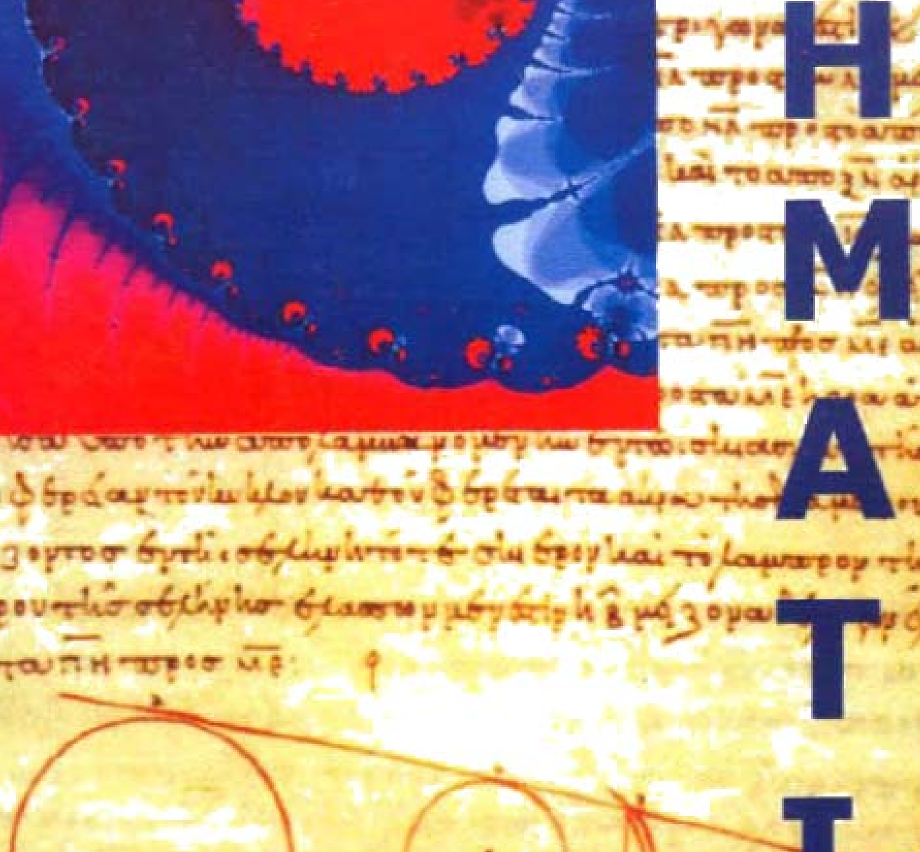
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ



Της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

ΤΕΥΧΟΣ ΙΖ' - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2000

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΖ'

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2000

Επιμέλεια Έκδοσης
Γρηγόρης Μακρίδης
Ανδρέας Φιλίππου

Επιμέλεια Εξωφύλλου
Άντρη Αρμεύτη

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η 17η έκδοση της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας περιέχει όλους τους διαγωνισμούς που οργάνωσε η ΚΥ.Μ.Ε. κατά τη σχολική χρονιά 1999-2000, τους διεθνείς διαγωνισμούς, όλες τις ενιαίες και απολυτήριες εξετάσεις, τις εισαγωγικές εξετάσεις για τα ανώτερα και ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα, ανακοινώσεις συνάδελφων Μαθηματικών και θέματα από εκδηλώσεις και συνέδρια.

Η έκδοση αυτή είναι βελτιωμένης εκτύπωσης για μικρότερο όγκο και με βελτιωμένη ποιότητα γραφικών παραστάσεων.

Στόχος της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας είναι η καλύτερη ενημέρωση για θέματα Μαθηματικής Παιδείας τόσο των μαθητών όσο και των συνάδελφων Μαθηματικών. Θέλουμε να πιστεύουμε ότι με αυτή την έκδοση επιτυγχάνουμε σε ένα μεγάλο βαθμό το σκοπό αυτό ο οποίος συμπληρώνεται με τα διάφορα σεμινάρια, συνέδρια και το καλοκαιρινό μαθηματικό σχολείο που η ΚΥ.Μ.Ε. οργανώνει κάθε χρόνο.

Ευχαριστώ όσους βοήθησαν στην έκδοση του τεύχους αυτού.

Δρ Γρηγόρης Μακρίδης
Πρόεδρος
Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Δεκέμβριος 2000

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Διοικητικό Συμβούλιο της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Σεπτέμβριος 2000 – Σεπτέμβριο 2002

Πρόεδρος	: **Γρηγόρης Μακρίδης**
Αντιπρόεδρος	: **Κλαίλια Σουρμελή-Σκοτεινού**
Γενικός Γραμματέας	: **Σάββας Αντωνίου**
Ταμίας	: **Μάριος Αντωνιάδης**
Οργανωτικός Γραμματέας	: **Ανδρέας Φιλίππου**
Βοηθός Ταμίας	: **Μάριος Ευσταθίου**
Σύμβουλοι:	
	Ανδρέας Σχοινής
	Αθανάσιος Γαγάτσης
	Σάββας Ιωαννίδης
	Ανδρέας Σαββίδης
	Ευθύβουλος Λιασίδης
	Νίκος Νικολαΐδης
	Όλγα Παπαγιάννη
	Ανδρέας Αθανασίου
	Θεόκλητος Παραγυίου

ΧΑΙ ΡΕΤΙΣΜΟΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
Δρα ΠΕΤΡΟΥ Μ. ΚΑΡΕΚΛΑ
ΣΤΗΝ ΤΕΛΕΤΗ ΒΡΑΒΕΥΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΟΥ ΔΙΑΚΡΙΘΗΚΑΝ
ΣΤΟΥΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΟΥ ΔΙΟΡΓΑΝΩΝΕΙ Η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Αίθουσα Εκδηλώσεων Τράπεζας Κύπρου (Αγία Παρασκευή)
Ιούνιος 2000

Με ιδιαίτερη χαρά απευθύνω χαιρετισμό στην τελετή βράβευσης των μαθητών και μαθητριών που διακρίθηκαν στους διαγωνισμούς της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας.

Η μέρα απονομής βραβείων σε μαθητές και μαθήτριες της Κύπρου αποτελεί ημέρα τιμής των γραμμάτων για τον τόπο μας. Το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού επιδίδοντας βραβεία αναγνωρίζει ταυτόχρονα την αξία της ποιότητας, της μάθησης και των υψηλών επιδόσεων για την πολιτιστική και εκπαιδευτική αναβάθμιση του τόπου μας.

Τα Μαθηματικά συνιστούν βασικό μάθημα της ελληνικής παιδείας, το οποίο ανέβασαν σε περιωπή οι Πυθαγόρειοι, ο Αρχιμήδης, ο Αρίσταρχος και άλλοι.

Οι αριθμοί, έλεγαν σι Πυθαγόρειοι, είναι η ουσία του Σύμπαντος. Η αναλογία των ημερών, των νυκτών και των εποχών και τόσων άλλων φυσικών φαινομένων συνιστά μαθηματική ακρίβεια. Έτσι, η Δημιουργία παρουσιάζεται ως αρχιτεκτονικό έργο πάνσοφου Γεωμέτρη Νου, για τον οποίο λέχθηκε ότι «αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί».

Για τη διατύπωση των νόμων, που είναι το κύριο γνώρισμα και η αληθινή ουσία των Θετικών Επιστημών, είναι απαραίτητη η χρήση των Μαθηματικών. Όλοι οι νόμοι που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα εκφράζονται με μαθηματικούς τύπους. Οι αλγεβρικές εξισώσεις, σι γεωμετρικές καμπύλες, σι γραφικές παραστάσεις, σι αριθμητικές σχέσεις, σι συναρτήσεις και τα ολοκληρώματα είναι οι διάφοροι μαθηματικοί τρόποι, με τους οποίους εκφράζονται οι σχέσεις των φαινομένων.

Γενικά κάθε θεωρία που ανάγεται στη σφαίρα των Θετικών Επιστημών διατυπώνεται με καθαρά μαθηματική μορφή, στηρίζεται στα Μαθηματικά και με αυτά εξηγείται και δικαιολογείται. Ο λόγος για τον οποίο τα Μαθηματικά είναι τόσο χρήσιμα στη διατύπωση των γενικών νόμων των Θετικών Επιστημών είναι το απόλυτο κύρος των μαθηματικών τύπων και η ασφαλής γνώση Που αυτά παρέχουν.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία ενισχύει τις προσπάθειες του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού με την πολύτιμη και αφειδώλευτη προσφορά της στην καλλιέργεια των Μαθηματικών και αναπτύσσει ύψιστης σημασίας δραστηριότητες με διαγωνισμούς, εκδόσεις, διαλέξεις και Συνέδρια , όπως το επιτυχές Μεσογειακό Συνέδριο που έγινε με τη συνεργασία του Π.Ι. και η Ολυμπιάδα

Εκφράζω τα θερμά μου συγχαρητήρια στην ΚΥΜΕ για όλες τις εκδηλώσεις και δραστηριότητές της και ευχαριστώ ιδιαίτερα τους μαθηματικούς που προσφέρουν τις υπηρεσίες τους αφιλοκερδώς για την προώθηση των στόχων της ΚΥΜΕ.

Σήμερα βραβεύονται μαθητές και μαθήτριες της *Β΄* και Γ΄ Λυκείου που διακρίθηκαν σε επαρχιακούς και παγκύπριους διαγωνισμούς και όσοι πέτυχαν συμμετοχή στη Βαλκανική και Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.

Τελειώνοντας εκφράζω θερμές ευχαριστίες στον ευγενή χορηγό των διαγωνισμών, την Τράπεζα Κύπρου και συγχαίρω θερμά τους μαθητές και μαθήτριες που διακρίθηκαν. Τους εύχομαι κάθε πρόοδο και προκοπή στις περαιτέρω ευγενικές τους προσπάθειες.

ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΕΔΡΟΥ ΤΗΣ ΚΥΜΕ
Δρα ΓΡΗΓΟΡΗ ΜΑΚΡΙΔΗ
ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΤΕΛΕΤΗ ΒΡΑΒΕΥΣΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ
Μάιος-Ιούνιος 2000

Είναι πάντοτε μεγάλη ευχαρίστηση όλων των εκπαιδευτικών να παρευρίσκονται σε τελετές όπως η σημερινή γιατί αυτή αντικατοπτρίζει το έργο τους και την προσφορά τους στην Παιδεία. Η τιμή για ακαδημαϊκές επιτυχίες ανήκει εκτός από τους μαθητές μας, στους γονείς για την ηθική υποστήριξη που παρέχουν στα παιδιά τους, στους εκπαιδευτικούς για την ακαδημαϊκή υποστήριξη τους αλλά και στους χορηγούς αθλοθέτες για την επιβράβευση και την αναγνώριση που προσφέρουν στους μαθητές.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία θέλοντας να ενισχύσει το πρόγραμμα προετοιμασίας των μαθητών για τις Μαθηματικές Ολυμπιάδες πέτυχε με επίμονες διαπραγματεύσεις με τον Υπουργό Παιδείας και Πολιτισμού την έγκριση όπως ένας εκπαιδευτικός από κάθε επαρχία πάρει μείωση δύο διδακτικών περιόδων την βδομάδα οι οποίες θα αφιερώνονται στην ειδική προετοιμασία των μαθητών για τις μαθηματικές Ολυμπιάδες. Το ειδικό αυτό πρόγραμμα θα αρχίσει με την έναρξη της νέας σχολικής χρονιάς 2000-2001. Θεωρούμε την απόφαση αυτή ως μια από τις σημαντικότερες που πήρε το ΥΠΠ για την αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας της Κύπρου και για την ενίσχυση της προσπάθειας της ΚΥ.Μ.Ε. για μεγαλύτερες επιτυχίες στις Διεθνείς Ολυμπιάδες. Ευχαριστούμε τον Υπουργό Παιδείας και Πολιτισμού κ. Ουράνιο Ιωαννίδη.

Η επόμενη προσπάθεια μας είναι η δημιουργία κινήτρων αλλά και εξαργύρωσης της επιτυχίας με εξασφάλιση μονάδων ή ακόμη και θέσης στο πανεπιστήμιο για μαθητές οι οποίοι πετυχαίνουν μετάλλιο σε Ολυμπιάδες, όπως παρόμοια γίνεται με τους αθλητές οι οποίοι κερδίζουν μετάλλια. Το μετάλλιο για πνευματική επιτυχία είναι πολύ ανώτερο από το μετάλλιο αθλητικής επιτυχίας για δύο βασικούς λόγους, κατά τη γνώμη μου:

1. Μετά από ένα μετάλλιο αθλητικής Ολυμπιάδας αρχίζει συνήθως η παρακμή της ικανότητας του σωματικού αθλητή ενώ μετά από ένα μετάλλιο πνευματικής Ολυμπιάδας αρχίζει η άνθιση και η ανάπτυξη του πνευματικού αθλητή.
2. Ο σωματικός αθλητής κερδίζει το μετάλλιο και εκτός από τις τιμές δεν προσφέρει καμία γνώση στη κοινωνία ενώ ο πνευματικός αθλητής εκτος από τις τιμές, η σίγουρη ανάπτυξή του σε επιστήμονα θα συνεχίσει να προσφέρει νέες γνώσεις όχι μόνο στην κοινωνία που ζει αλλά προφανώς και σε όλη τη διεθνή κοινωνία.
Ελπίζουμε ότι θα πετύχουμε και αυτό το σκοπό μας πολύ σύντομα.

Στόχος της ΚΥ.Μ.Ε. ήταν πάντοτε να αυξήσει τον αριθμό των μαθητών που συμμετέχουν σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Στην αρχή του έτους 2000, στα πλαίσια του Β' Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας , αλλά και στα πλαίσια του διεθνούς έτους Μαθηματικών 2000, οργάνωσε τη μεγαλύτερη Ολυμπιάδα σε συμμετοχή διαγωνιζομένων που έγινε ποτέ στην Κύπρο. Περίπου 4000 μαθητές έλαβαν μέρος στη Μαθηματική Ολυμπιάδα της 8ης Ιανουαρίου 2000 με μαθητές από Δ' Δημοτικού έως Γ' Λυκείου. Στην Ολυμπιάδα αυτή δοκιμάσαμε με επιτυχία την εξέταση με δοκίμια πολλαπλής επιλογής και καταφέραμε να διορθώσουμε με ηλεκτρονική μέθοδο μέσα σε ένα βράδυ περίπου 4000 δοκίμια οργανώνοντας την

τελετή απονομής Χρυσών, Αργυρών και Χάλκινων μεταλλίων την αμέσως επόμενη μέρα και βραβεύοντας 200 περίπου μαθητές. Ο ανάλογος αριθμός σε συμμετοχή στην Ελλάδα θα ήταν 80000 μαθητές ενώ στις ΗΠΑ θα ήταν 2 εκατομμύρια μαθητές, φαινόμενο ίσως εκτός πραγματικότητας για αυτές ή άλλες χώρες.
Πιστεύω ότι η προσπάθεια αυτή της ΚΥ.Μ.Ε., που με την ακούραστη προσπάθεια 100 και πλέον εκπαιδευτικών έγινε πραγματικότητα, δημιούργησε ιστορία αλλά πολύ περισσότερο επηρέασε τη στάση μαθητών και γονιών και τους κέντρισε το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Με απόφαση του Συμβουλίου της ΚΥΜΕ η Ολυμπιάδα γίνεται πλέον θεσμός γιατί αποδείχθηκε ως ένα ισχυρό εργαλείο για την αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας του τόπου μας.
Στην όλη αυτή προσπάθεια χρωστούμε ευχαριστίες για τη συνεργασία τους στο Πανεπιστήμιο Κύπρου αλλά ιδιαίτερα στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Είμαι στην ευχάριστη θέση να σας πληροφορήσω ότι στην έκδοση της Ευρωπαϊκής Επιτροπής (Μάιος 2000) με τίτλο «European report on quality of school education» αναφέρεται κατάλογος καλής πρακτικής σε χώρες του Ευρωπαϊκού χώρου για την αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας. Καταγράφονται μόνο έξι χώρες για αυτό το θέμα συμπεριλαμβανομένης και της Κύπρου. Η δραστηριότητα που αναφέρεται στην Κύπρο είναι η Μαθηματική Ολυμπιάδα που οργανώσαμε στις 8 Ιανουαρίου 2000.

Είμαστε στην ευχάριστη θέση να σας ανακοινώσουμε την πιο πρόσφατη επιτυχία της ΚΥΜΕ στην 17η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα που έγινε στις 3-9 Μαΐου 2000 στη Μολδαβία . Οι μαθητές μας Τσίκκου Χάρις και Πετρίδης Νεόφυτος πέτυχαν Χάλκινα Μετάλλια. Συγχαρητήρια αξίζουν επίσης στους συνάδελφους εκπαιδευτικούς που βοήθησαν στα ειδικά μαθήματα προετοιμασίας, Ανδρέα Φιλίππου, Θεόκλητο Παραγιό, Μάριο Αντωνιάδη, Ανδρέα Φαλά, Σάββα Ιωαννίδη, Μυρούλα Παλλαρή και Παντελή Ζαμπυρίνη. Με σκληρή δουλειά από τους μαθητές μας αλλά και από τους συνάδελφους μαθηματικούς ελπίζουμε σε ανάλογη επιτυχία στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα που θα γίνει στη Κορέα τον Ιούλιο του 2000.

Οι μαθητές που βρίσκονται εδώ σήμερα έχουν ένα μεγάλο κοινό. Όλοι αγαπούν τα Μαθηματικά και έχουν συνειδητοποιήσει τη σημαντικότητά τους. Με αυτά ως αρχή και με σκληρή και επιμελή δουλειά έχουν καταφέρει να ξεχωρίσουν και να δείξουν ότι η θέληση μπορεί να τους ανεβάσει ένα σκαλοπάτι πιο ψηλά. Εδώ δεν υπάρχει τύχη, ούτε ευνοϊκός αέρας, ούτε καλύτερο αυτοκίνητο για τη κούρσα......εδώ μιλούν τα μυαλά και η ικανότητα ως αποτέλεσμα μιας σκληρής προσπάθειας. Είναι όλοι άξιοι συγχαρητηρίων και πρέπει εμείς να είμαστε πιο περήφανοι και χαρούμενοι από αυτούς διότι είναι οι απόγονοί μας και το τελικό προϊόν της παραγωγής μας το οποίο φαίνεται άριστης ποιότητας.

Τέλος θέλω να συγχαρώ την τοπική ομάδα του Συμβουλίου της ΚΥΜΕ για την οργάνωση της τελετής αυτής και να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τα Κυπριακά Διυλιστήρια Κύπρου και το διευθυντή τους για την υποστήριξη που δίνουν μέσω της ΚΥΜΕ προς την αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης στην Κύπρο.

ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΥ ΕΠΙΘΕΩΡΗΤΗ ΛΑΡΝΑΚΑΣ – ΑΜΜΟΧΩΣΤΟΥ Π.Λ.Ε. Κ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΜΑΤΣΗ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΤΕΛΕΤΗ ΒΡΑΒΕΥΣΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

Ιούνιος 2000

Με την ευκαιρία της ωραίας αυτής εκδήλωσης της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας, που γίνεται για τη βράβευση των μαθητών που διακρίθηκαν στους διαγωνισμούς μαθηματικών της φετινής σχολικής χρονιάς, απευθύνω σ’ όλους σας θερμότατο χαιρετισμό αγάπης και εκτίμησης.

Ο Παγκύπριος Διαγωνισμός Μαθηματικών Α΄ Τάξης Λυκείων “Πετράκης Γιάλλουρος”, καθώς και ο αντίστοιχος επαρχιακός διαγωνισμός Μαθηματικών για τις Β΄ και Γ΄ τάξεις Λυκείων Λάρνακας–Αμμοχώστου “Πετράκης Κυπριανού”, έχουν γίνει πια θεσμός.

Όπως είναι γνωστό, τα μαθηματικά, από τα πανάρχαια χρόνια αποτελούν το βασικό άξονα της Ελληνικής Κλασσικής Παιδείας. Η μαθηματική γλώσσα αποτελεί ένα ιδιαίτερο μέσο για την έκφραση των νόμων της φύσης, και διακρίνεται ιδιαίτερα για την ακρίβεια και τη σαφήνειά της.

Τα μαθηματικά έπαιξαν και παίζουν σημαντικό ρόλο στην κοινωνική αγωγή γιατί συνδυάζουν τον ιδεολογισμό και τον πραγματισμό, καλλιεργούν και επεκτείνουν την κριτική σκέψη των νέων μας, και προάγουν την αρετή.

Ο λόγος για τον οποίο τα μαθηματικά είναι τόσο χρήσιμα στη διατύπωση των νόμων των θετικών επιστημών είναι το απόλυτο κύρος των μαθηματικών τύπων και η ασφαλής γνώση που παρέχουν. Γι’ αυτό, πιστεύω απόλυτα πως μέσα από τους διαγνωστικούς αυτούς μαθηματικούς διαγωνισμούς, ενθαρρύνεται και προωθείται σημαντικά η ανέλιξη των μαθητών μας που έχουν ιδιαίτερη κλίση στα μαθηματικά. Τους δίδεται η ευκαιρία να καλλιεργήσουν και να αναπτύξουν τις απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες ώστε να είναι σε θέση να λάβουν μέρος και στους διεθνείς διαγωνισμούς.

Το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, δίνει ιδιαίτερη σημασία στα μαθηματικά, και επιδίωξή μας είναι η αναβάθμιση και ο εκσυγχρονισμός του μαθήματος σ’ όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης.

Αυτός είναι και ο λόγος που ενθαρρύνουμε τους διάφορους διαγωνισμούς που διοργανώνονται από την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, καθώς και τους διεθνείς, “Μαθηματική Ολυμπιάδα” και “Βαλκανιάδα”.

Συγχαίρω θερμά τους διοργανωτές της όλης προσπάθειας και εκδήλωσης αυτής, καθώς και το Κυπριακό Διυλιστήριο Πετρελαίου για την αθλοθετήσει του διαγωνισμού.

Ιδιαίτερα όμως συγχαίρω τα παιδιά που ανταποκρίθηκαν και διακρίθηκαν σ’ αυτούς τους διαγωνισμούς, καθώς επίσης τους καθηγητές και τους γονείς τους. Εύχομαι σ’ όλους σας κάθε ευτυχία για τις μέρες που μας έρχονται.

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΕΔΡΟΥ ΤΗΣ ΚΥΜΕ
Δρα ΓΡΗΓΟΡΗ ΜΑΚΡΙΔΗ
ΣΤΗ ΤΕΛΕΤΗ ΕΝΑΡΞΗΣ ΤΟΥ Β' ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
WELCOMING ADDRESS
Ιανουάριος 2000

Έντιμε κύριε Υπουργέ Παιδείας και Πολιτισμού (Honourable Minister of Education and Culture) , κύριοι Βουλευτές (members of the parliament), Mr Ambassador of Israel, κύριε Δήμαρχε Λατσιών (Mr Mayor of Latsia), κύριε ΓΔΥΠΠ (director general of the MEC), αξιότιμα μέλη της ΕΕΥ, κύριοι Δ. Τμημάτων του ΥΠΠ (directors of departments of the MEC), Mr Chairman of CASTME, κύριε Αντιπρύτανη του Πανεπιστημίου Κύπρου (Mr Vice-rector of the UOC), κύριε Εκτελεστικέ Διευθυντή του Intercollege(Executive dean of Intercollege), προέδροι τμημάτων του Πανεπιστημίου Κύπρου (chairpersons of depts of the UOC), κύριοι ΠΛΕ(chief Education officers), κύριοι Επιθεωρητές (inspectors), κύριοι Διευθυντές σχολείων(school principals), εκλεκτοί προσκεκλημένοι (distinguished guests), συνάδελφοι εκπαιδευτικοί και φοιτητές (colleagues and students), κυρίες και κύριοι (ladies and gentlemen).

Εκ μέρους της οργανωτικής επιτροπής και εκ μέρους του συμβουλίου της ΚΥ.Μ.Ε. σας καλωσορίζω στην τελετή έναρξης του Β' Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.

On behalf of the organising committee and the council of the Cyprus Mathematical Society I would like to welcome you to the opening ceremony of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education.

In January 1997 we organised the 1st Mediterranean Conference in Mathematics with a dream and a target. The target was to bring together educators and researchers from the Mediterranean area in order to develop educational cooperation as well as to speed up the promotion of Mathematics Education and the dissemination of research throughout the Mediterranean and beyond. The target was successful since several partneships have developed from contacts made during the 1st MEDCONF and some cooperation groups are present here today in their full content.
The dream was to see the conference becoming an institution organised every two or three years. This dream has come today in this hall true with twice as many papers to be presented and twice as many participants from abroad and locally. I shall say that registration for the conference began six months ago.

Dear colleagues, you are here because you know and you believe that Mathematics is a very important, if not the most important, science. It is the backbone of all sciences, it is the engine of understanding and the catalyst of brain development, it is the language of explaining the unexplained, it is the tool for solving any kind of problem. It is a beautiful science.

In the 20th century we have seen many miracles. We have seen plants growing where they never grew, we have seen cure to the uncure, we have seen blind people regaining their sight, we have seen people flying over unreachable places, we have seen the miracle of communication and digital computers, we have seen stopped heart

beats to start beating again....all of the above are just a sample of the miracles that we have seen in the 20th century.
We haven't seen one major miracle yet. The miracle of teaching those who do not want to be taught and of making understand those who never understand.
I am certain that we will see the miracle in the 21st century because of you, because you care and you are here. This is the ultimate goal of all of us....to improve education, to improve learning, to increase the speed of learning and to make learning enjoyable.
It is not accidental that the year 2000 has been declared the year of Mathematics. The volume of information and knowledge to be acquired is becoming so large that people will not be able to be taught what they need to know in a lifetime. We need to teach people the way to self-teach and self-learn and more generally to introduce methods for learning how to learn, methods which still remain undeveloped. To train an individual to self-learn requires brain training and the best way to train a brain is through Mathematical Thinking and reasoning.

The Cyprus Mathematical Society, in its aim to celebrate the year of Mathematics is organising tomorrow a special Cyprus Mathematical Olympiad where pupils from age 9 to 18 are allowed to participate. Some 4000 pupils are expected to participate. Gold, Silver and Bronze medals will be awarded to about 6% of the participants. The awarding will take place on Sunday 9th of January in the afternoon . It is the first time in Cyprus that a Mathematics competition is organised to include primary education pupils .

In addition, we organise a Mathematical Festival in which pupils from age 6 to 18 can participate. Pupils will be able to play with math problems in difficulty stages and receive diplomas for the stage they achieve.
We believe that these two activities will enhance the interest of pupils in Mathematics and improve their attitude towards the subject.

All of these activities, which will occur during the following 48 hours, became possible due to the excellent partners that we have and to the hard work of many people. I will not attempt to thank specific people to avoid the danger of leaving someone out.
I have to thank the Cyprus Pedagogical Institute of the MInistry of Education and Culture for the coorganisation of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education. The Pedagogical Institute was the base for the overall organisation and through the Pedagogical Institute the Ministry of Education and Culture is proving one more time how important they consider such conferences for the development of Education.
I have to thank the department of mathematics and statistics of the university of Cyprus and the Education department of the university of Cyprus for their cooperation and major role in the review committee as well as for their role in the organisation of the Mathematics Olympiad . I thank the Hellenic Mathematical Society and the Union of Cyprus Mathematics teachers for their cooperation in the preparation of the conference and their support and above all the members of the council of the Cyprus Mathematical Society who spend so much of their free time to make this happen.

I would like to point out the excellent work done by the review committee, the Mathematics Olympiad Committee and the Mathematics Festival Committee as well as the members of the organising committee whose work is promising a successful conference.

We would also like to thank our sponsors whose support has played a very significant role in the realisation of the activities of the conference.
We thank the
primary school teachers union POED , the secondary school teachers union OELMEK, Roosevelt University of Chicago and the Illinois Institute of Technology in Chicago for their financial support,
the CASTME-Commonwealth and the Embassy of Israel for covering the traveling expenses of participants,
the Cyprus Tourism Organisation for the support of the excursions following the conference,
the Municipality of Latsia town (the town where the Pedagogical Institute is located) for the welcoming luncheon for the participants from abroad,
the Softwarehouse Europe for the support and management of the website of the conference and
special thanks to our major sponsor Intercollege for its financial support of many activities and for hosting the conference and other activities on its premises.

Closing, I have to thank the participating authors for submitting quality papers to the conference.....without them we would n't have had a conference.
I would particularly like to note the large group of participants from the neighbouring country of Israel, the participant and colleague from faraway Peru, and the Turkish Cypriot citizen of Cyprus coming from Turkey with his daughter.

Thank you all for coming and I wish you a pleasant stay while in Cyprus.
Εύχομαι η συμμετοχή σας στις εργασίες του Συνεδρίου να είναι δημιουργική, αποδοτική και ευχάριστη.

ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΕΔΡΟΥ ΤΗΣ ΚΥΜΕ
Δρα ΓΡΗΓΟΡΗ ΜΑΚΡΙΔΗ
ΣΤΗΝ ΤΕΛΕΤΗ ΕΝΑΡΞΗΣ ΤΟΥ 17ου ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
Αθήνα , Νοέμβριος 2000

Κύριε Πρόεδρε της Ε.Μ.Ε. , εκλεκτοί προσκεκλημένοι, συνάδελφοι,

Εκ μέρους του Διοικητικού Συμβουλίου της ΚΥΜΕ και με ιδιαίτερη χαρά απευθύνω τον πιο θερμό και εγκάρδιο χαιρετισμό στο 17ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, το οποίο έχει ξεχωριστή διάσταση φέτος αφού εορτάζουμε το έτος Μαθηματικών.
Τα Μαθηματικά σήμερα , σε αυτή την ιστορική και θρυλική πόλη των Αθηνών έχουν τη γιορτή τους γιατί,

- τα μαθηματικά αποτελούν το κυριότερο διεθνές μέσο επικοινωνίας και βασικό εργαλείο επεξεργασίας και διαχείρισης δεδομένων και καταστάσεων σε όλους τους παραγωγικούς τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας

- τα μαθηματικά αποτελούν σημαντικό καταλύτη ανάπτυξης/καλλιέργειας βασικών δεξιοτήτων και ικανοτήτων όπως η κριτική και αναλυτική σκέψη, λύση προβλήματος κ.α..

- τα μαθηματικά οργανώνουν, μεθοδεύουν και ασκούν την ανθρώπινη σκέψη, εμπλουτίζουν τη φαντασία και αυξάνουν τη δημιουργικότητα

- τα μαθηματικά είναι ένα αυστηρό οικοδόμημα εννοιών, άθληση του νου και άμεση προέκταση της λογικής

- τα μαθηματικά αποτελούν στοιχειώδη συνιστώσα στην προσπάθεια καλλιέργειας γενικής παιδείας και ανάπτυξης αξιών και αρχών με αποδοχή σε όλο το σύγχρονο κόσμο

- τα μαθηματικά αποτελούν στοιχειώδες εργαλείο για αντιμετώπιση καθημερινής φύσεως αναγκών επικοινωνίας του ανθρώπου

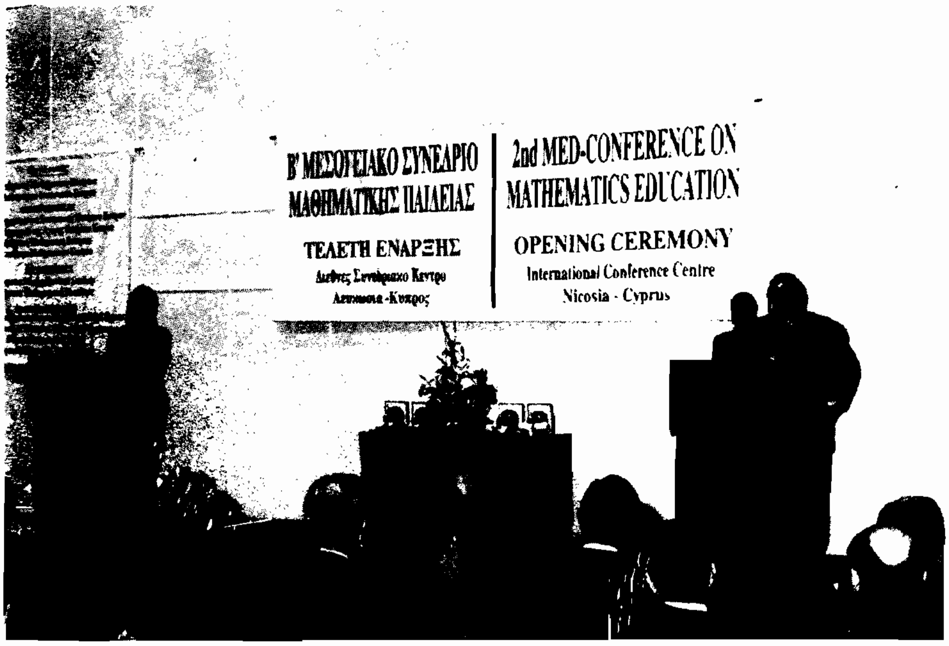
- τα μαθηματικά και η τεχνολογία είναι σώμα και ψυχή, έχουν στενή και αμφίδρομη σχέση, αφού η μεν τεχνολογία στηρίζεται στα μαθηματικά, αυτά με τη σειρά τους εξελίσσονται με τη βοήθεια της. Οι ραγδαίες τεχνολογικές εξελίξεις και η διεθνοποίηση των κοινωνικών και εργασιακών σχέσεων, καθώς και η αυτόματη μεταφορά της πληροφορίας, είτε αυτή αφορά την εκπαίδευση και την έρευνα, είτε αφορά την επιχείρηση, την οικονομία, την εργασία, απαιτούν νέες ικανότητες από τον άνθρωπό τις οποίες μπορεί να τις πάρει από τα μαθηματικά.

- στο σύγχρονο κόσμο που ζούμε η εκπαίδευση πρέπει να δώσει στο νέο, όχι μόνο τις απαραίτητες γνώσεις αλλά κυρίως να τον κάνει ικανό να ερευνά, να αναλύει, να αξιολογεί, να επιλέγει και να χρησιμοποιεί κατάλληλα τις γνώσεις, δεξιότητες που αναπτύσσονται μέσα από τα μαθηματικά.

Στην Αρχαία Ελλάδα τα μαθηματικά ήταν απαραίτητο εφόδιο για τη μελέτη οποιουδήποτε άλλου θέματος, είτε αυτό ήταν φιλοσοφία, είτε ιατρική, είτε φυσιογνωστικά. Γι' αυτό στην είσοδο της Ακαδημίας του Πλάτωνα ήταν γραμμένο « Μηδείς αγεωμέτρητος εισήτω».

Πέραν όμως από αυτά τα οποία εμείς θεωρούμε κοινούς τόπους , θα πρέπει να υπογραμμίσουμε με έμφαση το γεγονός πως τα μαθηματικά είναι η βάση όλων σχεδόν των επιστημών και πως όσοι μπορούν να κατανοήσουν τα μαθηματικά τότε μπορούν να κατανοήσουν και να μάθουν οτιδήποτε άλλο.

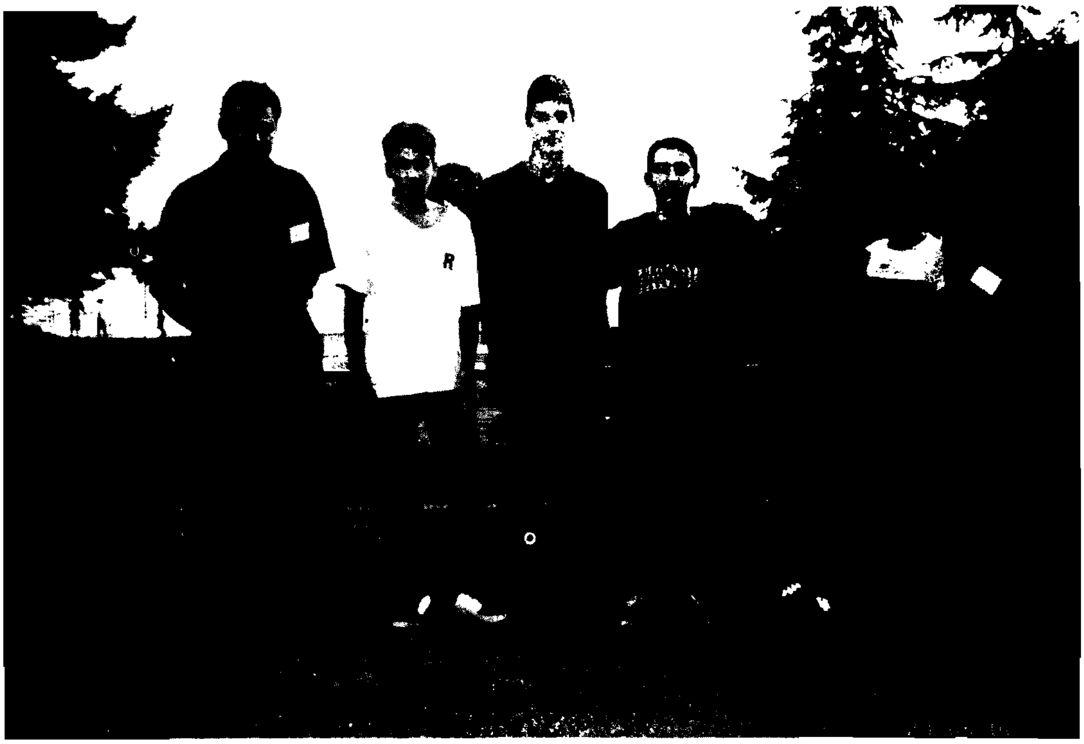
Εύχομαι κάθε επιτυχία στις εργασίες του Συνεδρίου και συγχαρητήρια στην Ε.Μ.Ε.



Φωτογραφίες από την τελετή έναρξης του Β' Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας που πραγματοποιήθηκε τον Ιανουάριο του 2000.

Φωτογραφίες από την βράβευση του καθηγητή Δημήτριου Χριστοδούλου με το Βραβείο «ΖΗΝΩΝ» της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας.

Φωτογραφίες από την βράβευση των Διευθυντών των Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού, Παιδαγωγικού Ινστιτούτου Κύπρου και Διεύθυνσης Μέσης Εκπαίδευσης για την προσφορά τους στη Μαθηματική Παιδεία της Κύπρου.



Φωτογραφίες από τις Κυπριακές αποστολές στη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 που έγινε στα Σκόπια από 18-22 Ιουνίου 2000, στη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές Λυκείου που έγινε στη Μολδαβία από 3-9 Μαΐου 2000 και στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα για φοιτητές πανεπιστημίου που έγινε στο Ιράν τον Ιούλιο του 2000.

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ</u>

Στο τεύχος θ΄ του περιοδικού "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ" δημοσιεύτηκε άρθρο μας με τίτλο "Τέλειοι αριθμοί". Υπενθυμίζουμε εδώ τον ορισμό του τελείου αριθμού και στη συνέχεια δίνουμε τις ιδιότητές του με κάποιες αποδείξεις τους.

<u>Ορισμός</u>. : Τέλειος λέγεται ο φυσικός αριθμός ρ που είναι ίσος με το άθροισμα των μικρότερων του ρ διαιρετών του. Θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι τέλειος είναι ο φυσικός αριθμός που ισούται με το μισό του αθροίσματος **<u>όλων</u>** των διαιρετών του.*[1] (Με τον ορισμό αυτό συμπεριλαμβάνεται στους διαιρέτες του ρ και ο εαυτός του). Μέχρι σήμερα δεν έχει ανακαλυφθεί <u>περιττός</u> τέλειος αριθμός, είναι όμως γνωστοί 38 άρτιοι τέλειοι. Έτσι, όπου στη συνέχεια του άθρου αναφέρεται "τέλειος" αυτό σημαίνει **<u>άρτιο τέλειο αριθμό</u>**.

<u>1η Ιδιότητα</u>. Κάθε τέλειος αριθμός ρ είναι τρίγωνος, μπορεί δηλαδή να

γραφτεί στη μορφή $\boxed{\rho = \frac{\kappa(\kappa+1)}{2},}$ $\kappa \in \mathrm{N}$ (1)

Είναι γνωστόν ότι **κάθε τρίγωνος αριθμός ισούται με το ημιγινόμενο δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών**. Διαπιστώνοντας λοιπόν ότι για ένα τέλειο αριθμό **ρ** ισχύει αυτή η σχέση συμπεραίνουμε ότι ο τέλειος αυτός αριθμός είναι και τρίγωνος.

Έτσι για τους πρώτους πέντε τέλειους αριθμούς βρίσκουμε ότι:

$\alpha)\quad 6 = \frac{3\times 4}{2},\qquad \beta)\quad 28 = \frac{7\times 8}{2},\qquad \gamma)\quad 496 = \frac{31\times 32}{2},$

$\delta)\quad 8128 = \frac{127\times 128}{2},\qquad \varepsilon)\quad 33550336 = \frac{8191\times 8192}{2}$

ισότητες που μας λένε ότι οι τέλειοι αυτοί είναι και τρίγωνοι.

<u>Απόδειξη της πρώτης ιδιότητας.</u>

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Ευκλείδη $\forall \nu \in \mathrm{N}$ αν ο αριθμός $(2^{\nu}-1)$ είναι πρώτος

τότε ο αριθμός $\rho = (2^{\nu}-1)\cdot 2^{\nu-1}$ είναι τέλειος.*[2]

Έχουμε λοιπόν: $\rho=\left(2^{\nu}-1\right)\cdot 2^{\nu-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(2^{\nu}-1\right)\cdot 2^{\nu}=\frac{1}{2}\kappa(\kappa+1)$,

δηλαδή κάθε τέλειος αριθμός είναι και τρίγωνος.

<u>2η Ιδιότητα</u>. Το 8πλάσιο τέλειου αριθμού ρ , αυξημένο κατά 1, είναι τετράγωνος αριθμός, δηλ. $8\rho+1=\chi^2$, $\chi\in\mathbb{N}$.[*3]

<u>Απόδειξη</u>.

$8\rho+1=8\cdot\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}+1=4\kappa(\kappa+1)+1=4\kappa^2+4\kappa+1=(2\kappa+1)^2$, που είναι τετράγωνος.

<u>Πράγματι</u>. Για τον τέλειο αριθμό **6** ισχύει: 8Χ6+1 = 49 = 7^2

Για τους τέλειους αριθμούς **28 και 496** έχουμε: αντίστοιχα:

8Χ**28**+1 = 225 = 15^2 και 8Χ**496**+1 = 63^2

<u>3η Ιδιότητα</u>. Το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των διαιρετών ενός τέλειου αριθμού ισούται με 2.

Επαληθεύουμε την πρόταση για τους διαιρέτες των τελείων αριθμών 6 και 28 και έχουμε αντίστοιχα:

α) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$ και β) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$

<u>Απόδειξη της τρίτης ιδιότητας</u>[*4]

Έστω ρ ο τέλειος αριθμός. Οι διαιρέτες του ρ κατά αύξουσα τάξη είναι οι αριθμοί: $1,\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \ldots,\ \chi_\nu,\ \chi_{\nu+1},\ \chi_{\nu+2},\ \ldots,\chi_{2\nu},\ \rho$

Είναι φανερό ότι ισχύουν: $1\cdot\rho=\chi_1\cdot\chi_{2\nu}=\chi_2\cdot\chi_{2\nu-1}=\ldots=\chi_\nu\cdot\chi_{\nu+1}$, δηλαδή

$\chi_{2\nu}=\frac{\rho}{\chi_1}$, $\chi_{2\nu-1}=\frac{\rho}{\chi_2}$, $\chi_{2\nu-2}=\frac{\rho}{\chi_3}$,..... **(2)**

Από τον ορισμό του τέλειου ισχύει για τους διαιρέτες του ρ:

$1+\chi_1+\chi_2+\chi_3+\ldots+\chi_\nu+\ldots+\chi_{2\nu-2}+\chi_{2\nu-1}+\chi_{2\nu}=\rho$ ή

Για το άθροισμα όλων των διαιρετών του ρ, συμπεριλαμβανομένου του ρ, ισχύει: $1+\chi_1+\chi_2+\chi_3+...+\chi_\nu+...+\chi_{2\nu-2}+\chi_{2\nu-1}+\chi_{2\nu}+\rho=2\rho$

Θέτω : Α = το άθροισμα των αντίστροφων όλων των διαιρετών του ρ. Τότε, γράφοντας την προηγούμενη σχέση σαν αθροίσματα ανά δύο των όρων που ισαπέχουν από τα άκρα, και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (2) θα έχω:

$$A=\left(1+\frac{1}{\rho}\right)+\left(\frac{1}{\chi_1}+\frac{\chi_1}{\rho}\right)+\left(\frac{1}{\chi_2}+\frac{\chi_2}{\rho}\right)+.....+\left(\frac{1}{\chi_\nu}+\frac{\chi_\nu}{\rho}\right)$$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι ρ, άρα:

$$A=\frac{\rho+1}{\rho}+\frac{x_{2\nu}+x_1}{\rho}+\frac{x_{2\nu-1}+x_2}{\rho}+\frac{x_{2\nu-2}+x_3}{\rho}+....+\frac{x_{\nu+1}+x_\nu}{\rho}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1+x_1+x_2+x_3+...+x_{2\nu}+\rho}{\rho}=\frac{2\rho}{\rho}=2$$

Αποδείχτηκε έτσι το ζητούμενο, ότι δηλαδή το άθροισμα των αντιστρόφων όλων των διαιρετών ενός τέλειου αριθμού ισούται με 2.

<u>4η Ιδιότητα</u>: Κάθε τέλειος αριθμός ρ (εξαιρουμένου του 6) ισούται με το άθροισμα κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών (Περιοδικό "ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ", τεύχος 1/1987, σελ. 65-66).

Η πρόταση αυτή γράφεται ως μερικό άθροισμα σειράς: $\rho=\sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa-1)^3$

Επιβεβαίωση της ιδιότητας αυτής έχουμε με τους τέλειους 28, 496, 8128.

α) Για τον πρώτο τέλειο, τον αριθμό 6, δεν ισχύει η πρόταση.

Για τους τέλειους 2_o, 3_o, 4_o έχουμε:

β) **28** = $1^3+3^3=1+27$ γ) **496** = $\underline{1^3+3^3}+5^3+7^3=28+125+343$

δ) **8128** = $\underline{1^3+3^3+5^3+7^3}+9^3+...+15^3=496+729+1331+2197+3375$

Σύμφωνα με την πιο πάνω ιδιότητα μπορούμε και τον πέμπτο τέλειο, δηλαδή τον αριθμό 33550336, να το γράψουμε ως άθροισμα **ν** κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών με πρώτον όρο το 1^3. Προσδιορίζουμε το ν με την πιο κάτω διαδικασία.

Λύση:

$$\rho = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa-1)^3 = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(8\kappa^3-12\kappa^2+6\kappa-1\right) = 8\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^3-12\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2+6\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa-\sum_{\kappa=1}^{\nu}1 =$$

$$= 8\cdot\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}-12\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}+\frac{6\nu(\nu+1)}{2}-\nu = 2\nu^2(\nu+1)^2-2\nu(\nu+1)(2\nu+1)+$$

$$+3\nu(\nu+1)-\nu = \nu\left[2\nu^3+4\nu^2+2\nu-2\cdot\left(2\nu^2+\nu+2\nu+1\right)+3\nu+3-1\right] = \nu\left(2\nu^3-4\nu+3\nu\right) =$$

$$= \nu\left(2\nu^3-\nu\right) = \nu^2\cdot\left(2\nu^2-1\right)$$

ώστε: $\boldsymbol{\rho = \nu^2(2\nu^2-1)}$. (3)

Με τη σχέση αυτή βρίσκουμε το πλήθος των κύβων των **ν** διαδοχικών περιττών αριθμών, που το άθροισμά τους δίνει καθένα από τους πιο πάνω τέλειους αριθμούς. Έτσι ο τέλειος αριθμός **28** ισούται με το άθροισμα δυο κύβων, ο τέλειος **496** ισούται με το άθροισμα 4 κύβων και ο **8128** με το άθροισμα 8 κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών, όπως επαληθεύεται από τη σχέση (3) που βρήκαμε. Για τον πέμπτο τέλειο, τον **33550336**, δεν έχουμε το άθροισμα των κύβων και έτσι αναζητούμε το ν, το πλήθος δηλ. των κύβων. Από την (3) έχουμε: $\boldsymbol{\nu^2(2\nu^2-1) = 33550336}$. Λύοντας τη διτετράγωνη αυτή εξίσωση παίρνουμε τη θετική ρίζα ν = 64. Ώστε ο 33550336 είναι άθροισμα 64 κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών με πρώτον τον 1^3 και τελευταίο τον 127^3. Για τον έκτο τέλειο, τον αριθμό **8589869056**, λύουμε τη διτετράγωνη εξίσωση $\boldsymbol{\nu^2(2\nu^2-1) = 8589869056}$ και βρίσκουμε ν = 256. Ώστε ο 6ος τέλειος είναι άθροισμα 256 κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών με πρώτο τον 1^3 και τελευταίο το 511^3.

