrac{2}{\alpha}\chi^2$

(β) Αν E_1 και E_2 τα εμβαδά των μεικτογράμμων τριγώνων ΟΓΒ και ΟΔΑ αντίστοιχα και E_3 το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και την πλευρά ΑΒ του τετραγώνου, να δειχθεί ότι ο λόγος $\dfrac{E_1+E_2}{E_3}=\dfrac{1}{2}$.

Λύση

Γ(-α,0) , Δ(α,0) , Β(-α,-2α) , Α(α,-2α)

(α) Τα Α και Β είναι σημεία της καμπύλης $\psi=\kappa\chi^2 \Rightarrow -2\alpha = \kappa\alpha^2 \Rightarrow \kappa = -\dfrac{2}{\alpha}$

Άρα $\psi = -\dfrac{2}{\alpha}\chi^2$

(β) $$E_1+E_2 = -\int_{-\alpha}^{0}-\frac{2}{\alpha}\chi^2 d\chi - \int_{0}^{\alpha}-\frac{2}{\alpha}\chi^2 d\chi = \left[\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\chi^3}{3}\right]_{-\alpha}^{0} + \left[\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\chi^3}{3}\right]_{0}^{\alpha} =$$

$$0-\left(\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{-\alpha^3}{3}\right)+\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^3}{3}-0=\frac{2}{3}\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha^2=\frac{4}{3}\alpha^2 \text{ τ.μ.}$$

$$E_3=(2\alpha)^2-\frac{4}{3}\alpha^2=4\alpha^2-\frac{4}{3}\alpha^2=\frac{8\alpha^2}{3}\text{ τ.μ.} \quad\Rightarrow\quad \frac{E_1+E_2}{E_3}=\frac{\frac{4\alpha^2}{3}}{\frac{8\alpha^2}{3}}=\frac{1}{2}$$

5. Δίνονται οι κύκλοι:

(1) : $\chi^2+\psi^2=9$

(2) : $\chi^2+\psi^2-2\alpha\chi+6\alpha-9=0$

(3) : $\chi^2+\psi^2-2\alpha\psi+6\alpha-9=0$ με $\alpha>3$

(α) Να βρεθούν τα κέντρα και οι ακτίνες των τριών κύκλων.

(β) Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος (1) εφάπτεται εξωτερικά τόσο στον κύκλο (2) όσο και στον κύκλο (3).

(γ) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε και οι κύκλοι (2) και (3) να εφάπτονται εξωτερικά.

Λύση

(α) Έστω K_1, K_2, K_3 *τα κέντρα των κύκλων (1), (2), (3) αντίστοιχα :*

$K_1(0,0)$, $R_1=3$

$K_2(a,0)$, $R_2^2 = a^2\text{-}6a+9 = (a\text{-}3)^2 \Rightarrow R_2 = a - 3$
$K_3(0,a)$, $R_3^2 = a^2\text{-}6a+9 = (a\text{-}3)^2 \Rightarrow R_3 = a - 3$

(β) $d_{K_1K_2} = \sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2} = a$, $d_{K_1K_2} = \alpha$
$R_1+R_2 = 3+a\text{-}3 = a$ Άρα $d_{K_1K_2} = R_1+R_2 \Rightarrow$ ο κύκλος (1) εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου (2).
$R_1+R_3 = 3+a\text{-}3 = a$ Άρα $d_{K_1K_3} = R_1+R_3 \Rightarrow$ ο κύκλος (1) εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου (3)

(γ) $d_{K_2K_3} = \sqrt{(a-0)^2+(0-a)^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, $R_2+R_3 = a-3+a-3 = 2a-6 \Rightarrow$
$a\sqrt{2} = 2a-6 \Rightarrow 6 = (2-\sqrt{2})a \Rightarrow a = \dfrac{6}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{6(2+\sqrt{2})}{4-2} = 3(2+\sqrt{2})$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία
Φαξ - Τηλ: 2-379122 / Κοιν:9-641843
e-mail: cms@cyearn.pi.ac.cy

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΤΑΚΤΙΚΑ ΜΕΛΗ

(ειδικότητες Μαθηματικών)

Ημερομηνία αίτησης..............19......