Με ανάλογο τρόπο, λύοντας τις εξισώσεις:

$v^2(2v^2\text{-}1) = 137438691328$, $v^2(2v^2\text{-}1)=2305843008139952128$ και

$v^2(2v^2\text{-}1)=2658455991569831744654692615953842176$

βρίσκουμε για τον 7_o, 8_o και 9_o τέλειο αντίστοιχα, $v=512=2^9$, $v=32768=2^{15}$ και $v=1073741824=2^{30}$. Συγκεντρώνουμε στον πίνακα (1) που ακολουθεί, τα πιο πάνω ευρήματα, που αφορούν τους τελείους 2_o-9_o.

Πίνακας 1

Τάξη τελείου	Τέλειος	Πλήθος κύβων	2^v
2	28	2	2^1
3	496	4	2^2
4	8128	8	2^3
5	33550336	64	2^6
6	8589869056	256	2^8
7	137438691328	512	2^9
8	2305843008139952128	32768	2^{15}
9	26584559915698317465 46922615953842176	1073741824	2^{30}

Από τον πίνακα αυτό διαπιστώνουμε ότι η τέταρτη ιδιότητα θα μπορούσε ίσως να συμπληρωθεί ως εξής: " **Κάθε τέλειος αριθμός μπορεί να γραφτεί ως μερικό άθροισμα αρτίου πλήθους (ίσου με δύναμη του 2) κύβων διαδοχικών περιττών αριθμών, με πρώτο όρο τον 1^3.**

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε πιο πάνω για την εύρεση του πλήθους v των κύβων μπορεί ασφαλώς να γενικευθεί για τον οποιοδήποτε τέλειο. Έτσι από τη $v^2(2v^2\text{-}1) = \rho, \Rightarrow$ $\underline{2v^4\text{-}v^2\text{-}\rho = 0}$, εξίσωση που μας επιτρέπει να βρούμε το **v**. Λύοντας ως προς v, βρίσκουμε:

$$\boxed{v = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{1+8\rho}}}$$

Σημείωση Κάθε αριθμός ρ που δίνει με τον πιο πάνω τύπο φυσικό αριθμό **ν**, δεν είναι κατ΄ ανάγκη τέλειος. π.χ. ο **μη τέλειος αριθμός** ρ=2096128 δίνει ν=32, δηλαδή ισχύει: $2096128 = \sum_{\kappa=1}^{32}(2\kappa-1)^3$ ή

$2096128 = 1^3 + 3^3 + . \ \ . \ \ . + 61^3$

Με αφορμή την πιο πάνω ιδιότητα, ερευνούμε **μήπως ο τέλειος αριθμός ρ μπορεί να γραφτεί και ως άθροισμα ή διαφορά τετραγώνων φυσικών αριθμών.**

Παρατηρούμε έτσι ότι για τους αριθμούς 6 και 28 ισχύουν:

6 = 1^2-2^2+3^2 **(5α)** και **28** = 1^2 -2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2 **(5β)**

Και στις δυο αυτές περιπτώσεις έχουμε **περιττό** πλήθος όρων, που είναι τετράγωνα διαδοχικών φυσικών αριθμών και ισχύει: $\rho = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa^2$ (6)

Εξετάζουμε μήπως η σχέση **(6)** ισχύει για **κάθε τέλειο**.

Βρίσκουμε έτσι ότι οι τέλειοι αριθμοί 6 και 28 μπορούν να γραφτούν:

6 = 1^2+3^2-2^2 και **28** = (1^2+3^2+5^2+7^2) - (2^2+4^2+6^2)

Με βάση αυτή την αλλαγή διαμορφώνω την (6) όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$\rho = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa^2 = \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}(2\kappa-1)^2 - \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}(2\kappa)^2 \qquad \textbf{ν περιττός}, \ \mathbf{(7)}$$

Από την (7) προκύπτει: $\rho = \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}(2\kappa)^2 - \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}4\kappa + \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}1 - \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}4\kappa^2$ ή

$$\rho = 4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa^2 - 4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa + \frac{\nu+1}{2} - 4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2 \Rightarrow \rho = 4\left(\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2\right) + \left(\frac{\nu+1}{2}\right) - 4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa \qquad (8)$$

Θέτω: $A=\left(\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa^2-\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2\right)$ και $B=\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa$.

Επειδή $\frac{\nu+1}{2}-\frac{\nu-1}{2}=1\Rightarrow A=\frac{(\nu+1)^2}{4}$ και $B=\frac{(\nu+1)(\nu+3)}{8}$

Από την (8) έχουμε με τη βοήθεια των A και B :

$$\rho=4\cdot\frac{\nu(\nu+1)^2}{4}+\frac{\nu+1}{4}-4\cdot\frac{\nu(\nu+1)(\nu+3)}{8}\Rightarrow\rho=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

Έτσι καταλήγουμε ότι: $\sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa^2=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ (9), σχέση που δίνει τρίγωνο αριθμό.

Ελέγχουμε ότι η σχέση αυτή είναι αντιστρεπτή, δηλαδή $\forall\nu\in\mathbb{N}$, **ν περιττός** ισχύει και: $\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\kappa^2$ (10)

Η (10) μας πληροφορεί ότι κάθε τρίγωνος αριθμός (αριθμός δηλαδή της μορφής $\rho=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$) με επί πλέον το **ν** να είναι περιττός, μπορεί να γραφτεί ως **αλγεβρικό άθροισμα** των τετραγώνων των ν πρώτων διαδοχικών φυσικών αριθμών με "+" και "-" εναλλάξ. Επειδή τώρα κάθε τέλειος είναι και τρίγωνος, που πληροί τον πιο πάνω περιορισμό, προκύπτει ότι κάθε τέλειος μπορεί να γραφτεί στη μορφή: $\rho=\sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\kappa^2$, (11) δηλαδή ως μερικό άθροισμα **ν** πρώτων όρων μιας σειράς με γενικό όρο τον: $\boldsymbol{\alpha_\kappa=(-1)^{\kappa+1}\kappa^2}$ όπου **ν** η θετική ρίζα της εξίσωσης: $\rho=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ και ρ **ο τέλειος**.

Δοκιμάζοντας για τον τρίτο τέλειο ρ = 496, έχουμε: $\nu^2+\nu-496=0\Rightarrow$ **ν=31**, ώστε

$496=1^2-2^2+3^2-\ldots+31^2$ ή $496=\sum_{\kappa=1}^{31}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa^2$

Επαναλαμβάνουμε τη δοκιμή για τον τέταρτο τέλειο αριθμό, τον 8128, οπότε:

$$8128=\frac{\nu(\nu+1)}{2}\Rightarrow \nu^2+\nu-16256=0\Rightarrow \nu=127 \quad \text{οποτε} \quad 8128=\sum_{\kappa=1}^{127}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa^2$$

Παρόμοια εκφράζουμε και τον πέμπτο τέλειο, τον **33550336,** ως μερικό άθροισμα σειράς της προηγούμενης μορφής.

Λύοντας την εξίσωση: $33550336=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ βρίσκουμε **ν = 8191**, οπότε ο τέλειος 335503336 γράφεται: $33550336=\sum_{\kappa=1}^{8191}(-1)^{\kappa+1}\kappa^2$.

Διατυπώνουμε έτσι την πέμπτη ιδιότητα:

<u>5η Ιδιότητα</u>: Κάθε τέλειος αριθμός ρ μπορεί να γραφτεί ως μερικό άθροισμα περιττού πλήθους ν τετραγώνων φυσικών αριθμών, κατά τον τύπο:

$\rho=\sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa^2$, όπου ν είναι η θετική ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης **$\nu^2+\nu-2\rho=0$** (ισοδύναμη της $\rho=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$) και ρ ο τέλειος.

Ο πίνακας (2) που ακολουθεί μας δίνει το πλήθος ν των όρων του τύπου (11) για τον κάθε ένα από τους εννέα πρώτους τέλειους.

Πίνακας 2

Τάξη τελείου	ρ	Λύση εξίσωσης $\nu^2+\nu-2\rho=0$
1	**6**	**3**
2	**28**	**5**
3	**496**	**31**
4	**8128**	**127**
5	**33550336**	**8191**
6	**8589869056**	**131071**
7	**137438691328**	**524287**
8	**2305843008139952128**	**2147483647**
9	**2658455991569831744654692615953842176**	**2305843009213693951**

6η Ιδιότητα: Κάθε τέλειος αριθμός ρ επαληθεύει την εξίσωση: $\rho=2v^2+3v+1$, $v \in \mathrm{N}$. (12)

Απόδειξη

Από την 5η ιδιότητα έχουμε:

$$\rho = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(-1)^{\kappa+1}\cdot\kappa \quad \Rightarrow \rho = \sum_{\kappa=0}^{\nu}(2\kappa+1)^2 - \sum_{\kappa=1}^{\nu}(2\kappa)^2 = 1 + \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(4\kappa^2+4\kappa+1-4\kappa^2\right) =$$

$$= 1 + \sum_{\kappa=1}^{\nu}4\kappa + \sum_{\kappa=1}^{\nu}1 = 1 + 2\nu(\nu+1) + \nu \Rightarrow \rho = 2\nu^2 + 3\nu + 1, \qquad \nu \in \mathrm{N}$$

Ο πίνακας (3) μας δίνει τις τιμές του **ν** για τις οποίες επαληθεύεται η (12) για τον κάθε ένα από τους εννέα πρώτους τέλειους.

Πίνακας 3

Τάξη τελείου	Τέλειος ρ	Ρίζα της εξίσωσης $\rho = 2\nu^2 + 3\nu + 1$
1	6	1
2	28	3
3	496	15
4	8128	63
5	33550336	4095
6	8589869056	65535
7	137438691328	1048575
8	2305843008139952128	1073741823
9	2658455991569831744654692615953842176	11529215046068469775

Παρατηρούμε ότι όλα τα ν>1 είναι περιττοί αριθμοί και πολλαπλάσια του 3.

Μια άλλη παρατήρηση αφορά το άθροισμα των ψηφίων των οκτώ πρώτων τελείων αριθμών, εξαιρουμένου του 6. Βρίσκουμε το άθροισμα Σ_1 των ψηφίων του τελείου αριθμού. Αν τούτο είναι διψήφιο τότε το άθροισμα των ψηφίων αυτού ή ισούται με 10 (όπως συμβαίνει με τον τέλειο 28) ή και αυτού το άθροισμα Σ_2 των ψηφίων θα ισούται με 10 (όπως συμβαίνει με τους τέλειους 496, 8128). Στον πίνακα **4** που ακολουθεί φαίνεται η παρατήρηση αυτή.

Πίνακας 4

Τάξη τελείου	Τέλειος	ν	Σ_1	Σ_2
2	**28**	**2**	**10**	**10**
3	**496**	**3**	**19**	**10**
4	**8128**	**4**	**19**	**10**
5	**33550336**	**8**	**28**	**10**
6	**8589869056**	**10**	**64**	**10**
7	**137438691328**	**12**	**55**	**10**
8	**2305843008139952128**	**19**	**73**	**10**
9	**2658455991569831744654692615953842176**	**37**	**190**	**10**

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Έστω σ(ν) το άθροισμα όλων των διαιρετών του ν. Τέλειος είναι ο φυσικός αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση σ(ν)=2ν.

2. Αν ο αριθμός 2^{ν}-1 είναι πρώτος και ν πρώτος, τότε ο $\rho=(2^{\nu}-1)\cdot 2^{\nu-1}$ είναι άρτιος τέλειος. Ο Euler απέδειξε και το αντίστροφο: **Κάθε άρτιος τέλειος έχει Ευκλείδεια μορφή.** Οι πρώτοι αριθμοί της μορφής $M_{\nu}=2^{\nu}-1$, όπου ν πρώτος , ονομάζονται πρώτοι αριθμοί Mersenne. Έτσι για κάθε πρώτο Mersenne αντιστοιχεί και ένας τέλειος αριθμός. Ο μεγαλύτερος τέλειος είναι ο $\rho=2^{6972592}\cdot(2^{6972593}-1)$. Έχει 4 197 919 ψηφία.

3. Η ιδιότητα είναι προφανής, αφού ισχύει για κάθε τρίγωνο αριθμό.

4. Η τρίτη ιδιότητα ισχύει για κάθε τέλειο αριθμό, ακόμη και για πιθανούς περιττούς τέλειους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Recreations in The Theory of Numbers. The queen of Mathematics Entertains, **Albert H. Beiler** (Dover Publications, New York 1966 2th Edition).

2. A Course in Number Theory, **H.E. Rose** (Clarendon Press - Oxford 1994).

3. An introduction to the Theory of Numbers, **G.H. Hardy, E.M. Wright** (Clarendon Press - Oxford).

4. A concise introduction to the Theory of numbers, **Alan Baker,** (Cambridge University Press).

5. An introduction to the Theory of Numbers, **Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, Hugh L. Montgomery),** (New York 1991).

6. Unsolved Problems in Number Theory, Volume 1, **Richard K. Guy.**

7. Εισαγωγή στην Αναλυτική Θεωρία αριθμών, **Tom Apostol** (Θωμά Μ. Αποστολοπούλου, Μετάφραση Ανδρέα Ζαχαρίου, Εκδόσεις Gutenberg)

8. Εισαγωγή στα Μαθηματικά, **Α. Χαλάτσης,** (Εκδόσεις ART of TEXT, Θεσσαλονίκη).

9. Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδος (Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα).

10. Ιστορία των Μαθηματικών, Τόμος Α΄, **G. Loria,** (Ε.Μ.Ε., Εκδόσεις Παπαζήση).

11. Το βιβλίο των διαγωνισμών στα Μαθηματικά Λυκείου, **Γιώργος Ν. Φιλίππου,** (ΚΥ.Μ.Ε., 1988).

12. Μαθηματικό Βήμα, Περιοδικό, τεύχη: β΄ (1985) και θ΄ (1992).

13. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ, Περιοδικό ΕΜΕ, τεύχος 1/1987 σελ. 65-66.

Χαράλαμπος Λουγκρίδης, Μαθηματικός Β.Δ. 12/9/2000

ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Γιάννης Στρατήγης
Μαθηματικός
ΤΡΙΠΟΛΗ

Το κυριότερο γνώρισμα της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι η επίλυση προβλημάτων για την εξάσκηση των μαθητών στη μεθοδική λύση καθημερινών ζητημάτων που μπορούν να τα δουν και με διαφορετική οπτική γωνιά. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η σταδιακή κατεύθυνση στο επιθυμητό αποτέλεσμα με συστηματική ανάλυση των δεδομένων Η μαθησιακή προσέγγιση πολλές φορές γίνεται με την ευχέρεια που μας διακρίνει στην επιλογή χρήσης θεωρημάτων που έχουμε επαρκώς εμβαθύνει.

Παρουσιάζουμε από όλο το φάσμα της ύλης από μια άσκηση Άλγεβρας με έξι τρόπους , Τριγωνομετρίας με πέντε τρόπους και Γεωμετρία με εννέα τρόπους λύσης, που έχουν τον ίδιο προορισμό για κατανόηση της δυναμικότητας χρήσης των Μαθηματικών εργαλείων. Η επιλογή θετικών στοιχείων σας ανήκει.

1η ΑΣΚΗΣΗ (6 τρόποι – ΑΛΓΕΒΡΑ)

- Αποδείξατε ότι: $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\geq 8\alpha\beta\gamma, \qquad \alpha,\beta,\gamma\geq 0$.

2η ΑΣΚΗΣΗ (5 τρόποι – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ)

- Αν $3\eta\mu\alpha=\eta\mu(\alpha+2\beta)\neq 0$, να δειχθεί ότι : $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=2\,\varepsilon\varphi\beta$.

3η ΑΣΚΗΣΗ (9 τρόποι – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α και ΒΔ ύψος του.

  Δείξατε ότι: $\mathrm{B\Gamma}^2=2\mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{\Gamma\Delta}$

1η ΑΣΚΗΣΗ

1ος τρόπος Ισχύει $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ γιατί $\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2\geq 0$.

Όμοια $\beta+\gamma\geq 2\sqrt{\beta\gamma}$, $\gamma+\alpha\geq 2\sqrt{\gamma\alpha}$ οπότε

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\geq\left(2\sqrt{\alpha\beta}\right)\left(2\sqrt{\beta\gamma}\right)\left(2\sqrt{\gamma\alpha}\right)=8\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=8\alpha\beta\gamma.$$

2ος τρόπος Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta^2+\beta\gamma\right)(\gamma+\alpha)\geq 8\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha\beta^2-2\alpha\beta\gamma+\alpha\gamma^2\right)+\left(\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma+\beta\alpha^2\right)+\left(\gamma\alpha^2-2\alpha\beta\gamma+\gamma\beta^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2\geq 0$$, που ισχύει.

3ος τρόπος Αρκεί να δειχθεί ότι $\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha\geq 6\alpha\beta\gamma \quad (1)$

Αν $\alpha\beta\gamma=0$ η (1) αληθεύει ενώ αν $\alpha\beta\gamma\neq 0$ έχουμε $\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}\geq 6$ που ισχύει καθόσον είναι $\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}\ge 2$, $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\ge 2$ και $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\ge 2$

4^{ος} τρόπος Αρκεί να δεχθεί ότι $\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+2\alpha\beta\gamma\ge 8\alpha\beta\gamma$

$\Leftrightarrow\ \frac{\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma}{8}\ge\alpha\beta\gamma$ που ισχύει από την

ανισότητα Cauchy εφόσον $\frac{\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma}{8}\ge$

$$\sqrt[8]{\left(\alpha\gamma^2\right)\left(\beta^2\gamma\right)\left(\beta\gamma^2\right)\left(\alpha^2\beta\right)\left(\alpha^2\gamma\right)\left(\beta^2\alpha\right)\left(\alpha\beta\gamma\right)\left(\alpha\beta\gamma\right)}$$

5^{ος} τρόπος Έχουμε $\left(\alpha+\beta\right)\left(\beta+\gamma\right)\left(\gamma+\alpha\right)=\left(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta^2+\beta\gamma\right)\left(\gamma+\alpha\right)$

$$=\left(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\right)\left(\gamma+\alpha\right)+\beta^2\left(\gamma+\alpha\right)\pm\beta\left(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\right)=$$
$$=\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)\left(\alpha+\beta+\gamma\right)-\alpha\beta\gamma \quad (1)$$

Αλλά είναι $\alpha\beta\gamma\ge 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\ge 3\sqrt[3]{\left(\alpha\beta\right)\left(\beta\gamma\right)\left(\gamma\alpha\right)}=3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$ οπότε

$$(1)\ \Leftrightarrow\left(\alpha+\beta\right)\left(\beta+\gamma\right)\left(\gamma+\alpha\right)\ge 9\sqrt[3]{\left(\alpha\beta\gamma\right)^3}-\alpha\beta\gamma=8\alpha\beta\gamma\ .$$

6^{ος} τρόπος Επειδή η αποδεικτέα σχέση είναι συμμετρική ως προς α,β,γ υποθέτουμε π.χ. $\alpha\ge\beta\ge\gamma$. Οπότε έχουμε α = γ + κ, β = γ + λ, κ,λ $\geq$ 0 και αρκεί

$(2\gamma+\kappa+\lambda)(2\gamma+\lambda)(2\gamma+\kappa)\geq 8\gamma(\gamma+\kappa)(\gamma+\lambda)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (2\gamma+\kappa+\lambda)(4\gamma^2+2\gamma\kappa+2\gamma\lambda+\kappa\lambda)\geq(8\gamma^2+8\gamma\kappa)(\gamma+\lambda)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \kappa^2\lambda+\kappa\lambda^2+2\gamma\lambda^2+2\gamma\kappa^2-2\gamma\kappa\lambda\geq 0\ \Leftrightarrow\ \kappa^2\lambda+\kappa\lambda^2+\gamma\lambda^2+\gamma\kappa^2+\gamma(\kappa-\lambda)^2\geq 0$ που ισχύει.

2^η ΑΣΚΗΣΗ

1^{ος} τρόπος

Έχουμε $\frac{\varepsilon\phi(\alpha+\beta}{\varepsilon\phi\beta}=\frac{\eta\mu\left(\alpha+\beta\right)\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\beta\right)\eta\mu\beta}=\frac{\eta\mu\left(\alpha+2\beta\right)+\eta\mu\alpha}{\eta\mu\left(\alpha+2\beta\right)-\eta\mu\alpha}=\frac{3\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha}{3\eta\mu\alpha-\eta\mu\alpha}=2\ \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\phi\left(\alpha+\beta\right)=2\,\varepsilon\phi\beta$$

2^{ος} τρόπος Είναι $\frac{\eta\mu\left(\alpha+2\beta\right)}{\eta\mu\alpha}=\frac{3}{1}\ \Leftrightarrow\ \frac{\eta\mu\left(\alpha+2\beta\right)+\eta\mu\alpha}{\eta\mu\left(\alpha+2\beta\right)-\eta\mu\alpha}=\frac{3+1}{3-1}\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{2\eta\mu\left(\alpha+\beta\right)\sigma\upsilon\nu\beta}{2\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\beta\right)}=2\ \Leftrightarrow\ \frac{\varepsilon\phi\left(\alpha+\beta\right)}{\varepsilon\phi\beta}=2\ \Leftrightarrow\ \varepsilon\phi\left(\alpha+\beta\right)=2\varepsilon\phi\beta$$

<u>3ος τρόπος</u> Από την υπόθεση προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} 4\eta\mu\alpha = \eta\mu(\alpha+2\beta)+\eta\mu\alpha \\ 2\eta\mu\alpha = \eta\mu(\alpha+2\beta)-\eta\mu\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\eta\mu\alpha = 2\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta \\ 2\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)\ \sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta\ \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} \Leftrightarrow 2=\frac{\varepsilon\phi(\alpha+\beta)}{\varepsilon\phi\beta} \Leftrightarrow \varepsilon\phi(\alpha+\beta)=2\varepsilon\phi\beta$$

<u>4ος τρόπος</u> Έχουμε $3\eta\mu\alpha=\eta\mu(\alpha+2\beta) \Leftrightarrow 3\eta\mu\left[(\alpha+\beta)-\beta\right]=\eta\mu\left[(\alpha+\beta)+\beta\right]$

$\Leftrightarrow 3\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta-3\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\eta\mu\beta=\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\eta\mu\beta \Leftrightarrow$

$\eta\mu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\beta=2\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\eta\mu\beta \Leftrightarrow \varepsilon\phi(\alpha+\beta)=2\varepsilon\phi\beta$

<u>5ος τρόπος</u> Έχουμε $3\eta\mu\alpha=\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu2\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu2\beta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\varepsilon\phi\alpha=\varepsilon\phi\alpha\,\sigma\upsilon\nu2\beta+\eta\mu2\beta \Leftrightarrow 3\varepsilon\phi\alpha=\varepsilon\phi\alpha\frac{1-\varepsilon\phi^2\beta}{1+\varepsilon\phi^2\beta}+\frac{2\varepsilon\phi\beta}{1+\varepsilon\phi^2\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\phi\alpha\left(3-\frac{1-\varepsilon\phi^2\beta}{1+\varepsilon\phi^2\beta}\right)=\frac{2\varepsilon\phi\beta}{1+\varepsilon\phi^2\beta} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\alpha=\frac{\varepsilon\phi\beta}{1+2\varepsilon\phi^2\beta}.$$

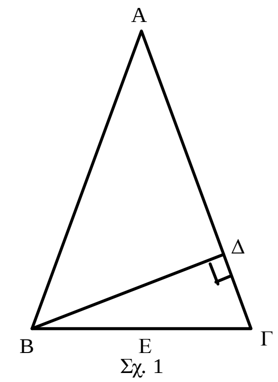
Επομένως $\varepsilon\phi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta}{1-\varepsilon\phi\alpha\,\varepsilon\phi\beta}=\dfrac{\varepsilon\phi\beta+\dfrac{\varepsilon\phi\beta}{1+2\varepsilon\phi^2\beta}}{1-\varepsilon\phi\beta\,\dfrac{\varepsilon\phi\beta}{1+2\varepsilon\phi^2\beta}}=\dfrac{2\varepsilon\phi\beta\left(1+\varepsilon\phi^2\beta\right)}{1+\varepsilon\phi^2\beta}=2\varepsilon\phi\beta$

<u>3η ΑΣΚΗΣΗ</u>

<u>1ος τρόπος</u> Έστω $\hat{A}<90^\circ$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΑΔ έχουμε $B\Gamma^2=B\Delta^2+\Gamma\Delta^2$, $AB^2=B\Delta^2+A\Delta^2$ οπότε $B\Gamma^2-AB^2=\Gamma\Delta^2-A\Delta^2$ ή

$B\Gamma^2=AB^2+\Gamma\Delta^2-\left(A\Gamma-\Gamma\Delta\right)^2=2A\Gamma\cdot\Gamma\Delta$ (γιατί ΑΒ=ΑΓ).

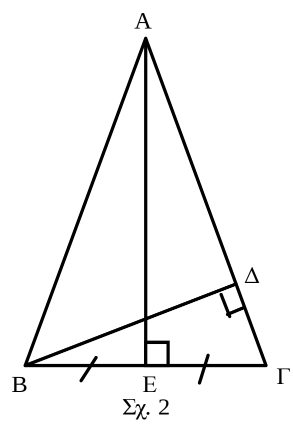
Όμοια εξετάζονται οι περιπτώσεις $\hat{A}\geq 90^\circ$



Σχ. 1

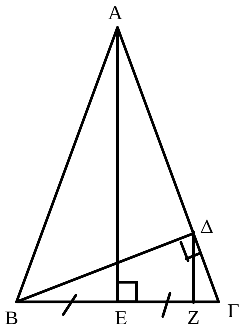
<u>2ος τρόπος</u> Φέρουμε το ύψος ΑΕ. Είναι $\overset{\Delta}{AE\Gamma}\sim\overset{\Delta}{B\Delta\Gamma}$ (ορθογώνια με $\hat{\Gamma}$ κοινή), επομένως $\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{E\Gamma}{\Gamma\Delta}$ ή $\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{\frac{B\Gamma}{2}}{\Gamma\Delta}$ ή

$B\Gamma^2=2A\Gamma\cdot\Gamma\Delta$



Σχ. 2

<u>3^{ος} τρόπος</u> Φέρουμε το ύψος ΑΕ και ΔΖ ⊥ΒΓ, οπότε είναι ΔΖ//ΑΕ και από το θ. Θαλή $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma A} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma E}$ ή $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma A} = \frac{\Gamma Z}{\frac{B\Gamma}{2}}$ (1).



Σχ. 3

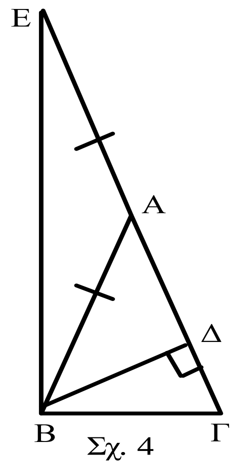
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε $\Gamma\Delta^2 = B\Gamma\cdot\Gamma Z$ και η σχέση (1) γράφεται $\frac{B\Gamma\cdot\Gamma Z}{\Gamma\Delta\cdot A\Gamma} = \frac{2\Gamma Z}{B\Gamma}$ ή $B\Gamma^2 = 2A\Gamma\cdot\Gamma\Delta$

<u>4^{ος} τρόπος</u>

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα ΑΕ=ΑΓ.

Έχουμε ΑΕ=ΑΓ=ΑΒ, που δηλώνει ότι η ΑΒ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΓΕ, επομένως αυτό είναι ορθογώνιο με $\widehat{\Gamma B E} = 90°$.

Άρα $B\Gamma^2 = \Gamma E\cdot\Gamma\Delta = 2A\Gamma\cdot\Gamma\Delta$



Σχ. 4

<u>5^{ος} τρόπος</u> Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 1) είναι $\hat{B} + \hat{\Gamma} < 180°$ ή $2\hat{\Gamma} < 180°$ ή $\hat{\Gamma} < 90°$ και η σχέση του γενικευμένου πυθαγόρειου θεωρήματος γράφεται $AB^2 = B\Gamma^2 + A\Gamma^2 - 2A\Gamma\cdot\Gamma\Delta$ οπότε $B\Gamma^2 = 2A\Gamma\cdot\Gamma\Delta$, γιατί ΑΒ=ΑΓ.

<u>6^{ος} τρόπος</u> Φέρουμε το ύψος ΑΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 2).

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ και ΑΓΕ προκύπτουν $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$ και

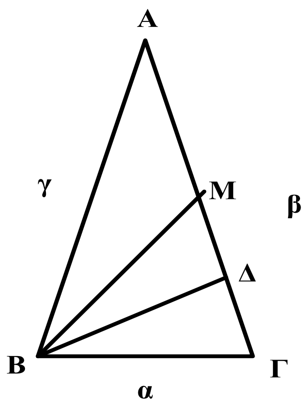
$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\Gamma E}{A\Gamma} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{A\Gamma}$$, αντίστοιχα, επομένως $\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{2A\Gamma}$ ή $B\Gamma^2 = 2A\Gamma\cdot\Gamma\Delta$

<u>7^{ος} τρόπος</u> Έστω $\alpha < \beta = \gamma$. Φέρουμε τη διάμεσο ΒΜ και από το θεώρημα τω διαμέσων έχουμε διαδοχικά:

$\gamma^2 - \alpha^2 = 2\beta\cdot M\Delta = 2\beta(M\Gamma - M\Delta) = 2\beta(\frac{\beta}{2} - \Gamma\Delta)$ ή

$\beta^2 - \alpha^2 = \beta^2 - 2\beta\cdot\Gamma\Delta$ ή $\alpha^2 = 2\beta\cdot\Gamma\Delta$ ή $B\Gamma^2 = 2A\Gamma\cdot\Gamma\Delta$

Όμοια εργαζόμαστε όταν $\alpha > \beta = \gamma$, ενώ αν $\alpha = \beta = \gamma$, η ζητούμενη σχέση εύκολα επαληθεύεται.



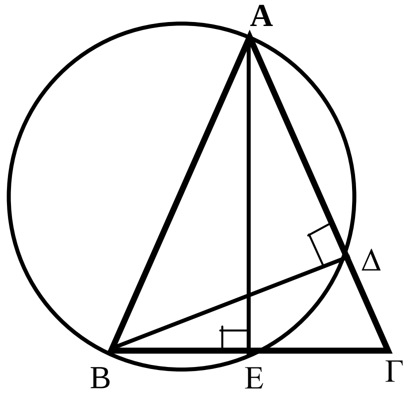
(Σχ. 5)

8ος τρόπος

Φέρουμε το ύψος ΑΕ.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΔΕΒ $\left(\widehat{\mathrm{A\Delta B}} = \widehat{\mathrm{AEB}} = 90°\right)$ έχουμε για τις τεμνόμενες πλευρές του ΑΔ και ΒΕ, στο Γ: $\Gamma E \cdot \Gamma B = \Gamma\Delta \cdot \Gamma A$ ή

$\dfrac{B\Gamma}{2} \cdot B\Gamma = \Gamma\Delta \cdot A\Gamma$ ή $B\Gamma^2 = 2A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$

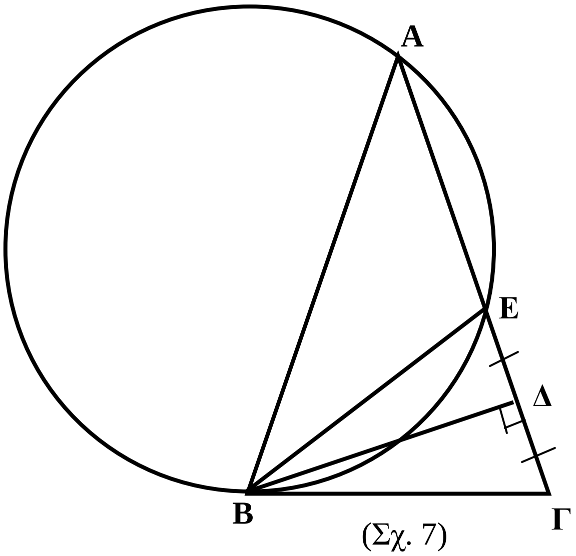


Σχ. 6

9ος τρόπος

Προεκτείνουμε το τμήμα ΓΔ κατά ΔΕ = ΓΔ οπότε ΓΕ = 2 ΓΔ και το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με $\hat{\Gamma} = \hat{E}$. Είναι $\widehat{\mathrm{EB\Gamma}} = 180° - 2\hat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{BA\Gamma}}$, που δηλώνει ότι η ΒΓ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΕ. Άρα για το εφαπτόμενο τμήμα ΓΒ και την τέμνουσα ΓΑ ισχύει $B\Gamma^2 = \Gamma E \cdot \Gamma A$ ή

$B\Gamma^2 = 2A\Gamma \cdot \Gamma\Delta$



(Σχ. 7)

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΕΙΡΑ ΡΙΖΙΚΑ</u>

1. Να υπολογίσετε τον αριθμό x:

$x = \sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots}}}}}$ (άπειρα ριζικά) (1)

Λύση

Παρατηρούμε ότι: $x = \sqrt{2-x} \Rightarrow x^2 = 2-x \Rightarrow x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow x=1$

2. Να υπολογίσετε το: $x=\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\ldots}}}}}$ (2)

Λύση: $x=\sqrt{6-x} \Rightarrow x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow x=2$

3. Μήπως υπάρχουν και άλλοι αριθμοί $\nu \in \mathrm{N}$ τέτοιοι ώστε:

$x = \sqrt{\nu-\sqrt{\nu-\sqrt{\nu-\sqrt{\nu-\sqrt{\nu-\ldots}}}}}$ (άπειρα ριζικά) με $x \in \mathrm{N}$ (3)

Λύση

Αν υπάρχουν τότε θα πρέπει: $x=\sqrt{\nu-x} \Rightarrow x^2+x-\nu=0 \quad \Rightarrow$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\nu}}{2}$. Θέτουμε $A=\sqrt{1+4\nu}$ **(4)** δηλαδή $x=\dfrac{-1+A}{2}$ (5)

Για να είναι το x φυσικός αριθμός θα πρέπει η ποσότητα (4) να είναι περιττός αριθμός. Δίνοντας στο A περιττές τιμές βρίσκουμε κατάλληλα ν που επαληθεύουν τη σχέση (3).

Έτσι α) για A=3 $\xRightarrow{(5)}$ $\sqrt{1+4\nu}$ = 3 $\Rightarrow$ 1+4ν = 9 $\Rightarrow$ ν = 2 και $\xRightarrow{(3)}$ x = 1,
Οπότε επαληθεύεται η σχέση (1).

β) Για A=5 $\xRightarrow{(5)}$ ν = 6 και $\xRightarrow{(3)}$ x = 2, οπότε επαληθεύεται η σχέση (2).

γ) Για A = 7 $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ ν = 12 και $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ x = 3, οπότε: $\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12-\ldots}}} = 3$

Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο και καταρτίζουμε τελικά τον πίνακα:

A	ν	x			A	ν	x
3	**2**	**1**			**13**	**42**	**6**
5	**6**	**2**			**15**	**56**	**7**
7	**12**	**3**			**17**	**72**	**8**
9	**20**	**4**			**19**	**90**	**9**
11	**30**	**5**			**21**	**110**	**10**

Έχουμε έτσι, εκτός από τις ισότητες που δώσαμε πιο πάνω, και τις:

$$\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-\ldots}}}}} = 4 \qquad \sqrt{56-\sqrt{56-\sqrt{56-\sqrt{56-\ldots}}}} = 7$$

$$\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\ldots}}}}} = 5 \qquad \sqrt{72-\sqrt{72-\sqrt{72-\sqrt{72-\ldots}}}} = 8$$

$$\sqrt{42-\sqrt{42-\sqrt{42-\sqrt{42-\sqrt{42-\ldots}}}}} = 6 \qquad \sqrt{90-\sqrt{90-\sqrt{90-\sqrt{90-\ldots}}}} = 9.$$

4. Αφού το A είναι περιττός αριθμός, θα είναι της μορφής: $A = 2\kappa + 1, \quad \kappa \in N.$

Τότε: α) $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $\sqrt{1+4\nu} = 2\kappa + 1 \Rightarrow \nu = \kappa(\kappa+1)$ (6) και β) $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $x = \kappa$ (7).

Από τη σχέση (6) προκύπτει ότι σε μια παράσταση με άπειρα ριζικά της μορφής (3), για να είναι το αποτέλεσμα φυσικός αριθμός, θα πρέπει το ν να είναι γινόμενο δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών. Από τη σχέση (7) προκύπτει ότι η παράσταση αυτή ισούται με το μικρότερο από τους παράγοντες αυτούς.

5. Ακολουθώντας τις παρατηρήσεις αυτές θα έχουμε :

α) Για $\nu = 11 \cdot 12 = 132$, $\sqrt{132 - \sqrt{132 - \sqrt{132 - \sqrt{132 - \ldots}}}} = 11$

β) Για $\nu = 18 \cdot 19 = 342$, $\sqrt{342 - \sqrt{342 - \sqrt{342 - \sqrt{342 - \ldots}}}} = 18$

6. Η σχέση (6) μας λέει επίσης ότι το **ν** πρέπει να ισούται με το διπλάσιο τριγωνικού αριθμού. Υπενθυμίζουμε ότι **τριγωνικός αριθμός** λέγεται κάθε αριθμός ρ που ισούται με το άθροισμα των κ πρώτων διαδοχικών φυσικών αριθμών. Ισχύει δηλαδή: $\rho = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + \kappa = \dfrac{\kappa(\kappa+1)}{2}$.

Έτσι οι αριθμοί: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... είναι τριγωνικοί.

7. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ότι: $\psi = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}} = 2$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι: $\psi = \sqrt{2 + \psi} \quad \Rightarrow \psi^2 - \psi - 2 = 0$

$$\Rightarrow \psi = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 2 & \\ -1 & \text{απορρίπτεται} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \psi = 2$$

8. Σκεφτόμαστε μήπως και εδώ υπάρχουν αριθμοί $\nu \in \mathrm{N}$ τέτοιοι ώστε:

$\psi = \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \sqrt{\nu + \ldots}}}}}$ (άπειρα ριζικά) με $\psi \in \mathrm{N}$ (8).

<u>**Λύση**</u>: $\psi = \sqrt{\nu + \psi} \quad \Rightarrow \psi^2 - \psi - \nu = 0 \ \Rightarrow \ \psi = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4\nu}}{2}$.

Επειδή $\psi \in \mathrm{N}$ προκύπτει ότι : $\mathrm{A} = \sqrt{1+4\nu}$ είναι περιττός αριθμός. Έτσι για κάθε αριθμό Α της μορφής $\mathrm{A} = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathrm{N}$, βρίσκουμε $\nu = \kappa \cdot (\kappa + 1)$ και $\psi = \kappa + 1$, σχέσεις που δηλούν ότι στην παράσταση με άπειρα ριζικά της μορφής (8), το μεν ν πρέπει να είναι αριθμός που να ισούται με το γινόμενο δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών (ή το διπλάσιο ενός τριγωνικού αριθμού) το δε αποτέλεσμα της παράστασης είναι ο μεγαλύτερος από τους παράγοντες του γινομένου αυτού. Έτσι έχουμε:

1. Για $\nu = 2\cdot 3 = 6$, $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}} = 3$

2. Για $\nu = 3\cdot 4 = 12$, $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots}}}} = 4$

3. Για $\nu = 4\cdot 5 = 20$, $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}} = 5$

4. Για $\nu = 5\cdot 6 = 30$, $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots}}}} = 6$

5. Για $\nu = 8\cdot 9 = 72$, $\sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72+\sqrt{72+\ldots}}}} = 9$

Από τις ισότητες αυτές και εκείνες της παραγράφου (3) παρατηρούμε ότι υπάρχουν αριθμοί α και β (α>β) τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\ldots}}}}$ = $\sqrt{\beta+\sqrt{\beta+\sqrt{\beta+\sqrt{\beta+\ldots}}}}$ (1) (άπειρα ριζικά).

Αποδεικνύουμε τότε ότι οι αριθμοί α και β πληρούν τη συνθήκη:

$\alpha^2 + \beta^2 = 2(\alpha + \beta + \alpha\beta)$

__Απόδειξη__: Ας είναι x το α΄ μέλος της (1) και ψ το β΄ μέλος της. Τότε:

$x = \sqrt{\alpha - x} \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$ (2) $\psi = \sqrt{\beta + \psi} \Rightarrow \psi = \dfrac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2}$ (3)

$\Rightarrow -1+\sqrt{1+4\alpha} = 1+\sqrt{1+4\beta} \Rightarrow \sqrt{1+4\alpha} - \sqrt{1+4\beta} = 2$

$\Rightarrow \sqrt{1+4\alpha} = 2+\sqrt{1+4\beta} \Rightarrow 1+4\alpha = 4+1+4\beta+4\sqrt{1+4\beta} \Rightarrow \alpha - \beta - 1 = \sqrt{1+4\beta}$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 1 - 2\alpha\beta - 2\alpha + 2\beta = 1+4\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 2(\alpha + \beta + \alpha\beta)$ ό.έ.δ..

Επιβεβαιώνουμε την ισχύ της πιο πάνω συνθήκης και με παραδείγματα:

α) Για $\alpha=6$ και $\beta=2$, $\alpha^2+\beta^2=36+4=40$, και $2(\alpha+\beta+\alpha\beta)=40$, άρα:

$$\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\dots}}}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}$$

β) Για $\alpha=12$ και $\beta=6$, $\alpha^2+\beta^2=144+36=180$, και $2(\alpha+\beta+\alpha\beta)=180$, άρα

$$\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12-\dots}}}} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύουν επίσης:

$$\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20-\dots}}}} = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\dots}}}}$$

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\dots}}}} = \sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\dots}}}}$$

$$\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots}}}} = \sqrt{42-\sqrt{42-\sqrt{42-\sqrt{42-\dots}}}}$$

$$\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\dots}}}} = \sqrt{56-\sqrt{56-\sqrt{56-\sqrt{56-\dots}}}}$$

<u>Ασκήσεις για λύση</u>

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A=\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{\frac{5}{16}-\sqrt{\frac{5}{16}-\dots}}},\qquad B=\frac{\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{3}{4}+\dots}}}}{\sqrt{\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{3}{4}-\dots}}}}$$

$$\Gamma=\sqrt{\frac{15}{4}+\sqrt{\frac{15}{4}+\sqrt{\frac{15}{4}+\dots}}} - \sqrt{\frac{15}{4}-\sqrt{\frac{15}{4}-\sqrt{\frac{15}{4}-\dots}}}$$

Παραπομπή: Σημειώσεις Παναγιώτη Μάτση στο Σεμινάριο Μαθηματικών Φεβρουαρίου 1994 (άσκ.25).

Χαράλαμπος Λουγκρίδης, Μαθηματικός Β.Δ. 17/9/2000

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΠΡΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2001

1. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Κριόν την 20ην Μαρτίου εις τις 15ω, 31λ. Αρχή του Έαρος.

2. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Καρκίνο την 21ην Ιουνίου εις τις 09ω, 38λ. Αρχή του Θέρους.

3. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Ζυγόν την 23ην Σεπτεμβρίου εις τις 01ω, 04λ. Αρχή του Φθινοπώρου.

4. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Αιγόκερω την 21ην Δεκεμβρίου εις τις 21ω, 21λ. Αρχή του Χειμώνα.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

ΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΣΕΛΗΝΗΣ

Νέας Σελήνη		Πρώτο Τέταρτο		Πανσέληνος		Τελευταίο Τέταρτο	
	ημ ω λ		ημ ω λ		ημ ω λ		ημ ω λ
-	-	Ιαν.	3 00 31	Ιαν.	9 22 24	Ιαν.	16 14 35
Ιαν.	24 15 07	Φεβ.	1 16 02	Φεβ.	8 09 12	Φεβ.	15 05 23
Φεβ.	23 10 21	Μαρ.	3 04 03	Μαρ.	9 19 23	Μαρ.	16 22 45
Μαρ.	25 03 21	Απρ.	1 12 49	Απρ.	8 05 22	Απρ.	15 17 31
Απρ.	23 17 26	Απρ.	30 19 08	Μάης	7 15 52	Μάης	15 12 11
Μάης	230446	Μάης	30 00 09	Ιούν.	6 03 39	Ιούν.	14 05 28
Ιούν.	21 13 58	Ιούν.	28 05 19	Ιούλ.	5 17 04	Ιούλ.	13 20 45
Ιούλ.	20 21 44	Ιούλ.	27 12 08	Αύγ.	4 07 56	Αύγ	12 09 53
Αύγ.	19 04 55	Αύγ.	25 21 55	Σεπτ.	2 23 43	Σεπτ.	10 20 59
Σεπτ.	17 12 27	Σεπτ.	24 11 31	Οκτ.	2 15 49	Οκτ.	10 06 20
Οκτ.	16 21 23	Οκτ.	24 04 58	Νοέμ.	1 07 41	Νοέμ.	8 14 21
Νοέμ.	15 08 40	Νοέμ.	23 01 21	Νοέμ.	30 22 49	Δεκ.	7 21 52
Δεκ.	14 22 47	Δεκ.	22 22 56	Δεκ.	30 12 40	-	-

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου

ΕΚΛΕΙΨΕΙΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2001

Το έτος 2001 υπάρχουν 5 εκλείψεις 2 του Ηλίου και 3 της Σελήνης.

1. Ολική Έκλειψη Σελήνης 09/10 Ιανουαρίου 2001. Ορατή από την Κύπρο.

Στοιχεία της έκλειψης: Είσοδος στην παρασκιά 19ω 43λ
Είσοδος στη σκιά 20ω 42λ
Αρχή της Ολικής Έκλειψης 21ω 49 λ
Μέσον της έκλειψης 22ω 20λ
Τέλος Ολικής Έκλειψης 22ω 51λ
Έξοδος εκ της σκιάς 23ω 59λ
Έξοδος εκ της παρασκιάς 00ω 57λ
Μέγεθος έκλειψης 1,194. Την ημέρα της έκλειψης η Σελήνη ανατέλλει στις 16ω 32λ και ο Ήλιος δύει στις 16ω 52λ.

2. Ολική Έκλειψη Ηλίου 21 Ιουνίου 2001. Αόρατη από την Κύπρο.

Η έκλειψη αρχίζει ως μερική έκλειψη στις 11ω 33λ και η όλη διαδικασία της έκλειψης τελειώνει στις 16ω 34λ. Η έκλειψη θα είναι ορατή από τη Νότια Αμερική, τον Ατλαντικό Ωκεανό και την Αφρικανική Ήπειρο.

3. Μερική Έκλειψη Σελήνης 5 Ιουλίου 2001. Αόρατη από την Κύπρο.

Στοιχεία της έκλειψης: Η όλη διαδικασία της έκλειψης αρχίζει στις 14ω 10λ και τελειώνει στις 19ω 39λ. Η έκλειψη θα είναι ορατή από μία μεγάλη περιοχή γύρω από την Αυστραλία, τη Νέα Ζηλλανδία και την Άπω Ανατολή.

4. Δακτυλοειδής Έκλειψη Ηλίου 14-15 Δεκεμβρίου 2001. Αόρατη από την Κύπρο.

Στοιχεία της έκλειψης: Η έκλειψη αρχίζει στις 20ω 3λ της 14 Δεκεμβρίου 2001 και τελειώνει στις 01ω 41λ της 15 Δεκεμβρίου 2001. Η έκλειψη θα είναι ορατή σε μια περιοχή που ευρίσκεται γύρω από τον Ειρηνικό Ωκεανό και την Αμερικανική Ήπειρο.

5. Έκλειψη Σελήνης από την παρασκιά της Γης 30 Δεκεμβρίου 2001. Αόρατη από την Κύπρο.

Στοιχέια της έκλειψης: Η έκλειψη αρχίζει στις 10ω 25λ και τελειώνει στις 14ω 33λ. Το μέγεθός της είναι 0,919. Η έκλειψη θα είναι «ορατή» από μία περιοχή που περιλαμβάνεται μεταξύ των Ηπείρων Αμερικής και Αυστραλίας.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΦΑΚΑ

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία, Κύπρος
Τηλ-Φαξ: 2-379122/09-641843

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΠΑΡΧΙΑΚΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΑΞΕΙΣ Β' ΚΑΙ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
Δεκεμβρίος 1999

Επαρχία Λευκωσίας(Διαγωνισμός "ΙΑΚΩΒΟΣ ΠΑΤΑΤΣΟΣ")
1° και 2° Βραβείο εξίσου στους: Γεωργίου Νίκο του Χρίστου, Ενιαίο Λύκειο Κύκκου Α΄ και Κωνσταντίνου Ναβίτ του Κωνσταντίνου, Λύκειο Ακροπόλης
3° Βραβείο : Παντζιαράς Μάριος του Γεωργίου , Λύκειο Δασούπολης

Επαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:
1ος. Λεπτό Δημήτρη του Κώστα, Ενιαίο Λύκειο Κύκκου Β΄
2ος. Τούμπα Μαρίνα του Χρίστου, Λύκειο Αγ. Γεωργίου Λακατάμειας
3ος. Κωνσταντινίδη Άγγελο του Μιχαήλ, Λύκειο Αποστόλου Βαρνάβα
4ος. Σιακαλλή Λοΐζο του Χριστόδουλου, Λύκειο Παλλουριώτισσας
5ος. Μάμα Μαρία του Κωνσταντίνου, Ενιαίο Λύκειο Κύκκου Α΄
6ος. Ταμάνη Φανούριο του Δημήτρη, Λυκείο Ακρόπολης
7ος. Καρατζιά Άγγελο του Παντελή, Ενιαίο Λύκειο Κύκκου Β΄

Επαρχία Λεμεσού(Διαγωνισμός "ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΛΑΜΗΣ")
1° και 2° Βραβείο εξίσου στους: Χριστοδούλου Στέλιο του Χρίστου, Λανίτειο Λύκειο Α΄ και Λουκαΐδη Ευριπίδη του Γεωργίου, Λανίτειο Λύκειο Β΄
3° Βραβείο εξίσου στους: Τσίκκου Χάρις του Χριστοφόρου, Λύκειο Πέτρου και Παύλου και Γεωργίου Νίκος του Ιωάννη, Λανίτειο Λύκειο Β΄

Επαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:
1ος. Αριστείδου Αριστοτέλη του Νίκου, Λανίτειο Λύκειο Β΄
2ος. Παναγή Κροίσο του Γεωργίου, Λύκειο Πολεμιδιών
3ος. Πετρίδης Νεόφυτος του Δημήτρη , Λύκειο Πέτρου και Παύλου
4ος. Πετρίδου Έλια του Δημήτρη, Λύκειο Πέτρου και Παύλου
Εύφημη Μνεία στους:
1. Αγαθοκλέους Ευθυμία τουΑγαθοκλή, Λύκειο Πολεμιδιών
2. Ησαϊα Μαρία του Ησαϊα, Λύκειο Πολεμιδιών
3. Ορφανίδης Γιώργος του Μιχαλάκη, Λύκειο Αγίου Σπυρίδωνα
4. Χλή Μαργαρίτα του Ευάγγελου, Λανίτειο Λύκειο Α΄
5. Στυλιανίδης Θεόδωρος του Ιωάννη, Λύκειο Αγίου Ιωάννη
6. Καραγιώργη Μαρία του Αντώνη, Λανίτειο Λύκειο Α΄
7. Κωνσταντίνου Γιώργος του Κύπρου, Λανίτειο Λύκειο Β΄
8. Χατζηχαρή Παναγιώτα του Αντώνη, Λύκειο Αγίου Νικολάου

Επαρχία Λάρνακας και Αμμοχώστου (Διαγωνισμός "ΠΕΤΡΑΚΗ ΚΥΠΡΙΑΝΟΥ")

1° Βραβείο: Σαββίδου Χριστίνα του Ανδρέα, Παγκύπριο Λύκειο Λάρνακας

2° Βραβείο: Λάντος Γιώργος του Αδάμου, Λύκειο Παραλιμνίου

3° Βραβείο : Κελίρης Χρίστος του Κώστα, Λύκειο Μακαρίου Γ΄ Λάρνακας

Επαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

1ος. Χατζιωσήφ Άλκης του Μιχαήλ ,Λύκειου Μακαρίου Γ΄ Λάρνακας

2ος. Ξενή Φλουρής του Ξενή, Λύκειο Παραλιμνίου

3ος. Φαρκωνή Στάλω του Μάρκου, Λύκειο Παραλιμνίου

4ος. Καφατάρης Γιώργος του Λουκά, Λύκειο Βεργίνας Λάρνακας

Επαρχία Πάφου (Διαγωνισμός "ΑΝΔΡΕΑΣ ΧΑΤΖΗΘΕΟΡΗΣ")

1° Βραβείο: Σωκράτους Νικόλα του Βάσου, Λύκειο Κύκκου Πάφου

2° Βραβείο: Μαυρομμάτη Παναγιώτη του Πέτρου, Λύκειο Αγ. Νεοφύτου Πάφου

3° Βραβείο: Ζαμπυρίνη Κωνσταντίνο του Παντελή, Λύκειο Κύκκου Πάφου

Επαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

1ος : Ψιλογένη Αχιλλέα του Κώστα, Λύκειο Αγίου Νεοφύτου Πάφου

2ος : Χατζηγιάγκου Ελένη του Ιωάννη, Λύκειο Αγίου Νεοφύτου Πάφου

3ος: Κυριάκου Χρίστος του Ανδρέα, Λύκειο Α΄ Πάφου

4ος: Γεωργίου Νίκο του Ανδρέα, Λύκειο Αγίου Νεοφύτου Πάφου

5ος: Στασή Δέσποινα του Γεωργίου , Α΄ Λύκειο Πάφου

Εύφημη Μνεία στους:

1. Ηροδότου Μαρία του Ανδρέα, Λύκειο Πόλης Χρυσοχούς
2. Μονογιό Δημήτρη του Ονούφριου, Λύκειο Κύκκου Πάφου
3. Λάσκαρη Γιώργο του Θεόδωρου, Λύκειο Κύκκου Πάφου

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία, Κύπρος
Φαξ-Τηλ: 2-379122

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ Γ' ΤΑΞΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΝ Α' ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ/ΤΕΧΝΙΚΗΣ 2000

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1° ΒΡΑΒΕΙΟ:Τσουδερού Αθηνά Παναγιώτη του Γυμ. Παλλουριώτισσας Λ/σίας
2° ΒΡΑΒΕΙΟ : Ζαμπυρίνης Σοφοκλής Παντελή του Γυμ. Γεροσκήπου Πάφου
3° ΒΡΑΒΕΙΟ : Ζαχαρίας Χρίστος Σίμου του Νικολαίδειου Γυμνασίου Πάφου
ΕΠΑΙΝΟΣ ΑΠΟΝΕΜΕΤΑΙ ΚΑΤΑ ΣΕΙΡΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΣΤΟΥΣ:

1. Φοινίκεττο Γιάννη Νικόλα του Λανιτείου Γυμνασίου Λεμεσού
2. Μάρκου Δημήτρη Λοίζου του Γυμ. Γεροσκήπου Πάφου
3. Μασούρα Βελισσάριο Θεοχάρη του Γυμ. Δροσιάς Λάρνακας
4. Θεοδώρου Ιωάννη Γεωργίου του Λανιτείου Γυμνασίου Λεμεσού

ΕΥΦΗΜΗ ΜΝΕΙΑ ΚΑΤΑ ΣΕΙΡΑ ΕΠΙΤΥΧΕΙΑΣ ΣΤΟΥΣ:

1. Μούστρα Κορίνα Ματθαίου του Τσιρείου Γυμνασίου Λεμεσού
   - Σιήττη Χριστίνα Κώστα του Γυμ. Μακαρίου Γ΄, Πλατύ Λ/σίας
   - Χαραλάμπους Χριστιάνα Βασίλη του Τσιρείου Γυμνασίου Λεμεσού
4. Τελεβάντου Ιουλία Αναστάσιου του Γυμ. Σταυρού Λευκωσίας
5. Γιάσουμας Γιώργος Λοίζου του Γυμ. Αγ. Δομετίου Λ/σίας
   - Λουκά Μαριάννα Αντρέα του Γυμ. Μακαρίου Γ΄, Πλατύ Λ/σίας

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ/ΤΕΧΝΙΚΗ

1ο και 2ο Βραβείο εξίσου στους:
Λαζάρου Σωτήρης Γιώργου του Β' Λυκείου Κύκκου Πάφου
Μίτιλλος Χρίστος Γιώργου της Αγγλικής Σχολής Λευκωσίας
3ο Βραβείο: Ζαχαρία Κυριάκος Σίμου, Β' Λύκειο Κύκκου Πάφου
ΕΠΑΙΝΟΣ ΑΠΟΝΕΜΕΤΑΙ ΚΑΤΑ ΣΕΙΡΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΣΤΟΥΣ:

1. Σιζοπούλου Χριστίνα Μαρίνου του Λανίτειου Λυκείου Α', Λεμεσός
2. Στυλιανού Ματθαίοσ Αντρέα του Λύκειου Πολεμιδιών, Λεμεσός
3. Κοκκώδης Μάριος Ευάγγελου του Β' Λυκείου Κύκκου Πάφου
4. Χριστοδούλου Αθηνά Χριστόδουλου του Λανιτείου Λυκείου Α'
5. Μόρρου Σάββας Ιωάννη του Λυκείου Αγίου Νεοφύτου, Πάφος
6. Παύλου Δήμος Παύλου του Λυκείου Παλουριώτισσας, Λευκωσία
7. Κωνσταντίνου Έλενα Ευάνθη του Λανιτείου Λυκείου Α'

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία, Κύπρος
Φαξ-Τηλ: 2-379122

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ "ΖΗΝΩΝ" 2000

1ο και 2ο Βραβείο εξίσου στους:
Ξενή Φλουρής Ξενή, Λύκειο Παραλιμνίου, Αμμόχωστος
Παντζιαράς Μάριος Γεωργίου, Λύκειο Δασούπολης, Λευκωσία

3ο Βραβείο: Πετρίδης Νεόφυτος Δημήτρη, Λύκειο Πέτρου και Παύλου, Λεμεσός

Έπαινοι κατά σειρά επιτυχίας :
1. Μαυρομμάτης Παναγιώτης Πέτρου, Λύκειο Αγίου Νεοφύτου, Πάφος
2. Σωκράτους Νικόλας Βάσου, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
3. Γεωργίου Νίκος Ιωάννη, Λανίτειο Λύκειο Β', Λεμεσός
4. Γεωργίου Νίκος Χρίστου, Ενιαίο Λύκειο Κύκκου Β', Λευκωσία
5. Σαββίδου Χριστίνα Ανδρέα, Παγκύπριο Λύκειο Λάρνακας
6. Τσίκκου Χάρις Χριστόφορου, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου, Λεμεσός
7. Αγαθοκλέους Ευθυμία Αγαθοκλή, Λύκειο Πολεμιδιών, Λεμεσός
8. Λάντος Γιώργος Αδάμου, Λύκειο Παραλιμνίου, Αμμόχωστος
9. Κωνσταντίνου Γιώργος Κύπρου, Λανίτειο Λύκειο Β' . Λεμεσός
10. Χριστοδούλου Στέλιος Χρίστου, Λανίτειο Λύκειο Α', Λεμεσός
11. Ταμάμης Φανούριος Δημήτρη, Λύκειο Ακρόπολης, Λευκωσία
12. Καφατάρης Γιώργος Λούκα, Λύκειο Βεργίνας, Λάρνακα
13. Φαρκωνή Στάλω Μάρκου, Λύκειο Παραλιμνίου, Αμμόχωστος
14. Λουκαΐδης Ευριπίδης Γεώργιου, Λανίτειο Λύκειο Β', Λεμεσός
15. Στασή Δέσποινα Γεώργιου, Α' Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ', Πάφος

ΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ ΤΗΣ ΚΥΠΡΟΥ ΣΕ ΒΑΛΚΑΝΙΑΔΕΣ ΚΑΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

◆ **Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 ετών**
22-25 Ιουνίου 2000, Σκόπια

ΧΑΛΚΙΝΟ ΜΕΤΑΛΙΟ: Ζαμπυρίνης Σοφοκλής
ΕΠΑΙΝΟ: Τελεβάνου Ιουλία
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Τσουδερού Αθηνά
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Μόρρου Σάββας
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Μασούρας Βελισάριος
Συνοδοί : Ανδρέας Φιλίππου, Θεόκλητος Παραγιός

◆ **Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές Λυκείου**
3-9 Μαΐου 2000, Μολδαβία

ΧΑΛΚΙΝΟ ΜΕΤΑΛΙΟ: Τσίκκου Χάρις Χριστοφόρου
ΧΑΛΚΙΝΟ ΜΕΤΑΛΙΟ: Πετρίδης Νεόφυτος Δημήτρη
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Γεωργίου Νίκος Χρίστου
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Γεωργίου Νίκος Ιωάννη
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Μαυρομμάτης Παναγιώτης Πέτρου
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Παντζιαράς Μάριος Γεωργίου
Συνοδοί: Ανδρέας Φιλίππου, Νίκος Ηλία

◆ **Διεθνής Ολυμπιάδα για μαθητές Λυκείου**
13-26 Ιουλίου 2000, Κορέα

ΕΠΑΙΝΟ: Χαραλάμπους Θεμιστοκλής
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Τσίκκου Χάρις Χριστοφόρου
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Πετρίδης Νεόφυτος Δημήτρη
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Γεωργίου Νίκος Χρίστου
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Παντζιαράς Μάριος Γεωργίου
ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ: Γεωργίου Νίκος Ιωάννη
Συνοδοί: Ανδρέας Φαλάς, Μάριος Ευσταθίου

◆ **Διεθνής Ολυμπιάδα για φοιτητές Πανεπιστημίου**
19-22 Ιουλίου 2000, Ιράν

4η ΘΕΣΗ ΩΣ ΟΜΑΔΑ:
Κωνσταντινίδης Κυριάκος
Χειμωνίδης Γιώργος
Πηλακούρη Αλεξία
Κωνσταντίνου Παναγιώτα
Δημητρίου Στέλλα
Συνοδοί: Τρύφωνας Πνευματικός , Παντελής Δαμιανού

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ

ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ Β΄, Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία και χρόνος εξέτασης
18 Δεκεμβρίου 1999
Διάρκεια : 3 ώρες

Επιμέλεια
Σάββας Αντωνίου
Μάριος Αντωνιάδης

Να απαντηθούν όλες οι ερωτήσεις.

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), Ε είναι το μέσο της ΑΒ. Στην ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ ώστε $ΑΔ = \frac{2}{3}(ΑΓ)$. Αν ω είναι η οξεία γωνία των ΒΔ και ΓΕ να δείξετε ότι : $\varepsilon\phi\omega = \dfrac{4\varepsilon\phi B}{3+4\varepsilon\phi^2 B}$

2. Να δείξετε ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}$, ισχύει : $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{\nu}} < 2\sqrt{\nu}$

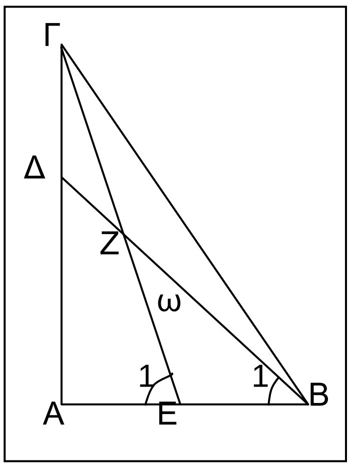
3. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ, περιγράψιμο σε κύκλο (Κ,ρ). Από τις κορυφές Γ και Δ φέρνουμε παράλληλες προς τις ΚΒ και ΚΑ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΓΕΔ είναι εγγράψιμο.

4. Να αποδείξετε πως δεν είναι δυνατό οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ να είναι όροι οποιασδήποτε τάξης σε μια αριθμητική πρόοδο.

5. Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ=1 , ΒΕ=2 και ΓΕ=3. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ε}Β$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Από το τρίγωνο ΕΖΒ έχουμε ότι $\hat{\omega} = \hat{E}_1 - \hat{B}_1$



$$\Rightarrow \varepsilon\phi\omega = \varepsilon\phi(E_1 - B_1) = \frac{\varepsilon\phi E_1 - \varepsilon\phi B_1}{1+\varepsilon\phi E_1 \cdot \varepsilon\phi B_1} = \frac{\frac{ΑΓ}{ΑΕ} - \frac{ΑΔ}{ΑΒ}}{1+\frac{ΑΓ}{ΑΕ}\cdot\frac{ΑΔ}{ΑΒ}} =$$

$$= \frac{2\cdot\frac{ΑΓ}{ΑΒ} - \frac{2}{3}\cdot\frac{ΑΓ}{ΑΒ}}{1+2\cdot\frac{ΑΓ}{ΑΒ}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{ΑΓ}{ΑΒ}} = \frac{2\varepsilon\phi B - \frac{2}{3}\varepsilon\phi B}{1+\frac{4}{3}\varepsilon\phi^2 B} = \frac{4\varepsilon\phi B}{3+4\varepsilon\phi^2 B}$$

2. Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση με τέλεια επαγωγή.

Για ν=1 έχουμε ότι $1 < 2\sqrt{1} \Rightarrow 1 < 2$ η σχέση μας ισχύει

Δεχόμαστε ότι ισχύει για ν=κ οπότε η σχέση μας γίνεται

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{\kappa}} < 2\sqrt{\kappa}$ (1). Θα δείξουμε ότι ισχύει η ζητούμενη σχέση για ν=κ+1 δηλαδή $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}} < 2\sqrt{\kappa+1}$ (2).

Στη σχέση (1) προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}$ οπότε έχουμε

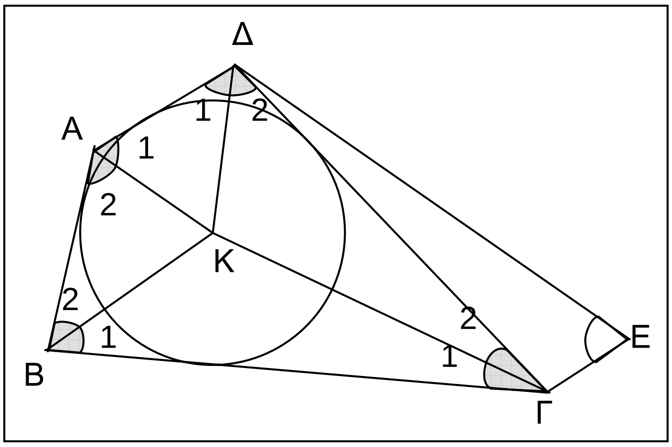
$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}} < 2\sqrt{\kappa}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}}$ (3). Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι $2\sqrt{\kappa}+\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}} < 2\sqrt{\kappa+1}$ (4) για να ισχύει η (2) και κατά συνέπεια από την τέλεια επαγωγή θα ισχύει και η ζητούμενη σχέση $\forall \nu \in \mathrm{N}$.

Η (4) αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί γίνεται $\Rightarrow 2\sqrt{\kappa\cdot(\kappa+1)}+1 < 2(\kappa+1)$

$\Rightarrow 2\sqrt{\kappa(\kappa+1)} < 2\kappa+1 \Rightarrow 4\kappa\cdot(\kappa+1) < (2\kappa+1)^2$

$\Rightarrow 4\kappa^2+4\kappa < 4\kappa^2+4\kappa+1 \Rightarrow 0 < 1$ άρα ισχύει.

3. Στο τρίγωνο ΑΚΒ έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = 180^\circ - \hat{\mathrm{A}}_2 - \hat{\mathrm{B}}_2 = 180^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$ (1).



Στο τρίγωνο ΔΚΓ έχουμε

$\Delta\hat{\mathrm{K}}\Gamma = 180^\circ - \hat{\Delta}_2 - \hat{\Gamma}_2$

$= 180^\circ - \frac{\hat{\Delta}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \qquad (2)$

Από τα δεδομένα $\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ διότι ΔΕ//ΑΚ και ΕΓ//ΒΚ.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2)

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} + \Delta\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma + \Delta\hat{\mathrm{K}}\Gamma =$

$= 360^\circ - \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma+\Delta}{2} = 180^\circ$

Για το τετράπλευρο ΚΓΕΔ έχουμε απέναντι γωνίες παραπληρωματικές οπότε είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

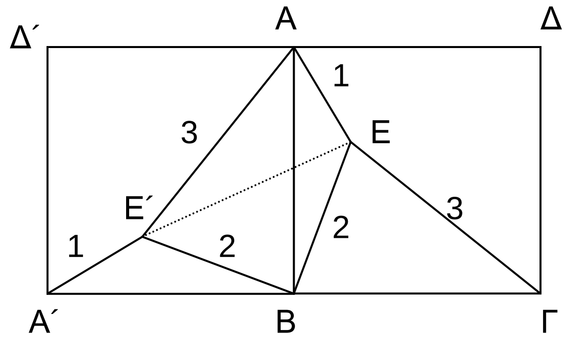
4. Δεχόμαστε ότι οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ είναι όροι κ+1 , μ+1 , λ+1 τάξεως αντίστοιχα κάποιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο το α και διαφορά δ τότε :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \sqrt{2} = \alpha + \kappa\delta \\ (2) & \sqrt{5} = \alpha + \mu\delta \\ (3) & \sqrt{7} = \alpha + \lambda\delta\end{array}\right\} \begin{array}{l}\overset{(2)-(1)}{\Rightarrow} \sqrt{5}-\sqrt{2} = (\mu-\kappa)\delta \\ \overset{(3)-(2)}{\Rightarrow} \sqrt{7}-\sqrt{5} = (\lambda-\mu)\delta\end{array} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{\mu-\kappa}{\lambda-\mu} = \rho \in \mathbb{Q}$$

$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\rho=\sqrt{5}-\sqrt{2}\Rightarrow\left(\rho+1\right)\sqrt{5}=\rho\sqrt{7}+\sqrt{2}\Rightarrow 5\left(\rho+1\right)^2=7\rho^2+2+2\rho\sqrt{7}\sqrt{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\sqrt{14}=\dfrac{5\left(\rho+1\right)^2-7\rho^2-2}{2\rho}$ άτοπο διότι ο $\sqrt{14}$ είναι άρρητος.

5. Σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΒΑ΄Δ΄ και παίρνουμε το Ε΄ έτσι ώστε Α΄Ε΄=1 , ΒΕ΄=2 και ΑΕ΄=3 (στροφή του ΑΒΓΔ κατά 90°). Τότε η γωνία ΕΒΕ΄=90° και επειδή το τρίγωνο ΕΒΕ΄ είναι και ισοσκελές έχουμε ότι η γωνία $\widehat{\text{E'EB}}$=45°. Το τρίγωνο Ε΄ΑΕ είναι επίσης ορθογώνιο διότι ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα $3^2=1^2+\left(\sqrt{8}\right)^2$ η ΕΕ΄=$\sqrt{8}$. Άρα $\widehat{\text{AEB}}$=90°+45°=135°



ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΜΕΣΟΥ
ΓΙΑ ΤΗΝ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
«ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΛΑΜΗΣ»

Ημερομηνία και χρόνος εξέτασης: — *Επιμέλεια*
18 Δεκεμβρίου, 1999 — *Χρίστος Παπαχριστοδούλου*
Διάρκεια : 3 Ώρες — *Μάριος Ευσταθίου*

Να λυθούν όλες οι ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Το τριώνυμο $αx^2+ βx+γ$ είναι τέλειο τετράγωνο και έχει κοινή ρίζα με το τριώνυμο $α_1x^2+β_1x+γ_1$.Να αποδειχθεί ότι: $2αγ_1+2α_1γ = ββ_1$
β) Αν $α^4=β^4+ γ^4$ όπου α,β,γ πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο.

2. Οι ευθείες $(ε_1)$: y=4x και $(ε_2)$: y=-2x τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα , ενώ το ΟΑΓΒ είναι παραλληλόγραμμο με Γ(4,1) και Ο την αρχή των αξόνων . Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε).

3. Δίνεται Αριθμητική Πρόοδος $(α_ν)$ $ν\in$ Ν με θετικούς όρους. Να αποδειχθεί ότι:
$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_3\alpha_4}+\dots \qquad +\frac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}=\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}$$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, το Μ είναι μέσο της ΒΓ και η γωνία ΜΑΒ είναι ίση με το τριπλάσιο της γωνίας ΜΑΓ όπου β=(ΑΓ) και γ= (ΑΒ).
α) Να αποδειχθεί ότι : συνΑ=$\frac{1}{2}(\frac{\beta}{\gamma}-1)^2-1$
β) Αν επιπλέον β=2γ να αποδειχθεί ότι: ΑΜ=γεφΒ.

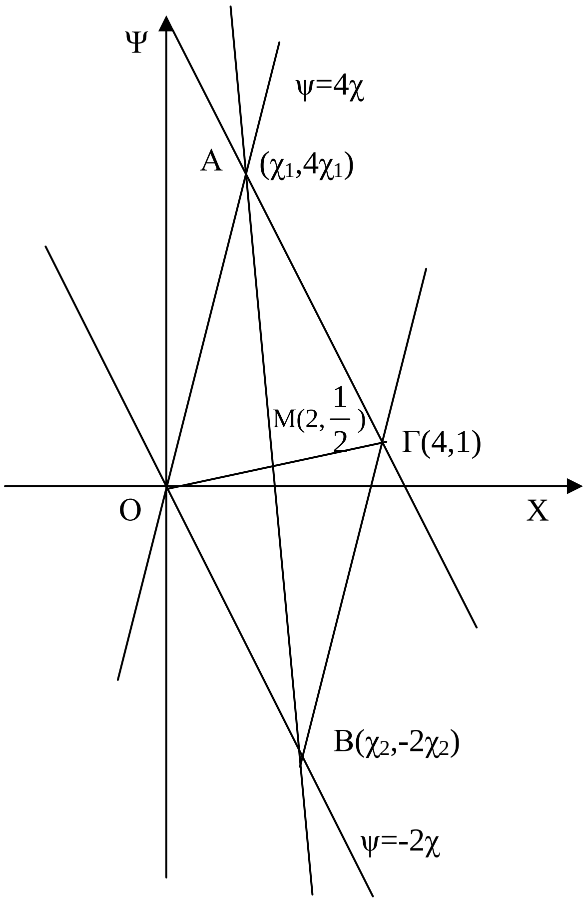
5. Δίνεται τυχαίο (μη κανονικό) εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ με παράλληλες τις απέναντι πλευρές του. Αν Μ το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΔ και ΒΕ να δειχθεί ότι:
α) τα τριγώνα ΑΜΕ και ΒΜΔ έχουν ίσα εμβαδά και
β) τα τριγώνα ΑΓΕ και ΒΖΔ έχουν ίσα εμβαδά .

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. (α) Αφού το τριώνυμο $αx^2+βx+γ$ είναι τέλειο τετράγωνο η εξίσωση $αx^2+βx+γ = 0$ έχει Δ = 0 δηλ. $β^2 – 4αγ = 0$ (1) και η διπλή ρίζα της είναι $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ (2).
Η x_1 επαληθεύει την $α_1x_1^2 + β_1x + γ_1 = 0 \Rightarrow$
$$\alpha_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\beta_1\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)+\gamma_1=0 \Rightarrow \alpha_1\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\beta_1\frac{\beta}{2\alpha}+\gamma_1=0 \Rightarrow$$
$$α_1β^2 – 2αβ_1β + 4α^2γ = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} α_1·4αγ – 2αβ_1β + 4α^2γ_1 = 0 \overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow} 2α_1γ + 2αγ_1 = ββ_1$$

(β) $α^4 = β^4 + γ^4 = (β^2 + γ^2)^2 – 2β^2γ^2 \Rightarrow α^4 < (β^2 +γ^2)^2 \Rightarrow α^2 < β^2 + γ^2 \Rightarrow \hat{Α} < 90^0$.
Εφ' όσον $α^4 = β^4 + γ^4 \Rightarrow$ α η μεγαλύτερη πλευρά $\overset{\hat{Α}<90^0}{\Rightarrow}$ $Α\hat{Β}Γ$ οξυγώνιο.

2.



ΟΑΓΒ# $\Rightarrow$ Μ μέσο ΟΓ $\Rightarrow$ Μ $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$

Το Α θα έχει συντεταγμένες $(x_1, 4x_1)$ και το Β θα έχει συντεταγμένες $(x_2, -2x_2)$

$$\text{Μ μέσο ΑΒ} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1+x_2}{2}=2 \\ \dfrac{4x_1-2x_2}{2}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=4 \\ 4x_1-2x_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1+2x_2=8 \\ 4x_1-2x_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=4 \\ 6x_1=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{5}{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Όμως}\quad y_1 = 4x_1 = 4\cdot\dfrac{3}{2} = 6 \\ y_2 = -2x_2 = -2\cdot\dfrac{5}{2} = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Α $\left(\dfrac{3}{2},6\right)$, και Β $\left(\dfrac{5}{2},-5\right)$

$$(\varepsilon):\ y-6 = \frac{6+5}{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y-6=\frac{11}{-1}\left(x-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 2y-12=-11\,(2x-3) \Rightarrow \boxed{22x+2y=45}$$

3. Αν δ η διαφορά της Α.Π. έχω:

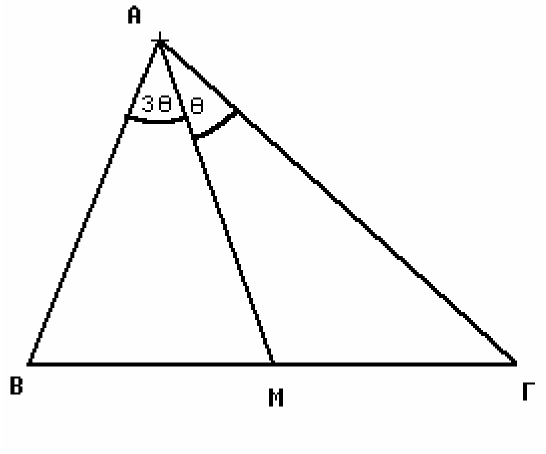
$$\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_3\alpha_4}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu} =$$

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2}\cdot\frac{1}{\delta}+\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2\alpha_3}\cdot\frac{1}{\delta}+\frac{\alpha_4-\alpha_3}{\alpha_3\alpha_4}\cdot\frac{1}{\delta}+\ldots+\frac{\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{\delta} =$$

$$\frac{1}{\delta}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_1}-\cancel{\frac{1}{\alpha_2}}+\cancel{\frac{1}{\alpha_2}}-\cancel{\frac{1}{\alpha_3}}+\cancel{\frac{1}{\alpha_3}}-\cancel{\frac{1}{\alpha_4}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{\alpha_{\nu-2}}}-\cancel{\frac{1}{\alpha_{\nu-1}}}+\cancel{\frac{1}{\alpha_{\nu-1}}}-\frac{1}{\alpha_\nu}\right)=$$

$$\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\alpha_\nu-\alpha_1}{\alpha_1\alpha_\nu}=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{(\alpha_1+(\nu-1)\delta-\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_\nu}=\frac{1(\nu-1)\cancel{\delta}}{\cancel{\delta}\alpha_1\alpha_\nu}=\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}$$

4. (α.)



Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ και έχω:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AB}M: \dfrac{(AM)}{\eta\mu B}=\dfrac{(BM)}{\eta\mu 3\theta} \\ \overset{\Delta}{AM}\Gamma: \dfrac{(AM)}{\eta\mu \Gamma}=\dfrac{(M\Gamma)}{\eta\mu \theta} \end{array}\right\} \overset{BM=M\Gamma}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\eta\mu 3\theta}{\eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow$$

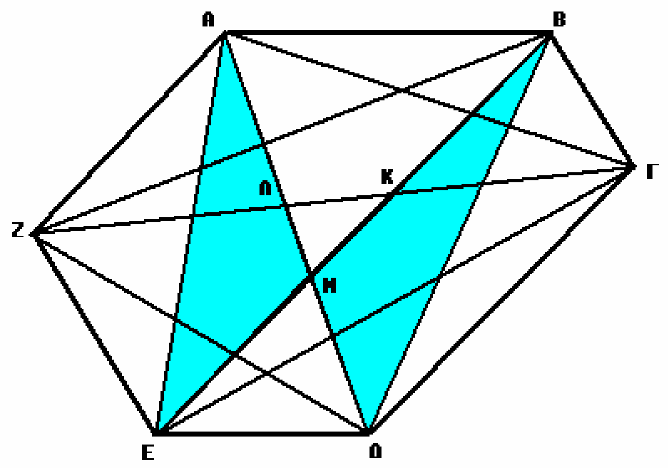
$$\frac{\eta\mu 3\theta-\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta}=\frac{\beta-\gamma}{\gamma} \Rightarrow \frac{2\cancel{\eta\mu\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\theta}{\cancel{\eta\mu\theta}}=\frac{\beta-\gamma}{\gamma} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\theta=\frac{\beta-\gamma}{2\gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu 4\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2 2\theta - 1 = 2\left(\frac{\beta-\gamma}{2\gamma}\right)^2-1=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\gamma}-1\right)^2-1$$

β. Αν επιπλέον $\beta = 2\gamma \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu A = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \hat{A}=120^0 \Rightarrow$

$$B\hat{A}M=\frac{3}{4}\cdot 120^0=90^0 \Rightarrow \overset{\Delta}{AB}M \text{ ορθογώνιο στο } \hat{A} \Rightarrow \varepsilon\varphi B=\frac{AM}{\gamma} \Rightarrow AM=\gamma\cdot\varepsilon\varphi B$$

5.



(α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΔ έχουν κοινή βάση ΕΔ και ίσα ύψη αφού ΑΒ || ΕΔ.
Συνεπώς είναι ισεμβαδικά.
Έτσι :

$$(\overset{\Delta}{AE\Delta})-(\overset{\Delta}{EM\Delta})=(\overset{\Delta}{BE\Delta})-(\overset{\Delta}{EM\Delta})$$

$$\Rightarrow \left(\overset{\Delta}{AEM}\right)=\left(\overset{\Delta}{B\Delta M}\right) \qquad (1)$$

(β) Με ανάλογο τρόπο

$$\left(\overset{\Delta}{KE\Gamma}\right)=\left(\overset{\Delta}{KZB}\right) \qquad (2)$$

$$\left(\overset{\Delta}{\Lambda A\Gamma}\right)=\left(\overset{\Delta}{\Lambda\Delta Z}\right) \qquad (3)$$

και αφού $\left(\overset{\Delta}{K\Lambda M}\right)=\left(\overset{\Delta}{K\Lambda M}\right) \qquad (4)$

προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2), (3) , (4) έχω $\left(\overset{\Delta}{AEZ}\right)=\left(\overset{\Delta}{BZ\Delta}\right)$.

<u>ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ «ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΚΥΠΡΙΑΝΟΥ»</u>

<u>ΛΑΡΝΑΚΑΣ – ΑΜΜΟΧΩΣΤΟΥ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

<u>Ημερομηνία και χρόνος εξέτασης</u> — *<u>Επιμέλεια</u>*
18 Δεκεμβρίου 1999 — *Ηλία Θεοχάρης*
Διάρκεια 3 ώρες — *Ανδρέας Φιλίππου*

Να λυθούν και οι πέντε ασκήσεις.

1. (α) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ημ^2Α = ημΒ \cdot ημΓ$. Να δείξετε ότι $\dfrac{ημΒ}{ημΓ} + \dfrac{ημΓ}{ημΒ} = 1 + 2\,συνΑ$

(β) Αν η δευτεροβάθμια εξίσωση $\dfrac{1}{α}χ^2 + 2\dfrac{β+γ}{α+β} \cdot χ + γ = 0$ έχει διπλή ρίζα το ρ , να δείξετε ότι ισχύει μια τουλάχιστο από τις σχέσεις : $|ρ| = |β|$, $|ρ| = |γ|$

2. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ , ΑΒ // ΔΓ , $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$, ΑΔ=ΑΒ=R και $\widehat{ΑΒΓ} = 120°$. Με κέντρο το Β και ακτίνα R να γράψετε κύκλο. Να υπολογίσετε: α) το εμβαδόν του μέρους του τραπεζίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο και β) την περίμετρο του ΑΒΓΔ, συναρτήσει του R.

3. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(0,α) , Β(β,0) και Γ(γ,0) με α > 0 , γ > 0 και β < 0. Στο τρίγωνο ΑΒΓ να εγγράψετε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΕΖΗΘ με την ΗΘ πάνω στον άξονα Χ΄Χ και το σημείο Ε να βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Να δείξετε ότι το κέντρο Κ του ΕΖΗΘ και τα μέσα Μ του ΒΓ και Ν του ΑΟ είναι συνευθειακά σημεία. (Όπου Ο η αρχή των αξόνων)

4. Να βρεθούν οι τριψήφιοι περιττοί αριθμοί, που διαιρούνται δια 45 και των οποίων τα ψηφία με την σειρά που γράφονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5. Δίνεται η συνάρτηση με πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το σύνολο $\mathbf{R}^+$ και με τύπο

$$f(χ) = \frac{χ^3 + 2χ^2 + χ + 2}{(χ+1)\left[(χ+1)^2 + 1\right]}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $Α = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(2000)$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

1. *(α)* ***<u>1^ος^ τρόπος</u>***

Από το νόμο των συνημίτονων $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγ\,συνΑ$

$\Rightarrow \cancel{4R^2}ημ^2Α = \cancel{4R^2}ημ^2Β + \cancel{4R^2}ημ^2Γ - \cancel{2 \cdot 2R}ημΒημΓσυνΑ \Rightarrow$

$\Rightarrow ημ^2Α = ημ^2Β + ημ^2Γ - 2\,ημΒημΓσυνΑ$

$\Rightarrow$ (υπόθεση) $\Rightarrow ημΒημΓ = ημ^2Β + ημ^2Γ - 2\,ημΒημΓσυνΑ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{ημΒ\,ημΓ}{ημΒ\,ημΓ} = \frac{ημ^2Β}{ημΒ\,ημΓ} + \frac{ημ^2Γ}{ημΒ\,ημΓ} - \frac{2\,ημΒ\,ημΓ\,συνΑ}{ημΒ\,ημΓ} \Rightarrow 1 = \frac{ημΒ}{ημΓ} + \frac{ημΓ}{ημΒ} - 2συνΑ$$

$$\Rightarrow \frac{ημΒ}{ημΓ} + \frac{ημΓ}{ημΒ} = 1 + 2\,συνΑ$$

2^{ος} τρόπος

$$\frac{\eta\mu B}{\eta\mu\Gamma}+\frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B}=\frac{\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma}{\eta\mu B\cdot\eta\mu\Gamma}=\frac{\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma}{\eta\mu^2 A}=\frac{\frac{\alpha^2}{4R^2}+\frac{\gamma^2}{4R^2}}{\frac{\alpha^2}{4R^2}}=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}{\alpha^2}$$

$$=1+\frac{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A}{\alpha^2}=1+\frac{2\cdot 2R\eta\mu B\cdot 2R\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A}{4R^2\eta\mu^2 A}=1+\frac{8R^2\,\cancel{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}\,\sigma\upsilon\nu A}{4R^2\,\cancel{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}}$$

$$=1+2\sigma\upsilon\nu A$$

(β) *Η εξίσωση* $\frac{1}{\alpha}\chi^2+2\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta}\cdot\chi+\gamma=0$ *έχει διπλή ρίζα* $\chi_1=\chi_2=\rho \Rightarrow \Delta=0$

$$\Rightarrow \left(2\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta}\right)^2-4\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\gamma=0 \Rightarrow \cancel{4}\cdot\frac{(\beta+\gamma)^2}{(\alpha+\beta)^2}-\cancel{4}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha(\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma)-\gamma(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)=0 \Rightarrow \alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\cancel{2\alpha\beta\gamma}-\gamma\alpha^2-\gamma\beta^2-\cancel{2\alpha\beta\gamma}=0$

$\Rightarrow \alpha\gamma(\gamma-\alpha)+\beta^2(\alpha-\gamma)=0 \Rightarrow (\alpha-\gamma)(\beta^2-\alpha\gamma)=0 \Rightarrow \alpha=\gamma$ *ή* $\beta^2=\alpha\gamma$.

Γινόμενο ριζών $P=\chi_1\cdot\chi_2=\frac{\gamma}{\frac{1}{\alpha}}=\alpha\cdot\gamma \Rightarrow \rho\cdot\rho=\alpha\gamma \Rightarrow \rho^2=\alpha\gamma$

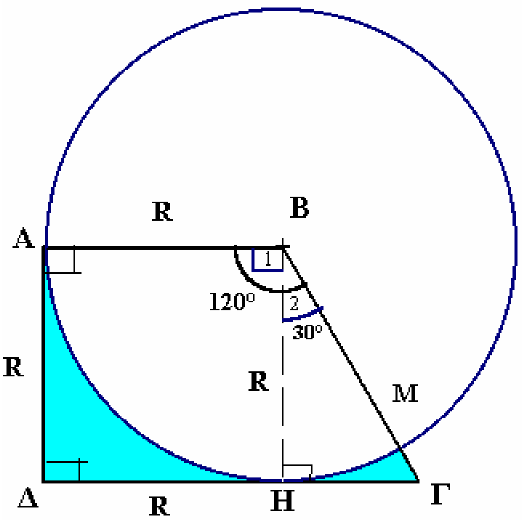
(i) $\alpha=\gamma$

$\rho^2=\alpha\gamma \Rightarrow \rho^2=\gamma^2 \Rightarrow |\rho|=|\gamma|$

(ii) $\beta^2=\alpha\gamma$

$\rho^2=\alpha\gamma \Rightarrow \rho^2=\beta^2 \Rightarrow |\rho|=|\beta|$

2.



$AB//\Delta H$, $AB=A\Delta=R$, $\hat{A}=\hat{\Delta}=90°$, $BH=R \Rightarrow$

$AB H\Delta$ *τετράγωνο* $\Rightarrow \Delta H=R$ *(1)*, $\hat{B}_{1,2}=120°$

$\hat{B}_1=90°$, $\hat{B}_2=30°$,

$\overset{\Delta}{BH\Gamma}$ *Ορθογώνιο τρίγωνο*, $\hat{\Gamma}=60°$

$\Rightarrow H\Gamma=R\,\varepsilon\varphi 30° \Rightarrow H\Gamma=\frac{R\sqrt{3}}{3} \Rightarrow B\Gamma=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

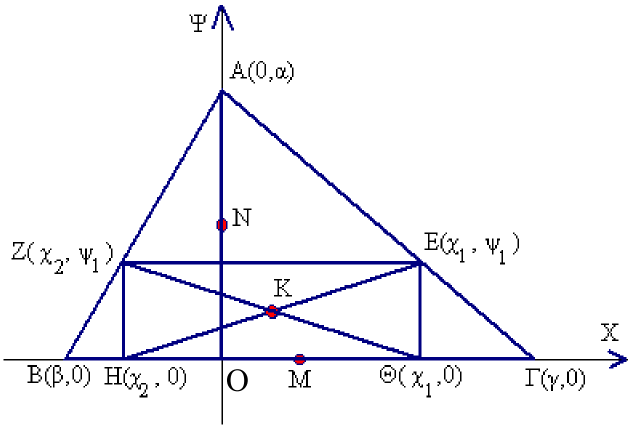
$E=E_{AB\Gamma\Delta}-E_{BAHMB}=$

$$=\frac{\left(R+R+\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)R}{2}-\frac{\pi\ R^2\cdot 120°}{360°}$$

$$=\frac{R^2\left(6+\sqrt{3}\right)}{6}-\frac{2\ \pi R^2}{6}=\frac{R^2}{6}\left(6+\sqrt{3}-2\ \pi\right)$$

$\Pi_{AB\Gamma\Delta}=AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A=R+\frac{2R\sqrt{3}}{3}+\left(R+\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)+R=3R+R\sqrt{3}=\underline{\underline{R\left(3+\sqrt{3}\right)}}$

3.



$A(0,\alpha)$, $B(\beta,0)$ και $\Gamma(\gamma,0)$ με $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ και $\beta < 0$.