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως τακτικό μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από το καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____

(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία :

ΕΠΩΝΥΜΟ...
ΟΝΟΜΑ..
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ...
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΗΣΗΣ......................19........
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ.............................Α.Κ.Α. ....

ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*

B.S. ☐ ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ..
M.S. ☐ ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ..
Ph.D. ☐ ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ..
Αλλο..

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ

Αριθμός και οδός...
Πόλη..Τ.Τ. ....
Χωριό...
Τηλέφωνα................................/ ..../ ....

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ

Ιδιότητα- Βαθμός ....
Σχολείο-Ίδρυμα-Υπηρεσία.......................................
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα .... Ιδιωτικό Τομέα..............

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

....

Αριθμός αποδ................... Εγγραφή: £2
Ημερομηνία αποδ..................... Ετήσια Συνδρομή: £10

Να επισυναπτούν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία
Φαξ - Τηλ: 2-379122 / Κοιν:9-641843
e-mail: cms@cyearn.pi.ac.cy

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΕΚΤΑΚΤΑ ΜΕΛΗ

(ειδικότητες εκτός Μαθηματικών ή για φοιτητές)

Ημερομηνία αίτησης..............19......

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως έκτακτο μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από το καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____
(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία :

ΕΠΩΝΥΜΟ..
ΟΝΟΜΑ..
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ...
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΗΣΗΣ......................19........
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ.............................Α.Κ.Α. ....

ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*

B.S. ☐ ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ..
M.S. ☐ ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ...
Ph.D. ☐ ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ..
Αλλο..

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ

Αριθμός και οδός...
Πόλη...Τ.Τ. ....
Χωριό..
Τηλέφωνα................................/ ..../ ....

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ

Ιδιότητα- Βαθμός ....
Σχολείο-Ίδρυμα-Υπηρεσία......................................
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα .... Ιδιωτικό Τομέα..............

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

....

Αριθμός αποδ.................... Εγγραφή: £2
Ημερομηνία αποδ.................... Ετήσια Συνδρομή: £10
Να επισυναπτούν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

'Application for Membership 2000
(January – December)

Date ....19...............

Please read the "Membership Categories" section of this form to determine the membership category for which you are eligible. Then fill out this application and return it as soon as possible.

....
Family Name *First* *Middle*

Place of birth ....
City *State* *Country*

Bate of Birth ....
City *State* *Country*

If formerly a member of AMS, please indicate dates ....

Check here if you are now a member of either MAA☐ or SIAM☐

Degrees, with institutions and dates ....

....

....

Present position ....

Firm or institution ....

....
City *State* *Zip/Country*

Primary Fields of Interest (choose five from the list at right)

....

Secondary Fields if Interest (choose from the list at right)

....

....

Address for all mail

....

....

....

Telephone number(s) ....

Electronic address ....

....
Signature

Prepayment Methods and Mailing Addresses

All prices quoted in U.S. dollars.
Payment by check must be drawn on U.S. bank if paid in U.S. dollars.

Send checks, money orders, UNESCO coupons to American Mathemetical Society, P.O. Box 5904, Boston, MA 02206-5904

To use credit cards, fill in information requested and mail to American Mathematical Society, P.O. Box 6248, Providence, RI 02940_6248 or call (401) 455-4000 or 1-800-321-4AMS.

For Foreign Bank Transfers: American Mathematical Society, State Street Bank and Trust Company, 225 Franklin St., ABA ≠011000028, Account ≠0128-262-3, Boston, MA 02110.

American Express☐ Discover ☐ VISA ☐ MasterCard ☐

....
Account number *Expiration date*

N9MO

Fields of Interest
If you wish to be on the mailing lists to receive information about publications in fields of mathematics in which you have an interest, please consult the list of major headings below. These categories will be added to your computer record so that you will be informed of new publications or special sales in the fields you have indicated.