Μ μέσο ΒΓ $\Rightarrow \ \chi_M = \dfrac{\chi_B + \chi_\Gamma}{2} = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$

$\Psi_M = 0 \qquad \Rightarrow$

$M\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2},0\right)$

Ν μέσο ΟΑ $\Rightarrow \chi_N = 0$, $\psi_N = \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$N\left(0,\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Έστω $E(\chi_1,\psi_1)$ $\quad \chi_1,\psi_1 > 0 \quad \Rightarrow \Theta(\chi_1 , 0)$

Έστω $\chi_z = \chi_2 \quad \Rightarrow Z(\chi_2,\psi_1) \quad \Rightarrow H(\chi_2,0)$

$(A\Gamma)$: $A(0,\alpha)$, $\Gamma(\gamma,0) \Rightarrow \dfrac{\chi}{\gamma} + \dfrac{\psi}{\alpha} = 1$, $E(\chi_1,\psi_1) \in (A\Gamma) \Rightarrow \dfrac{\chi_1}{\gamma} + \dfrac{\psi_1}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha\chi_1 + \gamma\psi_1 = \alpha\gamma$ (1)

(AB): $A(0,\alpha)$, $B(\beta,0) \Rightarrow \dfrac{\chi}{\beta} + \dfrac{\psi}{\alpha} = 1$, $Z(\chi_2,\psi_1) \in (AB) \Rightarrow \dfrac{\chi_2}{\beta} + \dfrac{\psi_1}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha\chi_2 + \beta\psi_1 = \alpha\beta$ (2)

Κ μέσο ΕΗ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \chi_K = \dfrac{\chi_E + \chi_H}{2} \Rightarrow \chi_K = \dfrac{\chi_1+\chi_2}{2} \\ \psi_K = \dfrac{\psi_E + \psi_H}{2} \Rightarrow \psi_K = \dfrac{\psi_1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow K\left(\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2},\dfrac{\psi_1}{2}\right)$

$$\lambda_{KM} = \frac{\psi_M - \psi_K}{\chi_N - \chi_K} = \frac{0 - \frac{\psi_1}{2}}{\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\chi_1+\chi_2}{2}} = \frac{-\psi_1}{\beta+\gamma-\chi_1-\chi_2} = \frac{\psi_1}{\chi_1+\chi_2-\beta-\gamma}$$

$$\lambda_{KN} = \frac{\psi_N - \psi_K}{\chi_N - \chi_K} = \frac{\frac{\alpha}{2} - \frac{\psi_1}{2}}{0 - \frac{\chi_1+\chi_2}{2}} = \frac{\alpha - \psi_1}{-\chi_1-\chi_2} = \frac{\psi_1 - \alpha}{\chi_1+\chi_2}$$

Για να είναι τα τρία σημεία συνευθειακά πρέπει ΚΜ // ΚΜ άρα πρέπει να δείξουμε ότι :

$$\frac{\psi_1}{\chi_1+\chi_2-\beta-\gamma} = \frac{\psi_1-\alpha}{\chi_1+\chi_2} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\psi_1\chi_1} + \cancel{\chi_2\psi_1} = \cancel{\chi_1\psi_1} - \alpha\chi_1 + \cancel{\chi_2\psi_1} - \alpha\chi_2 - \beta\psi_1 + \alpha\beta - \gamma\psi_1 + \alpha\gamma \Leftrightarrow$$

$(\alpha\chi_1 + \gamma\psi_1 - \alpha\gamma) + (\alpha\chi_2 + \beta\psi_1 - \alpha\beta) = 0 \overset{(1)\wedge(2)}{\Leftrightarrow} 0 + 0 = 0$ *Ισχύει,. ο.ε.δ.*

4. *Έστω ο ζητούμενος αριθμός* $\overline{\alpha\beta\gamma}$, $0 \le \alpha,\beta,\gamma \le 9$, $\alpha \ne 0$

$\overline{\alpha\beta\gamma}$ *περιττός αριθμός* $\Rightarrow \gamma$ *περιττός αριθμός* (1)

$\overline{\alpha\beta\gamma} = 100\cdot\alpha + 10\cdot\beta + \gamma = 45\kappa$ *(πολλαπλάσιο του 45)* $\kappa \in \boldsymbol{Z}$ (2)

α, β, γ *Α.Π.* $\Rightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$ (3)

(2)$\Rightarrow \gamma = 45\kappa - 100\alpha - 10\beta \Rightarrow \gamma = 5(9\kappa - 20\alpha - 2\beta) \Rightarrow \gamma$ *πολ/σιο 5* $\Rightarrow$

$\gamma = 0$ *απορρίπτεται ή* $\boldsymbol{\gamma = 5}$ ***δεκτή***

$\Rightarrow \cancel{5} = \cancel{5}(9\kappa - 20\alpha - 2\beta) \Rightarrow 9\kappa - 20\alpha - 2\beta = 1 \ \}$

(3) $2\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow 2\beta = \alpha + 5 \Rightarrow 9\kappa - 20\alpha - \alpha - 5 = 1 \Rightarrow 9\kappa - 21\alpha - 6 = 0$

$\Rightarrow 3\kappa - 7\alpha - 2 = 0 \Rightarrow 3\kappa = 7\alpha + 2 \Rightarrow \kappa = \dfrac{7\alpha+2}{3} * = \dfrac{6\alpha+3+\alpha-1}{3} = \dfrac{3(2\alpha+1)+\alpha-1}{3}$

$\Rightarrow \kappa = 2\alpha+1+\dfrac{\alpha-1}{3}$, $\kappa \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \dfrac{\alpha-1}{3} = \lambda \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \alpha = 3\lambda + 1$, $1 \le \alpha \le 9 \Rightarrow 1 \le 3\lambda+1 \le 9$

$\Rightarrow 0 \le 3\lambda \le 8 \Rightarrow 0 \le \lambda \le \dfrac{8}{3}$, $\lambda \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \underline{\alpha=1}$ ή $\lambda = 1 \Rightarrow \underline{\alpha = 4}$ ή $\lambda=2 \Rightarrow$

$*$ $\underline{\alpha = 7}$

(i) $\alpha=1, \gamma=5 \Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow 2\beta=1+5 \Rightarrow \beta=3 \Rightarrow$ ***135***

(ii) $a=4$, $\gamma=5 \Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow 2\beta=4+5 \Rightarrow \beta = \dfrac{9}{2}$ *απορρίπτεται*

(iii) $\alpha=7, \gamma=5 \Rightarrow 2\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow 2\beta = 5+7 \Rightarrow 2\beta=12 \Rightarrow \beta = 6 \Rightarrow$ ***765.***

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ***135*** *και* ***765***

5. $f(\chi) = \dfrac{\chi^3+2\chi^2+\chi+2}{(\chi+1)\left[(\chi+1)^2+1\right]} = \dfrac{\chi^2(\chi+2)+(\chi+2)}{(\chi+1)\left[(\chi+1)^2+1\right]} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\chi) = \dfrac{(\chi+2)(\chi^2+1)}{(\chi+1)\left[(\chi+1)^2+1\right]}$

A = f(1)·f(2)·f(3)· … ·f(2000)

$$A = \frac{\cancel{3}\cdot(1^2+1)}{2\cdot\cancel{(2^2+1)}}\cdot\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{(2^2+1)}}{\cancel{3}\cdot\cancel{(3^2+1)}}\cdot\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{(3^2+1)}}{\cancel{4}\cdot\cancel{(4^2+1)}}\cdot\ldots\cdot\frac{2001\cdot\cancel{(1999^2+1)}}{\cancel{2000}\cdot(2000^2+1)}\cdot\frac{2002\cdot(2000^2+1)}{2001\cdot(2001^2+1)}$$

$$A = \frac{1^2+1}{2}\cdot\frac{2002}{2001^2+1} \Rightarrow A = \frac{2002}{2001^2+1} \Rightarrow A = \frac{2002}{4004002} \Rightarrow A = \frac{1001}{2002001}$$

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΦΟΥ «ΑΝΔΡΕΑΣ ΧΑΤΖΗΘΕΟΡΗΣ» ΓΙΑ ΤΙΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΕΙΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία και χρόνος εξέτασης
18 Δεκεμβρίου 1999
Διάρκεια : 3 ώρες

Επιμέλεια
Αλέξανδρος Δημητριάδης
Ευθύβουλος Λιασίδης

Να λυθούν όλες οι ασκήσεις

1) Θεωρούμε την ακολουθία α_ν , $\nu \in N$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}(\alpha_\nu + \frac{\lambda}{\alpha_\nu})$ με λ>0. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha_\nu - \sqrt{\lambda}}{\alpha_\nu + \sqrt{\lambda}} = \left(\frac{\alpha_1 - \sqrt{\lambda}}{\alpha_1 + \sqrt{\lambda}}\right)^{2^{\nu-1}}$, $\forall \nu \in N$.

2) Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα Σ_μ των μ πρώτων όρων της είναι $\Sigma_\mu = \nu$ και το άθροισμα Σ_ν των ν πρώτων όρων της είναι $\Sigma_\nu = \mu$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\Sigma_{\mu+\nu}$ των μ και ν όρων της είναι $\Sigma_{\mu+\nu} = -(\mu+\nu)$.

3) α) Να λυθεί η εξίσωση : $6x^2 + 8x^2 + 10x^2 + \cdots + 44x^2 = 2000$.
β) Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε α > 0 και β > α+γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ έχει άνισες ρίζες.

4) α) Να αποδειχθεί η ισότητα: $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \eta\mu\frac{\alpha}{4}$, $\alpha\nu \quad \pi < \alpha < 2\pi$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^3\chi(1+\sigma\varphi\chi)+\sigma\upsilon\nu^3\chi(1+\varepsilon\varphi\chi) < \frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}$ με $\alpha \in R$, $\chi \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, $\chi \neq \kappa\pi$, $\kappa \in Z$.

5) Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ =ΑΓ) και τυχαίο σημείο Ρ πάνω στη βάση του ΒΓ. Αν Δ, Ε είναι οι προβολές του Ρ πάνω στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετη του τμήματος ΔΕ περνά από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{\lambda}{\alpha_\nu}\right)$ (1) $\frac{\alpha_\nu - \sqrt{\lambda}}{\alpha_\nu + \sqrt{\lambda}} = \left(\frac{\alpha_1 - \sqrt{\lambda}}{\alpha_1 + \sqrt{\lambda}}\right)^{2^{\nu-1}}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Επαγωγικά: Για ν = 1 $\Rightarrow$ $\frac{\alpha_1 - \sqrt{\lambda}}{\alpha_1 + \sqrt{\lambda}} = \left(\frac{\alpha_1 - \sqrt{\lambda}}{\alpha_1 + \sqrt{\lambda}}\right)^{2^0} = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\lambda}}{\alpha_1 + \sqrt{\lambda}}$, ισχύει.

Έστω ότι: $\frac{\alpha_\kappa - \sqrt{\lambda}}{\alpha_\kappa + \sqrt{\lambda}} = \left(\frac{\alpha_1 - \sqrt{\lambda}}{\alpha_1 + \sqrt{\lambda}}\right)^{2^{\kappa-1}}$, $\forall \kappa \in \mathbb{N}$ (2)

Θα αποδείξουμε ότι: $\dfrac{\alpha_{\kappa+1}-\sqrt{\lambda}}{\alpha_{\kappa+1}+\sqrt{\lambda}}=\left(\dfrac{\alpha_1-\sqrt{\lambda}}{\alpha_1+\sqrt{\lambda}}\right)^{2^{\kappa}}$, $\forall \kappa \in \mathbb{N}$

Απόδειξη:

$$\frac{\alpha_{\kappa+1}-\sqrt{\lambda}}{\alpha_{\kappa+1}+\sqrt{\lambda}}\overset{(1)}{=}\frac{\frac{1}{2}\left(\alpha_\kappa+\frac{\lambda}{\alpha_\kappa}\right)-\sqrt{\lambda}}{\frac{1}{2}\left(\alpha_\kappa+\frac{\lambda}{\alpha_\kappa}\right)+\sqrt{\lambda}}=\frac{\frac{\alpha_\kappa{}^2+\lambda}{2\alpha_\kappa}-\sqrt{\lambda}}{\frac{\alpha_\kappa{}^2+\lambda}{2\alpha_\kappa}+\sqrt{\lambda}}=\frac{\alpha_\kappa{}^2-2\alpha_\kappa\sqrt{\lambda}+\lambda}{\alpha_\kappa{}^2+2\alpha_\kappa\sqrt{\lambda}+\lambda}=\left(\frac{\alpha_\kappa-\sqrt{\lambda}}{\alpha_\kappa+\sqrt{\lambda}}\right)^2\overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=}\left[\left(\frac{\alpha_1-\sqrt{\lambda}}{\alpha_1+\sqrt{\lambda}}\right)^{2^{\kappa-1}}\right]^2=\left(\frac{\alpha_1-\sqrt{\lambda}}{\alpha_1+\sqrt{\lambda}}\right)^{2^{\kappa}}.$$

Άρα, $\dfrac{\alpha_\nu-\sqrt{\lambda}}{\alpha_\nu+\sqrt{\lambda}}=\left(\dfrac{\alpha_1-\sqrt{\lambda}}{\alpha_1+\sqrt{\lambda}}\right)^{2^{\nu-1}}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

2.

$$\left.\begin{aligned}\Sigma_\mu=\nu &\Rightarrow \frac{\left[2\alpha_1+(\mu-1)\cdot\delta\right]\mu}{2}=\nu \Rightarrow 2\alpha_1+(\mu-1)\cdot\delta=\frac{2\nu}{\mu}\quad(1)\\ \Sigma_\nu=\mu &\Rightarrow \frac{\left[2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\delta\right]\nu}{2}=\mu \Rightarrow 2\alpha_1+(\nu-1)\cdot\delta=\frac{2\mu}{\nu}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\overset{-}{\Rightarrow}(\mu-\nu)\delta=\frac{2\nu}{\mu}-\frac{2\mu}{\nu}\Rightarrow(\mu-\nu)\delta=\frac{2(\nu-\mu)(\nu+\mu)}{\mu\cdot\nu}\Rightarrow\delta=-\frac{2(\mu+\nu)}{\mu\cdot\nu}\quad(2)$$

Από τις (1), (2) παίρνουμε: $2\alpha_1=\dfrac{2\nu}{\mu}-(\mu-1)\cdot\delta$ (3)

$$\Sigma_{\mu+\nu}=\frac{\left[2\alpha_1+(\mu+\nu-1)\cdot\delta\right](\mu+\nu)}{2}\overset{(3)}{=}\frac{\left[\frac{2\nu}{\mu}-(\mu-1)\delta+(\mu+\nu-1)\delta\right](\mu+\nu)}{2}=$$

$$\frac{\left(\frac{2\nu}{\mu}+\nu\delta\right)(\mu+\nu)}{2}\overset{(2)}{=}\frac{\frac{2\nu}{\mu}-\frac{2\mu+2\nu}{\mu}}{2}(\mu+\nu)=\frac{-2\mu}{2\mu}(\mu+\nu)=-(\mu+\nu).$$

3. α) $6\chi^2+8\chi^2+10\chi^2+\cdots+44\chi^2=2000 \Rightarrow (6+8+10+\cdots+44)\chi^2=2000$ (1)

$6,8,10,\cdots,44,\cdots$ Α.Π.$\Rightarrow 44=6+(\nu-1)\cdot 2\Rightarrow 2(\nu-1)=38\Rightarrow \boxed{\nu=20}$

Για ν=20, η (1) γίνεται: $\dfrac{(6+44)20}{2}\chi^2=2000 \Rightarrow 500\chi^2=2000\Rightarrow \chi^2=4\Rightarrow \boxed{\chi=\pm 2}$

β) α>0 , β>α+γ , $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$

i) Για γ<0 $\Rightarrow \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0\Rightarrow$ ρίζες άνισες πραγματικές

ii) Για γ>0 $\Rightarrow \beta>\alpha+\gamma\Rightarrow\beta^2>\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma\geq 2\alpha\gamma+2\alpha\gamma=4\alpha\gamma\Rightarrow$

$\Rightarrow \beta^2-4\alpha\gamma>0 \Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow$ ρίζες άνισες πραγματικές

4. α) $\frac{1}{2}+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}=\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha}=\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\right|=-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ (1) διότι:

$\pi<\alpha<2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\pi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}<0$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{2}=\eta\mu^2\frac{\alpha}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}=\left|\eta\mu\frac{\alpha}{4}\right|=\eta\mu\frac{\alpha}{4}$ (2) διότι:

$\pi<\alpha<2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{4}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\frac{\alpha}{4}>0$

Λαμβάνοντας υπ’ όψη τις (1), (2) παίρνουμε διαδοχικά:

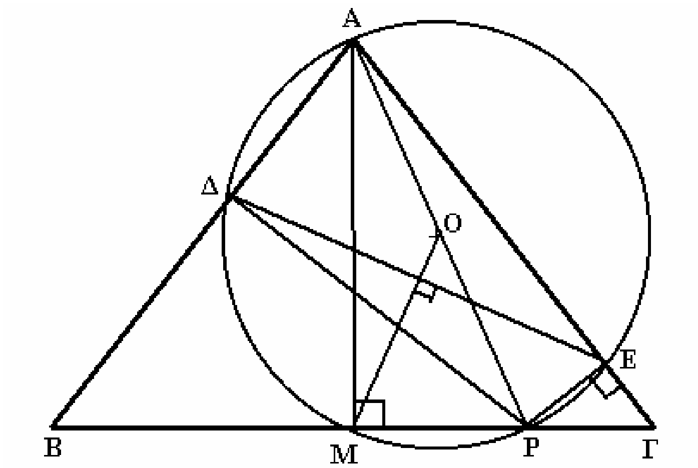
$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha}}\overset{(1)}{=}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}\overset{(2)}{=}\eta\mu\frac{\alpha}{4}$$

β) $\eta\mu^3\chi(1+\sigma\phi\chi)+\sigma\upsilon\nu^3\chi(1+\varepsilon\phi\chi)=\eta\mu^3\chi\cdot\frac{\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}+\sigma\upsilon\nu^3\chi\cdot\frac{\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}=$

$=(\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi)(\eta\mu^2\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi)=\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi<2$ (3)

$\frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\geq 2$ (4). Από τις (3), (4) συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

5.



Επειδή $\widehat{\text{ΑΔΡ}}=\widehat{\text{ΑΕΡ}}=\widehat{\text{ΑΜΡ}}=90°$, τα σημεία Δ, Ε, Μ βρίσκονται σε κύκλο με διάμετρο ΑΡ.

ΑΜ: διχοτόμος της $\widehat{\text{ΒΑΓ}} \Rightarrow \overset{\frown}{\text{ΔΜ}}=\overset{\frown}{\text{ΜΕ}} \Rightarrow$ Μ: μέσο του $\overset{\frown}{\text{ΔΜΕ}}$.

Άρα, η μεσοκάθετη της χορδής ΔΕ θα περάσει και από το μέσο Μ του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΔΜΕ}}$ που είναι και μέσο της ΒΓ.

<u>Παγκύπριος Διαγωνισμός Γ′ Γυμνασίου</u>
<u>*“Ευαγόρας Παλληκαρίδης”*</u>

<u>*Ημερομηνία και χρόνος εξέτασης*</u>
5 Φεβρουαρίου 2000
Διάρκεια : 3 ώρες

<u>*Επιμέλεια*</u>
Ανδρέας Αντωνίου
Μάριος Ευσταθίου

1. Δίνονται τα κλάσματα

$A = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 16}$ και $B = \dfrac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 1}$

α) Να απλοποιηθούν τα Α και Β
β) Να βρείτε το Α-Β
γ) Να λυθεί η εξίσωση $A - B = \dfrac{7}{x^2 - 16}$
δ) Να γίνουν οι πράξεις : $\dfrac{1}{B} - \dfrac{1}{A}$

---

2. (i) Να αναλύσετε πλήρως τις παραστάσεις
α) -9-4α^2+4(χ^2+3α)
β) α(α+2)χ^2-2χ(1+α)+1
γ) ψ^2-1-χ(χ+2)
(ii) Αν k είναι ακέραιος πολλαπλάσιος του 12 και όχι του 9 , να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς δεν μπορεί να είναι ακέραιοι
$\dfrac{k}{12}$, $\dfrac{k}{10}$, $\dfrac{k}{36}$, $\dfrac{k^2}{36}$, $\dfrac{k}{18}$. Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

---

3. Αν $\dfrac{1}{a} - \beta = 1$ και $\beta^3 - \dfrac{1}{a^3} = -\dfrac{31}{3}$ (α>0, β>0), να βρείτε την αριθμητική τιμή του κλάσματος $\dfrac{a}{\beta}$.

---

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και (ΓΔ)=2(ΑΒ) τέτοιο ώστε η διαγώνιος ΒΔ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Αν (ΒΔ)=8 cm και (ΒΓ)=6 cm, να βρεθεί η απόσταση της κορυφής Α από τη διαγώνιο ΒΔ.

---

5. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά α . Πάνω στη πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημείο Ζ και πάνω στη πλευρά ΓΔ παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε ΒΖ=ΓΕ. Αν η ΑΖ και η ΒΕ τέμνονται στο Η, να δειχθεί ότι :
α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ ισούται με το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΖΓΕ και
β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΗΕ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΑΔΕ και ΒΗΖ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $A=\dfrac{\chi^2-\chi-12}{\chi^2-16}$ $\qquad B=\dfrac{4\chi^2-4\chi+1}{4\chi^2-1}$

α) $A=\dfrac{(\chi-4)(\chi+3)}{(\chi-4)(\chi+4)}=\dfrac{\chi+3}{\chi+4},\qquad \chi\neq\pm4$

$B=\dfrac{(2\chi-1)^2}{(2\chi-1)(2\chi+1)}=\dfrac{2\chi-1}{2\chi+1},\qquad \chi\neq\pm\dfrac{1}{2}$

β) $A-B=\dfrac{\chi+3}{\chi+4}-\dfrac{2\chi-1}{2\chi+1}=\dfrac{(\chi+3)(2\chi+1)-(\chi+4)(2\chi-1)}{(\chi+4)(2\chi+1)}=\dfrac{7}{(\chi+4)(2\chi+1)}$

γ) $A-B=\dfrac{7}{\chi^2-16}\Rightarrow\dfrac{7}{(\chi+4)(2\chi+1)}=\dfrac{7}{(\chi-4)(\chi+4)},\quad \chi\neq\pm4,\ \chi\neq\pm\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 2\chi+1=\chi-4\ \Rightarrow\ \chi=-5$

δ) $\dfrac{1}{B}-\dfrac{1}{A}=\dfrac{A-B}{AB}=\dfrac{\dfrac{7}{\cancel{(\chi+4)}\cancel{(2\chi+1)}}}{\dfrac{(\chi+3)}{\cancel{(\chi+4)}}\cdot\dfrac{(2\chi-1)}{\cancel{(2\chi+1)}}}=\dfrac{7}{(\chi+3)(2\chi-1)}$

---

2. (α) $-9-4\alpha^2+4(\chi^2+3\alpha)=-9-4\alpha^2+4\chi^2+12\alpha=4\chi^2-(4\alpha^2-12\alpha+9)=(2\chi)^2-(2\alpha-3)^2$
$=(2\chi+2\alpha-3)(2\chi-2\alpha+3)$

(β) $\alpha(\alpha+2)\chi^2-2\chi(1+\alpha)+1=\alpha^2\chi^2+2\alpha\chi^2-2\chi-2\alpha\chi+1=(\alpha^2\chi^2-2\alpha\chi+1)+(2\alpha\chi^2-2\chi)$
$=(\alpha\chi-1)^2+2\chi(\alpha\chi-1)=(\alpha\chi-1)(\alpha\chi-1+2\chi)$

(γ) $\psi^2-1-\chi(\chi+2)=\psi^2-1-\chi^2-2\chi=\psi^2-(\chi^2+2\chi+1)=\psi^2-(\chi+1)^2=(\psi+\chi+1)(\psi-\chi-1)$.

(ii) $k\in\{1\cdot12,\ 2\cdot12,\ 4\cdot12,\ 5\cdot12,\ 7\cdot12,\ ...\}$

ή $k=\lambda\cdot12$ όπου $\lambda=1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, ...$

$\dfrac{k}{12}=\dfrac{\lambda\cdot12}{12}=\lambda$, ακέραιος για λ=1, 2, 4, 5, ...

$\dfrac{k}{10}=\dfrac{\lambda\cdot12}{10}=\dfrac{6}{5}\cdot\lambda$, ακέραιος για λ=5, 10, 20, ...

$\dfrac{k}{36}=\dfrac{\lambda\cdot12}{36}=\dfrac{\lambda}{3}$, ΟΧΙ ακέραιος αφού λ δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

$\dfrac{k^2}{36}=\dfrac{(\lambda\cdot12)^2}{36}=4\cdot\lambda^2$, ακέραιος

$\dfrac{k}{18}=\dfrac{\lambda\cdot12}{18}=\dfrac{2\cdot\lambda}{3}$, ΟΧΙ ακέραιος αφού λ δεν είναι πολλαπλάσιο του 3.

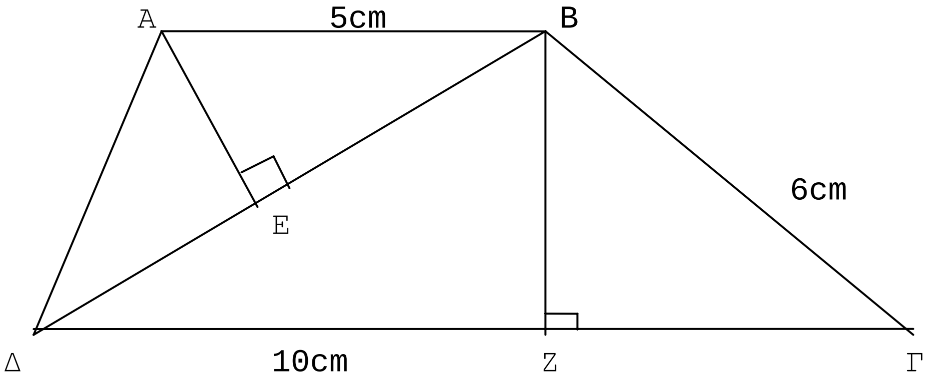
Συμπέρασμα : Οι αριθμοί $\dfrac{k}{36}$ *και* $\dfrac{k}{18}$ ΔΕΝ μπορεί να είναι ακέραιοι.

3. $\frac{1}{a} - \beta = 1 \qquad \beta^3 - \frac{1}{a^3} = -\frac{31}{3} \qquad (a > 0, \quad \beta > 0)$

$$\frac{1}{a^3} - \beta^3 = \frac{31}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} - \beta\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\cdot\beta + \beta^2\right) = \frac{31}{3} \Rightarrow 1\cdot\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}\cdot\beta + \beta^2\right) = \frac{31}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a} - \beta\right)^2 + 3\cdot\frac{\beta}{a} = \frac{31}{3} \Rightarrow 1^2 + 3\cdot\frac{\beta}{a} = \frac{31}{3} \Rightarrow 3\cdot\frac{\beta}{a} = \frac{28}{3} \Rightarrow \frac{\beta}{a} = \frac{28}{9} \Rightarrow \frac{a}{\beta} = \frac{9}{28}$$

4.



ΑΒ//ΔΓ, (ΓΔ)=2·(ΑΒ), $\widehat{\Delta B \Gamma} = 90°$, (ΒΔ)=8cm και (ΒΓ)=6cm

$(\Gamma\Delta)^2 = (64+36)cm^2 \Rightarrow (\Gamma\Delta) = 10cm \Rightarrow (AB) = 5cm$

$E_{B\Gamma\Delta} = \frac{6cm\cdot 8cm}{2} = 24cm^2, \qquad E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{[(AB)+(\Delta\Gamma)]\cdot(BZ)}{2}$

Από το τρίγωνο ΒΓΔ $\Rightarrow \frac{10\cdot\upsilon}{2} = \frac{6\cdot 8}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \upsilon = 4{,}8\,\text{cm}$

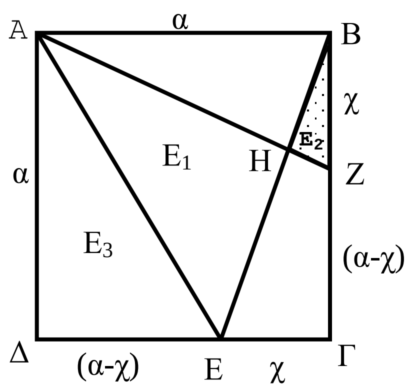
$$\Rightarrow E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{15\cdot 4{,}8}{2}cm^2 = 36cm^2 \Rightarrow E_{AB\Delta} = E_{AB\Gamma\Delta} - E_{B\Gamma\Delta} = 36cm^2 - 24cm^2 = 12cm^2$$

$$\Rightarrow \frac{(B\Delta)\cdot(AE)}{2} = 12cm^2 \Rightarrow 8cm\cdot(AE) = 24cm^2 \Rightarrow (AE) = 3cm$$

5. (α) $E_{\overset{\Delta}{ABZ}} = E_{\overset{\Delta}{B\Gamma E}}$

(Ορθογώνια τρίγωνα με ίσες κάθετες πλευρές)

$\Rightarrow E_{\overset{\Delta}{ABE}} = E_{AB\Gamma E} - E_{\overset{\Delta}{B\Gamma E}} = E_{AB\Gamma E} - E_{\overset{\Delta}{ABZ}} = E_{AZ\Gamma E}$



(β) Ζητούμενο : $E_1 = E_2 + E_3$

$(\overset{\Delta}{ABE}) = \frac{1}{2}\cdot(AB\Gamma\Delta) \Rightarrow 2\cdot(\overset{\Delta}{ABE}) = (AB\Gamma\Delta) \Rightarrow$

$(\overset{\Delta}{ABE}) + (AZ\Gamma E) = (AB\Gamma\Delta) \Rightarrow$

$$E_1 + \cancel{(\overset{\Delta}{ABH})} + \cancel{E_1} + \cancel{(HZ\Gamma E)} = \cancel{E_1} + E_2 + E_3 + \cancel{(\overset{\Delta}{ABH})} + \cancel{(HZ\Gamma E)} \Rightarrow E_1 = E_2 + E_3$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
«ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΓΙΑΛΛΟΥΡΟΣ»

Ημερομηνία και χρόνος εξέτασης	*Επιμέλεια*
Σάββατο 5/2/2000	*Σάββας Ιωαννίδης*
Διάρκεια: 3 ώρες	*Ανδρέας Φαλάς*

Να λυθούν και τα πέντε θέματα.

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο δύο τριωνύμων το πολυώνυμο $\chi^4 + \chi^3 - 2\chi^2 + 3\lambda\chi - \lambda^2$

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = γ , ΑΓ=β, ΒΓ=α και διάμεσους $ΑΜ=\mu_\alpha$, $ΒΝ=\mu_\beta$, $ΓΕ=\mu_\gamma$. Αν συμβολίσουμε με 2τ την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ (2τ = α+β+γ) να δείξετε ότι $\tau < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.

3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση
$Α = (1 - ημ^2χ \cdot συν^2χ) \cdot (ημ^3χ \cdot συνχ - συν^3χ \cdot ημχ) - (ημ^7χ \cdot συνχ - συν^7χ \cdot ημχ)$
έχει τιμή ανεξάρτητη της τιμής του τόξου χ.

4. Δίδετε το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Οι απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΒΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Η και το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Η}Β$ είναι 26°. Οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Ζ και το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Δ$ είναι 32°. Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

5. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $4\alpha^4 + \beta^4$ είναι πρώτος μόνο για ένα ζεύγος τιμών των φυσικών αριθμών α και β.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. *Διατάσσουμε το πολυώνυμο κατά τας κατιούσας δυνάμεις του λ και έχουμε*
$-\lambda^2 + 3\lambda\chi + \chi^4 + \chi^3 - 2\chi^2$ *Βρίσκουμε τις ρίζες του ως προς λ*

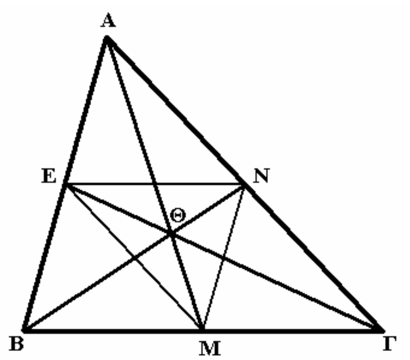
$$\lambda_{1,2} = \frac{-3\chi \pm \sqrt{9\chi^2 + 4\cdot\left(\chi^4 + \chi^3 - 2\chi^2\right)}}{-2} = \frac{-3\chi \pm \sqrt{4\chi^4 + 4\chi^3 + \chi^2}}{-2} \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3\chi \pm \sqrt{\chi^2 \cdot \left(4\chi^2 + 4\chi + 1\right)}}{-2} = \frac{-3\chi \pm \sqrt{\chi^2 (2\chi+1)^2}}{-2} = \frac{-3\chi \pm \chi\cdot(2\chi+1)}{-2} = \frac{-3\chi \pm \left(2\chi^2 + \chi\right)}{-2}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\chi^2 + \chi$ *και* $\lambda_2 = \chi^2 + 2\chi$

$$\Rightarrow -\lambda^2 + 3\lambda\chi + \chi^4 + \chi^3 - 2\chi^2 = -(\lambda - \lambda_1)\cdot(\lambda - \lambda_2) = -(\lambda + \chi^2 - \chi)\cdot(\lambda - \chi^2 - 2\chi)$$
$$= (-\lambda - \chi^2 + \chi)\cdot(\lambda - \chi^2 - 2\chi)$$

2.



(α) $ΑΜ + ΜΒ > ΑΒ$ $\left(\overset{\Delta}{ΑΒΜ}\right)$

$ΒΝ + ΝΓ > ΒΓ$ $\left(\overset{\Delta}{ΒΝΓ}\right)$

$ΓΕ + ΕΑ > ΑΓ$ $\left(\overset{\Delta}{ΓΕΑ}\right)$

$ΑΜ + ΜΒ + ΒΝ + ΝΓ + ΓΕ + ΕΑ > ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ$

$$\Rightarrow \quad \mu_\alpha + \frac{\alpha}{2} + \mu_\beta + \frac{\beta}{2} + \mu_\gamma + \frac{\gamma}{2} > \gamma + \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow \quad 2\mu_\alpha + \alpha + 2\mu_\beta + \beta + 2\mu_\gamma + \gamma > 2\gamma + 2\alpha + 2\beta$$

$$\Rightarrow \quad 2(\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma) > \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Rightarrow \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma > \tau \quad (\iota)$$

(β) $$\left.\begin{array}{ll} AM < AE + EM & (\overset{\Delta}{AME}) \\ BN < NM + BM & (\overset{\Delta}{BNM}) \\ \Gamma E < EN + N\Gamma & (\overset{\Delta}{\Gamma EN}) \end{array}\right\} \Rightarrow AM + BN + \Gamma E < AE + EM + NM + BM + EN + N\Gamma$$

$$\Rightarrow \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \Rightarrow \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau \quad (\iota\iota)$$

$$\overset{(\iota)\wedge(\iota\iota)}{\Longrightarrow} \quad \tau < \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$$

3. $A = (1 - \eta\mu^2\chi\,\sigma\upsilon\nu^2\chi)(\eta\mu^3\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu^3\chi\,\eta\mu\chi) - (\eta\mu^7\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu^7\chi\,\eta\mu\chi)$

$\Rightarrow A = (1 - \eta\mu^2\chi\,\sigma\upsilon\nu^2\chi)\,\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi\,(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi) - \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi\,(\eta\mu^6\chi - \sigma\upsilon\nu^6\chi)$

$\Rightarrow A = \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi\,[(1 - \eta\mu^2\chi\,\sigma\upsilon\nu^2\chi)(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi) - [(\eta\mu^2\chi)^3 - (\sigma\upsilon\nu^2\chi)^3]]$

$\Rightarrow A = \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi\,[(1 - \eta\mu^2\chi\,\sigma\upsilon\nu^2\chi)(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi) - (\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi)(\eta\mu^4\chi + \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi)]$

$\Rightarrow A = \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi\,(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi)\,[1 - \eta\mu^2\chi\,\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^4\chi - \eta\mu^2\chi\,\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^4\chi]$

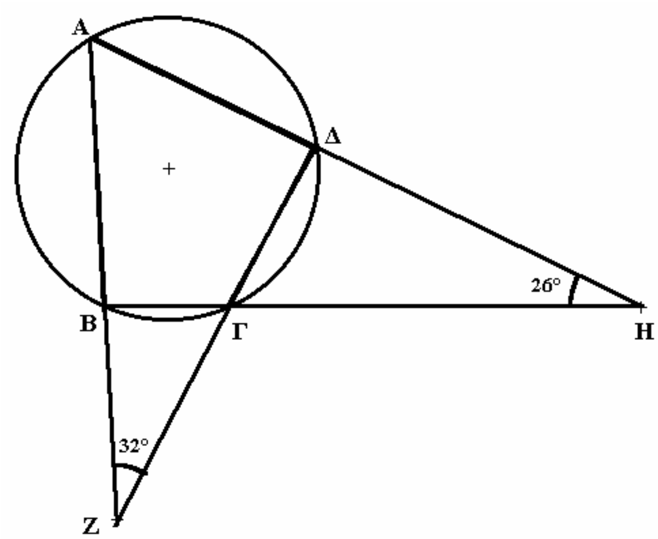
$\Rightarrow A = \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi\,(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi)\,[1 - (\eta\mu^4\chi + 2\eta\mu^2\chi\,\sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi)]$

$\Rightarrow A = \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi\,(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi)\,[1 - (\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)^2]$

$\Rightarrow A = \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi\,(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi)(1 - 1) = \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi\,(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow A = 0$ *(Άρα είναι ανεξάρτητη της τιμής του τόξου χ)*

4.



$\hat{A} + \hat{\Delta} + 32° = 180° \quad (\overset{\Delta}{AZ\Delta}) \quad (1)$

$\hat{A} + \hat{B} + 26° = 180° \quad (\overset{\Delta}{ABH}) \quad (2)$

$(1) - (2) \Rightarrow \hat{\Delta} - \hat{B} + 6° = 0$

$\hat{\Delta} + \hat{B} = 180°$ *(απέναντι γωνιές εγγεγραμμένου τετραπλεύρου)*

$\Rightarrow 2\hat{\Delta} = 180° - 6° \Rightarrow \hat{\Delta} = 87°$

$\Rightarrow \hat{B} = 93° \overset{(1)}{\Rightarrow} \hat{A} = 61° \Rightarrow \hat{\Gamma} = 119°$

5. *Έχουμε κατά σειρά* $4\alpha^4 + \beta^4 = 4\alpha^4 + \beta^4 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (2\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$

$= (2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \cdot (2\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta)$

Για να είναι πρώτος ο αριθμός $4\alpha^4 + \beta^4$ *πρέπει ο παράγοντας* $2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$ *να είναι ίσος με την μονάδα (είναι ο μικρότερος από τους δύο παράγοντες).*
Τότε θα έχουμε $2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 1$
Αλλά $\alpha \in \mathbf{N}$ *και* $\beta \in \mathbf{N} \Rightarrow \alpha = 1$ *και* $\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 1$
Επομένως ο αριθμός $4\alpha^4 + \beta^4$ *θα γίνει* $4 + 1 = 5$

Αν $2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \neq 1$ *Τότε ο* $4\alpha^4 + \beta^4$ *θα είναι σύνθετος.*

Δεν υπάρχουν λοιπόν άλλες τιμές για τα α και β εκτός από $(\alpha, \beta) = (1, 1)$.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Β΄ και Γ΄ Λυκείου
«ΖΗΝΩΝ»

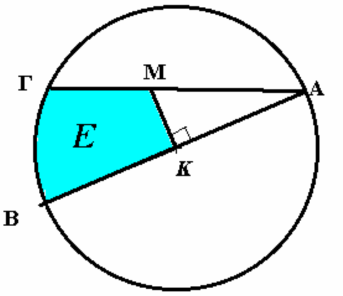
Ημερομηνία και χρόνος εξέτασης
Σάββατο 26/02/2000
Χρόνος: 3 ώρες

Επιμέλεια
Ανδρέας Φαλάς
Σάββας Ιωαννίδης

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις

1. Να βρείτε τις πραγματικές λύσεις του συστήματος:
$\chi + 2\psi + 3\omega = 5$
$\chi^2 + 4\psi^2 + 9\omega^2 = 41$
$\chi\psi + 2\chi\omega + 3\psi\omega = -3$

2. Στο σχήμα είναι:
ΑΒ διάμετρος του κύκλου (Κ,R) και ΜΚ = ΜΓ , όπου ΜΚ ⊥ ΑΒ . ΝΑ υπολογίσετε , συναρτήσει της ακτίνας R, το εμβαδόν Ε του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου χωρίου ΓΜΚΒ.



3. Στις 12 το μεσημέρι, γεννιέται ένα γόνιμο έντομο σε κάποιο εργαστήριο. Κάθε μια ώρα το γόνιμο έντομο γεννά 2 άλλα γόνιμα και ένα στείρο έντομο. Όλα τα γόνιμα ζουν 2 ½ ώρες και τα στείρα 3 ½ ώρες. Πόσα ζωντανά έντομα υπάρχουν στο εργαστήρια στις 7:31 μ.μ. ;

4. Δίδεται η πολυωνυμική συνάρτηση:
$f(x) = x^{\nu} - 13\cdot x^{\nu-1} - 10\cdot x^{\nu-2} + 4\cdot x^{\nu-3} + x^3 - 14\cdot x^2 + 4\cdot x + 20$ με $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu > 6$.
Να βρείτε την αριθμητική τιμή : $f\left(7 - 3\sqrt{5}\right)$.

5. Να δείξετε ότι η άρτια συνάρτηση f(χ) με $f(\chi+\psi) = \dfrac{f(\chi)+f(\psi)}{1+f(\chi)f(\psi)}$ $\forall\ \chi,\psi \in \mathbb{R}$
λαμβάνει μόνο τρεις πραγματικές σταθερές τιμές $\forall\ \chi \in \mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1.

$$\chi + 2\psi + 3\omega = 5 \quad (1)$$
$$\chi^2 + 4\psi^2 + 9\omega^2 = 41 \quad (2)$$
$$\chi\psi + 2\chi\omega + 3\psi\omega = -3 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow (\chi + 2\psi + 3\omega)^2 = 25 \Rightarrow$$
$$\overbrace{\chi^2 + 4\psi^2 + 9\omega^2}^{41} + 4\chi\psi + 6\chi\omega + 12\psi\omega = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\chi\psi + 6\chi\omega + 12\psi\omega = 25 - 41 \Rightarrow 4\chi\psi + 6\chi\omega + 12\psi\omega = -16 \Rightarrow 2\chi\psi + 3\chi\omega + 6\psi\omega = -8$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\chi\psi + 3\chi\omega + 6\psi\omega = -8 \\ \chi\psi + 2\chi\omega + 3\psi\omega = -3 \end{array}\right| \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \cancel{2\chi\psi} + 3\chi\omega + \cancel{6\psi\omega} = -8 \\ \underline{\cancel{-2\chi\psi} + -4\chi\omega \cancel{-6\psi\omega} = 6} \end{array} \Rightarrow -\chi\omega = -2 \Rightarrow \chi\omega = 2$$

$$(3) \Rightarrow \chi\psi + 2\cdot 2 + 3\psi\omega = -3 \Rightarrow \chi\psi + 3\psi\omega = -7 \Rightarrow \psi(\chi + 3\omega) = -7 \overset{(1)}{\Rightarrow} \psi(5 - 2\psi) = -7$$

$$\Rightarrow\ 2\psi^2-5\psi-7=0 \Rightarrow (2\psi-7)\cdot(\psi+1)=0 \Rightarrow \psi=\frac{7}{2} \text{ ή } \psi=-1$$

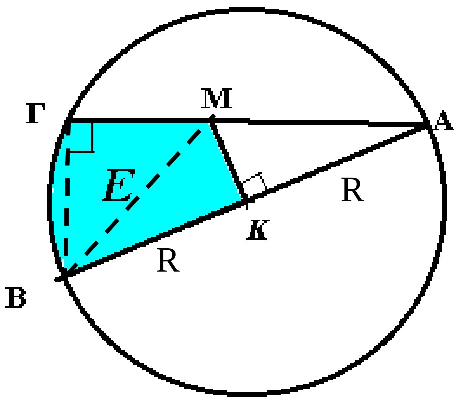
(α) $\psi=\frac{7}{2} \Rightarrow \chi+2\cdot\frac{7}{2}+3\omega=5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\chi+3\omega=-2\\ \chi\omega=2\end{array}\right\}$ $(-2-3\omega)\omega=2 \Rightarrow 3\omega^2+2\omega+2=0$ αδύνατη στο **R**

(β) $\psi=-1 \Rightarrow \chi+2\cdot(-1)+3\omega+2=5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\chi+3\omega=7\\ \chi\omega=2\end{array}\right\} \Rightarrow (7-3\omega)\,\omega=2 \Rightarrow 3\omega^2-7\omega+2=0 \Rightarrow$

$(\omega-2)(3\omega-1)=0 \Rightarrow \omega=2 \Rightarrow \underline{\chi=1}$ ή $\omega=\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\chi=6}$

$\Rightarrow$ **($\chi=1$, $\psi=-1$, $\omega=2$) ή ($\chi=6$, $\psi=-1$, $\omega=\frac{1}{3}$)**

2.



$\left.\begin{array}{l}AB \quad \textit{διάμετρος} \Rightarrow \hat{\Gamma}=90^\circ\\ \hat{K}=90^\circ,\quad MK=MK,\quad BM \quad \textit{κοινή}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\overset{\Delta}{\Gamma MB}=\overset{\Delta}{KMB}=\overset{\Delta}{KMA}$

$\Rightarrow E_{\gamma\rho}=\frac{2}{3}(\overset{\Delta}{AB\Gamma})+E_{\kappa.\tau\mu.B\Gamma}=$

$\Rightarrow E_{\gamma\rho}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\sqrt{3}+[\pi R^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\Rightarrow E_{\gamma\rho}=R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \boxed{E=\frac{2\pi+\sqrt{3}}{12}\cdot R^2}$

3.

12μ: 1Γ $\longrightarrow$ 1μ.μ.: 1Γ + 2Γ, 1Σ — 3Γ, 1Σ

2μ.μ.: 1Γ+2Γ+6Γ, 1Σ+3Σ — 9Γ, 4Σ

2 ½ μ.μ. ~~1Γ~~

3μ.μ.: 2Γ+6Γ+16Γ, 1Σ+3Σ+8Σ — 24Γ, 12Σ

2 ½ μ.μ. ~~1Γ~~

4μ.μ.: 6Γ+16Γ+44Γ, 1Σ+3Σ+8Σ+22Σ — 66Γ, 34Σ

4 ½ μ.μ. ~~6Γ~~ ~~1Σ~~

5μ.μ.: 16Γ+44Γ+120Γ, 3Σ+8Σ+22Σ+60Σ — 166Γ, 93Σ

5 ½ μ.μ. ~~16Γ~~ ~~3Σ~~

6μ.μ.: 44Γ+120Γ+328Γ, 8Σ+22Σ+60Σ+164Σ — 492Γ, 954Σ

6 ½ μ.μ. ~~44Γ~~ ~~8Σ~~

7μ.μ.: 120Γ+328Γ+896Γ, 22Σ+60Σ+164Σ+448Σ — 1344Γ, 694Σ

7 ½ μ.μ. ~~120Γ~~ ~~22Σ~~

7:31μ.μ.: 328Γ+896Γ, 60Σ+164Σ+448Σ — 1224Γ, 672Σ

328 + 896 = 1224 Γ , 60 + 164 + 444 = 672 Σ , **1896 ζωντανά**

4. 1$^{\text{ος}}$ τρόπος

$A(\chi) = [\,\chi - (7+3\sqrt{5})]\cdot[\,\chi - (7-3\sqrt{5})] = (\chi-7)^2 - (3\sqrt{5})^2 = \chi^2 - 14\chi + 4$

Ισχύει $A\left(7-3\sqrt{5}\right)=0$

$f(\chi) = \chi^{\nu} - 13\chi^{\nu-1} - 10\chi^{\nu-2} + 4\chi^{\nu-3} + \chi^3 - 14\chi^2 + 4\chi + 20 \Rightarrow$

$f(\chi) = \chi^{\nu-2}\left[\chi^2 - 14 + 4\right] + \chi^{\nu-3}\left[\chi^2 - 14\chi + 4\right] + \chi\left[\chi^2 - 14\chi + 4\right] + 20 \Rightarrow$

$f(\chi) = \chi^{\nu-2}\cdot A(\chi) + \chi^{\nu-3}\cdot A(\chi) + \chi\cdot A(\chi) + 20 \;\Rightarrow\; f(\chi) = A(\chi)\left[\chi^{\nu-2} + \chi^{\nu-3} + \chi\right] + 20$

$\Rightarrow$

$f\left(7-3\sqrt{5}\right) = A\left(7-3\sqrt{5}\right)\cdot\left[\left(7-3\sqrt{5}\right)^{\nu-2} + \left(7-3\sqrt{5}\right)^{\nu-3} + \left(7-3\sqrt{5}\right)\right] + 20 = 20$

$\Rightarrow f\left(7-3\sqrt{5}\right) = 20$

2$^{\text{ος}}$ τρόπος

$f(\chi) = \chi^{\nu} - 13\cdot\chi^{\nu-1} - 10\cdot\chi^{\nu-2} + 4\cdot\chi^{\nu-3} + \chi^3 - 14\cdot\chi^2 - 4\cdot\chi + 20$

$f(\chi) = \chi^{\nu-3}\left(\chi^3 - 13\chi^2 - 10\chi + 4\right) + \left(\chi^3 - 13\chi^2 - 10\chi + 4\right) + \left(-\chi^2 + 14\chi + 16\right)$

$\kappa(\chi) \equiv \chi^3 - 13\chi^2 - 10\chi + 4 \;\Rightarrow$

$\kappa\left(7-3\sqrt{5}\right) = \left(7-3\sqrt{5}\right)^3 - 13\left(7-3\sqrt{5}\right)^2 - 10\left(7-3\sqrt{5}\right) + 4$

$= 7^3 - 3\cdot7^2\cdot3\sqrt{5} + 3\cdot7\cdot\left(3\sqrt{5}\right)^2 - \left(3\sqrt{5}\right)^3 - 13\cdot7^2 + 13\cdot2\cdot7\cdot3\sqrt{5} - 13\left(3\sqrt{5}\right)^2 - 10\cdot7 + 10\cdot3\sqrt{5} + 4$

$= (343 + 945 - 637 - 585 - 70 + 4) + \sqrt{5}(-441 - 135 + 546 + 30) = 0 + \sqrt{5}\cdot 0 = 0$

$f\left(7-3\sqrt{5}\right) = 0 + 0 - \left(7-3\sqrt{5}\right)^2 + 14\left(7-3\sqrt{5}\right) + 16$

$= -49 + \cancel{42\sqrt{5}} - 45 + 98 - \cancel{42\sqrt{5}} + 16 = \mathbf{20}$

5. 1$^{\text{ος}}$ τρόπος

$f(\chi+\psi) = \dfrac{f(\chi)+f(\psi)}{1+f(\chi)f(\psi)} \quad \forall\ \chi,\psi \in \mathbf{R}$, άρτια

$\chi = \psi = 0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f^2(0)} \Rightarrow f(0) + f^3(0) = 2\cdot f(0)$

$f(0)\cdot\left[f^2(0) - 1\right] = 0 \;\Rightarrow$ **f(0) = 0 , f(0) = 1 , f(0) = -1**

$\psi = -\chi \;\Rightarrow\; f(0) = \dfrac{f(\chi)+f(-\chi)}{1+f(\chi)f(-\chi)} \overset{\text{άρτια}}{\Rightarrow} f(0) = \dfrac{2f(\chi)}{1+f^2(\chi)} \Rightarrow f(0)\cdot f^2(\chi) - 2f(\chi) + f(0) = 0$

(α) $f(0) = 0 \Rightarrow f(\chi) = 0$

(β) $f(o) = 1 \Rightarrow f^2(\chi) - 2f(\chi) + 1 = 0 \;\Rightarrow f(\chi) = 1$

(γ) $f(0) = -1 \Rightarrow -f^2(\chi) - 2f(\chi) - 1 = 0 \;\Rightarrow f(\chi) = -1$

2$^{\text{ος}}$ τρόπος

$$\left.\begin{array}{l} \text{για } \psi = -\chi \Rightarrow f(0) = \dfrac{2f(\chi)}{1+f^2(\chi)} \\ \psi = 0 \;\Rightarrow\; f(\chi) = \dfrac{f(\chi)+f(0)}{1+f(0)\cdot f(\chi)} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\chi)[f(\chi)+1]\cdot[f(\chi)-1] = 0 \Rightarrow$$

f(χ) = 0, f(χ) = 1, f(χ) = -1

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15,5

Ημερομηνία και χρόνος εξέτασης
8 Απριλίου 2000
Χρόνος: 4 ώρες 30 λεπτά

Επιμέλεια
Ανδρέας Σχοινής
Σάββας Αντωνίου

Να απαντηθούν και τα πέντε θέματα.

1. Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχει ΒΓ=ΑΔ, η βάση ΔΓ είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της ΒΓ και η ΑΒ κατά 6 μονάδες μικρότερη από το άθροισμα των τριών άλλων πλευρών του. Αν το ύψος του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι 9 μονάδες, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

2. Ένας σκύλος καταδιώκει μια αλεπού που απέχει 60 πηδήματά της από αυτόν. Όταν η αλεπού κάμνει 9 πηδήματα ο σκύλος κάμνει έξι πηδήματα. Επίσης τρία πηδήματα του σκύλου ισοδυναμούν με επτά πηδήματα της αλεπούς. Μετά από πόσα πηδήματα του ο σκύλος θα φθάσει την αλεπού.

3. (α) Να δείξετε ότι το $4y^3-15y^2+12y+4$ με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μετατρέπεται στη μορφή $(y-2)^2(4y+1)$

(β) Με κατάλληλο μετασχηματισμό να λύσετε την εξίσωση

$$4\left(x^2-x+1\right)^3-27\left(x^2-x\right)^2=0$$

4. Να δειχθεί ότι για οποιουσδήποτε τρεις περιττούς φυσικούς αριθμούς υπάρχει ένας τέταρτος περιττός φυσικός αριθμός ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων αριθμών να είναι τέλειο τετράγωνο.

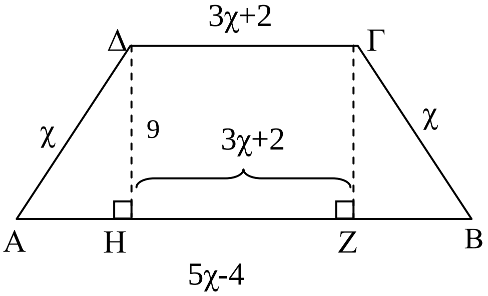
5. (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να γράψουμε σε σειρά τα πιο κάτω γράμματα χωρίς επανάληψη:

(ι) α, β, γ (ιι) α, β, γ, δ

(β) Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1,3,6,7 χρησιμοποιώντας τα μια φορά το καθένα.

(γ) Να δείξετε ότι τα άθροισμα των πιο πάνω αριθμών είναι 113322 .

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ



1. Αν ΑΔ=ΒΓ=χ τότε είναι ΔΓ=3χ+2

ΑΒ = ΑΔ+ΒΓ+ΔΓ-6 = 5χ-4

$$\mathrm{AH}=\frac{\mathrm{AB}-\mathrm{HZ}}{2}=\frac{5\chi-4-3\chi-2}{2}=\chi-3$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\Delta \Rightarrow$

$(\mathrm{AH})^2+(\Delta\mathrm{H})^2=(\mathrm{A}\Delta)^2 \Rightarrow 81+(\chi-3)^2=\chi^2 \Rightarrow$

$81+\cancel{\chi^2}-6\chi+9=\cancel{\chi^2} \Rightarrow 6\chi=90 \Rightarrow$

$\chi=15 \Rightarrow$ ΔΓ=47 , ΑΒ=71, ΔΗ=9 $\Rightarrow$

$$\mathrm{E}=\frac{\left[(\mathrm{AB})+(\Delta\Gamma)\right]\cdot(\Delta\mathrm{H})}{2}=\frac{(47+71)\cdot 9}{2}=\mathbf{541}\ \text{τ.μ.}$$

2. Έστω ο σκύλος σε χ πηδήματα του θα φθάσει την αλεπού. Η αλεπού θα κάνει $\frac{9\chi}{6}$ πηδήματα και 60 πηδήματα πιο μπροστά από το σκύλο δηλ. $60+\frac{9\chi}{6}$ πηδήματα.

7 πηδήματα της αλεπούς είναι 3 πηδήματα του σκύλου

1 πήδημα της αλεπούς είναι τα $\frac{3}{7}$ πήδημα του σκύλου

$\Rightarrow 60+\frac{9\chi}{6}$ της αλεπούς είναι τα $\frac{3}{7}\left(60+\frac{9\chi}{6}\right)$ του σκύλου $\Rightarrow \frac{3}{7}\left(60+\frac{9\chi}{6}\right)=\chi \Rightarrow$

$180+\frac{9\chi}{2} = 7\chi \Rightarrow 360+9\chi = 14\chi \Rightarrow 5\chi = 360 \Rightarrow$ **$\chi = 72$**

Ο σκύλος θα φτάσει τη αλεπού σε 72 πηδήματα.

3. (α) $4y^3-15y^2+12y+4 = 4\psi^3-16\psi^2+\psi^2+16\psi-4\psi+4 = 4\psi^3-16\psi^2+16\psi-4\psi+4 =$
$= 4\psi(\psi^2-4\psi+4) + \psi^2-4\psi+4 = (4\psi+1)\cdot(\psi^2-4\psi+4) = (4\psi+1)\cdot(\psi-2)^2$

(β) $4\left(x^2-x+1\right)^3-27\left(x^2-x\right)^2=0$, Θέτω $\chi^2 - \chi = \psi$

$\Rightarrow 4(\psi+1)^3 - 27\psi^2 = 0 \Rightarrow 4\psi^3+12\psi^2+12\psi+4-27\psi^2 = 0 \Rightarrow 4\psi^3-15\psi^2+12\psi+4 = 0$

$\overset{(\alpha)}{\Rightarrow} (4\psi+1)\cdot(\psi-2)^2 = 0 \Rightarrow \psi = -\frac{1}{4}$, $\psi = 2$

$\chi^2 - \chi = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4\chi^2-4\chi+1=0 \Rightarrow (2\chi-1)^2 = 0 \Rightarrow \chi = \frac{1}{2}$

$\chi^2 - \chi = 2 \Rightarrow \chi^2-\chi-2 = 0 \Rightarrow (\chi-2)\cdot(\chi+1) = 0 \Rightarrow \chi = 2$ ή $\chi = -1$

4. Έστω χ, ψ, z τρεις περιττοί φυσικοί αριθμοί.
Τότε $\chi^2 + \psi^2 + z^2$ είναι περιττός αριθμός $\Rightarrow \chi^2 + \psi^2 + z^2 = 2\nu+1 = (\nu+1)^2 - \nu^2 \Rightarrow$
$\chi^2 + \psi^2 + z^2 + \nu^2 = (\nu+1)^2$. Αρκεί να δείξουμε ότι τι ν είναι περιττός.
$\chi^2 + \psi^2 + z^2 = (2\alpha+1)^2 + (2\beta+1)^2 + (2\gamma+1)^2 = 4\lambda+3 = 2(2\lambda+1) + 1 = 2\nu+1 \Rightarrow$
$\nu = 2\lambda+1$, α, β, γ φυσικοί αριθμοί.

5. (α) (i)

α β γ	β α γ	γ α β
α γ β	β γ α	γ β α

άρα γράφονται με έξι διαφορετικούς τρόπους παρατηρώ ότι $1\cdot2\cdot3 = 6$

(ii) $1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$ διαφορετικούς τρόπους.

(β) Με τα ψηφία 1, 3, 6, 7 μπορούμε να σχηματίσουμε 24 διαφορετικούς τετραψήφιους.

(γ) Το ψηφίο 7 θα εμφανίζεται στους 24 αριθμούς 6 φορές μονάδα, 6 φορές δεκάδα, 6 φορές εκατοντάδα και 6 φορές χιλιάδα

$\Rightarrow 6[7\cdot1000 + 7\cdot100 + 7\cdot10 + 7\cdot1] = 6\cdot7\cdot1111$

κατά τον ίδιο τρόπο:

το ψηφίο 6 $\Rightarrow 6\times6\times1111$

το ψηφίο 3 $\Rightarrow 6\times3\times1111$

το ψηφίο 1 $\Rightarrow 6\times1\times1111$

$\Rightarrow$ Άθροισμα των αριθμών = $6\times1111\times(1+3+6+7) = 6666\times17=$**113322**

<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ «ΜΙΧΑΗΛ ΓΙΩΡΓΑΛΛΑΣ» 2000</u>
<u>ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

<u>Ημερομηνία εξέτασης</u>	*<u>Επιμέλεια</u>*
8 Απριλίου 2000	*Γρηγόρης Μακρίδης*
Διάρκεια: 4 ώρες 30 λεπτά	*Μάριος Αντωνιάδης*

Να απαντηθούν και τα πέντε θέματα

1. Να βρεθεί σύνολο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών ώστε ο μικρότερος να είναι πολλαπλάσιος του 5, ο δεύτερος πολλαπλάσιος του 7, ο τρίτος πολλαπλάσιος του 9 και ο μεγαλύτερος πολλαπλάσιος του 11.

2. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:(\Re-\{0\})\to\Re$ οι οποίες ικανοποιούν τις πιο κάτω σχέσεις:

(I) $f(x)=x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$ για $x\neq 0$

(II) $f(x)+f(y)=1+f(x+y)$ για $x\neq -y$

3. Έστω Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα και Κ το μέσο του τμήματος ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι η περίμετρος του τριγώνου ΒΕΚ είναι μικρότερη της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΔ.

4. Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί με την εξής ιδιότητα: όταν το πρώτο ψηφίο μεταφερθεί στο τέλος του αριθμού (δηλαδή στη θέση του ψηφίου των μονάδων) ο νέος αριθμός ισούται με $3\frac{1}{2}$ φορές τον αρχικό.

5. Έστω ΑΒΓΔΕΗ κυρτό εξάγωνο ώστε ΑΒ=ΒΓ, ΓΔ=ΔΕ, και ΕΗ=ΗΑ . Να αποδειχθεί ότι: $\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΒΕ}}+\frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΔΑ}}+\frac{\text{ΗΑ}}{\text{ΗΓ}}\geq\frac{3}{2}$

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

1. <u>1ος τρόπος</u>

Το Ε.Κ.Π των 5, 7, 9, 11 είναι Μ = 5·7·9·11 = 3465

Οι αριθμοί P = M+5, Q = M+7, R = M+9, S = M+11 έχουν την ιδιότητα ότι το 5 διαιρεί τον P, το 7 τον Q, το 9 τον R και το 11 τον S. Αλλά οι P, Q, R, S δεν είναι διαδοχικοί εφόσον έχουν διαφορά 2.

Επειδή όμως το Μ είναι περιττός τα P, Q, R, S είναι άρτιοι.

Έτσι διαιρώντας με το 2 έχουμε το ζητούμενο σύνολο 1735, 1736, 1737, 1738.

<u>2ος τρόπος</u>

Έστω οι ακέραιοι χ, χ+1, χ+2, χ+3 $\Rightarrow$

$$\begin{array}{lcllll} \chi\equiv 0\bmod 5 & & \alpha_1=0, & m_1=5, & N_1=693 & \\ \chi\equiv -1\bmod 7 & \Rightarrow & \alpha_2=-1, & m_2=7, & N_2=495 & \chi_2=3 \\ \chi\equiv -2\bmod 9 & & \alpha_3=-2, & m_3=9, & N_3-385 & \\ \chi\equiv -3\bmod 11 & & \alpha_4=-4, & m_4=11, & N_4=315 & \end{array}$$

Για $\chi_i N_i \equiv 1 \bmod m_i \;\Rightarrow$ $\begin{array}{l}\chi_2 495 \equiv 1 \bmod 7\\ 5\chi_2 \equiv 1 \bmod 7\end{array} \Rightarrow \boxed{\chi_2 = 3}$,

$\begin{array}{l}\chi_3 385 \equiv 1 \bmod 9\\ 7\chi_3 \equiv 1 \bmod 9\end{array} \Rightarrow \boxed{\chi_3 = 4}$, $\quad \begin{array}{l}\chi_4 315 \equiv 1 \bmod 11\\ 7\chi_4 \equiv 1 \bmod 11\end{array} \Rightarrow \boxed{\chi_4 = 8}$.

$\Rightarrow \; \chi \equiv \left[\alpha_1 N_1 \chi_1 + \alpha_2 N_2 \chi_2 + \alpha_3 N_3 \chi_3 + \alpha_4 N_4 \chi_4\right] \bmod 3465$

$\Rightarrow \; \chi \equiv \left[0 + (-1)\cdot 495\cdot 3 + (-2)\cdot 385\cdot 4 + (-3)\cdot 315\cdot 8\right] \bmod 3465$

$\Rightarrow \; \chi \equiv (-1485 - 3080 - 7560) \bmod 3465 \Rightarrow \chi \equiv (-12125) \bmod 3465$

$\Rightarrow \; \chi \equiv 1735 \bmod 3465 \;\Rightarrow\; \boxed{1735,\ 1736,\ 1737,\ 1736}$

N = $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4$ = 5·7·9·11 = 3438 $\quad \Rightarrow \; N_i = \dfrac{N}{m_i} \;\Rightarrow$

$N_1 = \dfrac{3465}{5} = 693$, $\; N_2 = \dfrac{3465}{7} = 495$, $\; N_3 = \dfrac{3465}{9} = 385$, $\; N_4 = \dfrac{3465}{11} = 315$

2. $2f(\chi) = 2\chi f\left(\dfrac{1}{\chi}\right) = \chi\left[f\left(\dfrac{1}{\chi}\right) + f\left(\dfrac{1}{\chi}\right)\right] = \chi\left[1 + f\left(\dfrac{2}{\chi}\right)\right] = \chi\left[1 + \dfrac{2}{\chi} f\left(\dfrac{\chi}{2}\right)\right]$

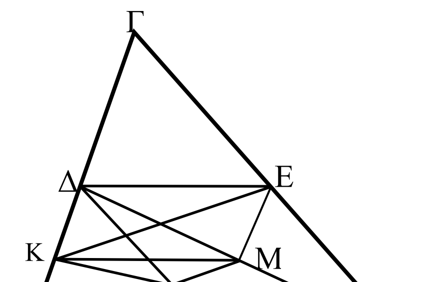
$= \chi + 2f\left(\dfrac{\chi}{2}\right) = \chi + \left[f\left(\dfrac{\chi}{2}\right) + f\left(\dfrac{\chi}{2}\right)\right] = \chi + \left[1 + f(\chi)\right] \Rightarrow$ $\mathbf{f(\chi) = \chi + 1}$

Έλεγχος επιβεβαίωση

(i) $f(\chi) = \chi + 1 = 1 + \chi = \chi\left(\dfrac{1}{\chi} + 1\right) = \chi \cdot f\left(\dfrac{1}{\chi}\right)$

(ii) $f(\chi) + f(\psi) = \chi + 1 + \psi + 1 = 1 + (\chi + \psi + 1) = 1 + f(\chi + \psi)$

3.



Έστω Λ το μέσο της ΑΒ και Μ το μέσο της ΒΔ.

Τότε το ΔΛ = $\dfrac{1}{2}$ΒΓ = ΒΕ.

$\left.\begin{array}{l}\text{Στο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε ΔΕ=}\dfrac{1}{2}\text{ΑΒ}\\ \text{Στο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε ΚΜ=}\dfrac{1}{2}\text{ΑΒ}\end{array}\right\} \Rightarrow$ ΔΕ=//ΚΜ

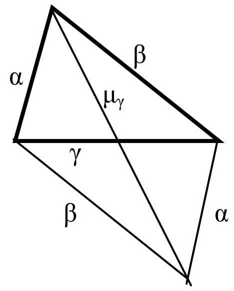
$\Rightarrow$ ΚΜΕΔ # $\Rightarrow$ ΜΕ=//ΚΔ

Δεδομένο : ΚΔ=ΑΚ και Α,Κ,Δ συνευθειακά $\Rightarrow$ ΜΕ=ΑΚ και ΜΕ//ΑΚ $\Rightarrow$ ΑΜΕΚ # και ΚΕ=ΑΜ

$\overset{\Delta}{AB\Delta}$	$\overset{\Delta}{BEK}$
ΑΒ	ΒΕ = ΔΛ (διάμεσος του $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ στο ΑΒ)
ΑΔ	ΒΚ (διάμεσος του $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ στο ΑΔ)
ΒΔ	ΕΚ = ΑΜ (διάμεσος του $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ στο ΒΔ)

Άρα ΒΕ+ΒΚ+ΕΚ ισούται με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Delta}$

- Είναι γνωστό ότι το άθροισμα των διαμέσων οποιουδήποτε τριγώνου είναι μικρότερο της περιμέτρου του τριγώνου.



$$\left.\begin{array}{l} 2\mu_\gamma < \alpha+\beta \\ 2\mu_\beta < \alpha+\gamma \\ 2\mu_\alpha < \beta+\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow 2\left(\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma\right) < 2\left(\alpha+\beta+\gamma\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma < \alpha+\beta+\gamma$$

4. $\underbrace{153846}\underbrace{153846}\underbrace{153846}\ldots$ (1)

Προφανώς επειδή ο αριθμός έχει τον ίδιο αριθμό ψηφίων όταν πολλαπλασιάζεται με 3,5 , πρέπει να αρχίζει με τους αριθμούς 1 ή 2.

<u>1η περίπτωση</u>: Ο αριθμός είναι στη μορφή $10^N + A$, $A < 10^N$

Έτσι $\frac{7}{2}\cdot\left(10^N + A\right) = 10A+1 \Rightarrow A = \frac{\left(7\cdot 10^N - 2\right)}{13}$

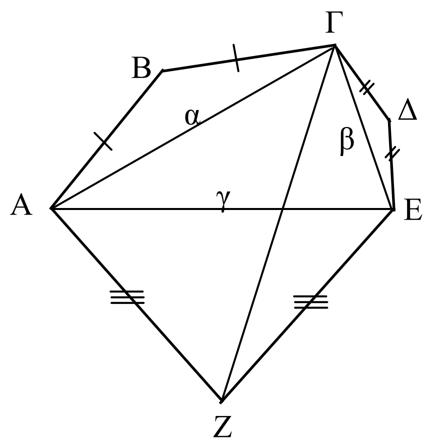
Οι δυνάμεις του 10 επαναλαμβάνονται με περίοδο $6 \bmod 13\left(10,9,12,3,4,1\right)$ έτσι Α θα είναι ακέραιος εάν $N \equiv 5\left(\bmod 6\right)$. Αυτό μας δίνει την οικογένεια λύσεων (1)

<u>2η περίπτωση</u> : Ο αριθμός είναι στη μορφή $2\cdot 10^N + A$, $A < 10^N$

Αυτό όπως και προηγουμένως , $A = \frac{\left(14\cdot 10^N - 4\right)}{13}$.

Αλλά επειδή $A < 10^N$, έχουμε $10^N < 4$, το οποίο είναι αδύνατο.

5. Συμβολίζουμε : ΑΓ=α, ΓΕ=β, ΑΕ=γ



Από την ανισότητα Πτολεμαίου για το τετραπλευρο ΑΓΕΗ έχουμε:

ΑΓ·ΕΗ + ΓΕ·ΑΗ $\geq$ ΑΕ·ΓΗ .

Επειδή ΕΗ = ΑΗ, έχουμε α·ΕΗ + β·ΑΗ $\geq$ γ·ΓΗ

$\Rightarrow$ ΑΗ(α+β) $\geq$ γ·ΓΗ $\Rightarrow \frac{AH}{\Gamma H} \geq \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$

Ομοίως έχουμε $\frac{\Delta E}{\Delta A} \geq \frac{\beta}{\gamma+\alpha}$ και $\frac{B\Gamma}{BE} \geq \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$

Προσθέτωντας έχουμε:

$$\frac{B\Gamma}{BE}+\frac{\Delta E}{\Delta A}+\frac{AH}{\Gamma H} \geq \frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$$

$$\geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta}-3$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(\alpha+\beta+\gamma\right)}{\alpha+\beta}+\frac{2\left(\alpha+\beta+\gamma\right)}{\gamma+\alpha}+\frac{2\left(\alpha+\beta+\gamma\right)}{\beta+\gamma}\right]-3$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[\left(\alpha+\beta\right)+\left(\beta+\gamma\right)+\left(\gamma+\alpha\right)\right]\left[\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma}\right]-3 \geq \frac{1}{2}9-3=\frac{3}{2}$$

Χρήση $\left(\chi+\psi+z\right)\left(\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{z}\right) \geq 3^2$ Ανισότητα Causy - Swhartz

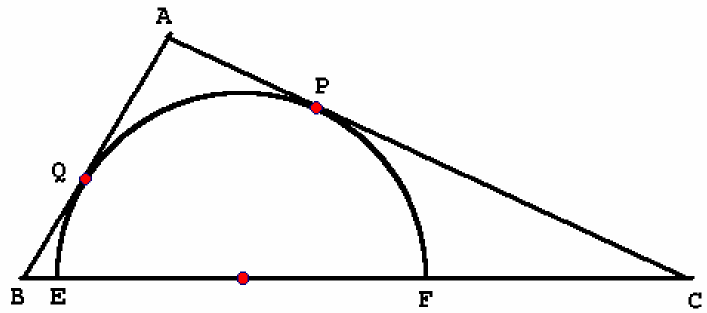
4^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα κάτω των 15 ½ (JBMO)

Ιούνιος 21 – 25, 2000, Ohrid, FYROM *Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου*
Διάρκεια εξέτασης : 4 ώρες και 30 λεπτά *Νίκος Ηλία*

Πρόβλημα 1 Οι ακέραιοι x και y είναι τέτοιοι ώστε $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$. Να αποδείξετε ότι $x + y = 10$.

Πρόβλημα 2 Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί n, $n \geq 1$, για τους οποίους ο αριθμός n^2+3^n είναι τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Πρόβλημα 3 Ένα ημικύκλιο με διάμετρο EF πάνω στην πλευρά BC ενός τριγώνου ABC εφάπτεται στις πλευρές AB και AC στα σημεία Q και P, αντίστοιχα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής K των EP και FQ ανήκει στο ύψος του τριγώνου ABC από την κορυφή A.



Πρόβλημα 4 Σε ένα τουρνουά αντισφαίρισης (tennis) που έγινε σε μια καλοκαιρινή κατασκήνωση ο αριθμός των αγοριών που συμμετείχαν ήταν διπλάσιος από των αριθμών των κοριτσιών που συμμετείχαν. Κάθε δύο από τους συμμετέχοντες έπαιξαν μεταξύ τους μόνο μια φορά και κανένα παιχνίδι δεν έληξε με ισόπαλο αποτέλεσμα. Ο λόγος του συνολικού αριθμού των νικών που πέτυχαν τα κορίτσια προς τον συνολικό αριθμό των νικών που πέτυχαν τα αγόρια ήταν $\frac{7}{5}$. Πόσα παιδιά συμμετείχαν στο τουρνουά;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$ *Θέτουμε* $x + y = s,\ xy = p \Rightarrow$

$\Rightarrow s^3 - 3ps + s^3 + 30p = 2000 \Rightarrow 2s^3 - 3ps + 30p - 2000 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(s^3 - 1000) - 3p(s - 10) = 0 \Rightarrow 2(s - 10)(s^2 + 10s + 100) - 3p(s - 10) = 0$

$\Rightarrow (s - 10)(2s^2 + 20s + 200 - 3p) = 0 \quad (1)$

$\Rightarrow s - 10 = 0 \Rightarrow s = 10$ *ή* $2s^2 + 20s + 200 - 3p = 0$

$\underline{1^{ος}\ τρόπος}$ $2s^2 + 20s + 200 - 3p = 0 \Rightarrow p = \dfrac{2s^2 + 20s + 200}{3} \quad (2)$

Αν η προηγούμενη εξίσωση δέχεται ακέραιες λύσεις τότε υπάρχει ακέραια λύση της (s_0, p_0) *τέτοια ώστε* $0 \leq s_0 < 3$

$s_0 = 0 \Rightarrow p = \dfrac{200}{3} \notin \mathbf{Z}$, $s_0 = 1 \Rightarrow p = \dfrac{222}{3} \notin \mathbf{Z}$, $s_0 = 2 \Rightarrow p = \dfrac{248}{3} \notin \mathbf{Z}$

Άρα δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της (2)
Άρα η μοναδική λύση της (1) είναι $s = 10$ *δηλαδή* $\chi + \psi = 10$.

2ος τρόπος $2s^2 + 20s + 200 - 3p = 0 \Rightarrow (x+y)^2 + 20(x+y) + 200 - 3xy = 0$
$2x^2 + 2y^2 + xy + 20x + 20y + 200 = 0$
$\Rightarrow 2x^2+(y+20)x + (2y^2+20y+200) = 0$ (3)
$\Delta = (y+20)^2 - 8(2y^2+20y+200) \Rightarrow \Delta = y^2 + 40y + 400 - 16y^2 - 160y - 1600 \Rightarrow$
$\Delta = -15y^2 - 120y - 1200 \Rightarrow \Delta = -15\,(y^2 + 8y + 80) < 0$
$\Delta' = 8^2 - 4 \cdot 80 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + xy + 20x + 20y + 200 \neq 0$
Άρα η μοναδική λύση της (1) είναι $s = 10$ δηλαδή $\chi + \psi = 10$.

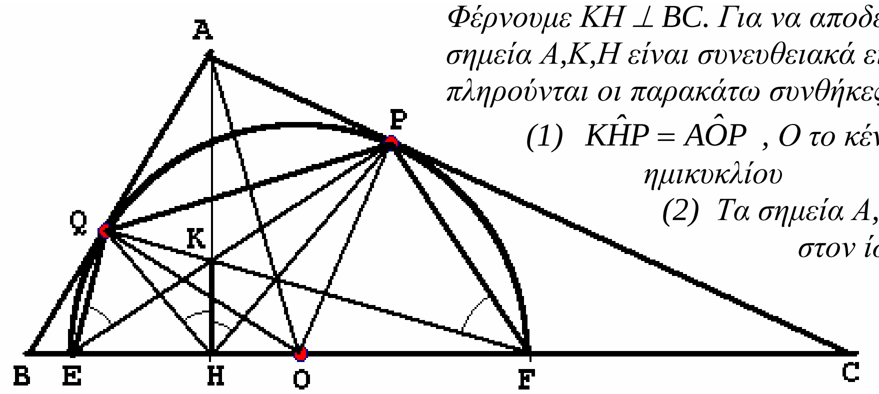
Πρόβλημα 2

Έστω $n^2 + 3^n = m^2$, $m \in \mathbf{Z}$ $(m>0$, *χ.π.τ.γ*$)$
$\Rightarrow 3^n = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$, *όπου* $0 < m - n < m + n$
$m - n,\ m+n \in \mathbb{Z}$ *και n πρώτος αριθμός υπάρχουν οι πιο κάτω περιπτώσεις:*

- $m - n = 1$ *και* $m + n = 3^n \Rightarrow 2n = 3^n - 1$ (1)
  - $n=1 \Rightarrow 2 \cdot 1 = 3^1 - 1$, *Ισχύει*
  - *Εάν* $n > 1$ *έχουμε* $3^n = (1+2)^n > 1 + 2n \Rightarrow 3^n - 1 > 2n$, *αδύνατο από (1)*
- $m - n = 3^n$ *και* $m + n = 3^{n-k}$, $1 \leq k < n - k$,
  $\Rightarrow 2n = 3^{n-k} - 3^k = 3^k\left(3^{n-2k} - 1\right)$ (2) $k \geq 1$ *και* $n - 2k > 0$.
  - $n - 2k = 1 \Rightarrow n = 3^k$ *ή* $2k + 1 = 3^k \Rightarrow k=1,\ n=3$
  - *Έστω* $n - 2k > 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} 3^{n-2k} > 1$
    Από την (2) $\Rightarrow 3^{n-2k} - 1 = \text{πολ}2 \Rightarrow n / 3^k \Rightarrow 3^k = tn$, $t \in \mathbb{N}^*$
    $3^{n-2k} > 1 + 2(n-2k) \Rightarrow 3^{n-2k} - 1 > 2(n-2k) > 2$
    $\Rightarrow 3^k\left(3^{n-2k} - 1\right) > 2 \cdot 3^k > 2,\quad (tn \geq 2n)$
    $\Rightarrow$ *(2) δεν αληθεύει.*

  Έτσι έχουμε τη λύση $n = 1$ *ή* $n = 3$.

Πρόβλημα 3



Φέρνουμε $KH \perp BC$. *Για να αποδειχθεί ότι τα σημεία A,K,H είναι συνευθειακά είναι ικανό να πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες :*

(1) $K\hat{H}P = A\hat{O}P$, *O το κέντρο του ημικυκλίου*

(2) *Τα σημεία A,P,O,H ανήκουν στον ίδιο κύκλο.*

Στο τετράπλευρο EFPQ ισχύει: $Q\hat{E}P = Q\hat{F}P = \dfrac{QP}{2}$ (1) *(γωνιές που βαίνουν στο ίδιο τόξο)*

$$\left.\begin{array}{l} E\hat{H}K = 90^0\,(\kappa\alpha\tau\alpha\sigma\kappa\varepsilon\upsilon\acute{\eta}) \\ E\hat{Q}K = 90^0\,(\beta\alpha\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\ \sigma\varepsilon\ \eta\mu\iota\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\iota\omicron) \end{array}\right\} \Rightarrow EFPQ\ \varepsilon\gamma/\nu\omicron \Rightarrow Q\hat{E}K = Q\hat{H}K \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} E\hat{H}K = 90°(κατασκευή) \\ F\hat{P}E = 90°(βαίνει\ σε\ ημικύκλιο) \end{array}\right\} \Rightarrow KHFP\ \ εγ/νο \Rightarrow\ \ K\hat{H}P = K\hat{F}P\ \ (3)$$

$$(1) \wedge (2) \wedge (3) \Rightarrow\ Q\hat{E}K = Q\hat{H}K = K\hat{H}P = K\hat{F}P$$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AQO}$, $\overset{\Delta}{APO}$

$$\left.\begin{array}{l} AO = AO(κοινή\ πλευρά) \\ AQ = AP(εφαπτόμενα\ τμήματα) \\ QO = PO(ατίνες\ κύκλου) \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AQO} = \overset{\Delta}{APO} \Rightarrow Q\hat{O}A = A\hat{O}P = \frac{QP}{2}$$

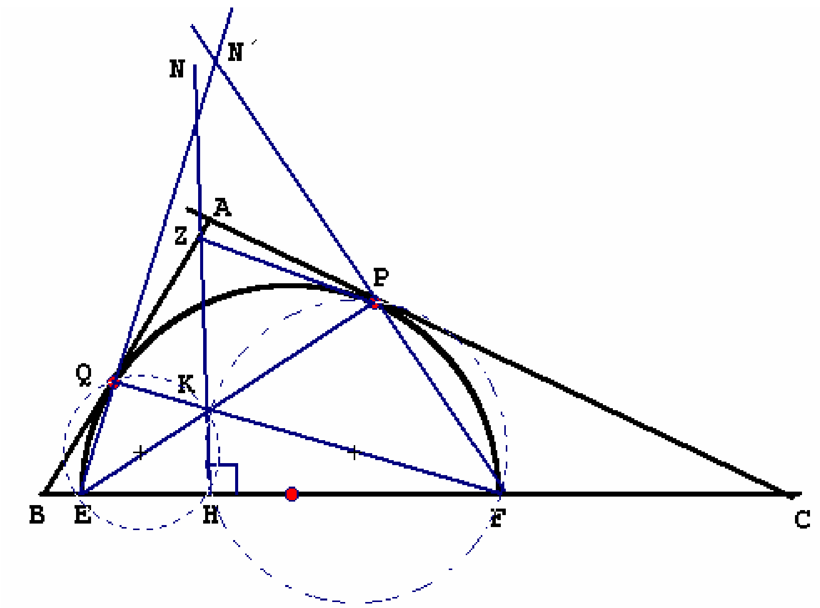
$$\Rightarrow\ \ K\hat{H}P = A\hat{O}P$$

$$\left.\begin{array}{l} K\hat{H}P = A\hat{O}P \Rightarrow 2\cdot K\hat{H}P = 2\cdot A\hat{O}P \Rightarrow Q\hat{H}P = \ Q\hat{O}P \\ \left.\begin{array}{l} A\hat{P}O = 90°(ακτίνα - εφαπτομένη) \\ AQO = 90°(ακτίνα - εφαπτομένη) \end{array}\right\} \Rightarrow OPAQ\ εγγεγραμμένο\ σε\ κύκλο\ (c) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

το σημείο H ανήκει στον κύκλο (c)

Οι δύο συνθήκες ισχύουν άρα το ύψος AH περνά από το σημείο K.

$2^{ος}$ τρόπος



Φέρνουμε την κάθετη από το K προς την BC. H κάθετος τέμνει την AB στο σημείο Z.
Θα δείξουμε ότι η ευθεία ZP είναι εφαπτομένη του κύκλου.
H EQ τέμνει την HZ στο σημείο N .

QEHK εγγράψιμο $\Rightarrow\ Z\hat{K}Q = Q\hat{E}H$ *(εξωτερική – απέναντι εσωτερική) (1)*

$Z\hat{Q}E = Q\hat{E}H$ *(γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης) (2)*

$(1) \wedge (2) \Rightarrow\ Z\hat{K}Q = Z\hat{Q}K = Q\hat{E}H \Rightarrow\ ZQ = ZK\ \ (3)$

$\overset{\Delta}{NQK}$ *ορθογώνιο* $\Rightarrow$ *QA διάμεσος* $\Rightarrow ZQ = ZK = ZN$

H FP περνά από το σημείο N (διότι αν έτεμνε την EQ στο N΄ τότε στο τρίγωνο N΄EF ύψη θα ήταν EP, FQ, και N΄KH η οποία δεν είναι ευθεία)

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{NPE} \ \text{ορθογώνιο} \\ PZ \ \text{διάμεσος} \end{array}\right\} \Rightarrow PZ = ZE \Rightarrow \overset{\Delta}{ZEP} \ \text{ισοσκελές} \Rightarrow Z\hat{K}P = Z\hat{P}H$$

KHFP εγγράψιμο $\Rightarrow$ $Z\hat{K}P = P\hat{F}H$ *(εξωτερική εγ/νου τετραπλεύρου)*

$\Rightarrow$ $Z\hat{P}K = P\hat{F}H$, *επειδή* $P\hat{F}H$ *εγγεγραμμένη, EP χορδή* $\Rightarrow$ *ZP εφαπτομένη* $\Rightarrow$ $Z \equiv A$
ο.ε.δ.

<u>Πρόβλημα 4</u>

Έστω χ ο αριθμός των κοριτσιών και ψ = 2χ ο αριθμός των αγοριών
και α οι νίκες των κοριτσιών εναντίων των αγοριών.
Τα αγόρια παίζουν με τα κορίτσια χ·ψ φορές δηλαδή $\chi \cdot 2\chi = 2\chi^2$ *παιχνίδια.*
Τα αγόρια παίζουν έκαναν $\beta = 2\chi^2 - \alpha$ *νίκες ,* $2\chi^2 - \alpha \geq 0 \Rightarrow 2\chi^2 \geq 0$
Ο συνολικός αριθμός των νικών που πέτυχαν τα κορίτσια ισούται με το άθροισμα του αριθμού των νικών που πέτυχαν τα κορίτσια εναντίον κοριτσιών με τον αριθμό των νικών που πέτυχαν τα κορίτσια εναντίον των αγοριών.
Οι νίκες κοριτσιών σε κορίτσια ισούται με τον αριθμό των παιχνιδιών μεταξύ τους (στα παιχνίδια μεταξύ κοριτσιών κερδίζει πάντοτε κορίτσι) δηλ. $\dfrac{\chi(\chi-1)}{2}$

Άρα ο συνολικός αριθμός των νικών των κοριτσιών ισούται με $\dfrac{\chi(\chi-1)}{2} + \alpha$

Ο συνολικός αριθμός των νικών των αγοριών ισούται με $\dfrac{2\chi(2\chi-1)}{2} + (2\chi^2 - \alpha) =$

$2\chi^2 - \chi + 2\chi^2 - \alpha = 4\chi^2 - \chi - \alpha$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\chi(\chi-1)}{2}+\alpha}{4\chi^2-\chi-\alpha} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{\chi^2-\chi+2\alpha}{8\chi^2-2\chi-2\alpha} = \frac{7}{5} \Rightarrow 56\chi^2 - 14\chi - 14\alpha = 5\chi^2 - 5\chi + 10\alpha \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 51\chi^2 - 9\chi - 24\alpha = 0 \Rightarrow 17\chi^2 - 3\chi - 8^{\alpha} = 0 \Rightarrow 16\chi^2 + (\chi^2 - 3\chi) = 8\alpha \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2\chi^2 \geq \alpha \Rightarrow 16\chi^2 \geq 8\alpha \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \quad \chi^2 - 3\chi \leq 0 \Rightarrow \chi(\chi-3) \leq 0$, $\chi > 0$, $\chi \in \mathbf{N} \Rightarrow 0 < \chi \leq 3 \Rightarrow \chi \in \{1,2,3\}$
$16\chi^2 + (\chi^2 - 3\chi) = 8\alpha \Rightarrow 8 / \chi^2 - 3\chi$, $\chi \in \{1,2,3\} \Rightarrow \chi = 3$ *και* $\psi = 6$.
Άρα ο συνολικός αριθμός των παιδιών είναι 9.

17η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (BMO)

Μάιος 3 – 9, 2000, Chişinău, Μολδαβία

Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου
Θεόκλητος Παραγιός

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες 30 λεπτά

Πρόβλημα 1. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση $f(xf(x)+f(y)) = (f(x))^2 + y$, για όλους τους πραγματικούς αριθμούς χ και ψ.

(Αλβανία)

Πρόβλημα 2. Δίνεται μη ισοσκελές οξυγώνιο τρίγωνο ABC και έστω E ένα εσωτερικό σημείο της διαμέσου AD. Το σημείο F είναι το ίχνος της κάθετης που άγεται από το E προς την ευθεία BC. Θεωρούμε ένα εσωτερικό σημείο M του ευθυγράμμου τμήματος EF και έστω N και P είναι τα ίχνη των καθέτων που άγονται από το σημείο M προς τις ευθείες AC και AB, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που περιέχουν τις διχοτόμους των γωνιών PMN και PEN δεν έχουν κοινά σημεία.

(FYROM)

Πρόβλημα 3. Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός των ορθογωνίων με διαστάσεις 1 και $10\sqrt{2}$, που είναι να αποκοπούν από ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 50 και 90, χρησιμοποιώντας ως τομές ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του αρχικού ορθογωνίου.

(Γιουγκοσλαβία)

Πρόβλημα 4. Λέμε ότι ένας θετικός ακέραιος r είναι μια *δύναμη*, αν έχει τη μορφή $r = t^s$, όπου t και s είναι ακέραιοι, $t \geq 2$, $s \geq 2$. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει ένα σύνολο A με στοιχεία θετικούς ακέραιους, το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. Το σύνολο A έχει n στοιχεία
2. Κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι μια *δύναμη*.
3. Για κάθε $r_1, r_2, \ldots, r_k$ $(2 \leq k \leq n)$ από το A ο αριθμός $\dfrac{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}{k}$ είναι μια *δύναμη*.

(Ρουμανία)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Δίνεται $f(xf(x)+f(y)) = (f(x))^2 + y$ (1)

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι f(f(y)) = y, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Για x = 0 $\overset{(1)}{\Rightarrow} f(f(y)) = (f(0))^2 + y, \quad \forall y \in \mathbb{R}$ (2)

Θέτοντας στην (2) $y = -(f(0))^2 \Rightarrow f(f(-f^2(0))) = 0, \Rightarrow$

$\exists \beta = -[f(0)]^2 \in \mathbb{R} : f(\beta) = 0$.

Επομένως η αρχική σχέση για x =β γίνεται f(f(y)) = y, $\forall y \in \mathbb{R}$ (3)

Αντικαθιστώντας το x με f(x) $\overset{(1)}{\Rightarrow} f(xf(x) + f(y)) = \chi^2 + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (4)

$$(3)\wedge(4)\Rightarrow\big(f(x)\big)^2+\cancel{y}=x^2+\cancel{y},\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \big(f(x)\big)^2=x^2,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ \ (5)$$

Για x = 1 $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ f(1) = 1 ή f(1) = -1.

i) Αν f (1) = 1 $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ f (1+f (y)) =1 + y, $\forall y\in\mathbb{R}$

Η (5) θέτοντας όπου x το 1+f (y) $\Rightarrow \big(f(1+f(y)\big)^2=\big(1+f(y)\big)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow(1+y)^2=(1+f(y))^2\Rightarrow 1+y^2+2y=1+f^2(y)+2\mathrm{f(y)}$ και λόγω της (5) έχουμε ότι f(y) = y, $\forall y\in\mathbb{R}$.

ii) Αν f (1) = -1 $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ f (f (y)-1) =1 + y, $\forall y\in\mathbb{R}$

Η (5) θέτοντας όπου x το f (y)-1 $\Rightarrow \big(f(f(y)-1\big)^2=(f(y)-1)^2\Rightarrow$

$(1+y)^2=(f(y)-1)^2\Rightarrow 1+y^2+2y=1+f^2(y)-2\mathrm{f(y)}$ και λόγω της (5) έχουμε ότι f(y) =- y, $\forall y\in\mathbb{R}$

Άρα, κάθε λύση της δοσμένης εξίσωσης έχει μια από τις παρακάτω μορφές:
1) f: R→R, f (x) = x $\forall x\in\mathbb{R}$ **2)** f: R→R, f (x) = -x $\forall x\in\mathbb{R}$

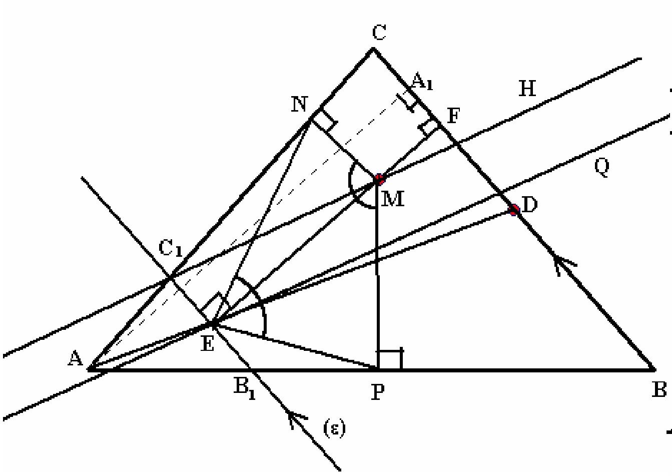
<u>Επαλήθευση</u>

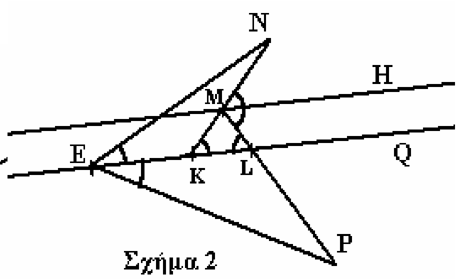
$\mathrm{f}\big(\mathrm{xf}(\mathrm{x})+\mathrm{f}(\mathrm{y})\big)=\big(\mathrm{f}(\mathrm{x})\big)^2+\mathrm{y}$

i) f(x) = x $\Rightarrow\ f\big(x\cdot x+f(y)\big)=x^2+y\Rightarrow\ f\big(x^2+y\big)=x^2+y$ Ισχύει

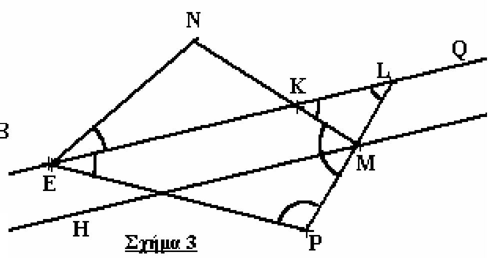
ii) f(x) = –x $\Rightarrow\ f\big(x\cdot(-x)+f(y)\big)=x^2+y\Rightarrow\ f\big(-x^2-y\big)=-\big(-x^2-y\big)$ Ισχύει

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.</u>





Σχήμα 2



Σχήμα 3

Φέρουμε το ύψος AA_1 . Αφού το τρίγωνο ABC είναι ένα μη ισοσκελές οξυγώνιο τρίγωνο έπεται ότι $A_1\in(BC)$ και $A_1\neq D$.Επίσης η προβολή του $E\in(AD)$ πάνω στην ευθεία BC είναι ένα εσωτερικό σημείο του τμήματος DA_1. Άρα, $F\in(BC)$ και $F\neq D$. Θεωρούμε την ευθεία (ε) // BC και έστω C_1 και B_1 τα σημεία τομής της με τα AC και AB αντίστοιχα.

Αφού B_1C_1 // BC και $EF \perp BC$, τότε $EF \perp B_1C_1$ και επειδή E είναι μέσο του τμήματος B_1C_1 , το τρίγωνο M B_1C_1 είναι ισοσκελές και $\widehat{EB_1C} = \widehat{EC_1M}$ (1)

Επειδή $\widehat{MNC_1} = \widehat{C_1EM} = 90°$, τα σημεία M ,N ,E , C_1 είναι πάνω στον ίδιο κύκλο με διάμετρο MC_1. Άρα $\widehat{EC_1M} = \widehat{ENM}$ (2)

Επειδή $\widehat{B_1PM} = \widehat{B_1EM} = 90°$, τα σημεία M ,P ,E , B1 είναι πάνω στον ίδιο κύκλο με διάμετρο MB_1. Άρα $\widehat{EB_1M} = \widehat{EPM}$ (3)

Από τις (1), (2) και (3) $\Rightarrow$ $\widehat{ENM} = \widehat{EPM}$ (4).

Έστω EQ και MH οι ευθείες που περιέχουν τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{PEN}$ και $\widehat{PMN}$.

i) Αν υποθέσουμε ότι οι ευθείες EQ και MH ταυτίζονται τότε έχουμε PM = MN και AD είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου ABC. Τότε το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές , άτοπο από την υπόθεση άρα οι ευθείες EQ και MH δεν ταυτίζονται.

ii) Αν $MN \cap EQ = \{K\}$ και $PM \cap EQ = \{L\}$, τα τρίγωνα NEK και PEL είναι όμοια, άρα $\widehat{MKL} = \widehat{KLM}$.

Έστω $E \notin (PN)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Αν το τετράπλευρο PMNE είναι μη κυρτό (Σχήμα 2) ,τότε

$\widehat{MKL} + \widehat{KLM} = \widehat{PMH}$ και έχουμε $\widehat{KLM} = \frac{1}{2}\widehat{PMN} = \widehat{PMH}$. Άρα EQ//MH.