EME Education/Mathematics Education
00 General
01 History and biography
03 Mathematical logic and foundations
04 Set theory
05 Combinatorics
06 Order, lattices, ordered algebraic structures
08 General algebraic systems
11 Number theory
12 Field theory and polynomials
13 Commutative rings and algebras
14 Algebraic geometry
15 Linear and multilinear algebra; matrix theory
16 Associative rings and algebras
17 Nonassociative rings and algebrass
18 Category theory, homological algebra
19 K-theory
20 Group theory and generalizations
22 Topological groups, Lie groups
26 Real functions
28 Measure and integration
30 Functions of a complex variable
31 Potential theory
32 Several complex variables and analytic spaces
33 Special functions
34 Ordinary differential equations
35 Partial differential equations
39 Finite differences and functional equations
40 Sequences, series, summability
41 Approximations and expansions
42 Fourier analysis
43 Abstract harmonic analysis
44 Integral transforms, operational calculus
45 Integral equations
46 Functional analysis
47 Operatory theory
49 Calculus of variations and optimal control; Optimization
50 Geometry
52 Convex and discrete geometry
53 Differential geometry
54 General topology
55 Algebraic topology
57 Manifolds and cell complexes
58 Global analysis, analysis on manifolds
60 Probability theory and stochastic processes
62 Statistics
65 Numerical analysis
68 Computer science
70 Mechanics of particles and systems
73 Mechanics of solids
76 Fluid mechanics
77 Optics, electromagnetic theory
80 Classical thermodynamics, heat transfer
81 Quantum theory
82 Statistical mechanics, structure of matter
83 Relativity and gravitational theory
85 Astronomy and astrophysics
86 Geophysics
90 Economics, operations research, programming, Games
91 Biology and other natural sciences, behavioral sciences
93 Systems theory; control
94 Information and communication, circuits

Membership Categories

Please read the following to determine what membership category you are eligible for, and then indicate below the category for which you are applying.

For ***ordinary members*** whose annual professional income is below $65,000, the dues are $99; for those whose annual professional income is $65,000 or more, the dues are $132.

For a joint **family membership**, one member pays ordinary dues, based on his or her income; the other pays ordinary dues based on his or her income, less $20. (Only the member paying full dues will receive the Notices and the Bulletin as a privilege of membership, but both members will be accorded all other privileges of membership).

Minimum dues for ***contributing members*** are $198.

For either ***students*** or ***unemployed individuals***, dues are $33, and annual verification is required.

The annual dues for ***receprocity members*** who reside outside the U.S. and Canada are $66. To be eligible for this classification, members must belong to one of those foreign societies with which the AMS has established a reciprocity agreement, and annual verification is required. Reciprocity members who reside in theU.S. or Canada must pay ordinary member dues ($99 or $132).

The annual dues for ***category-S members***, those who reside in developing countries, are $16. Members can chose only one privilege journal. Please indicate your choice below.

Members can purchase a ***multi-year membership*** by prepaying their current dues rate for either two, three, four or five years. This option is not available to category-S, unemployed, or student members.

1997 Dues Schedule (January through December)

Ordinary member, introductory rate			☐ $50
Ordinary member		☐ $99	☐ $132
Joint family member (full rate)		☐ $99	☐ $132
Joint family member (reduced rate)		☐ $79	☐ $112
Contributing member (minimum $192)			☐
Student member (please verify)[1]			☐ $33
Unemployed member (please verify)[2]			☐ $33
Reciprocity member (please verify)[3]	☐ $66	☐ $99	☐ $132
Category-S member4			☐ $16
Multi-year membership	$ .... for .... years		

[1] ***Student Verification*** (sign below)

I am a full-time student at ....

....Currently working toward a degree.

[2] ***Unemployed Verification*** (sign below) I am currently unemployed and actively seeking employment.

[3] ***Reciprocity Membership Verification*** (sign below) I am currently a member of the society indicated on the right and am therefore eligible for reciprocity membership.

....