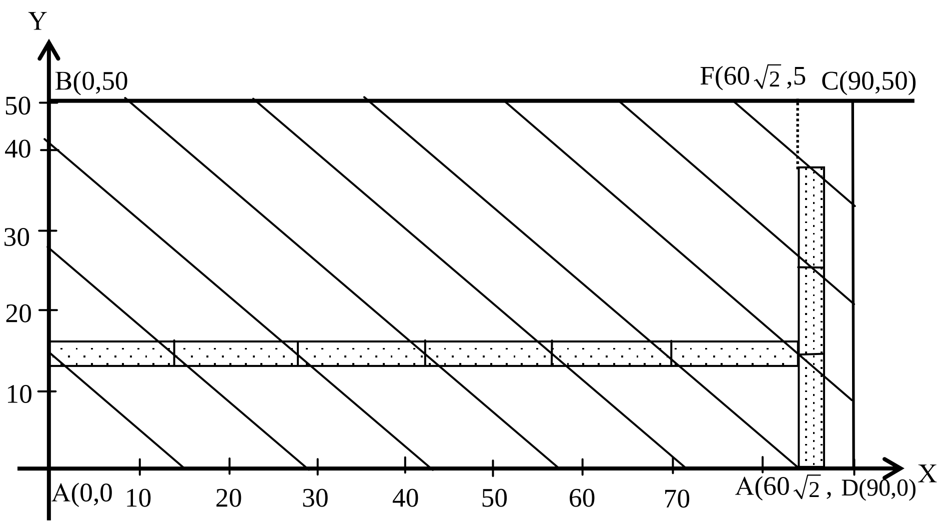
β) Αν το τετράπλευρο PMNE είναι κυρτό (Σχήμα 3) ,τότε

$\widehat{MKL} = \widehat{KLM} = \widehat{PMH}$. Άρα EQ//MH.

Αν $E \in (NP)$, τότε οι διχοτόμοι των γωνιών PMN και PEN είναι κάθετες πάνω στην ευθεία NP.Επομένως EQ//MH.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Υποθέτουμε ότι το ορθογώνιο ABCD είναι τοποθετημένο σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων έτσι ώστε οι κορυφές του να έχουν τις συντεταγμένες A(0,0), B(0,50), C(90,50) και D(90,0). (Σχήμα 4)



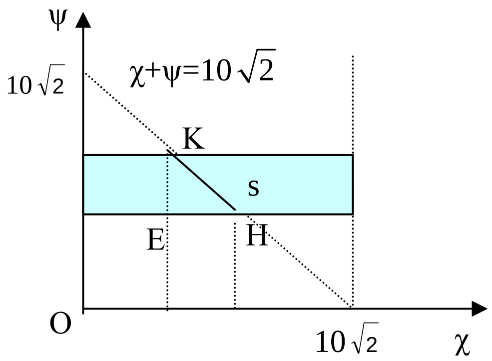
Το ορθογώνιο μπορούμε να το χωρίσουμε σε 50 λωρίδες διαστάσεων 1×90, φέρνοντας ευθείες παράλληλες προς την πλευρά AD. Σε κάθε μια από αυτές τις

λωρίδες μπορούμε να τοποθετήσουμε 6 ορθογώνια με διαστάσεις $1\times 10\sqrt{2}$, και περισσεύει ένα κομμάτι λωρίδας μήκους 90-(6×$10\sqrt{2}$) =90-60$\sqrt{2}$.
Ας ονομάσουμε EFCD το ορθογώνιο που περισσεύει από το αρχικό ABCD μετά την παραπάνω τοποθέτηση. Οι κορυφές του EFCD έχουν συντεταγμένες : E(60$\sqrt{2}$,0) , F(60$\sqrt{2}$,50) , C(90 ,50) και D(90 ,0).Το ορθογώνιο EFCD το χωρίζουμε σε 5 λωρίδες κάθετες στην AD .Σε κάθε μια από αυτές τις λωρίδες μπορούμε να τοποθετήσουμε 3 ορθογώνια με διαστάσεις $1\times 10\sqrt{2}$.
Άρα όλα τα ορθογώνια με διαστάσεις $1\times 10\sqrt{2}$ που μπορούμε να τοποθετήσουμε στο ABCD με την παραπάνω διάταξη είναι: (6×50) + (3×5) = 315 ορθογώνια.
Τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι πράγματι το 315 είναι ο μέγιστος αριθμός των ορθογωνίων.
Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών:

$$x+y=10\sqrt{2},\ x+y=20\sqrt{2}\ ,\ x+y=30\sqrt{2},\ldots,x+y=10n\sqrt{2},.. \qquad (1)$$

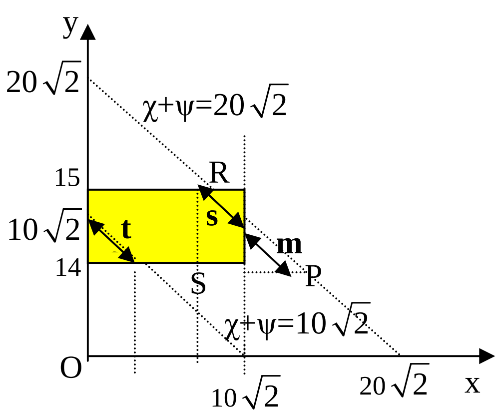
Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων που αποκόπτουν αυτές οι ευθείες από ένα τυχαίο ορθογώνιο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες των συντεταγμένων είναι $\sqrt{2}$.

Εξηγούμε αυτόν το ισχυρισμό με δύο <u>παραδείγματα</u>:
1)Αν <u>μία μόνο</u> ευθεία της οικογένειας (1) τέμνει ένα ορθογώνιο:



Στο διπλανό σχήμα οι συντεταγμένες των σημείων K, E , H είναι:
K(10$\sqrt{2}$-10 ,10), E(10$\sqrt{2}$-10 , 9) και H(10$\sqrt{2}$-9,9).
Άρα το μήκος KH=s = $\sqrt{2}$.

2) Αν <u>δύο ευθείες</u> της οικογένειας (1) τέμνουν ένα ορθογώνιο:



Από το διπλανό σχήμα είναι εύκολο να δούμε ότι τα τμήματα t και m είναι ίσα.

Οι συντεταγμένες των R , S και P είναι: R (20$\sqrt{2}$-15 , 15) , S (20$\sqrt{2}$-15 , 14) και P(20$\sqrt{2}$-14 , 14).

Άρα έχουμε t + m = t+s = $\sqrt{2}$.

Το συνολικό μήκος των ευθ. τμημάτων που αποκόπτονται από την οικογένεια των ευθειών (1) από το αρχικό ορθογώνιο είναι: $S_1+S_2+\ldots+S_9 = 570\sqrt{2}-360$

(υπολογίζετε εύκολα με χρήση αναλυτικής γεωμετρίας). (Σχήμα 4).
Επομένως ο μέγιστος αριθμός των ορθογωνίων $1\times 10\sqrt{2}$ δεν είναι μεγαλύτερος από

$$\left[\frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}}\right]=\left[570-180\sqrt{2}\right]=315 \ .$$

Άρα δεν μπορούμε να κόψουμε περισσότερα από 315 ορθογώνια
$1\times 10\sqrt{2}$ χρησιμοποιώντας κοψίματα παράλληλα προς τις πλευρές του αρχικού ορθογωνίου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Πρώτα θα αποδείξουμε με επαγωγή πάνω στο n την πρόταση :
«Για κάθε $n\geq 1$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος d τέτοιος ώστε οι αριθμοί
d , 2d , ……, nd , να είναι *δυνάμεις*.»
Για n =1 και n=2 θεωρούμε d = 2² και τότε 2^2, 2^3 είναι *δυνάμεις.*
Υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για n, δηλαδή ότι υπάρχει d τέτοιος ώστε
$i\cdot d=t_i^{s_i}$ (1) για κάθε i = 1,2,3, … n με $t_i \geq 2$, $s_i \geq 2$.
Θα αποδείξουμε ότι και ο (n+1)d είναι *δύναμη.*
Ονομάζουμε m=Ε.Κ.Π$\left(s_1,s_2,...,s_n\right)$ και παίρνουμε για n+1 τον αριθμό
$D=\left(n+1\right)^m\cdot d^{m+1}$ (2).
Θα δείξουμε ότι για κάθε $i=1,2,3,\dots\dots,n$ ο αριθμός i·D είναι *δύναμη*
Πράγματι έχουμε:

$$i\cdot D=i\cdot\left(n+1\right)^m d^m\cdot d=t_i^{s_i}\cdot\left[\left(n+1\right)\cdot d\right]^m\overset{(1)}{=}\left[t_i\left(\left(n+1\right)\cdot d\right)^{\frac{m}{s_i}}\right]^{s_i}, \text{ για } 1\leq i\leq n .$$

Και για n+1 έχουμε: $\left(n+1\right)\cdot D=\left(n+1\right)\cdot\left(n+1\right)^m\cdot d^{m+1}=\left(\left(n+1\right)\cdot d\right)^{m+1}$
Άρα αποδείξαμε ότι για κάθε $n\geq 1$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος d τέτοιος ώστε οι αριθμοί d , 2d , ……, nd , να είναι *δυνάμεις.*
Μπορούμε να εφαρμόσουμε λοιπόν την πρόταση για n·n!, δηλαδή υπάρχει ένας αριθμός d τέτοιος ώστε οι αριθμοί d , 2d , ……, n·n!·d είναι *δυνάμεις.*

Τώρα για το ζητούμενο σύνολο A μπορούμε να πάρουμε το:
A ={n!·d , 2·d·n!,…….., n·n!·d}.
Είναι φανερό ότι $|A|=n$ και ότι κάθε στοιχείο του A είναι μια *δύναμη* .Δηλαδή το A ικανοποιεί τις συνθήκες 1 και 2.
Για την συνθήκη 3 έχουμε: Για κάθε $r_1,r_2,...,r_k$ $\left(1\leq k\leq n\right)$ από το A μπορούμε να γράψουμε $r_i=a_i\cdot n!d$ όπου $1\leq a_i\leq n$, $\forall i=1,2,...,k$.

Τότε $\dfrac{r_1+r_2+...+r_k}{k}=\dfrac{n!}{k}\left(a_1+a_2+\cdots a_k\right)\cdot d=t\cdot d\in\mathbb{N}$ όπου $\dfrac{n!}{k}\left(a_1+a_2+\cdots a_k\right)$ είναι ένας ακέραιος αριθμός.

Αφού $a_1+a_2+\cdots a_k\leq n\cdot k$ έχουμε $t=\dfrac{n!}{k}\left(a_1+a_2+\cdots a_k\right)\leq\dfrac{n!}{k}\cdot n\cdot k$ άρα $t\leq n\cdot n!$,

και ο αριθμός $\dfrac{r_1+r_2+...+r_k}{k}$ είναι μια *δύναμη.*

Επομένως το σύνολο A ικανοποιεί όλες τις δοσμένες συνθήκες .

41η ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ IMO

Πρώτη Ημέρα, KOREA,Taejon, 19 Ιουλίου, 2000

Διάρκεια *4ώρες και 30 λεπτά*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.

Οι κύκλοι Γ_1 και Γ_2 τέμνονται στα σημεία M και N. Έστω l η κοινή εφαπτόμενη των κύκλων Γ_1 και Γ_2 έτσι ώστε το σημείο M να βρίσκεται πλησιέστερα προς την l από ότι το σημείο N. Έστω ακόμη ότι. η l εφάπτεται του κύκλου Γ_1 στο σημείο A και του κύκλου Γ_2 στο σημείο B. Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την l η οποία τέμνει τον κύκλο Γ_1, εκτός του σημείου M , και στο σημείο C και τον κύκλο Γ_2, εκτός του σημείου M, και στο σημείο D. Οι ευθείες CA και DB τέμνονται στο σημείο E, οι ευθείες AN και CD τέμνονται στο σημείο P και οι ευθείες BN και CD τέμνονται στο σημείο Q. Να αποδείξετε ότι EP = EQ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.

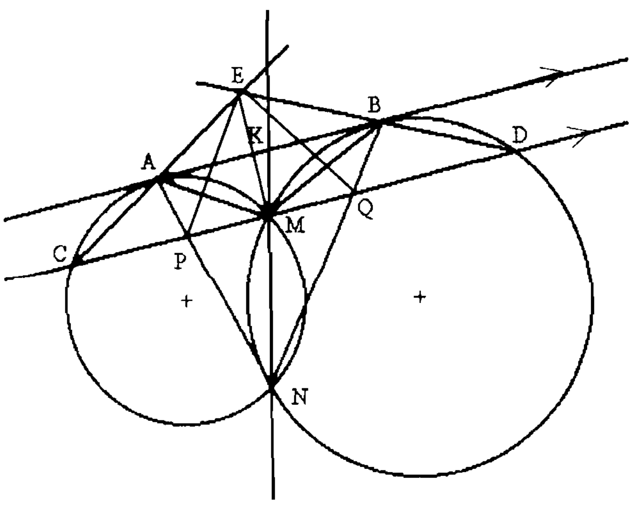
Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b, c *για τους οποίους ισχύει ότι* $abc = 1$. *Να αποδείξετε ότι* $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Έστω ο θετικός ακέραιος αριθμός $n \geq 2$. Πάνω σε μια οριζόντια ευθεία βρίσκονται αρχικά n ψύλλοι. όχι όλοι στο ίδιο σημείο της ευθείας. Αν λ, είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ορίζουμε μια «μετακίνηση» ως εξής: παίρνοντας δύο οποιουσδήποτε ψύλλους που βρίσκονται στα σημεία A και B, όπου το A βρίσκεται αριστερά του B, ο ψύλλος που βρίσκεται στο σημείο A πηδάει και καταλαμβάνει το σημείο C πάνω στην ευθεία δεξιά του B, έτσι ώστε BC/AB = λ. Να καθορίσετε όλες τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει ότι, για **κάθε** *τυχαίο σημείο M της ευθείας και για κάθε τυχαία αρχική θέση των n ψύλλων πάνω στην ευθεία, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός από «μετακινήσεις» που μεταφέρει όλους τους ψύλλους σε θέσεις που βρίσκονται δεξιά του σημείου M.*

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.



Έστω K το σημείο τομής των ευθειών AB και MN.
Από το θεώρημα της δύναμης σημείου ως προς κύκλο
$(KA)^2 = (KN)\cdot(KM) = (KB)^2$ από το οποία έχουμε K μέσο του AB.
Επειδή PQ // AB, M είναι το μέσο του PQ. Άρα είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι EM $\perp$ PQ.
Επειδή CD // AB, τα σημεία A και B είναι μέσα των τόξων CM και DM των Γ_1 και Γ_2. Άρα τα τρίγωνα ACM και BDM είναι ισοσκελή.

Από τις παράλληλες ευθείες έχουμε:

$\widehat{BAM} = \widehat{AMC} = \widehat{ACM} = \widehat{EAB}$, $\quad \widehat{ABM} = \widehat{BMD} = \widehat{BDM} = \widehat{EBA}$

που δείχνει ότι τα σημεία Ε και Μ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΒ, άρα ΕΜ⊥PQ, όπως ζητείται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Από την συνθήκη abc=1, η ανίσωση η οποία είναι μη-ομογενής ανίσωση μπορεί να μετασχηματιστεί σε ομογενή με κατάλληλη αλλαγή των μεταβλητών.

Τα a,b,c μπορούν να γραφούν σαν $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$ για κάποιες θετικούς αριθμούς x,y και z. (Μια πιθανή εκλογή είναι, χ = 1, ψ=1/α, z=1/(αb)). Μετασχηματίζοντας την ανίσωση συναρτήσει των χ,y,z έχουμε: $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\le xyz$

Τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $u=x-y+z$, $\upsilon=y-z+x$, $\omega=z-x+y$ είναι αρνητικός, διότι κάθε δύο απο αυτούς έχουν θετικό άθροισμα. Εάν υπάρχει ακριβώς ένας τέτοιος αριθμός τότε $u\upsilon\omega\le 0<xyz$. Υποθέτουμε ότι u≥0, υ≥0, ω≥0. Από την ανισότητα αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου έχουμε: $\sqrt{u\upsilon}=\sqrt{(x-y+z)(y-z+x)}\le\frac{1}{2}\left[(x-y+z)+(y-z+x)\right]=x$

Ισχύει, $\sqrt{u\upsilon}\le y$, $\sqrt{\omega u}\le z$. Άρα $u\upsilon\omega\le\chi yz$

2η Λύση

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{b}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=\frac{(ab-b+1)(bc-c+1)(ca-a+1)}{abc}$$
$$=(ab-b+1)(bc-c+1)(ca-a+1).$$

$abc=1\Rightarrow 1/b=ac,\ 1/c=ab,\ 1/a=bc,$

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=(a-1+ac)(b-1+ab)(c-1+bc).$$

Ορίζοντας το πρώτο μέλος με L, έχουμε

$$L^2=(ab-b+1)(bc-c+1)(ca-a+1)(ca-a+1)(a-1+ac)(b-1+ab)(c-1+bc).$$

Εάν $u=a-1+{}^{1}\!/_{b}\le 0$, τότε α < 1 και b > 1, έχουμε:

$$\upsilon=b-1+\frac{1}{c}>0 \text{ και } \omega=c-1+\frac{1}{a}>0\ \Rightarrow\ L=u\upsilon\omega\le 0<1$$

Όμοια εάν $\upsilon\le 0$ και $\omega\le 0$ έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα..

Έστω $u>0, \upsilon>0, \omega>0$, τότε όλοι οι παράγοντες στο ανάπτυγμα του L^2 είναι θετικοί.

Από την ανισότητα του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{(ab-b+1)(b-1+ab)}&\le\left[(ab-b+1)+(b-1+ab)\right]=ab,\\ \sqrt{(bc-c+1)(c-1+bc)}&\le\frac{1}{2}\left[(bc-c+1)+(c-1+bc)\right]=bc,\\ \sqrt{(ca-a+1)(a-1+ac)}&\le\frac{1}{2}\left[(ca-a+1)+(a-1+ac)\right]=ca.\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow L \leq (ab)(bc)(ca) = (abc)^2 = 1$

3η Λύση

$$\frac{1}{a}\left(a-1+\frac{1}{b}\right)+c\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=2,$$

$$abc=1 \Rightarrow \frac{1}{b}\left(b-1+\frac{1}{c}\right)+a\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=2,$$

$$\frac{1}{c}\left(c-1+\frac{1}{a}\right)+b\left(a-1+\frac{1}{b}\right)=2.$$

Πρέπει να δειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $u=a-1+\frac{1}{b}$, $\upsilon=b-1+\frac{1}{c}$, $\omega=c-1+\frac{1}{a}$ είναι αρνητικός. Εάν υπάρχει ένας τέτοιος αριθμός, φτάνουμε στο συμπέρασμα όπως στην προηγούμενη λύση. Εάν $u\geq 0, \upsilon\geq 0, \omega\geq 0$, από τη ανισότητα αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου έχουμε,

$$2=\frac{1}{a}u+c\upsilon\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}u\upsilon}\ ,\ 2=\frac{1}{b}\upsilon+a\omega\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\upsilon\omega},\ 2=\frac{1}{2}\omega+bu\geq 2\sqrt{\frac{b}{c}\omega u}\ .$$

Άρα, $u\upsilon\leq\frac{a}{c}$, $\upsilon\omega\leq\frac{b}{a}$, $\omega u\leq\frac{c}{b}$ $\Rightarrow$ $(u\upsilon\omega)^2\leq\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right)=1$. Επειδή $u\upsilon\omega>0$, συμπληρώνετε η απόδειξη.

Σημείωση. Σε κάθε λύση είναι προφανώς ότι η εξίσωση ισχύει όταν και μόνον όταν $a=b=c=1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.

Η προφανής κατάλληλη στρατηγική για να πάρει τους ψύλλους μακριά προς τα δεξιά είναι να εκλέξει σε κάθε μετακίνηση ο ψύλλος που βρίσκεται αριστερότερα να αφεθεί να πηδήξει πάνω από τον ψύλλο που βρίσκεται δεξιότερα. Με αυτή την στρατηγική, φτάνουμε μετά από κ μετακινήσεις σε ένα σχηματισμό στον οποίο δύο παράμετροι είναι σημαντικοί. Η μέγιστη απόσταση μεταξύ των ψύλλων, που ονομάζεται d_k, και η ελάχιστη απόσταση μεταξύ γειτονικών ψύλλων, η οποία ονομάζεται δ_k.

Προφανώς ισχύει $d_k \geq (n-1)\delta_k$.

Μετά από την $(k+1)$μετακίνηση, μια νέα απόσταση μεταξύ γειτονικών ψύλλων εμφανίζεται η λd_k η οποία μπορεί να είναι η νέα ελάχιστη απόσταση, άρα $\delta_{k+1}=\lambda d_k$ ή διαφορετικά θα ισχύει $\delta_{k+1}\geq\delta_k$.

Για όλες τις περιπτώσεις ισχύει, $\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}\geq\min\left\{1,\frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\}\geq\min\{1,(n-1)\lambda\}$.

Εάν $\lambda\geq\frac{1}{(n+1)}$ τότε $\delta_{k+1}\geq\delta_k$ για όλες τις τιμές του k, έτσι η ελάχιστη απόσταση δεν έχει μειωθεί. Άρα εάν η θέση του ψύλλου που βρίσκεται αριστερότερα ο οποίος αλλάζει θέση με βήματα μεγέθους όχι μικρότερου από μια θετική σταθερά, έτσι ώστε τελικά όλοι οι ψύλλοι θα μετακινηθούν όσο δεξιότερα θέλουμε.

Εάν αντίστροφα $\lambda < \frac{1}{n-1}$ τότε υπάρχει αρχική διευθέτηση από την οποία σι ψύλλοι δε μπορούν να μετακινηθούν πέραν από ένα σταθερό σημείο Μ. Στην πραγματικότητα θα αποδείξουμε ότι ισχύει αυτή η περίπτωση για κάθε αρχική τοποθέτηση.

Τη θέση των ψύλλων θα θεωρήσουμε ως πραγματικόν αριθμό. Θεωρούμε μια αυθαίρετη ακολουθία μετακινήσεων. Έστω s_k είναι το άθροισμα όλων των αριθμών που αντιπροσωπεύουν τις θέσεις των ψύλλων μετά από την k μετακίνηση και έστω ω_k ο μεγαλύτερος από αυτούς τους αριθμούς (η θέση του αριστερότερου ψύλλου) Σημειώνεται ότι $s_k \le n\omega_k$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία ω_k είναι φραγμένη.

Στην (k+1) μετακίνηση ενός ψύλλου από το σημείο Α κάνει άλμα πάνω από το σημείο Β, και προσγειώνεται στο σημείο Γ. Έστω αυτά τα σημεία αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς a, b, c. Τότε $s_{k+1} = s_k + c - a$.

Από τις συνθήκες, έχουμε, c– b = λ (b– a) και ισοδύναμα λ(c – a) = (1+ λ)(c — b).

Άρα $s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$.

Αν υποθέσουμε ότι $c \le \omega_k$ ο ψύλλος ο οποίος μόλις έκανε άλμα και πήρε την δεξιότερη θέση $\omega_{k+1} = c$. Επειδή b είναι η θέση μερικών ψύλλων μετά την κ μετακίνηση έχουμε $b \le \omega_k$ και $s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \ge \frac{1+\lambda}{\lambda}(\omega_{k+1} - \omega_k)$.

Η εκτίμηση αυτή είναι έγκυρη επίσης και στην περίπτωση όπου $c \le \omega_k$, όπου $\omega_{k+1} - \omega_k = 0$ και $s_{k+1} - s_k = c - a > 0$.

Θεωρούμε την ακολουθία των αριθμών $z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}\omega_k - s_k$ για k =0, 1. 2,... .

Ισχύει ότι $z_{k+1} - z_k \le 0$. Άρα η ακολουθία είναι δεν είναι αύξουσα άρα $z_{k+1} \le z_k$, $\forall k$.

Υποθέσαμε ότι $\lambda < \frac{1}{n-1}$. Άρα $1 + \lambda > n\lambda \Rightarrow z_k = (n+\mu)\omega_k - s_k$ όπου $\mu = \frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$.

Έτσι έχουμε την ανίσωση $z_k = \mu\omega_k + (n\omega_k - s_k) \ge m\omega_k$. Άρα $\omega_k \le \frac{z_0}{\mu}$ για κάθε k.

Οπότε η θέση του δεξιότερου ψύλλου ποτέ δεν υπερβαίνει μια σταθερά (η οποία εξαρτάται από n, λ και την αρχική τοποθέτηση, αλλά όχι από την στρατηγική των μετακινήσεων). Έτσι έχουμε το συμπέρασμα ότι η τιμές του λ, είναι όλοι σι αριθμοί οι οποίοι δεν είναι μικρότεροι από $\frac{1}{1-n}$.

41η ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ IMO

Δεύτερη Ημέρα, KOREA Taejon, 20 Ιουλίου, 2000

Διάρκεια : 4ώρες και 30 λεπτά

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Ένας ταχυδακτυλουργός έχει εκατό κάρτες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 100. 0 ταχυδακτυλουργός τοποθετεί όλες τις κάρτες μέσα σε τρία κουτιά, ένα κόκκινο, ένα άσπρο και ένα μπλε κουτί, έτσι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον μία κάρτα σε κάθε κουτί. Ένας θεατής επιλέγει τυχαία δύο κουτιά και βγάζει μία κάρτα από το καθένα. Στη συνέχεια αθροίζει τους αριθμούς που υπάρχουν πάνω στις δύο αυτές κάρτες και ανακοινώνει το άθροισμα. Με δεδομένο αυτό το άθροισμα, ο ταχυδακτυλουργός προσδιορίζει το κουτί από το οποίο ο θεατής δεν έβγαλε κάρτα. Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν να τοποθετήσει ο ταχυδακτυλουργός τις εκατό κάρτες στα τρία κουτιά, έτσι ώστε να προσδιορίζει πάντοτε το κουτί από το οποίο δε βγήκε καμία κάρτα.

(Δύο τρόποι θεωρούνται διαφορετικοί όταν τουλάχιστον μία κάρτα βρίσκεται σε διαφορετικό κουτί).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Να εξετάσετε αν υπάρχει ή όχι θετικός ακέραιος αριθμός η έτσι ώστε: ο η να διαιρείται με ακριβώς 2000 διαφορετικούς πρώτους αριθμούς, και ο αριθμός 2^n+1 *να διαιρείται με τον n.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.

Έστω AH_1, BH_2, CH_3 *τα ύψη ενός οξυγώνιου τριγώνου* ABC. *Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου* ABC *εφάπτεται των πλευρών* BC, CA, AB *στα σημεία* T_1, T_2, T_3, *αντιστοίχως. Έστω ακόμη ότι οι ευθείες* l_1, l_2, l_3 *είναι οι συμμετρικές ευθείες των ευθειών* H_1H_3, H_3H_1, H_1H_2 *ως προς άξονες τις ευθείες* T_2T_3, T_3T_1, T_1T_3, *αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες* l_1, l_2, l_3 *καθορίζουν ένα τρίγωνο του οποίου οι κορυφές βρίσκονται πάνω στον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου* ABC.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

Έστω ότι το χρώμα του αριθμού I είναι το χρώμα του κουτιού το οποίο τον περιέχει. Στην συνέχεια θεωρούμαι ότι όλοι οι αριθμοί είναι ακέραιοι μεταξύ 1 και 100.

Περίπτωση 1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον i έτσι ώστε i, i+1, i+2 έχουν τρία διαφορετικά χρώματα έστω **κ,α,μ**. Τότε επειδή $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$, το χρώμα του $i+3$ μπορεί να είναι είτε **α** (το χρώμα του $i+1$) ή **μ** (το χρώμα του $i+2$). Ακολουθεί ότι το χρώμα του $i+3$ είναι **κ**. Παρατηρούμε ότι τρία γειτονικά διαφορετικά χρώματα προσδιορίζουν το επόμενο. Πέραν τούτου το μοτίβο επαναλαμβάνεται: **κ,α,μ** ακολουθείται από το **κ**, ακολουθούν **α**, **μ**, κ.τ.λ. Ο συλλογισμός λειτουργεί επίσης και αντίστροφα: Το **κ,α,μ** ακολουθεί **μ,** κ.τ.λ.

Άρα είναι αρκετό να προσδιορίσουμε το χρώμα των 1, 2, 3, και αυτό μπορεί να γίνει με έξι διαφορετικούς τρόπους. Όλες αυτές οι διευθετήσεις είναι ικανές διότι το άθροισμα **κ+α, α+μ, μ+κ** μας δίνει διαφορετικά υπόλοιπα modulo 3.

Περίπτωση 2. Δεν υπάρχουν τρεις γειτονικοί αριθμοί με διαφορετικά χρώματα. Έστω το 1 είναι κόκκινο. Έστω i είναι ο μικρότερος μη κόκκινος αριθμός, π.χ. να είναι άσπρος. Έστω ο μικρότερος μπλε αριθμός είναι ο k. Εφόσον δεν είναι **κ , α, μ,** έχουμε $i+1<k$.

Υποθέτουμε $k<100$. Αφού $i+k=(i-1)+(k+1)$, $k+1$ πρέπει να είναι κόκκινο.

Ωστόσο επειδή έχουμε $i+(k+1)=(i+1)+k$, $i+1$ πρέπει να μπλε, τ οποίο μας οδηγεί σε αντίφαση με το γεγονός ότι ο μικρότερος μπλε είναι k. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το κ μπορεί να είναι μόνο το 100.

Από $(i-1)+100=i+99$, παρατηρούμε ότι το 99 είναι άσπρο. Θα δείξουμε τώρα ότι το 1 είναι κόκκινο, το 100 κόκκινο, και όλα τα άλλα είναι άσπρα. Εάν $t>1$ ήταν κόκκινο, τότε επειδή το $t+99=(t-1)+100$, $t-1$ πρέπει να είναι μπλε, αλλά όμως ο μικρότερος μπλε είναι το 100.

Έτσι οι χρωματισμοί είναι **κ,α,α ... α,α,μ** . Εάν το άθροισμα είναι το πολύ100, τότε το κουτί που λείπει είναι το μπλε, εάν το άθροισμα είναι 101 τότε είναι το άσπρο, και είναι μεγαλύτερο από 101 τότε είναι κόκκινο. Ο αριθμός αυτών των διευθετήσεων είναι και πάλιν έξι.

Άρα συνολικά έχουμε 12 διαφορετικούς τρόπους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.

Η απάντηση είναι ναι. Θα αποδειχθεί με επαγωγή για k μια γενικότερη πρόταση.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n=n(k) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $n \mid 2^n+1$, $3 \mid n$ και n έχει ακριβώς k πρώτους διαιρέτες.

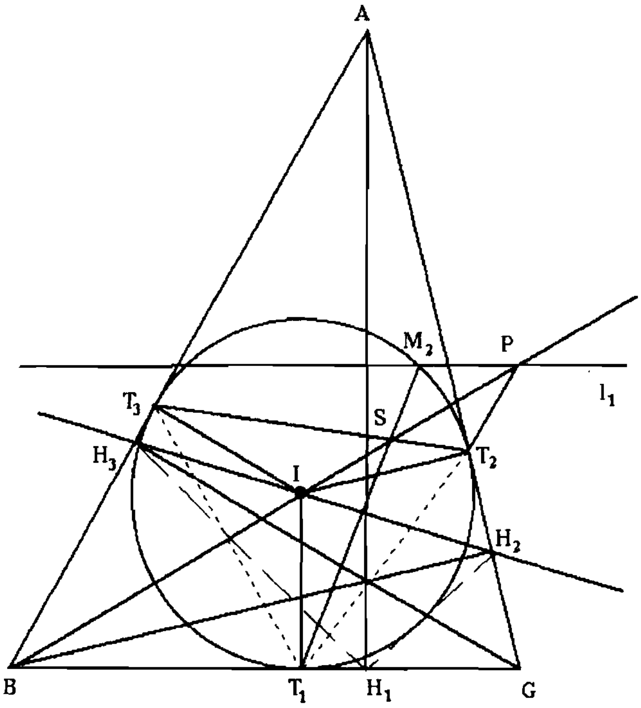
I. $n(1)=3$. Ισχύει.

II. Έστω ότι για σταθερό $k\geq 1$ υπάρχει ένας αριθμός $n(k)=3^l \cdot t$, με $l\geq 1$ και $3 \nmid t$, που ικανοποιούν τις συνθήκες. Τότε $n=n(k)$ είναι περιττός και από αυτό έχουμε $3 \mid 2^{2n}-2^n+1$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση $2^{3n}+1=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1)$ έχουμε $3n \mid 2^{3n}+1$. Με το Λήμμα που ακολουθεί παρακάτω υπάρχει ένας περιττός αριθμός p έτσι ώστε $p \mid 2^{3n}+1$ και $p \nmid 2^n+1$. Έτσι ο αριθμός $n(k+1)=3p \cdot n(k)$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις για $k+1$

Λήμμα. *Για κάθε ακέραιο α >2 υπάρχει ένας πρώτος αριθμός p έτσι ώστε* $p \mid a^3+1$ *αλλά* $p \nmid a+1$

Απόδειξη. Υποθέτω ότι είναι λάθος για ένα σταθερό ακέραιο α > 2. Τότε κάθε πρώτος διαιρέτης του α² - α + 1 = 0 διαιρεί το α +1. Η ταυτότητα $a^2-a+1=(a+1)(a-2)+3$ μας δείχνει ότι το 3 είναι ο μόνος πρώτος αριθμός που διαιρεί το a^2-a+1άρα a^2-a+1 είναι δύναμη του 3. Επίσης, επειδή α + 1 είναι πολλαπλάσιο του , άρα και το α - 2. Άρα a^2-a+1 είναι διαιρετό με 3 αλλά όχι με το 9. Εφόσον είναι δύναμη του 3, το a^2-a+1 είναι ίσο με το 3, το οποίο είναι αντίφαση διότι $a^2-a+1>3$ για α > 2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.



Έστω M_1, M_2, M_3 τα συμμετρικά σημεία των T_1, T_2, T_3 αντίστοιχα ως προς τις διχοτόμους των $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ αντίστοιχα. Τα σημεία M_1, M_2, M_3 προφανώς ανήκουν στον εγγεγραμμένο κύκλο του $\overset{\Delta}{ABC}$. Θα αποδείξουμε ότι είναι οι κορυφές του τριγώνου που σχηματίζεται από τις εικόνες των σημείων της ερώτησης και ικανοποιούν τις ζητούμενες συνθήκες. Από την συμμετρία είναι αρκετό να δείξουμε ότι η συμμετρική ευθεία l_1 της H_2H_3 από την T_2T_3 περνά από το σημείο M_2 . Έστω I το έγκεντρο του . Σημειώνεται ότι T_2 και H_2 είναι πάντοτε στην ίδια πλευρά του BI, με το T_2 να είναι πιο κοντά στο BI παρά το H_2. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση όταν το C βρίσκεται στην ίδια πλευρά του BI, όπως στο διπλανό σχήμα

Έστω $\hat{A}$=2α, $\hat{B}$=2β, $\hat{C}$=2γ

Λήμμα. Η εικόνα του H_2 ως προς την ευθεία T_2T_3 ανήκει στην BI.

Απόδειξη. Έστω $l \perp T_2T_3$, $H_2 \in l$. Έστω τα P με το Σ σημεία τομής των BI με την l και του BI με την T_2T_3. Το σημείο S ανήκει και στα δύο ευθύγραμμα τμήματα T_2T_3 και BP. Είναι ικανό να αποδειχθεί ότι: $\widehat{PSH_2} = 2\widehat{RST_2}$.

Έχουμε $\widehat{PST_2} = \widehat{BST_3}$ και από το θεώρημα εξωτερικής γωνιάς $\Rightarrow$ $\widehat{BST_3} = \widehat{AT_3S} - \widehat{T_3BS} = \left(90^0 - a\right) - \beta = \gamma$

Ακολούθως $\widehat{B\Sigma T_1} = \widehat{B\Sigma T_3} = \gamma$ από την συμμετρία με άξονα την BI. Τα σημεία C και S βρίσκονται στην ίδια πλευρά οτυ IT_1 , επειδή $\widehat{BT_1S} = 90^0 + a > 90^0$. Τότε από τις εξισώσεις $\widehat{IST_1} = \widehat{ICT_1} = \gamma$ το τετράπλευρο SIT_1C είναι εγγεγραμμένο άρα $\widehat{ISC} = \widehat{IT_1C} = 90^0$. Αλλά τότε BCH_2S είναι εγγεγραμμένο τετράπλευρο διότι $\widehat{BH_2C} = 90^0$. Άρα $\widehat{PSH_2} = \hat{C} = 2\gamma = 2\widehat{PST_2}$ όπως ζητείται.

Σημειώνεται ότι η απόδειξη του λήμματος μας δίνει επίσης $\widehat{BPT_2} = \widehat{SH_2T_2} = \beta$, από την συμμετρία με άξονα T_2T_3 και από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο BCH_2S. Τότε επειδή το M_2 είναι συμμετρικό το T_2 με άξονα συμμετρία τον BI έχουμε ότι: $\Rightarrow$ $\widehat{BPM_2} = \widehat{BPT_2} = \beta = \widehat{CBP}$, άρα $PM_2 \parallel BC$. Για να αποδείξουμε ότι M_2 ανήκει στην l_1, είναι ικανό να αποδείξουμε ότι η ευθεία l_1 είναι επίσης παράλληλη με την BC.

Υποθέτουμε ότι $\beta \neq \gamma$. Έστω ότι η ευθεία CB τέμνει τις H_2H_3 και T_2T_3 στα σημεία D και E αντίστοιχα. (Τα σημεία D και E Ανήκουν στην ευθεία BC στην ίδια πλευρά του ευθύγραμμου τμήματος BC). Με εύκολο υπολογισμό των γωνιών έχουμε $\widehat{B\Delta H_3} = 2\,|\,\beta - \gamma\,|$, $\widehat{BET_3} = |\,\beta - \gamma\,|$, άρα η ευθεία I_1 είναι παράλληλη προς την BC.

<u>ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ (Λ.Ε.Μ.)</u>

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u> Ιούνιος 2000
Συνδυασμός : $\mathbf{\Sigma_1}$, $\mathbf{\Sigma_4}$, $\mathbf{\Sigma_5}$ Χρόνος : 2 ώρες και 30 λεπτά

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

Να απαντήσετε σε 12 μόνο από τις 15 ερωτήσεις

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης : $\psi = 3\chi^2 + \chi - 8$

2. Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης : $συν2\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των : (α) 5! (β) Δ_3^4 (όπου Δ_3^4 οι διατάξεις των 4 πραγμάτων ανά 3)

4. Ο Γιάννης στάθμευσε παράνομα και γι' αυτό πήρε κλήση για να πληρώσει £13 πρόστιμο. Επειδή όμως καθυστέρησε να το πληρώσει, κατά την εξόφληση, υποχρεώθηκε να πληρώσει πρόστιμο 50% επί πλέον πάνω στο αρχικό ποσό. Πόσα πλήρωσε ο Γιάννης;

5. Ένας κύβος έχει όγκο 125 cm^3. Να βρείτε :
(α) Το μήκος της ακμής, α, του κύβου, (β) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

6. Το διπλανό κυκλικό διάγραμμα παριστάνει τις πωλήσεις δίσκων ενός καταστήματος την περασμένη εβδομάδα. Αν το κατάστημα πώλησε 504 δίσκους, να βρείτε πόσους πώλησε με ελληνικά τραγούδια, πόσους με ξένα και πόσους με κλασσική μουσική.

7. Ο Γιώργος επιλέγει τυχαία ένα από τα γράμματα της λέξης « ΚΕΡΜΑ». Σε μια τέτοια ενέργεια θεωρείται ότι εξίσου δυνατό να επιλέξει οποιοδήποτε από τα γράμματα.
(α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο αυτού του πειράματος τύχης.
(β) Να βρείτε την πιθανότητα το γράμμα που επιλέγεται να είναι φωνήεν.

8. Η βροχόπτωση σε εκατοστά για μια σειρά χρόνων σε μια περιοχή ήταν όπως φαίνεται πιο κάτω:

Έτος	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
Ύψος βροχόπτωσης	10	12	8	15	11	14	17	9

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή (αριθμητικό μέσο) και την τυπική απόκλιση (κατά προσέγγιση εκατοστού) του ύψους της βροχόπτωσης γι' αυτή τη χρονική περίοδο.

9. Τετραγωνική πυραμίδα έχει ύψος 4 cm και εμβαδόν βάσης 36 cm^2. Να βρείτε :
(α) Τον όγκο της πυραμίδας (β) Το παράπλευρο ύψος της (γ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της.

10. Ο Κώστας τόκισε £10 000 προς 5% με απλό τόκο για 6 μήνες. Στο τέλος αυτής της περιόδου χρειάστηκε τις £2000, καθώς και τους τόκους της εξαμηνίας. Το υπόλοιπο ποσό το κατέθεσε και πάλι προς 6% για 2 χρόνια με απλό τόκο. Να βρείτε πόσους συνολικά τόκους πήρε στην περίοδο των 2 ½ χρόνων;

11. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας ενός ορθού κυκλικού κώνου είναι 60π cm² και η ακτίνα είναι τα $\frac{3}{5}$ της γενέτειρας του. Να βρείτε: (α) Το εμβαδόν της βάσης του κώνου. (β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του. (γ) Τον όγκο του.

12. Ο μέσος όρος του βάρους 7 μαθητών είναι 45 κιλά και ο μέσος όρος του βάρους 8 παικτών μιας καλαθοσφαιρικής ομάδας είναι 90 κιλά. Πόσος είναι ο μέσος όρος του βάρους των 15 ατόμων που αναφέρονται στο πρόβλημα;

13. Πόσους περιττούς τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου;

14. Να βρείτε το φυσικό αριθμό ν ώστε να ισχύει : $\binom{\nu}{2} = \binom{\nu+1}{2} - 10$.

15. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $\psi = \chi^3 + 3\chi^2$. Για ποια τιμή του χ η παράγωγος έχει τιμή ίση με την κλίση της ευθείας $\psi = 9\chi + 5$.

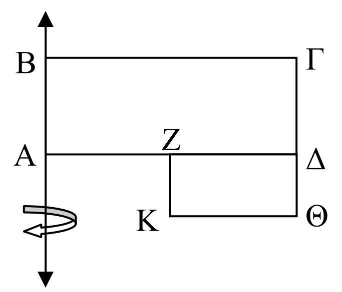
ΜΕΡΟΣ Β΄

Να απαντήσετε σε 4 μόνο από τις 6 ερωτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + 5$ με τοπικό ακρότατο στο σημείο (1,6). Να βρείτε τις τιμές των α και β και να εξετάσετε αν το ακρότατο αυτό είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

2. Δίνεται η παράσταση Α = 2ημχσυνχ + συνχ + 4ημχ + 2.
(α) Να δείξετε ότι Α = (2 ημχ + 1)·(συνχ + 2).
(β) Να λύσετε στο διάστημα από 0° μέχρι 360° την εξίσωση:
2ημχσυνχ + συνχ + 4ημχ + 2 = 0 .

3. Το διπλανό σχήμα από δύο ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΖΚΘΔ . Δίνονται : ΒΓ=8cm, ΓΔ=5cm, ΖΔ=4cm και ΔΘ=3cm. Το σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ΑΒ. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από αυτή την περιστροφή.



4. Τα $\frac{2}{3}$ ενός κεφαλαίου τοκιζόμενα προς 8% για 5 χρόνια και το υπόλοιπο κεφάλαιο τοκιζόμενο προς 6% για 4 χρόνια δίνουν συνολικό τόκο £2080. Αν και στις δύο περιπτώσεις ο τοκισμός έγινε με απλό τόκο να βρείτε το κεφάλαιο.

5. Σ' ένα εστιατόριο οι πελάτες μπορούν να κάμουν τους δικούς τους συνδυασμούς από λαχανικά για να συνοδεύσουν ένα πιάτο με ψητό κοτόπουλο. Συγκεκριμένα το εστιατόριο διαθέτει 8 είδη λαχανικών και οι πελάτες μπορούν να επιλέξουν είτε 2, είτε3, είτε 4 είδη. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους είναι δυνατό να συνοδευτεί το κοτόπουλο.

6. Η κατανάλωση νερού, κατά μήνα, το 1999 σ' ένα νοικοκυριό φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

Μήνας του έτους	Ιαν.	Φεβρ.	Μάρτ.	Απρ.	Μάιος	Ιούν.	Ιούλ.	Αύγ.	Σεπτ.	Οκτ.	Νοεμβ.	Δεκ.
Ποσότητα νερού σε m^3	8	6	10	12	14	18	18	14	12	12	10	10

(α) Να βρείτε πόσο νερό κατανάλωσε το νοικοκυριό αυτό τους μήνες του καλοκαιριού.
(β) Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων της πιο πάνω κατανομής.
(γ) Δίνεται ότι για τα πρώτα 10 m^3 που καταναλώνονται κατά μήνα η τιμή είναι 90 σεντ κατά m^3 ενώ για κάθε επιπλέον m^3 πέραν των 10 m^3 η τιμή είναι 150 σεντ. Να βρείτε πόσα πλήρωσε το νοικοκυριό αυτό για κατανάλωση νερού το 1999.
(δ) Να βρείτε τη μέση τιμή των χρημάτων που πλήρώσε το νοικοκυριό αυτό κατά m^3 στη διάρκεια του 1999.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

1. $\dfrac{d\psi}{d\chi} = 6\chi + 1$

2. $συν2\chi = συν30° \Rightarrow 2\chi = 360°κ \pm 30° \Rightarrow \chi = 180°κ \pm 15° \Rightarrow$
$\chi = 180°κ + 15°$, $\chi = 180°κ - 15°$ $\quad κ \in \mathbf{Z}$

3. (α) $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$ $\qquad$ (β) $\Delta_3^4 = \dfrac{4!}{1!} = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$

4. $13\cdot\dfrac{50}{100} = 6{,}50$, £13 + £6,50 = £19,50 . *Ο Γιάννης πλήρωσε* **£19,50**

5. $V = \alpha^3 \Rightarrow 125 = \alpha^3 \Rightarrow \alpha$ **= 5 cm.** $\quad E_{ολ} = 6\cdot\alpha^2 \Rightarrow E_{ολ} = 6\cdot5^2 \Rightarrow$ $\mathbf{E_{ολ} = 150\ cm^2}$

6. *Κλασσική μουσική*

$360°$ — 504
$110°$ — $\chi;$

$\chi = \dfrac{110\cdot504}{360}$ = **154 δίσκους**

Ελληνικά τραγούδια

$\psi = \dfrac{120\cdot504}{360}$ = **168 δίσκους**

Ξένα τραγούδια

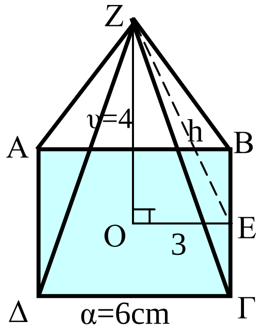
504 – (168 + 154) = 504 – 322 = **182 δίσκους**

7. (α) $\Omega = \{K, E, P, M, A\}$ $\qquad$ (β) $P(A) = \dfrac{2}{5}$

8. $\overline{\chi} = \dfrac{10+12+8+15+11+14+17+9}{8} = \dfrac{96}{8} = 12 \Rightarrow \overline{\chi} = 12$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4+0+16+9+1+4+25+9}{8}} = \sqrt{\frac{68}{8}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \mathbf{2{,}92}$$

9.



$E_B = 36\ cm^2$, $E_B = a^2 \Rightarrow a = 6\ cm$, $\upsilon = 4\ cm$

(α) $V = \dfrac{E_B \cdot \upsilon}{3} \Rightarrow V = \dfrac{36 \cdot 4}{3} \Rightarrow$ $\mathbf{V = 48\ cm^3}$

(β) $h^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow h^2 = 25 \Rightarrow$ $\mathbf{h = 5\ cm}$

(γ) $E_{o\lambda} = E_\pi + E_B \Rightarrow E_{o\lambda} = \dfrac{\Pi_B \cdot h}{2} + E_B \Rightarrow E_{o\lambda} = \dfrac{24 \cdot 5}{2} + 36$

$\Rightarrow \mathbf{E_{o\lambda} = 96\ cm^2}$

10. $K_1 = £10\ 000$, $E_1 = 5\%$, $X_1 = 6$ μήνες $\Rightarrow$

$T_1 = \dfrac{K_1 E_1 X_1}{1200} \Rightarrow T_1 = \dfrac{10000 \cdot 5 \cdot 6}{1200} \Rightarrow T_1 = £250$

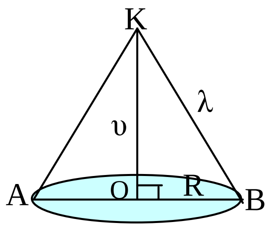
$K_2 = 8000$, $E_2 = 6\%$, $X_2 = 2$ χρόνια $\Rightarrow$

$T_2 = \dfrac{K_2 \cdot E_2 \cdot X_2}{100} \Rightarrow T_2 = \dfrac{8000 \cdot 6 \cdot 2}{100} \Rightarrow T_2 = £960$

Συνολικός Τόκος $T_1 + T_2 = 250 + 960 =$ **£ 1210**

11. $E_\kappa = 60\pi\ cm^2$, $R = \dfrac{3}{5}\lambda$

$E_\kappa = \pi R \lambda \Rightarrow 60\pi = \pi \cdot \dfrac{3}{5}\lambda \cdot \lambda \Rightarrow \lambda^2 = 100 \Rightarrow \lambda = 10\ cm$



$R = \dfrac{3}{5} \cdot 10 \Rightarrow R = 6\ cm$, $\upsilon^2 + R^2 = \lambda^2 \Rightarrow \upsilon^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow$

$\upsilon^2 = 100 - 36 \Rightarrow \upsilon^2 = 64 \Rightarrow \upsilon = 8\ cm$

(α) $E_B = \pi R^2 \Rightarrow E_B = \pi \cdot 6^2 \Rightarrow$ $\mathbf{E_B = 36\pi\ cm^2}$

(β) $E_{o\lambda} = \pi R\lambda + \pi R^2 \Rightarrow E_{o\lambda} = \pi R(\lambda + R) \Rightarrow E_{o\lambda} = \pi \cdot 6 \cdot (10+6) \Rightarrow \mathbf{E_{o\lambda} = 96\pi\ cm^2}$

(γ) $V = \dfrac{\pi R^2 \upsilon}{3} \Rightarrow V = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} \Rightarrow$ $\mathbf{V = 96\pi\ cm^3}$

12. $\overline{\chi}_1 = 45$, $\nu_1 = 7$, $\overline{\chi}_2 = 90$, $\nu_2 = 8$ $\quad \overline{\chi} = \dfrac{S}{\nu}$

$S_1 = 7 \cdot 45 \Rightarrow S_1 = 315$ κιλά, $S_2 = 8 \cdot 90 \Rightarrow S_2 = 720$ κιλά

$\overline{\chi} = \dfrac{S_1 + S_2}{\nu_1 + \nu_2} \Rightarrow \overline{\chi} = \dfrac{720 + 315}{7 + 8} \Rightarrow \overline{\chi}$ **= 69 κιλά**

13. 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9

Μονάδες	Δεκάδες	Εκατοντάδες
4	6	5

$4 \cdot 6 \cdot 5 =$ ***120 αριθμοί***

14. $\binom{\nu}{2} = \binom{\nu+1}{2} - 10 \Rightarrow \dfrac{\nu!}{(\nu-2)!\cdot 2!} = \dfrac{(\nu+1)!}{(\nu-1)!\cdot 2!} - 10 \Rightarrow \dfrac{\nu(\nu-1)}{2} = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2} - 10 \Rightarrow$

$\nu^2 - \nu = \nu^2 + \nu - 20 \Rightarrow 2\nu = 20 \Rightarrow \boldsymbol{\nu = 10}$

15. $\psi = \chi^3 + 3\chi^2 \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = 3\chi^2 + 6\chi$, $\quad \psi = 9\chi + 5 \Rightarrow \lambda = 9$, $\quad \dfrac{d\psi}{d\chi} = \lambda$

$\Rightarrow 3\chi^2 + 6\chi = 9 \Rightarrow \chi^2 + 2\chi - 3 = 0 \Rightarrow (\chi + 3)(\chi - 1) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\chi_1 = -3}$, $\boldsymbol{\chi_2 = 1}$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

1. $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + 5 \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = 2\alpha\chi + \beta$, *Τοπικό ακρότατο* $(1,6) \Rightarrow$

(i) $\chi=1, \psi=6$, $6 = \alpha\cdot 1^2 + \beta\cdot 1 + 5 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \quad (1)$

(ii) $\left.\dfrac{d\psi}{d\chi}\right|_{\chi=1} = 0 \Rightarrow 2\alpha\cdot 1 + \beta = 0 \Rightarrow 2\alpha + \beta = 0 \quad (2)$

$(1) \wedge (2) \Rightarrow \alpha = -1$, $\beta = 2 \Rightarrow \psi = -\chi^2 + 2\chi + 5$, $\quad \dfrac{d\psi}{d\chi} = -2\chi + 2$

χ	$-\infty$	1	$+\infty$
$\psi' = -2\chi + 2$	$+$	0	$-$
ψ	$\nearrow$		$\searrow$
		max (1,6)	

2. (α) $A = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi + 4\eta\mu\chi + 2 = 2\eta\mu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi + 2) + (\sigma\upsilon\nu\chi + 2) = (2\eta\mu\chi + 1)(\sigma\upsilon\nu\chi + 2)$

(β) $2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi + 4\eta\mu\chi + 2 = 0 \overset{(\alpha)}{\Longrightarrow} (2\eta\mu\chi + 1)(\sigma\upsilon\nu\chi + 2) = 0 \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\chi + 2 = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = -2$ (*Αδύνατη*)

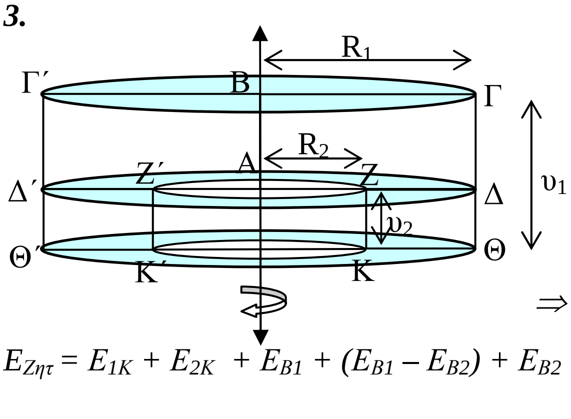
ή $\quad 2\eta\mu\chi + 1 = 0 \Rightarrow \eta\mu\chi = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu(-30°)$

$\Rightarrow \chi = 360°\kappa + (-30°)$ ή $\chi = 360°\kappa + 180° - (-30°)$ $\quad \kappa \in \mathbf{Z}$, $0° \leq \chi \leq 360°$

$\Rightarrow \chi = 360°\kappa - 30°$ ή $\chi = 360°\kappa + 210°$ $\quad \kappa \in \mathbf{Z}$, $0° \leq \chi \leq 360°$

$\kappa = 1 \Rightarrow$ <u>$\boldsymbol{\chi = 330°}$</u> $\qquad$ <u>$\boldsymbol{\chi = 210°}$</u>

3.



$R_1 = 8cm$, $R_2 = 4cm$, $\upsilon_1 = 8cm$, $\upsilon_2 = 3cm$.

$V_{Z\eta\tau.} = V_1 - V_2$

$\Rightarrow V_{Z\eta\tau} = \pi R_1^2 \upsilon_1 - \pi R_2^2 \upsilon_2$

$\Rightarrow V_{Z\eta\tau} = \pi(8^2\cdot 8 - 4^2\cdot 3)$

$\Rightarrow V_{Z\eta\tau} = \pi(512 - 48) \Rightarrow \boldsymbol{V_{Z\eta\tau} = 464\pi\ cm^3}$

$E_{Z\eta\tau} = E_{1K} + E_{2K} + E_{B1} + (E_{B1} - E_{B2}) + E_{B2} \Rightarrow E_{Z\eta\tau} = E_{1K} + E_{2K} + 2E_{B1} \Rightarrow$

$E_{Ζητ} = 2\pi R_1 \upsilon_1 + 2\pi R_2 \upsilon_2 + 2\pi R_1^2 \Rightarrow E_{Ζητ} = 2\pi \cdot 8 \cdot 8 + 2\pi \cdot 4 \cdot 3 + 2\pi \cdot 8^2 \Rightarrow$

$E_{Ζητ} = 128\pi + 24\pi + 128\pi \Rightarrow \mathbf{E_{Ζητ} = 280\pi\ cm^2}$

4. $T = \dfrac{K \cdot E \cdot X}{100}$, $K_1 = \dfrac{2}{3}K$, $E_1 = 8\%$, $X_1 = 5$ *χρόνια* $\Rightarrow T_1 = \dfrac{\frac{2}{3}K \cdot 8 \cdot 5}{100} \Rightarrow T_1 = \dfrac{80K}{300}$

$K_2 = \dfrac{1}{3}K$, $E_2 = 6\%$, $X_2 = 4$ *χρόνια* $\Rightarrow T_2 = \dfrac{\frac{1}{3}K \cdot 6 \cdot 4}{100} \Rightarrow T_2 = \dfrac{24K}{100}$

$T_1 + T_2 = 2080 \Rightarrow \dfrac{80K}{300} + \dfrac{24K}{300} = 2080 \Rightarrow 104K = 2080 \cdot 300 \Rightarrow$ **K = £6000**

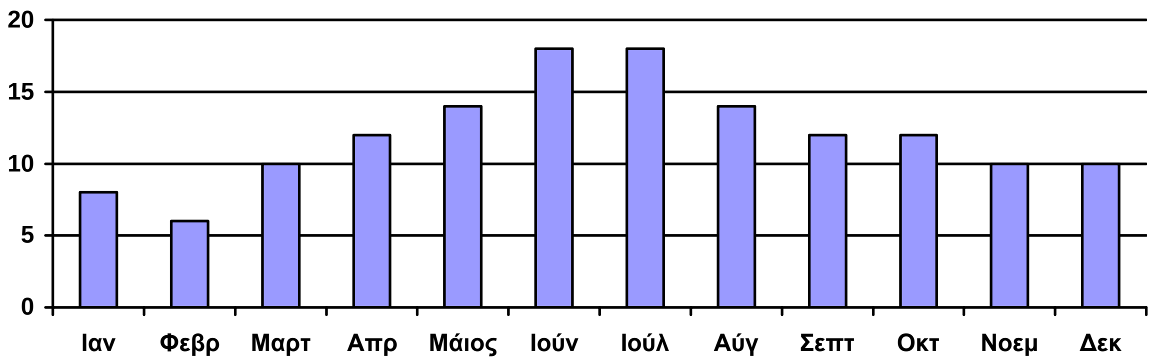
5. $\binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \dfrac{8!}{2! \cdot 6!} + \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} + \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = \dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} + \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 28 + 56 + 70$

= ***154 τρόποι***

6. *(α) Προσθέτουμε την κατανάλωση των μηνών Ιουνίου – Ιουλίου – Αυγούστου*

$18 + 18 + 14 =$ ***50 cm³***

(β)



(γ) $8 \cdot 90 + 6 \cdot 90 + 10 \cdot 90 + 10 \cdot 90 + 2 \cdot 150 + 10 \cdot 90 + 4 \cdot 150 + 2 \cdot 10 \cdot 90 + 2 \cdot 8 \cdot 150 + 10 \cdot 90 + 4 \cdot 150 + 2 \cdot 10 \cdot 90 + 2 \cdot 2 \cdot 150 + 10 \cdot 90 + 10 \cdot 90 = 14760$ *δηλ.* ***£147,60 σεντ***

(δ) $\overline{\chi} = \dfrac{14760}{144} \Rightarrow \overline{\chi}$ ***= 102 ½ σεντ***

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ
(Λ.Ε.Μ.+10-Ε.Λ.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ιούνιος 2000

Συνδυασμός : **Σ_2 , Σ_3 Λ.Ε.Μ. + 10-ΩΡΟ Ε.Λ.** Χρόνος : 2 ώρες και 30 λεπτά

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να απαντήσετε σε 12 μόνο από τις 15 ερωτήσεις.

1. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{d\chi}$ της συνάρτησης ψ = τοξεφ3χ.

2. Να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{e^{\chi}\cdot\eta\mu\chi+\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi+2\chi-1}$.

3. Αγόρασε κάποιος ένα οικόπεδο και ακολούθως το πούλησε προς £37800 κερδίζοντας έτσι 8%. Να βρείτε πόσα αγόρασε το οικόπεδο.

4. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2\psi}{d\chi^2}+\frac{d\psi}{d\psi}-6\psi=0$.

5. Να βρείτε τη γωνιά που σχηματίζει η ευθεία (ε) : $\frac{\chi+3}{2}=\frac{\psi-1}{2}=z$ με το επίπεδο (Π) : 5χ+4ψ-3z+2=0 .

6. Δίνονται οι πίνακες Α = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ και Β = $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$

(α) Να βρείτε τον πίνακα A^{-1} .

(β) Αν Χ είναι πίνακας 2x2 και ισχύει ΑΧ = Β , να βρείτε τον πίνακα Χ.

7. * Στο ανάπτυγμα του $\left(\chi+\frac{\alpha}{\chi}\right)^{10}$, α ∈ **R** − {0} , ο συντελεστής του χ^6 είναι ενιαπλάσιος του συντελεστή του χ^8. Να βρείτε την τιμή του α.

8. Ο πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν οι 30 μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά.

Βαθμός χ_i	3	5	7	9	11	13	15
Αριθμός μαθητών f_i	2	5	10	6	4	2	1

Να βρείτε : (α) Τη μέση τιμή $\overline{\chi}$ των παρατηρήσεων.

(β) Την τυπική απόκλιση σ των παρατηρήσεων.

9. * Δίνεται η σειρά $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots$

(α) Να γράψετε το νιοστό όρο της.

(β) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της.

(γ) Να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων της.

10. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\alpha\chi$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $T(\alpha t^2, 2\alpha t)$ τέμνει τον άξονα των ψ στο σημείο Σ και η κάθετη της παραβολής στο σημείο Τ τέμνει τον άξονα των χ στο σημείο Ρ. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου βάρους του τριγώνου ΤΣΡ.
(κέντρο βάρους ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του).

11. Ένα κουτί περιέχει σφαίρες οι οποίες είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το 6κ+2, $\kappa \in \mathbf{N}$. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί και η πιθανότητα ο αριθμός που αναγράφεται πάνω σ' αυτή να διαιρείται με το 6 είναι $\frac{5}{31}$. Να βρείτε πόσες σφαίρες έχει το κουτί.

12. Κανονική τριγωνική πυραμίδα ΚΑΒΓ έχει βάση το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 2α cm και η παράπλευρη ακμή της σχηματίζει με τη βάση της γωνία 60°. Να βρείτε:
(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
(β) Τον όγκο της πυραμίδας.

13. * Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\chi+1=2\varepsilon\varphi\theta$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{d\chi}{\left(\chi^2+2\chi+5\right)^{\frac{3}{2}}}$

14. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από το σημείο Α(4,2) και εφάπτεται της ευθείας $\psi = \chi$ στο σημείο Β(1,1).

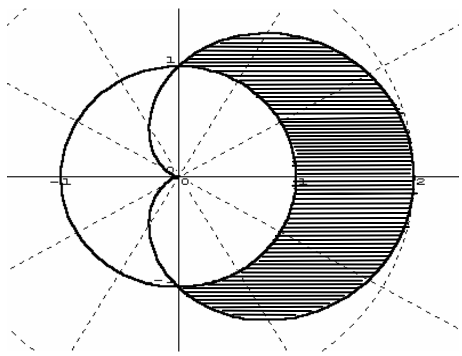
15. Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ απεικονίζει κάθε σημείο Α(χ,ψ) του επιπέδου στην ορθή προβολή του πάνω στην ευθεία $3\psi = 4\chi$. Να βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού.

*** <u>Οι τρεις διαφορετικές ασκήσεις του μέρους Α΄ για το Ενιαίο Λύκειο (10-Ώρο) είναι:</u>**

7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi^3=\chi+1$ έχει μια ρίζα στο κλειστό διάστημα [1,2]. Στη συνέχεια , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton-Raphson και παίρνοντας σαν πρώτη προσέγγιση την τιμή $\chi_o = 1{,}2$, να βρείτε μια δεύτερη, καλύτερη προσέγγιση της ρίζας, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

9. Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|z-1-2i| = |z-4+i|$, όπου $z = \chi + \psi i$.

13. Στο σχήμα δίνονται τα διαγράμματα των καμπυλών με εξισώσεις :
(κ_1) : $\rho = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
(κ_2) : $\rho = 1$
(α) Να βρείτε τις πολικές συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο καμπυλών.
(β) Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



ΜΕΡΟΣ Β΄

Από 6 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 4.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = (\chi - 2)\cdot e^{\chi}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, το ακρότατο, το σημείο καμπής, την ασύμπτωτη της συνάρτησης και να κάνετε τη γραφική παράσταση.

(β) Να βρείτε, συναρτήσει του e, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της ευθείας χ=1, της καμπύλης με εξίσωση $\psi = (\chi - 2)\cdot e^{\chi}$ και της καμπύλης με εξίσωση $\psi = e^{\chi}$.

2. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $\frac{1}{\psi^5}\cdot\frac{d\psi}{d\chi} - \frac{2}{2\psi^4\chi} = 5\chi^2$ (i)

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\omega = \frac{1}{\psi^4}$, όπου ω είναι συνάρτηση του χ, να δείξετε ότι η διαφορική εξίσωση (i) μετασχηματίζεται στη διαφορική εξίσωση $\frac{d\omega}{d\chi} + \frac{2}{\chi}\omega = -20\chi^2$ (ii)

Στη συνέχεια, αφού λύσετε τη διαφορική εξίσωση (ii) να βρείτε: (α) τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (i) (β) την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης (i) για την οποία είναι ψ=$\frac{1}{2}$, όταν χ=1.

3. Ευθεία (ε) περνά από τα σημεία Α1,-2,1) και Β(3,-1,-1).

(α) Να βρείτε μια διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Ν(2,1,3) από την ευθεία (ε).

(γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ζ) με διανυσματική εξίσωση :
$\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} + \mu\left(-5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ τέμνει την ευθεία (ε) σε ένα σημείο Μ και να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ.

(δ) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου (Π) που περνά από την ευθεία χ=ψ=z και είναι παράλληλο προς την ευθεία (ε).

4. Δίνεται η υπερβολή χψ=9 και το σημείο της $P\left(3t, \frac{3}{t}\right)$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής στο σημείο Ρ είναι $\chi + t^2\psi = 6t$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης (κ) της υπερβολής στο σημείο Ρ.

(γ) Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα των χ στο σημεία Τ και τον άξονα των ψ στο σημείο Τ΄, ενώ η κάθετη (κ) τέμνει τον άξονα των χ στο σημείο Ν και τον άξονα των ψ στο σημείο Ν΄. Αν Ε είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΡΤΝ και Ε΄ το εμβαδόν του τριγώνου ΡΤ΄Ν΄ , να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{1}{E} + \frac{1}{E'} = \frac{2}{9}$

5. Στο ασανσέρ μιας πολυκατοικίας με 10 ορόφους μπαίνουν 6 άτομα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: Να κατέβουν όλοι σε διαφορετικούς ορόφους.

Β: Να κατέβουν όλοι σε ένα όροφο.

Γ: Να κατέβουν όλοι σε δύο ακριβώς ορόφους.

6. Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \chi & 4 & \chi \\ 0 & 1 & \chi \end{vmatrix}$, $0 \le \chi \le 6$.

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση χ–3=3ημθ, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{f(\chi)}\,d\chi$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $\psi = \tau o\xi \varepsilon \varphi 3\chi \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{(3\chi)'}{1+(3\chi)^2} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{3}{1+9\chi^2}$

2. $L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\chi}\eta\mu\chi + \chi}{\sigma\upsilon\nu\chi + 2\chi - 1} = \frac{e^0 \cdot \eta\mu 0 + 0}{\sigma\upsilon\nu 0 + 2\cdot 0 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$ απροσδιόριστη μορφή

$$L = \lim_{\chi\to 0} \frac{(e^{\chi}\eta\mu\chi + \chi)'}{(\sigma\upsilon\nu\chi + 2\chi - 1)'} = \lim_{\chi\to 0} \frac{e^{\chi}\eta\mu\chi + e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi + 1}{-\eta\mu\chi + 2} = \frac{e^0\eta\mu 0 + e^0\sigma\upsilon\nu 0 + 1}{-\eta\mu o + 2} = \frac{2}{2} = 1$$

3. *τιμή αγοράς* *τιμή πώλησης*

100 *108*

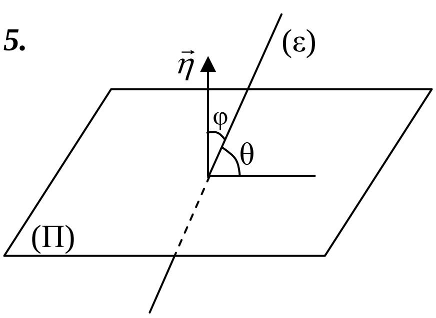
χ ; *37800* $\chi = \frac{37800 \cdot 100}{108} \Rightarrow \chi = £35000$

Το οικόπεδο αγοράστηκε ***£35 000***

4. $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + \frac{d\psi}{d\psi} - 6\psi = 0$ *Βοηθητική εξίσωση:* $m^2+m-6=0 \Rightarrow (m+3)(m-2)=0 \Rightarrow$

$m_1 = -3$, $m_2 = 2$. *Γενική Λύση:* $\psi = A\cdot e^{-3\chi} + B\cdot e^{2\chi}$

5.



(ε) : $\frac{\chi+3}{2} = \frac{\psi-1}{2} = z \Rightarrow \frac{\chi+3}{2} = \frac{\psi-1}{2} = \frac{z}{1}$

$\Rightarrow$ (ε) // $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

(Π): 5χ+4ψ-3z+2=0 $\Rightarrow$ (Π) $\perp$ $\vec{\eta} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + \Gamma_1\cdot\Gamma_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{2\cdot 5 + 2\cdot 4 + 1\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{5^2+4^2+(-3)^2}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\cancel{15}\,5}{\cancel{3}\cdot\sqrt{50}} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45° \Rightarrow \theta = 90° - \varphi \Rightarrow \theta = 90° - 45° \Rightarrow \boldsymbol{\theta = 45°}$$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *και* $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$

(α) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(β) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3\cdot 9 + 1\cdot 1 & 3\cdot 8 + 1\cdot 11 \\ -1\cdot 9 + 2\cdot 1 & -1\cdot 8 + 2\cdot 11 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 28 & 35 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\left(\chi + \frac{\alpha}{\chi}\right)^{10} \Rightarrow T_{\kappa+1} = \binom{10}{\kappa}\chi^{10-\kappa}\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)^{\kappa} = \binom{10}{\kappa}\cdot\chi^{10-\kappa}\cdot\frac{\alpha^{\kappa}}{\chi^{\kappa}} = \binom{10}{\kappa}\cdot\alpha^{\kappa}\cdot\chi^{10-2\kappa} \Rightarrow$

(i) $10 - 2\kappa = 6 \Rightarrow 2\kappa = 4 \Rightarrow \kappa = 2 \Rightarrow T_3 = \binom{10}{2}\cdot a^2\cdot\chi^6 \Rightarrow T_3 = 45\alpha^2\chi^6$

(ii) $10 - 2\kappa = 8 \Rightarrow 2\kappa = 2 \Rightarrow \kappa = 1 \Rightarrow T_2 = \binom{10}{1}\cdot\alpha\cdot\chi^8 \Rightarrow T_2 = 10\cdot\alpha\cdot\chi^8$

$45\alpha^2 = 9\cdot 10\alpha \Rightarrow 45\alpha^2 - 90\alpha = 0 \Rightarrow 45\alpha(\alpha-2) = 0 \Rightarrow$ **$\underline{\alpha = 2}$** *ή* $\alpha = 0$ *απορρίπτεται.*

8.

χ_i	f_i	$\chi_i \cdot f_i$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$f_i(\chi_i - \overline{\chi})^2$
3	2	$3\cdot 2 = 6$	$(3-8)^2 = 25$	$2\cdot 25 = 50$
5	5	25	$(5-8)^2=9$	45
7	10	70	$(7-8)^2=1$	10
9	6	54	$(9-8)^2=1$	6
11	4	44	$(11-8)^2=9$	36
13	2	26	$(13-8)^2=25$	50
15	1	15	$(15-8)^2=49$	49
	$\Sigma f_i = 30$	$\sum f_i\chi_i = 240$		$\sum f_i(\chi_i - \overline{\chi})^2 = 246$

(α) $\overline{\chi} = \frac{\sum f_i\chi_i}{\sum f_i} \Rightarrow \overline{\chi} = \frac{240}{30} \Rightarrow$ **$\overline{\chi} = 8$**

(β) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(\chi_i - \overline{\chi})^2}{\sum f_i}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{246}{30}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{8{,}2} \Rightarrow$ **$\sigma = 2{,}86$**

9. (α) 3, 4, 5, … Α.Π. $\beta_1=3$, $\delta = 1 \Rightarrow \beta_\kappa=\beta_1+(\kappa-1)\cdot\delta \Rightarrow \beta_\kappa=3+(\kappa-1)\cdot 1 \Rightarrow \beta_\kappa=\kappa+2$

4, 5, 6, … Α.Π. $\gamma_1=4$, $\delta'=1 \Rightarrow \gamma_\kappa=\gamma_1+(\kappa-1)\cdot\delta' \Rightarrow \gamma_\kappa=4+(\kappa-1)\cdot 1 \Rightarrow \beta_\kappa=\kappa+3$

Άρα ο γενικός όρος είναι $\alpha_\kappa = \dfrac{1}{(\kappa+2)(\kappa+3)}$

(β) $\dfrac{1}{(\kappa+2)(\kappa+3)} \equiv \dfrac{A}{\kappa+2} + \dfrac{B}{\kappa+3} \Rightarrow 1 \equiv A(\kappa+3) + B(\kappa+2) \Rightarrow$

για $\kappa=-2 \Rightarrow A=1$, *για* $\kappa=-3 \Rightarrow B=-1$, *επομένως:* $\alpha_\kappa = \dfrac{1}{(\kappa+2)\ (\kappa+3)} = \dfrac{1}{\kappa+2} - \dfrac{1}{\kappa+3}$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$\alpha_2 = \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}$$

$$\alpha_3 = \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}}$$

....

.... +

$$\alpha_{\nu-1} = \cancel{\frac{1}{\nu+1}} - \cancel{\frac{1}{\nu+2}}$$

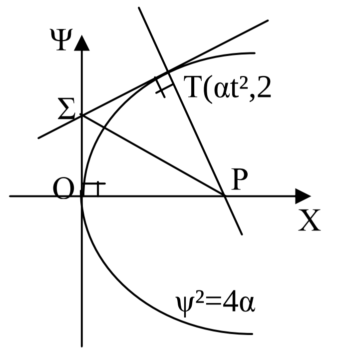
$$\alpha_\nu = \cancel{\frac{1}{\nu+2}} - \frac{1}{\nu+3}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{(\kappa+2)\ (\kappa+3)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{\nu+3}$$

(γ) $$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{(\kappa+2)(\kappa+3)} = \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\nu+3}\right) = \frac{1}{3}$$

10. *Η εξίσωση της εφαπτομένης στο Τ:* $t\psi = \chi + \alpha t^2$, *για* $\chi=0$: $t\psi = \alpha t^2 \Rightarrow \psi = \alpha t \Rightarrow \Sigma(0,\alpha t)$
Η εξίσωση της κάθετη στο Τ: $\psi + t\chi = 2\alpha t + \alpha t^3$, *για* $\psi = 0$: $\chi = 2\alpha + \alpha t^2 \Rightarrow$
$P(2\alpha+\alpha t^2, 0)$, $T(\alpha t^2, 2\alpha t)$, $\Sigma(0, \alpha t)$, $P(2\alpha+\alpha t^2, 0)$

Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους:



$$\chi_K = \frac{\chi_1 + \chi_2 + \chi_3}{3}, \qquad \psi_K = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3}{3}$$

$$\chi = \frac{\alpha t^2 + 0 + 2\alpha + \alpha t^2}{3} \qquad \psi = \frac{2\alpha t + \alpha t + 0}{3}$$

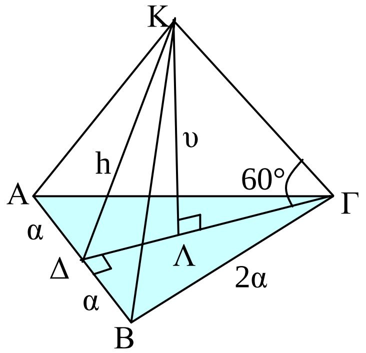
$$\left.\begin{array}{l} \chi = \dfrac{2\alpha + 2\alpha t^2}{3} \\ \psi = \alpha t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\psi}{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow 3\chi = 2\alpha + 2\cancel{\alpha} \cdot \frac{\psi^2}{\alpha^2} \Rightarrow$$

$$3\alpha\chi = 2\alpha^2 + 2\psi^2 \Rightarrow 2\psi^2 = 3\alpha\chi - 2\alpha^2 \Rightarrow \psi^2 = \frac{3}{2}\alpha\chi - \alpha^2 \Rightarrow \psi^2 = \frac{3\alpha}{2}\left(\chi - \frac{2}{3}\alpha\right).$$

11. *Μεταξύ του 1 και του 6κ+2 υπάρχουν κ πολλαπλάσια του 6. Άρα* $\dfrac{\kappa}{6\kappa+2} = \dfrac{5}{31} \Rightarrow$

$31\kappa = 30\kappa + 10 \Rightarrow \kappa = 10$. Επομένως το κουτί έχει $6 \cdot 10 + 2 =$ **62 σφαίρες**

12.



$AB\Gamma$ ισόπλευρο τρίγωνο $AB=B\Gamma=\Gamma A=2\alpha$, $K\hat{\Gamma}\Delta = 60°$

Δ μέσο $AB \Rightarrow A\Delta=\Delta B=\alpha$, $\Gamma\Delta$ διάμεσος, ύψος $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$

$\overset{\Delta}{B\Gamma\Delta}$ ορθογώνιο τρίγωνο $\Rightarrow (\Gamma\Delta)^2=(2\alpha)^2-\alpha^2 \Rightarrow (\Gamma\Delta) = \alpha\sqrt{3}$

Λ κέντρο τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \Rightarrow (\Gamma\Lambda)=\frac{2}{3}(\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Gamma\Lambda)=\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}$,

$(\Delta\Lambda)=\frac{1}{3}(\Gamma\Delta) \Rightarrow (\Delta\Lambda)=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\overset{\Delta}{\Gamma K\Lambda}$ ορθογώνιο, $K\hat{\Gamma}\Lambda = 60° \Rightarrow \Gamma\hat{K}\Lambda = 30° \Rightarrow$

$(K\Gamma)=2(\Gamma\Lambda) \Rightarrow (K\Gamma)=\frac{4\alpha\sqrt{3}}{3}$.

$\overset{\Delta}{\Gamma K\Lambda}$ ορθογώνιο, $\Rightarrow \varepsilon\varphi 60° = \frac{K\Lambda}{\Lambda\Gamma} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{K\Lambda}{\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow K\Lambda = \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow (K\Lambda)=2\alpha$

$\overset{\Delta}{K\Lambda\Delta}$ ορθογώνιο $\Rightarrow (K\Delta)^2=(K\Lambda)^2+(\Lambda\Delta)^2 \Rightarrow (K\Delta)^2=(2\alpha)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$

$(K\Delta)^2=4\alpha^2+\frac{3a^2}{9} \Rightarrow (K\Delta)^2=\frac{39a^2}{9} \Rightarrow (K\Delta) = \frac{a\sqrt{39}}{3}$

$E_{o\lambda} = E_\Pi + E_B$, $\quad E_\Pi = \frac{\Pi_B \cdot h}{2} \Rightarrow E_\Pi = \frac{3\cdot 2a\cdot\frac{a\sqrt{39}}{3}}{2} \Rightarrow E_\Pi = a^2\sqrt{39}$,

$E_B = \frac{\chi^2\sqrt{3}}{4}$, χ πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου $\Rightarrow E_B = \frac{4\alpha^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow E_B = \alpha^2\sqrt{3}$

$E_{o\lambda} = a^2\sqrt{39} + \alpha^2\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}\cdot E_B \cdot \upsilon \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\alpha^2\sqrt{3}\cdot(2a) \Rightarrow V = \frac{2\alpha^3\sqrt{3}}{3}$

13. $\chi+1=2\varepsilon\varphi\theta \Rightarrow d\chi = 2\,\tau\varepsilon\mu^2\theta \cdot d\theta$, $\qquad \chi^2+2\chi+5 = \chi^2+2\chi+1+4 = (\chi+1)^2+4$

$$\int\frac{d\chi}{(\chi^2+2\chi+5)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{d\chi}{\left[(\chi+1)^2+4\right]^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{2\tau\varepsilon\mu^2\theta\, d\theta}{(4\varepsilon\phi^2\theta+4)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{2\tau\varepsilon\mu^2\theta\, d\theta}{\left[4(\varepsilon\phi^2\theta+1)\right]^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{2\tau\varepsilon\mu^2\theta\, d\theta}{4^{\frac{3}{2}}(\tau\varepsilon\mu^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int\frac{2\tau\varepsilon\mu^2\theta\, d\theta}{8\tau\varepsilon\mu^3\theta} = \frac{1}{4}\int\frac{d\theta}{\tau\varepsilon\mu\theta} = \frac{1}{4}\int\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\eta\mu\theta + c = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon\phi\theta}{\sqrt{1+\varepsilon\phi^2\theta}} + c$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\frac{\chi+1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\chi+1}{2}\right)^2}} + c = \frac{\chi+1}{4\sqrt{\chi^2+2\chi+5}} + c$$

14. *Έστω η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι* $\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0$

Ο κύκλος περνά από το σημείο (4,2) και (1,1)

$(4,2) \Rightarrow \chi=4,\ \psi=2 \ \Rightarrow\ 4^2+2^2+2\cdot g\cdot 4+2\cdot f\cdot 2+c=0 \Rightarrow 8g+4f+c=-20 \quad (1)$

$(1,1) \Rightarrow \chi=1, \psi=1 \Rightarrow 1^2+1^2+2\cdot g\cdot 1+2\cdot f\cdot 1+c=0 \Rightarrow 2g+2f+c-2 \Rightarrow 2(g+f)+c=-2 \quad (2)$

Ο κύκλος $\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0$ *εφάπτεται της ευθείας* $\psi=\chi \Rightarrow$ *η λύση του συστήματος των εξισώσεων τους έχει μοναδική λύση δηλ.* $\Delta=0$

$$\left.\begin{array}{l}\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\chi+\psi=0\\ \psi=\chi\end{array}\right\} \Rightarrow \chi^2+\chi^2+2g\chi+2f\chi+c=0 \Rightarrow$$

$$2\chi^2+2(g+f)\chi+c=0 \overset{\Delta=0}{\Rightarrow} [2(g+f)]^2-4\cdot 2\cdot c=0 \Rightarrow 4(g+f)^2-4\cdot 2c=0 \Rightarrow (g+f)^2-2c=0 \quad (3)$$

Άρα έχουμε το σύστημα των εξισώσεων $(1) \wedge (2) \wedge (3)$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 8g+4f+c=-20\\ (2) & 2(g+f)+c=-2 \Rightarrow\\ & g+f=-\dfrac{c+2}{2}\\ (3) & (g+f)^2-2c=0\end{array}\right\} \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \left(-\frac{c+2}{2}\right)^2-2c=0 \Rightarrow \frac{(c+2)^2}{4}=2c \Rightarrow$$

$c^2+4c+4=8c \Rightarrow c^2-4c+4=0 \Rightarrow (c-2)^2=0 \Rightarrow c=2$

$(1) \Rightarrow 8g+4f+2=-20 \Rightarrow 4g+2f=-11, \quad (2) \Rightarrow 2(g+f)+2=-2 \Rightarrow 2g+2f=-4$

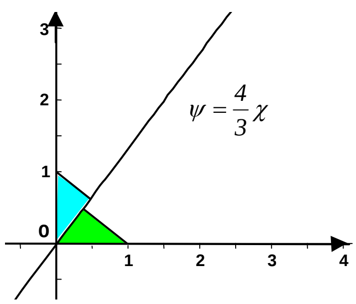
$$\left.\begin{array}{l}4g+2f=-11\\ 2g+2g=-4\end{array}\right\} \Rightarrow g=-\frac{7}{2},\quad f=\frac{3}{2}$$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι : $\boldsymbol{\chi^2+\psi^2-7\chi+3\psi+2=0}$ **.**

15. $T:\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ *τότε* $\dfrac{\delta}{\gamma-1}=-\dfrac{3}{4} \Rightarrow 4\delta=-\gamma+3$

αλλά $\delta=\dfrac{4}{3}\gamma \Rightarrow \dfrac{16}{3}\gamma=-3\gamma+3 \Rightarrow \dfrac{25}{3}\gamma=3 \Rightarrow \gamma=\dfrac{9}{25}$

$\delta=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{9}{25} \Rightarrow \delta=\dfrac{12}{25}$ *άρα* $T:\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{9}{25}\\ \frac{12}{25}\end{pmatrix}$



$T:\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ *τότε* $\dfrac{\beta-1}{\alpha}=-\dfrac{3}{4} \Rightarrow 4\beta-4=-3\alpha$, *άλλα* $\beta=\dfrac{4}{3}\alpha \Rightarrow 4\cdot\dfrac{4}{3}\alpha-4+3\alpha=0$

$\Rightarrow 25\alpha=12 \Rightarrow a=\dfrac{12}{25} \Rightarrow \beta=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{12}{25} \Rightarrow \beta=\dfrac{16}{25}$, *άρα* $T:\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{12}{25}\\ \frac{16}{25}\end{pmatrix}$

Άρα $T=\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{pmatrix}$

<u>Προτεινόμενες λύσεις για τις τρεις διαφορετικές ασκήσεις για το Ενιαίο Λύκειο</u>

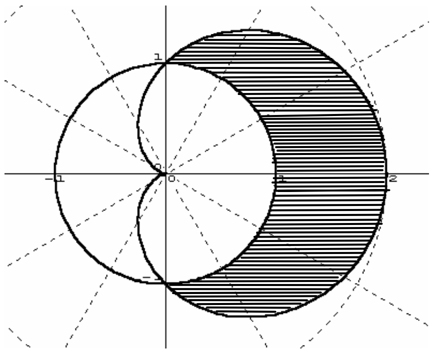
7. $f(\chi)=\chi^3-\chi-1 \quad \chi\in\mathbb{R}$, *συνεχής συνάρτηση* $\forall\chi\in\mathbb{R}$, $\Rightarrow f'(\chi)=3\chi^2-1$

$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^3-1-1=-1<0 \\ f(2)=2^3-2-1=5>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ *f(1)·f(2)<0⇒υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [1,2]*

$$\chi_1=\chi_0-\frac{f(\chi_0)}{f'(\chi_0)}=1,2-\frac{f(1,2)}{f'(1,2)}=1,2-\frac{-0,472}{3,32}=1,2+1,1422=1,3422 \simeq 1,342$$

9. $|z-1-2i|=|z-4-i| \Rightarrow |\chi+\psi i-1-2i|=|\chi+\psi i-4+i| \Rightarrow$
$|\chi-1+(\psi-2)i|=|\chi-4+(\psi+1)i| \Rightarrow (\chi-1)^2+(\psi-2)^2=(\chi-4)^2+(\psi+1)^2 \Rightarrow$
$\chi^2-2\chi+1+\psi^2-4\psi+4=\chi^2-8\chi+16+\psi^2+2\psi+1 \Rightarrow 6\chi-6\psi=12 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\chi-\psi=2}$

13. (α) $\left.\begin{array}{l} \rho=1+\sigma\upsilon\nu\theta \\ \rho=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\sigma\upsilon\nu\theta=1$



$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2},\quad \theta=\frac{3\pi}{2}$$

Σημεία τομής: $A\left(1,\frac{\pi}{2}\right),\quad B\left(1,\frac{3\pi}{2}\right)$

$$(\beta)\ E=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2\,d\theta-\frac{\pi}{2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)d\theta-\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{1+\sigma\upsilon\nu2\theta}{2}\right)d\theta-\frac{\pi}{2}=$$

$$=\left[\theta+2\eta\mu\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\eta\mu2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}=\left[\frac{3\theta}{2}+2\eta\mu\theta+\frac{1}{4}\eta\mu2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{3\pi}{4}+2-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+2=\frac{\pi+8}{4}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. α) $\psi=(\chi-2)\cdot e^{\chi}$ *π.ο.* $\chi\in \mathbf{R}$

για $\chi=0 \Rightarrow \psi=-2$ *άρα τέμνει τον άξονα των ψ στο (0,–2)*

για $\psi=0 \Rightarrow \chi=2$ *άρα τέμνει τον άξονα των χ στο (2,0)*

$$\frac{d\psi}{d\chi}=e^{\chi}+(\chi-2)e^{\chi}=(\chi-1)e^{\chi}$$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow (\chi-1)e^{\chi}=0 \Rightarrow \chi=1,\quad (e^{\chi}\neq 0)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=e^{\chi}+(\chi-1)e^{\chi}=\chi e^{\chi}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=0 \Rightarrow \chi e^{\chi}=0 \Rightarrow \chi=0,\quad (e^{\chi}\neq 0)$$

χ		1	
$\frac{d\psi}{d\chi}$	–	0	+
ψ	↘	min (1,–e)	↗

χ		0	
$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}$	–	0	+
ψ	∩	σ.κ. (0,–2)	∪

$$\lim_{\chi\to-\infty}\left[(\chi-2)e^{\chi}\right]=(-\infty\cdot 0)=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\chi-2}{e^{-\chi}}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{(\chi-2)'}{(e^{-\chi})'}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{1}{-e^{-\chi}}=\frac{1}{-\infty}=0^{-}$$

άρα η ευθεία ψ =0 δηλαδή ο άξονας των χ είναι Ο.Α. στην περιοχή του $-\infty$

$$\lim_{\chi\to\infty}\left[\ (\chi-2)\ \ e^{\chi}\ \ \right]=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$ *άρα δεν υπάρχει Ο.Α. στην περιοχή του* $+\infty$

(β) Σημείο τομής των καμπυλών

$$\left.\begin{aligned}\psi&=(\chi-2)\cdot e^{\chi}\\ \psi&=e^{\chi}\end{aligned}\right\}\Rightarrow (\chi-2)\cdot e^{\chi}=e^{\chi}\ \Rightarrow e^{\chi}\cdot(\chi-3)=0\Rightarrow$$

$\chi = 3,\ \psi = e^3 \Rightarrow$ *Σημείο τομής* $(3,e^3)$

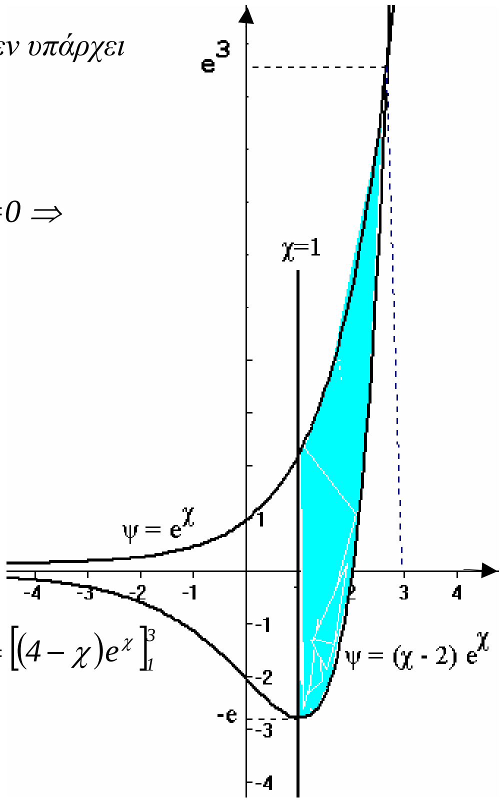
$$E=\int_1^3\left[e^{\chi}-(\chi-2)e^{\chi}\right]d\chi=\int_1^3(1-\chi+2)e^{\chi}\ d\chi$$

$$=\int_1^3(3-\chi)e^{\chi}\ d\chi=\int_1^3(3-\chi)d\left(e^{\chi}\right)=$$

$$\left[(3-\chi)e^{\chi}\right]_1^3-\int_1^3 e^{\chi}\ d(3-\chi)=$$

$$\left[(3-\chi)e^{\chi}\right]_1^3-\int_1^3 e^{\chi}\ d\chi\quad=\left[(3-\chi)e^{\chi}+e^{\chi}\right]_1^3=\left[(4-\chi)e^{\chi}\right]_1^3$$

$$=\ e^3-3e$$



2. $\dfrac{1}{\psi^5}\cdot\dfrac{d\psi}{d\chi}-\dfrac{2}{2\psi^4\chi}=5\chi^2\quad (i)$

(α) $\omega=\dfrac{1}{\psi^4}\ \Rightarrow\ \dfrac{d\omega}{d\chi}=\dfrac{d\omega}{d\psi}\cdot\dfrac{d\psi}{d\chi}\ \Rightarrow\ \dfrac{d\omega}{d\chi}=-\dfrac{4}{\psi^5}\cdot\dfrac{d\psi}{d\chi}\Rightarrow\ \dfrac{1}{\psi^5}\cdot\dfrac{d\psi}{d\chi}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{d\omega}{d\chi}$

Αντικαθιστώ στην (i) και έχω: $-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{d\omega}{d\chi}-\dfrac{1}{2\chi}\omega=5\chi^2\Rightarrow\dfrac{d\omega}{d\chi}+\dfrac{2}{\chi}\omega=-20\chi^2$

$$\mathrm{I}=e^{\int\frac{2}{\chi}d\chi}=e^{2\ln\chi}=e^{\ln\chi^2}=\chi^2$$

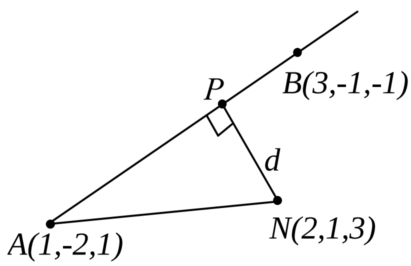
Άρα $\chi^2\cdot\dfrac{d\omega}{d\chi}+2\chi\omega=-20\chi^4\Rightarrow\ \dfrac{d}{d\chi}\left(\chi^2\omega\right)=-20\chi^4\Rightarrow \chi^2\omega=-4\chi^5+c\Rightarrow$

$$\omega=-4\chi^3+\frac{c}{\chi^2},\quad \frac{1}{\psi^4}=-4\chi^3+\frac{c}{\chi^2}\Rightarrow\boxed{\psi^4=\frac{\chi^2}{c-4\chi^5}}$$

(β) $\psi=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow$ *όταν* $\chi=1\Rightarrow\ \dfrac{1}{c-4}=\dfrac{1}{16}\ \Rightarrow c-4=16\ \Rightarrow c=20$

Άρα η ειδική λύση της (i) είναι: $\boxed{\psi^4=\dfrac{\chi^2}{20-4\chi^5}}$

3. *(α) A(1,-2,1) B(3,-1,-1) N(2,1,3)*



$\overrightarrow{OA}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\overrightarrow{ON}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\right)-\left(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right) \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

Άρα η διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $\vec{r}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB} \Rightarrow$

(ε) $\vec{r}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}+\lambda\left(2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right)$

(β) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})-(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AN}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}}$

$$(\varepsilon)\ //\ \vec{\beta}=\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AN}\times\vec{\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-8\vec{i}+6\vec{j}-5\vec{k}$$

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{AN}\times\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\beta}\right|}=\frac{\sqrt{64+36+25}}{3}=\frac{\sqrt{125}}{3}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

(γ) (ε): $\vec{r}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}+\lambda\left(2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{r}=(1+2\lambda)\vec{i}+(-2+\lambda)\vec{j}+(1-2\lambda)\vec{k}$

(ζ): $\vec{r}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}+\mu\left(-5\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{r}=(2-5\mu)\vec{i}+(3+2\mu)\vec{j}+(-2+3\mu)\vec{k}$

$$\left.\begin{aligned}1+2\lambda&=2-5\mu\\ \Rightarrow\ -2+\lambda&=3+2\mu\\ 1-2\lambda&=-2+3\mu\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}2\lambda+5\mu&=1 \quad (1)\\ \lambda-2\mu&=5 \quad (2)\\ -2\lambda-3\mu&=-3 \quad (3)\end{aligned} \Rightarrow \quad \begin{aligned}&(1)+(3) \Rightarrow 2\mu=-2 \Rightarrow \mu=-1\\ &\Rightarrow 2\lambda=6 \Rightarrow \lambda=3\end{aligned}$$

Οι τιμές αυτές επαληθεύουν την (2) Άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό και οι δύο ευθείες τέμνονται σε σημείο Η.