Signature

[4]☐ send NOTICES ☐ send BULLETIN

Reciprocating Societies

- ☐ Allahabad Mathematical Society
- ☐ Asociación Matemática Española
- ☐ Australian Mathematical Society
- ☐ Azerbaijan Mathematical Society
- ☐ Berliner Mathematische Gessellschaft e.V.
- ☐ Calcutta Mathematical Society
- ☐ Croatian Mathematical Society
- ☐ Cyprus Mathematical Society
- ☐ Dansk Matematisk Forening
- ☐ Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.
- ☐ Edinburgh Mathematical Society
- ☐ Egyptian Mathematical Society
- ☐ Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik
- ☐ Glasgow Mathematical Society
- ☐ Indian Mathematical Society
- ☐ Iranian Mathematical Society
- ☐ Irish Mathematical Society
- ☐ Islenzka Staerdfraedafélagid
- ☐ Israel Mathematical Union
- ☐ János Bolyai Mathematical Society
- ☐ London Mathematical Society
- ☐ Malaysian Mathematical Society
- ☐ Mathematical Society of Japan
- ☐ MathematicalSociety of the Philippines
- ☐ Mathematical Society of the Republic of China
- ☐ Mongolian Mathematical Society
- ☐ Norsk Matematisk Forening
- ☐ Österreichische mathematische Gesellschaft
- ☐ Palestine Society for Mathematical Sciences
- ☐ Polskie Towarzystwo Matematyczne
- ☐ Punjab Mathematical Society
- ☐ Ramanujan Mathematical Society
- ☐ Real Sociedad Matemática Española
- ☐ Saudi Association for Mathematical Sciences
- ☐ Sociedad Colombiana de Matemática
- ☐ Sociedad de Matemática de Chile
- ☐ Sociedad Matemática de la Republica Dominicana
- ☐ Sociedad Matemática Mexicana
- ☐ Sociedade Brasileira Matemática
- ☐ Sociedade Brasileira de Matemática Aplicade e Computacional
- ☐ Sociedade Paranaense de Matemática
- ☐ Sociedade Portuguesa de Matemática
- ☐ Societate Catalana de Matemàtiques
- ☐ Societatea de Ştiinţe Matematice din România
- ☐ Societatea Matematicieenilor din Romania
- ☐ Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles
- ☐ Société Mathématique de Belgique
- ☐ Société Mathématique de France
- ☐ Société Mathématique Suisse
- ☐ Society of Associations of Mathematicians & Computer Science of Macedonia
- ☐ Society of Mathematicians, Physicists, and Astronomers of Slovenia
- ☐ South African Mathematical Society
- ☐ Southeast Asian Mathematical Society
- ☐ Suomen Matemaattinen Yhdistys
- ☐ Svenska Matematikersamfundet
- ☐ Union Mathemática Argentina
- ☐ Union of Bulgarian Mathematicians
- ☐ Union of Czech Mathematicians and Physicists
- ☐ Union of Slovak Mathematicians and Physicists
- ☐ Unione Matematica Italiana
- ☐ Vijnana Parishad of India
- ☐ Wiskundig Genootschap

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Τ.Θ. 25675, 1311 Λευκωσία, Κύπρος
Φαξ-τηλ: 2-379122/ Κοιν. 09-641843

ΕΝΤΥΠΟ ΑΓΟΡΑΣ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΤΗΣ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

(από Ελλαδίτες)

ΟΝΟΜΑ(κεφαλαία) : ____

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: ____

____

Τηλ: ______________ Φαξ: ________________E-mail: ________________________

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΕΤΟΣ ΕΚΔΟΣΗΣ	ΠΟΣΟΤΗΤΑ	ΤΙΜΗ ΑΝΑ ΜΟΝΑΔΑ(δρχ.)	ΜΕΡΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ
1988		1500	
1989		1500	
1990		1500	
1991		1500	
1993		1500	
1994		1500	
1997		1500	
1998		1500	
1999		1500	
		ΣΥΝΟΛΟ Α:	

*οι τιμές συμπεριλαμβάνουν το ταχυδρομικό κόστος

ΑΛΛΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΥ.Μ.Ε.

ΤΙΤΛΟΣ	ΠΟΣΟΤΗΤΑ	ΤΙΜΗ ΑΝΑ ΜΟΝΑΔΑ(δρχ.)	ΜΕΡΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ
ΠΡΑΚΤΙΚΑ Β' ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ		5000	
ΠΡΑΚΤΙΚΑ Α' ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ		3000	
ΠΡΑΚΤΙΚΑ Β' ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ		2000	
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ 1ης ΒΜΟ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15,5 ΕΤΩΝ		800	
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ 2ης ΒΜΟ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15,5 ΕΤΩΝ		800	
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ 3ης ΒΜΟ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15,5 ΕΤΩΝ		800	
		ΣΥΝΟΛΟ Β:	

ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ Α + Β = **

Το ποσό στο κουτί ** να σταλεί με τραπεζική επιταγή προς την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία σε δραχμές ή κυπριακές λίρες.