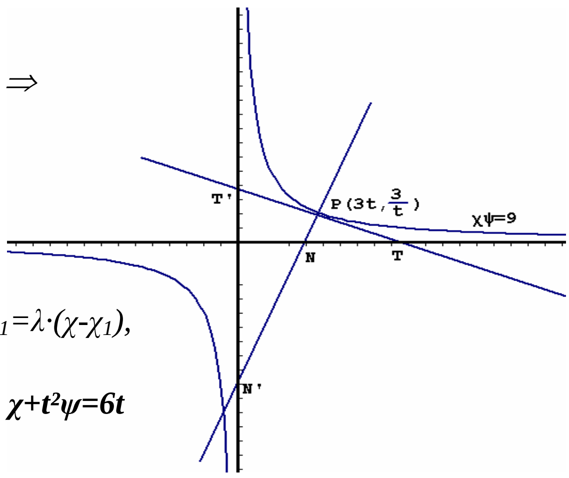
$\lambda=3 \Rightarrow \vec{r}_H=(1+2\cdot3)\vec{i}+(-2+3)\vec{j}+(1-2\cdot3)\vec{k} \Rightarrow \vec{r}_H=7\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k} \Rightarrow$ **Η(7,1,-5)**

(δ) ευθεία (ε): $\vec{r}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}+\lambda\left(2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right)$, (ε) // (Π) $\Rightarrow$ (Π) // $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

ευθεία (θ): $\chi=\psi=z \Rightarrow \frac{\chi}{1}=\frac{\psi}{1}=\frac{z}{1}$ (θ) $\in$ (Π) $\Rightarrow$ (Π) // $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ και περνά από το σημείο Ο(0,0,0) $\in$ (θ) $\in$ (Π) . Άρα η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου είναι :

$$\begin{vmatrix}\chi & \psi & z\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -3\chi+4\psi-z=0 \Rightarrow \boldsymbol{3\chi-4\psi+z=0}$$

4. (α) $\chi\psi=9 \Rightarrow \psi+\chi\cdot\frac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}=-\frac{\psi}{\chi} \Rightarrow$



$$\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{\psi}{\chi}\Big|_{\substack{\chi=3t\\ \psi=\frac{3}{t}}} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{\frac{3}{t}}{3t} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{1}{t^2}$$

Εφαπτομένη : $P\left(3t, \frac{3}{t}\right)$, $\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{1}{t^2}$, $\psi-\psi_1=\lambda\cdot(\chi-\chi_1)$,

$\Rightarrow \psi-\frac{3}{t}=-\frac{1}{t^2}\cdot(\chi-3t) \Rightarrow t^2\psi-3t=-\chi+3t \Rightarrow$ $\boldsymbol{\chi+t^2\psi=6t}$

(β) Κάθετη: $P\left(3t, \frac{3}{t}\right)$, $\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\frac{1}{t^2} \Rightarrow \lambda_{\kappa\alpha\theta}=t^2 \Rightarrow$

$\psi - \frac{3}{t} = t^2\cdot(\chi-3t) \Rightarrow t\psi-3 = t^3\chi-3t^4 \Rightarrow$ $\boldsymbol{t\psi = t^3\chi - 3t^4 + 3}$

(γ) εφ/νη: $\chi+t^2\psi=6t$ για $\psi=0 \Rightarrow \chi = 6t \Rightarrow T(6t,0)$, $\chi=0 \Rightarrow \psi=\frac{6}{t} \Rightarrow T'(0, \frac{6}{t})$

κάθετη: $t\psi = t^3\chi - 3t^4 + 3$,

για $\psi=0 \Rightarrow \chi = 3t - \frac{3}{t^3} \Rightarrow N(3t - \frac{3}{t^3},0)$, $\chi=0 \Rightarrow \psi= \frac{3}{t}-3t^3 \Rightarrow N'(0, \frac{3}{t}-3t^3)$

$(NT) = |\chi_T - \chi_N| = |6t - 3t + \frac{3}{t^3}| = |3t + \frac{3}{t^3}|$

$(N'T') = |\psi_{T'} - \psi_{N'}| = |\frac{6}{t} - \frac{3}{t} + 3t^3| = |\frac{3}{t} + 3t^3|$

$E=\frac{1}{2}\cdot|NT|\cdot|\psi_P| \Rightarrow E=\frac{1}{2}\cdot|3t + \frac{3}{t^3}|\cdot|\frac{3}{t}| \Rightarrow E=\frac{1}{2}|9+\frac{9}{t^4}| \Rightarrow E = \frac{9(t^4+1)}{2t^4}$

$E'=\frac{1}{2}\cdot|N'T'|\cdot|\chi_P| \Rightarrow E'=\frac{1}{2}\cdot|\frac{3}{t} + 3t^3|\cdot|3t| \Rightarrow E'=\frac{1}{2}\cdot|9+9t^4| \Rightarrow E'=\frac{9(t^4+1)}{2}$

$$\frac{1}{E}+\frac{1}{E'}=\frac{2t^4}{9(t^4+1)}+\frac{2}{9(t^4+1)}=\frac{2\cancel{(t^4+1)}}{9\cancel{(t^4+1)}}=\frac{2}{9} \Rightarrow \frac{1}{E}+\frac{1}{E'}=\frac{2}{9}$$

5. $P(A)=\frac{\Delta_6^{10}}{\delta_6^{10}}=\frac{\frac{10!}{4!}}{10^6}=\frac{151200}{1000000}=\frac{189}{1250}$, $P(B)=\frac{10}{10^6}=\frac{1}{10^5}=\frac{1}{100000}$

$$P(\Gamma)=\frac{\binom{10}{2}\cdot(\delta_6^2-2)}{10^6}=\frac{45\cdot 62}{10^6}=\frac{2790}{1000000}=\frac{279}{100000}$$

(-2 όλοι στον ένα ή όλοι στον άλλο)

6. $f(\chi)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \chi & 4 & \chi \\ 0 & 1 & \chi \end{vmatrix} = 2\cdot(4\chi-\chi) - 1\cdot\chi^2 = 6\chi - \chi^2$

$$\int\sqrt{f(x)}\,d\chi = \int\sqrt{6\chi-\chi^2}\,d\chi = \int\sqrt{9-(\chi-3)^2}\,d\chi$$

$$= \int\sqrt{9-9\eta\mu^2\theta}\cdot 3\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta = 9\int\sigma\upsilon\nu^2\theta\,d\theta =$$

$$= 9\int\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}d\theta = \frac{9}{2}\int(1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left(\theta+\frac{\eta\mu 2\theta}{2}\right)+c = \frac{9}{2}\cdot\theta+\frac{9}{2}\cdot\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+c$$

$$=\frac{9}{2}\tau o\xi\eta\mu\frac{\chi-3}{3}+\frac{9}{2}\cdot\frac{\chi-3}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{(\chi-3)^2}{9}}+c$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\tau o\xi\eta\mu\frac{\chi-3}{3}+\frac{\chi-3}{2}\sqrt{6\chi-\chi^2}+c$$

$6\chi - \chi^2 = -(\chi^2 - 6\chi + 9) + 9$

$= 9 - (\chi-3)^2$

Θέτω $\chi-3 = 3\eta\mu\theta \Rightarrow$

$d\chi = \sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta$

$\eta\mu\theta = \frac{\chi-3}{3}$,

$\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1-\eta\mu^2\theta}$

<u>ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ</u>

<u>ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ (6-ΩΡΟ)</u>

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u> Ιούνιος 2000

Χρόνος : 2 ώρες και 30 λεπτά

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

Να απαντήσετε μόνο σε 12 από τις 15 ερωτήσεις

1. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2\chi+1}\, d\chi$.

2. Κάποιος αγόρασε ένα αυτοκίνητο από την Αγγλία και πλήρωσε £10500 Κυπριακές λίρες. Όταν το έφερε στην Κύπρο πλήρωσε φόρο εισαγωγής που 55% πάνω στην τιμή αγοράς και επί πλέον φόρο προστιθέμενης αξίας (Φ.Π.Α), που ήταν 8% πάνω στην τιμή αγοράς και τον φόρο εισαγωγής μαζί. Πόσα του στοίχισε συνολικά το αυτοκίνητο;

3. Να υπολογίσετε το $\lim_{\chi\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{3\chi^2}$.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi=\chi^2$ και $\psi=-\chi^2+\chi$.

5. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $\chi^2+\psi^2-4\chi+6\psi-12=0$. Να βρείτε :
(α) την ακτίνα του κύκλου και τις συντεταγμένες του κέντρου του.
(β) την εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο του (5,1).

6. Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $\psi=\chi^3-3\chi$.

7. Αν $\psi=2-3\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\chi=3-2\eta\mu\theta$ να βρείτε τις $\frac{d\psi}{d\chi}$ και $\frac{d^2\psi}{d\chi^2}$.

8. Σε ένα ράφι υπάρχουν 20 λαμπτήρες από τους οποίους οι 5 είναι ελαττωματικοί. Αν πάρω στην τύχη 3 λαμπτήρες, ποια η πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α : και οι τρεις λαμπτήρες να μην είναι ελαττωματικοί.
Β : τουλάχιστον ένας λαμπτήρας να μην είναι ελαττωματικός .
(Οι απαντήσεις μπορούν να δοθούν με συνδυασμούς ή με παραγοντική μορφή).

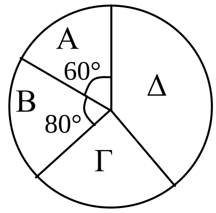
9. Αν $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, να δείξετε ότι $\mathbf{A}^2 - 6\cdot\mathbf{A} + 11\cdot\mathbf{I} = (\mathbf{O})$, όπου **Ι** είναι μοναδιαίος πίνακας 2×2 και $(\mathbf{O}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Δίδεται η διαφορική εξίσωση $\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\chi\psi}{\chi^2+1}$. Να βρείτε τη γενική λύση της.

11. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_2^3 \frac{d\chi}{\chi^2(\chi-1)}$

12. Να δείξετε ότι $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2+1 & \beta^2+1 & \gamma^2+1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

13. Το κυκλικό διάγραμμα δείχνει την ημερήσια ποσότητα γάλακτος που παραδίδουν 4 χωριά σε γειτονικό τυροκομείο. Το χωριό Δ παραδίδει τριπλάσια ποσότητα από το χωριό Γ. Αν και τα τέσσερα χωριά παραδίδουν 2520 κιλά ημερησίως, να υπολογίσετε πόσα κιλά παραδίδει το καθένα.



14. Αν $\psi e^{\chi} = \chi^2 + \psi^2$ να βρείτε τη $\frac{d\psi}{d\chi}$ και τη τιμή της $\frac{d\psi}{d\chi}$ στο σημείο (0,1) .

15. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο 72 cm^3 και το ύψος της ισούται με την πλευρά της βάσης της. Να δείξετε ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της ισούται με $36\sqrt{5}$ cm^2.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να απαντήσετε μόνο σε 4 από τις 6 ερωτήσεις.

1. Η καμπύλη f(χ) = $\frac{\chi}{\chi^2+\lambda}$ έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο Α με τετμημένη χ=-1.

Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης είναι f(χ) = $\frac{\chi}{\chi^2+1}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των ακρότατων της καμπύλης και να τα χαρακτηρίσετε. Επίσης να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων καμπής της και την εξίσωση της ασύμπτωτης της καμπύλης. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της καμπύλης.

2. Εργοστάσιο κατασκευάζει δοχεία σχήματος ορθού κυλίνδρου με όγκο 16π cm^3.
(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας Ε ενός δοχείου δίνεται από τον τύπο Ε = $2\pi R^2 + \frac{32\pi}{R}$
(β) Να υπολογίσετε την ακτίνα βάσης και το ύψος των δοχείων ώστε να έχουν την ελάχιστη δυνατή ολική επιφάνεια.

3. (α) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\chi^2 \frac{d\psi}{d\chi} + 4\chi\psi = \chi + 1$.

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \chi^2 \,\eta\mu 2\chi \, d\chi$.

4. (α) Α και Β είναι τα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 2P(A')$, $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cup B) = \frac{29}{30}$.
Να υπολογίσετε τις τιμές των P(A), $P(A \cap B)$ και $P(A/B)$.

(β) Μια τετραμελής επιτροπή θα επιλεγεί από 5 άνδρες και 3 γυναίκες. Να υπολογίσετε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορεί να συγκροτηθεί η επιτροπή αν πρέπει σ' αυτή να συμμετέχουν
1. ακριβώς 2 γυναίκες. 2. τουλάχιστο 2 άνδρες.

5. Δίδεται η ισοσκελής υπερβολή χψ=c^2. Η εφαπτομένη προς την υπερβολή στο σημείο της Α(ct,c/t) τέμνει τους άξονες χχ΄ και ψψ΄ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι τα μήκη των ΟΒ και ΟΓ έχουν γινόμενο ανεξάρτητο του t (όπου Ο η αρχή των αξόνων).

6. Δίνονται οι παραβολές $(\Pi_1) : \psi^2 = 2\rho\chi$ και $(\Pi_2) : \chi^2 = 2\rho\psi$, όπου ρ>0 .
(α) Να δείξετε ότι οι παραβολές αυτές τέμνονται μόνο σε δύο σημεία, από τα οποία το ένα είναι η αρχή των αξόνων και το άλλο το σημείο Β(2ρ,2ρ).
(β) Η εφαπτομένη της Π_1 στο σημείο Β τέμνει τον άξονα χχ΄ στο σημείο Α και η εφαπτομένη της Π_2 στο σημείο Β τέμνει το άξονα ψψ΄ στο σημείο Γ. Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α και Γ και να δείξετε ότι βρίσκονται στον κύκλο με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 = 4\rho^2$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2\chi+1}\, d\chi = = \frac{1}{2}\left[\ e^{2\chi+1}\ \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^1\right) = \frac{e(e-1)}{2}$

2. *Αξία* *Φόρος εισαγωγής* *Τιμή εισαγωγής*

Αξία	*Φόρος εισαγωγής*	*Τιμή εισαγωγής*
100	*55*	*155*
10500		*χ;*

$\Rightarrow \frac{100}{10500} = \frac{155}{\chi} \Rightarrow \chi = 155 \cdot 105 =$ **£16275**

Τιμή εισαγωγής	*ΦΠΑ*	*Τιμή αγοράς*
100	*8*	*108*
16275		*χ;*

$\Rightarrow \frac{100}{16275} = \frac{108}{\chi} \Rightarrow \chi = 108 \cdot \frac{16275}{100} =$ **£17577**

3. $L = \lim_{\chi \to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{3\chi^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ *απροσδιόριστη μορφή*

$L = \lim_{\chi \to 0} \frac{(1-\sigma\upsilon\nu 2\chi)'}{(3\chi^2)'} = \lim_{\chi \to 0} \frac{2\eta\mu 2\chi}{6\chi} = \left(\frac{0}{0}\right)$ *απροσδιόριστη μορφή*

$L = \lim_{\chi \to 0} \frac{(2\eta\mu 2\chi)'}{(6\chi)'} = \lim_{\chi \to 0} \frac{4\sigma\upsilon\nu 2\chi}{6} = \frac{2}{3}\sigma\upsilon\nu 0 = \frac{2}{3}$

4. $\psi=\chi^2,\ \psi=-\chi^2+\chi$

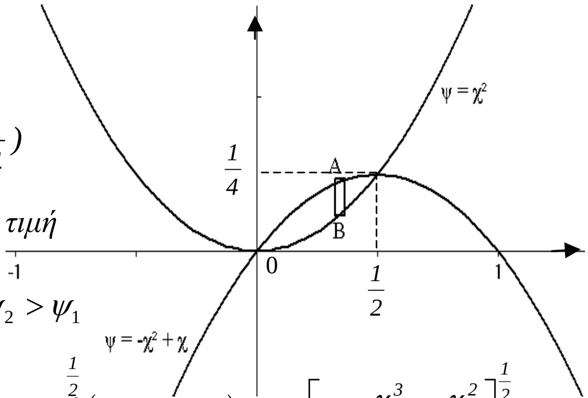
Σημεία τομής: $\chi^2 = -\chi^2+\chi \Rightarrow$

$2\chi^2 - \chi = 0 \Rightarrow \chi(2\chi-1)=0 \Rightarrow \chi=0,\ \psi=0$

$\Rightarrow (0,0)$ *ή* $\chi = \frac{1}{2}, \psi = \frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

Μεταξύ των $\chi=0$ *και* $\chi=\frac{1}{2}$ *δοκιμάζω την τιμή*

$\chi=\frac{1}{4}, \quad \psi_1\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}, \ \psi_2\left(\tfrac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} \Rightarrow \psi_2 > \psi_1$



$E = \int_0^{\frac{1}{2}} (\psi_A - \psi_B)\, d\chi = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\chi^2 + \chi - \chi^2\right) d\chi = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-2\chi^2 + \chi\right) d\chi = \left[-2\frac{\chi^3}{3} + \frac{\chi^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$$= \left[-2\cdot\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right]-\left[0\right] = \left[-\frac{2}{24}+\frac{3}{24}\right] = \frac{1}{24} \Rightarrow E = \frac{1}{24}\ \tau.\mu.$$

5. $\chi^2 + \psi^2 + 2g\chi + 2f\psi + c = 0 \quad K(-g,-f)\ ,\ R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 6\psi - 12 = 0 \Rightarrow g = -2\ ,\ f = 3\ ,\ c = -12 \Rightarrow$

$K(2,-3)\ ,\ R=\sqrt{4+9+12} \Rightarrow R = 5\ \mu.$

$\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 6\psi - 12 = 0 \Rightarrow$

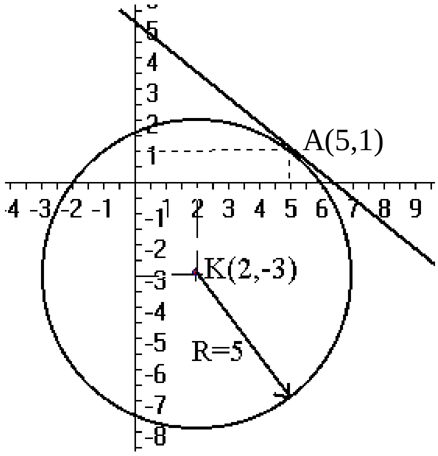
$2\chi+2\psi\dfrac{d\psi}{d\chi}-4+\dfrac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow \quad A(5,1)\ \chi=5\ ,\ \psi=1$

$2\cdot5+2\cdot1\cdot\lambda_{\varepsilon\varphi}-4+6\cdot\lambda_{\varepsilon\varphi} = 0 \Rightarrow 6+8\cdot\lambda_{\varepsilon\varphi} = 0 \Rightarrow$

$8\lambda_{\varepsilon\varphi} = -6 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = -\dfrac{3}{4}\ ,\ A(5,1)$

$\psi - \psi_1 = \lambda(\chi - \chi_1) \Rightarrow \psi - 1 = -\dfrac{3}{4}(\chi - 5) \Rightarrow$

$4\psi - 4 = -3\chi + 15 \Rightarrow$ $\boldsymbol{3\chi + 4\psi = 19}$



ή στον τύπο $\chi_1\chi + \psi_1\psi + g(\chi+\chi_1) + f(\psi+\psi_1) + c = 0$

$A(5,1) \Rightarrow \chi_1 = 5\ ,\ \psi_1 = 1 \quad g=-2\ \ f=3\ \ c=-12 \Rightarrow 5\chi+\psi-2(\chi+5)+3(\psi+1)-12 = 0 \Rightarrow$

$\boldsymbol{3\chi + 4\psi = 19}$

6. $\psi = \chi^3 - 3\chi\ ,\ \chi\in\mathbf{R} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\psi}{d\chi} = 3\chi^2 - 3\\ \dfrac{d\psi}{d\chi} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow 3\chi^2 - 3 = 0 \Rightarrow (\chi+1)(\chi-1) = 0 \Rightarrow \chi = 1 \text{ ή } \chi = -1$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = 6\chi$$

(i) $\chi = -1 \Rightarrow \dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} = -6 < 0 \Rightarrow$ η συνάρτηση $\psi = \chi^3-3\chi$ παρουσιάζει μέγιστο

$\Rightarrow \chi = -1 \Rightarrow \psi_{max} = 2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{max(-1,2)}$

(ii) $\chi=1 \Rightarrow \dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} = 6 > 0 \Rightarrow$ η συνάρτηση $\psi = \chi^3-3\chi$ παρουσιάζει ελάχιστο

$\psi_{min} = 1^3-3\cdot1 = 1-3 = -2 \Rightarrow$ $\boldsymbol{min(1,-2)}$

7. $\psi=2-3\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\theta} = 3\eta\mu\theta\ ,\quad \chi=3-2\eta\mu\theta \Rightarrow \dfrac{dx}{d\theta} = -2\sigma\upsilon\nu\theta$

$$\Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{d\psi}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\chi} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = (3\eta\mu\theta)\cdot\left(\frac{1}{-2\sigma\upsilon\nu\theta}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{d\psi}{d\chi} = -\frac{3}{2}\varepsilon\phi\theta}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{d}{d\chi}\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right) \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)\cdot\frac{d\theta}{d\chi} \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{3}{2}\varepsilon\phi\theta\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2}=\left(-\frac{3}{2}\tau\varepsilon\mu^2\theta\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu\theta}\right) \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2}=\frac{3}{4}\cdot\tau\varepsilon\mu^2\theta\cdot\tau\varepsilon\mu\theta \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=\frac{3}{4}\tau\varepsilon\mu^3\theta}$$

8. *20 λαμπτήρες, 5 ελαττωματικοί .*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}}=\frac{\frac{15!}{3!\cdot 12!}}{\frac{20!}{3!\cdot 17!}}=\frac{15!\cdot 17!}{12!\cdot 20!}=\frac{\cancel{12!}\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot \cancel{17!}}{\cancel{12!}\cdot\cancel{17!}\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{18\cdot 19\cdot 20}=\frac{91}{228}$$

P(B) = P(τουλάχιστον ένας μη ελαττωματικός) = 1 – P(όλοι ελαττωματικοί)

$$=1-\frac{\binom{5}{3}}{\binom{20}{3}}=1-\frac{1}{114}=\frac{113}{114}$$

9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad(\mathbf{O})=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+(-1)\cdot 3 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 4\\ 3\cdot 2+4\cdot 3 & 3\cdot(-1)+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 18 & 13\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+11\cdot\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 18 & 13\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 18 & 13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12 & +6\\ -18 & -24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-12+11 & -6+6+0\\ 18-18+0 & 13-24+11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

10. $\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\chi\psi}{\chi^2+1}\Rightarrow\int\frac{d\psi}{\psi}=\int\frac{\chi d\chi}{\chi^2+1}\Rightarrow \ln|\psi|=\frac{1}{2}\ln\left(\chi^2+1\right)+c\Rightarrow$

$\ln|\psi|=\ln\left(\kappa\cdot\sqrt{\chi^2+1}\right),\ \kappa>0\Rightarrow|\psi|=\kappa\cdot\sqrt{\chi^2+1}\Rightarrow\psi=\pm\kappa\sqrt{\chi^2+1}\Rightarrow\psi=\lambda\sqrt{\chi^2+1}$

11. $\frac{1}{\chi^2(\chi-1)}=\frac{\mathrm{A}}{\chi-1}+\frac{\mathrm{B}}{\chi}+\frac{\Gamma}{\chi^2}$ $\Rightarrow$ *1≡Αχ² + Βχ(χ-1) + Γ(χ-1)* $\Rightarrow$

χ=0 ⇒Γ=-1 , χ=1 ⇒ Α=1 , χ=2 ⇒1=4Α+2Β+Γ ⇒Β =–1 $\Rightarrow$

$$\int_2^3\frac{d\chi}{\chi^2(\chi-1)}=\int_2^3\left(\frac{1}{\chi-1}-\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\chi^2}\right)d\chi=\left[\ln|\chi-1|-\ln|\chi|+\frac{1}{\chi}\right]_2^3=$$

$$\ln 2-\ln 1-\ln 3+\ln 2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$$

12. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha^2+1 & \beta^2+1 & \gamma^2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma\\ \alpha^2-\beta^2 & \beta^2-\gamma^2 & \gamma^2\end{vmatrix}=$

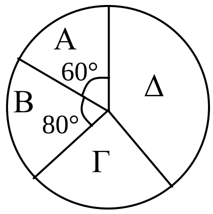
$$=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \gamma\\ \alpha+\beta & \beta+\gamma & \gamma^2\end{vmatrix}=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix}1 & 1\\ \alpha+\beta & \beta+\gamma\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)[\beta+\gamma-\alpha-\beta]=(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

13. $80°+60°+\chi+3\chi=360° \Rightarrow 4\chi=220° \Rightarrow \chi=55° \Rightarrow \hat{\Gamma}=55°$ *και* $\hat{\Delta}=165°$

Α: $\frac{60°}{360°}\cdot 2520=$ *420 κιλά* , *Β:* $\frac{80°}{360°}\cdot 2520=$ *560 κιλά*

Γ: $\frac{55°}{360°}\cdot 2520=$ *385 κιλά* , *Δ:* $\frac{165°}{360°}\cdot 2520=$ *1155 κιλά*



14. $\psi e^{\chi}=\chi^2+\psi^2 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}\cdot e^{\chi}+\psi\cdot e^{\chi}=2\chi+2\psi\frac{d\psi}{d\chi} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}(e^{\chi}-2\psi)=2\chi-\psi\cdot e^{\chi} \Rightarrow$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{2\chi-\psi\cdot e^{\chi}}{e^{\chi}-2\psi} \Rightarrow \left.\frac{d\psi}{d\chi}\right|_{\substack{\chi=0\\ \psi=1}}=\frac{2\cdot 0-1\cdot e^0}{e^0-2\cdot 1}=\frac{-1}{1-2}=\boldsymbol{1}$$

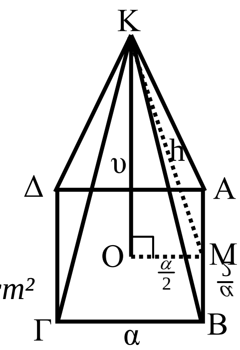
15. *$V=72cm^3$, Υψος = πλευρά βάσης = α*

$V=\frac{1}{3}E_B\cdot\upsilon \Rightarrow 72=\frac{1}{3}\cdot\alpha^2\cdot\alpha \Rightarrow \Rightarrow 216=\alpha^3 \Rightarrow \alpha=6cm.$

$\Pi_B=4\alpha \Rightarrow \Pi_B=24cm$. $\left(\overset{\Delta}{KOM}\right)$: $(KM)^2=(KO)^2+(OM)^2$

$\Rightarrow h^2=6^2+3^2 \Rightarrow h^2=36+9 \Rightarrow h^2=45 \Rightarrow h=\sqrt{45} \Rightarrow$

$h=3\sqrt{5}\,cm.$ $E_\Pi=\frac{1}{2}\cdot\Pi_B\cdot h \Rightarrow E_\Pi=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 3\cdot\sqrt{5} \Rightarrow E_\Pi=36\sqrt{5}\,cm^2$



ΜΕΡΟΣ Β΄

1. $f(\chi)=\frac{\chi}{\chi^2+\lambda} \Rightarrow f'(x)=\frac{1(\chi^2+\lambda)-2\chi\cdot\chi}{(\chi^2+\lambda)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{\lambda-\chi^2}{(\chi^2+\lambda)^2}$

$f'(1)=0 \Rightarrow 0=\frac{\lambda-1^2}{(1^2+\lambda)^2} \Rightarrow \lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow f(\chi)=\frac{\chi}{\chi^2+1}$ $\chi\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1-\chi^2}{(\chi^2+1)^2}\\ f'(\chi)&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \chi^2=1 \Rightarrow \chi=\pm 1$$

χ	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(\chi)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(\chi)$		↘		↗		↘	

Τα ακρότατα σημεία είναι: $min(-1,-\frac{1}{2})$, $max(1,\frac{1}{2})$

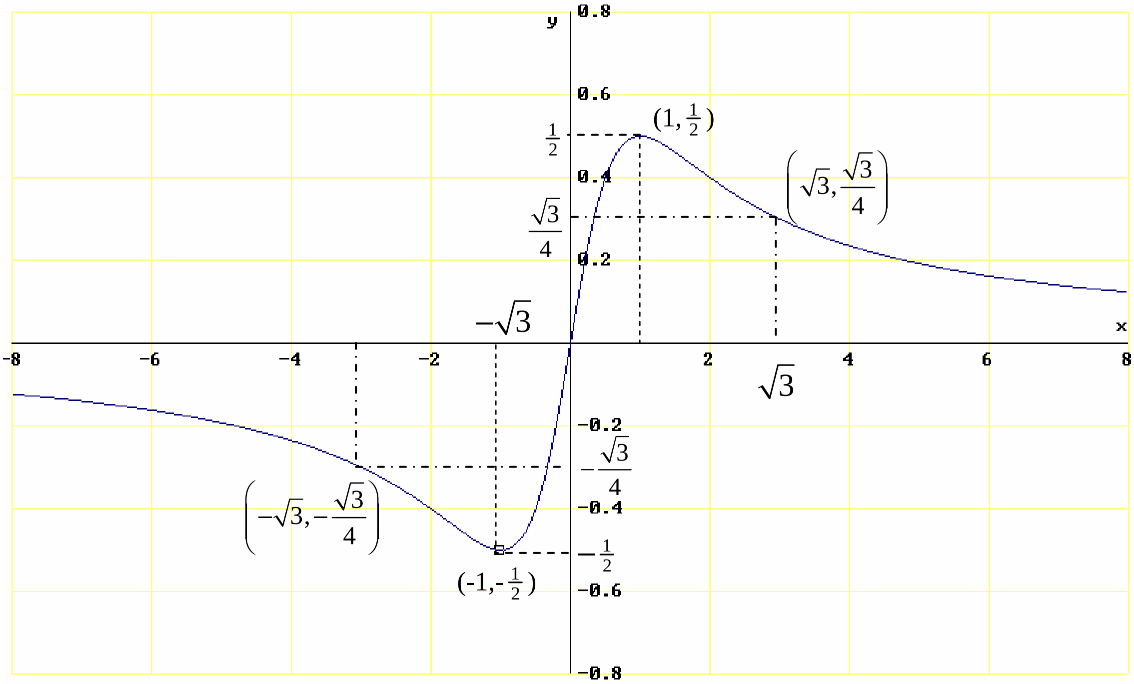
$$f'(x)=\frac{1-\chi^2}{(\chi^2+1)^2} \Rightarrow f''(\chi)=\frac{(-2\chi)\cdot\cancel{(\chi^2+1)}^2-2\cancel{(\chi^2+1)}\cdot 2\chi(1-\chi^2)}{(\chi^2+1)^{\cancel{4}\,3}} \Rightarrow$$

$$f''(\chi)=\frac{-2\chi-4\chi+2\chi^3}{(\chi^2+1)^3}\Rightarrow f''(\chi)=\frac{2\chi(\chi^2-3)}{(\chi^2+1)^3},\quad f''(\chi)=0\Rightarrow \chi=0,\ \chi=\pm\sqrt{3}$$

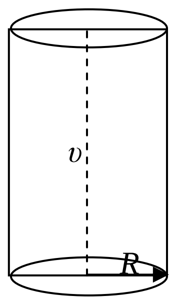
χ	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(\chi)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα τα σημεία καμπής είναι: $(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0,0)$, $(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$

Οριζόντια ασύμπτωτη: $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to-\infty}\frac{\chi}{\chi^2+1}=0^-$, $\lim\limits_{\chi\to\infty} f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to\infty}\frac{\chi}{\chi^2+1}=0^+\Rightarrow \psi=0$



2. $V = 16\pi\ cm^3 \Rightarrow \pi R^2 h = 16\pi \Rightarrow R^2 h = 16 \Rightarrow h=\frac{16}{R^2}$, $R>0,\ h>0$



$$E_{o\lambda}=2\pi R^2+2\pi Rh \Rightarrow E=2\pi R^2+2\pi R\frac{16}{R^2}\Rightarrow \boxed{E=2\pi R^2+\frac{32\pi}{R}}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dE}{dR}=4\pi R-\frac{32\pi}{R^2}\\&\frac{dE}{dR}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4\pi R-\frac{32\pi}{R^2}=0\Rightarrow 4\pi R^3-32\pi=0$$

$$\Rightarrow 4\pi R^3=32\pi\Rightarrow R^3=8\Rightarrow \boxed{R=2\,cm}$$

$\frac{dE}{dR}=4\pi R-\frac{32\pi}{R^2}\ \Rightarrow\ \frac{d^2E}{dR^2}=4\pi+\frac{64\pi}{R^3}>0\ (R>0)$ $\Rightarrow$ *Η συνάρτηση του εμβαδού παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για R = 2 cm.* $h=\frac{16}{R^2}\Rightarrow h=\frac{16}{2^2}\Rightarrow \boxed{h=4\,cm}$

3. (α) $\chi^2\frac{d\psi}{d\chi}+4\chi\psi=\chi+1\ \Rightarrow\ \frac{d\psi}{d\chi}+\frac{4}{\chi}\psi=\frac{\chi+1}{\chi^2}$ *(1) (Γραμμική Δ.Ε.)*

Παράγοντας ολοκλήρωσης: $I=e^{\int\frac{4}{\chi}d\chi}\Rightarrow I=e^{4\ln x}\Rightarrow I=e^{\ln\chi^4}\Rightarrow I=\chi^4$

$$(1) \;\Rightarrow\; \chi^4 \frac{d\psi}{d\chi} + 4\chi^3\psi = \chi^2(\chi+1) \Rightarrow \frac{d}{d\chi}(\psi\cdot\chi^4) = \chi^3 + \chi^2 \;\Rightarrow$$

$$\int d(\psi\cdot\chi^4) = \int(\chi^3+\chi^2)d\chi \;\Rightarrow\; \psi\cdot\chi^4 = \frac{\chi^4}{4} + \frac{\chi^3}{3} + c \;\Rightarrow\; \boxed{\psi = \frac{1}{4} + \frac{1}{3\chi} + \frac{c}{\chi^4}}$$

(β) $\int \chi^2\, \eta\mu 2\chi\, d\chi = \int \chi^2 d\left(-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi\right) = -\frac{1}{2}\chi^2\sigma\upsilon\nu 2\chi + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2\chi\, d(\chi^2)$

$$= -\frac{1}{2}\chi^2\sigma\upsilon\nu 2\chi + \int \sigma\upsilon\nu 2\chi\cdot\chi d\chi = -\frac{1}{2}\chi^2\sigma\upsilon\nu 2\chi + \frac{1}{2}\int \chi d(\eta\mu 2\chi)$$

$$= -\frac{1}{2}\chi^2\sigma\upsilon\nu 2\chi + \frac{1}{2}\left[\chi\cdot\eta\mu 2\chi - \int \eta\mu 2\chi d\chi\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\chi^2\sigma\upsilon\nu 2\chi + \frac{1}{2}\chi\cdot\eta\mu 2\chi + \frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu 2\chi + c$$

4. *(α)* $P(A) = 2P(A') \Rightarrow P(A = 2(1 - P(A) \Rightarrow P(A) = 2 - 2P(A) \Rightarrow P(A) =$ $\boxed{P(A) = \frac{2}{3}}$

$$P(B) = \frac{1}{2} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; P(A\cup B) = \frac{29}{30} \;\Rightarrow\; P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{29}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - P(A\cap B) = \frac{29}{30} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{29}{30} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B) = \frac{1}{5}}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \;\Rightarrow\; P(A/B) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \boxed{P(A/B) = \frac{2}{5}}$$

(β) Τετραμελής επιτροπή , 5 άνδρες και 3 γυναίκες δηλ συνολικά 8 άτομα

(i) ακριβώς 2 γυναίκες $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2} =$ ***30***

(ii) τουλάχιστον 2 άνδρες → 2 άνδρες , 2 γυναίκες ή 3 άνδρες , 1 γυναίκα ή 4 άνδρες και 0 γυναίκες. $\binom{5}{2}\binom{3}{2} + \binom{5}{3}\binom{3}{1} + \binom{3}{0}\binom{5}{4} =$***65***

5. $\chi\psi = c^2 \Rightarrow \psi = \frac{c^2}{\chi} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = -\frac{c^2}{\chi}$, $\chi = ct$, $\psi = \frac{c}{t} \Rightarrow$

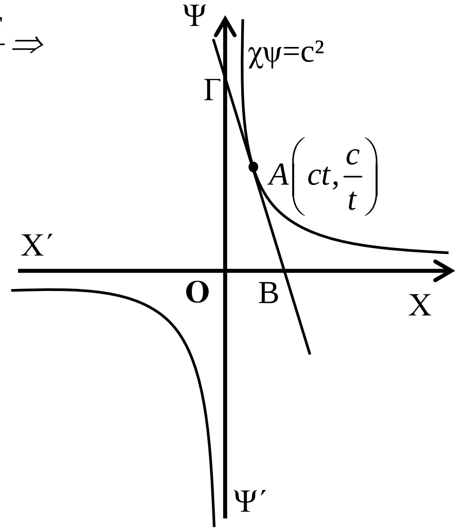
$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{1}{t^2} \;,\; A\left(ct, \frac{c}{t}\right) \Rightarrow \psi - \frac{c}{t} = -\frac{1}{t^2}(\chi - ct) \Rightarrow$$

$t^2\cdot\psi - t^2\cdot\frac{c}{t} = -\chi + ct \Rightarrow t^2\cdot\psi - c\cdot t = -\chi + ct \;\Rightarrow$

$\boxed{\chi + t^2\psi = 2ct}$ εφαπτομένη.

$$\left.\begin{array}{l}\chi + t^2\psi = 2ct\\ \psi = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \chi = 2ct \Rightarrow B(2ct, 0),$$

$$\left.\begin{array}{l}\chi + t^2\psi = 2ct\\ \chi = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \psi = \frac{2c}{t} \Rightarrow \Gamma\left(0, \frac{2c}{t}\right)$$



$(OB)\cdot(O\Gamma) = |\chi_B|\cdot|\chi_\Gamma| = |2ct|\cdot\left|\dfrac{2c}{t}\right| = \left|2ct\cdot\dfrac{2c}{t}\right| = \left|4c^2\right| = 4c^2$, *ανεξάρτητο του t.*

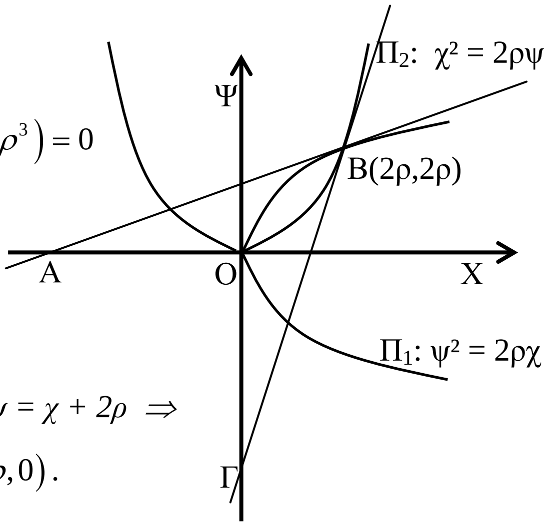
6. *(α)* $\left.\begin{matrix}\psi^2 = 2\rho\chi \\ \chi^2 = 2\rho\psi\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\dfrac{\chi^2}{2\rho}\right)^2 = 2\rho\chi \Rightarrow$

$\dfrac{\chi^4}{4\rho^2} = 2\rho\chi \Rightarrow \chi^4 = 8\rho^3\chi \Rightarrow \chi\left(\chi^3 - 8\rho^3\right) = 0$

$\Rightarrow \chi = 0$ ή $\chi^3 = 8\rho^3 \Rightarrow \chi = 2\rho$

$\psi=0$ $\qquad\qquad \psi=2\rho$

$O(0,0)$ $\qquad\qquad B(2\rho,2\rho)$



(β) Εφαπτομένη Π_1 στο $B(2\rho,2\rho)$

$\psi_1\psi = \rho(\chi+\chi_1) \Rightarrow 2\rho\cdot\psi = \rho(\chi+2\rho) \Rightarrow 2\psi = \chi + 2\rho \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix}\chi - 2\psi + 2\rho = 0 \\ \psi = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\chi = -2\rho \\ \psi = 0\end{matrix} \Rightarrow \mathrm{A}\left(-2\rho,0\right).$

Εφαπτομένη Π_2: $\chi^2 = 2\rho\psi$ *στο $B(2\rho$,* $\chi_1\chi = \rho(\psi+\psi_1) \Rightarrow 2\rho\cdot\chi = \rho(\chi+2\rho) \Rightarrow 2\chi = \psi + 2\rho$

$\left.\begin{matrix}2\chi - \psi - 2\rho = 0 \\ \chi = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\psi = -2\rho \\ \chi = 0\end{matrix} \Rightarrow \Gamma\left(0,-2\rho\right)$

Κύκλος: $\chi^2+\psi^2=4\rho^2$, $\mathrm{A}\left(-2\rho,0\right) \Rightarrow \left(-2\rho\right)^2 + 0^2 = 4\rho^2 \Rightarrow$ *Α ανήκει στο κύκλο*

$\mathrm{B}\left(0,-2\rho\right) \Rightarrow 0^2 + \left(-2\rho\right)^2 = 4\rho^2 \Rightarrow$ *Β ανήκει στο κύκλο*

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ (ΤΕΧΝΙΚΟ ΤΜΗΜΑ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ *Ιούνιος 2000*
Τεχνικό τμήμα (Τ.Σ.) *Χρόνος: 2 ώρες 30 λεπτά*

ΜΕΡΟΣ Α΄ (Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε μόνο στις 12)

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu\chi\, dx$

2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του κύκλου με εξίσωση $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi - 4\psi + 4 = 0$

3. Η συνάρτηση $\psi = \dfrac{2\alpha\chi + 3}{3\chi - \beta}$ περνά από το σημείο (1, - 1) και έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία χ=5. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

4. Να βρείτε τον όρο τον ανεξάρτητο του χ στο ανάπτυγμα του $\left(\chi^2 - \dfrac{3}{\chi^2}\right)^6$.

5. Με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί μια εξαμελής επιτροπή από μια ομάδα 10 ατόμων, αν δύο συγκεκριμένα άτομα πρέπει είτε να συμπεριληφθούν και τα δύο στην επιτροπή είτε να μη συμπεριληφθεί κανένα από τα δύο στην επιτροπή.

6. Να δείξετε ότι Τοξεφ3 + Τοξεφ2 $= \dfrac{3\pi}{4}$

7. Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{d\psi}{d\chi}$ των συναρτήσεων:

(i) $\psi = e^{2\chi} \cdot \ln(3\chi + 1)$ (ii) $\psi = \dfrac{\varepsilon\phi\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi}$

8. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int (\chi^2 + 3)\eta\mu 3\chi\, dx$

9. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{\chi \cdot \psi}{\psi^2 + 1}$

10. Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης

$$\frac{\eta\mu 7\chi - \eta\mu 5\chi}{\sigma\upsilon\nu 7\chi + \sigma\upsilon\nu 5\chi} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

11. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{e^{\chi} - e^{-\chi}}{\eta\mu\chi}$

12. Αν η ευθεία με εξίσωση $\psi - \lambda\chi + 7 = 0$ περνά από το ελάχιστο της συνάρτησης $\psi = \chi^2 - 4\chi + 3$, να βρείτε την τιμή του λ.

13. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει το κέντρο του πάνω στον άξονα των χ και τέμνει τους άξονες των χ και ψ στα σημεία (7,0) και $(0, \sqrt{7})$ αντίστοιχα.

14. Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $\psi=\chi^2$ και της ευθείας $\psi = \chi + 6$ περιστρέφεται, πλήρη στροφή, γύρω από τον άξονα των χ. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

15. Αν $\psi = e^{\chi}\cdot$συνχ , να δείξετε ότι: $\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} - 2\dfrac{d\psi}{d\chi} + 2\psi = 0$

ΜΕΡΟΣ Β΄ (Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 4).

1. (α) Δίνεται η συνάρτηση με εξίσωση $y = 2\chi^3 - 6\chi$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα (μέγιστο, ελάχιστο) και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
(β) Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και το θετικό ημιάξονα των χ.

2. (α) Αν $\chi = t^2$ και $\psi = 4t$, να δείξετε ότι: $6\chi^2\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} + \chi\dfrac{d\psi}{d\chi} + \psi = 0$

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\chi(\chi+1)}$

3. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής $(\chi+1)\dfrac{d\psi}{d\chi} - 2\psi = (\chi+1)^4$

4. Μια τριμελής επιτροπή πρόκειται να καταρτισθεί από ένα κατάλογο που περιλαμβάνει 4 Έλληνες, 2 Ελβετούς και 1 Αιγύπτιο. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί η επιτροπή αν:
(α) πρέπει να περιλαμβάνει άτομα και από τις τρεις εθνικότητες
(β) τα δυο άτομα πρέπει να είναι της ίδιας εθνικότητας και το τρίτο διαφορετικής.

5. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $\chi^2+y^2=25$ και την ευθεία $\chi+2y=10$ και το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστρέφεται, πλήρη στροφή, γύρω από τον άξονα των χ. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

6. (α) Να δείξετε ότι: συν$(10^0 - \chi)\cdot$συν$(10^0 + \chi)$ + συν$(80°-\chi)\cdot$συν$(80^0 + \chi)$ = συν2χ.
(β) Στη συνέχεια να λύσετε, στο διάστημα [0°,360°], την εξίσωση
συν$(10^0 - \chi)\cdot$συν$(10^0 + \chi)$ + συν$(80°-\chi)\cdot$συν$(80^0 + \chi)$ = συνχ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Μέρος Α΄

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu\chi dx = [-\sigma\upsilon\nu\chi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right) - (-\sigma\upsilon\nu 0) = 0 + 1 = 1$

2. $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi - 4\chi + 4 = 0, \quad K(-g, -f), \quad R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$g = -3, \quad f = -2, \quad c = 4 \qquad \Rightarrow K(3,2), \quad R = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 - 4} = 3$

3. $\psi = \dfrac{2\alpha\chi + 3}{3\chi - \beta}$. χ = 5 κατ. ασύμπτωτος $\Rightarrow$ 3·5 – β = 0 $\Rightarrow$ β = 15

$(1,-1) \Rightarrow -1 = \dfrac{2\alpha 1 + 3}{3 1 - 15} \Rightarrow 2\alpha + 3 = 12 \Rightarrow \alpha = \dfrac{9}{2}$

4. $\left(\chi^2 - \dfrac{3}{\chi^2}\right)^6$, $\mathrm{T}_{\kappa+1} = \dbinom{\nu}{\kappa}\alpha^{\nu-\kappa}\cdot\beta^{\kappa}$

$\mathrm{T}_{\kappa+1} = \dbinom{6}{\kappa}\left(\chi^2\right)^{6-\kappa}\cdot\left(-\dfrac{3}{\chi^2}\right)^{\kappa} = \dbinom{6}{\kappa}\cdot\chi^{12-2\kappa}\cdot\dfrac{(-3)^{\kappa}}{\chi^{2\kappa}} = \dbinom{6}{\kappa}\cdot(-3)^{\kappa}\cdot\chi^{12-4\kappa} \Rightarrow$

12 – 4κ = 0 $\Rightarrow$ κ = 3 $\Rightarrow$ $\mathrm{T}_4 = \dbinom{6}{3}\cdot(-3)^3 = -27\cdot 20 = -540$

5. (α) Αν τα δύο άτομα συμπεριληφθούν $\Rightarrow \dbinom{8}{4} = \dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 70$ τρόποι

(β) Αν τα δύο άτομα δεν θα συμπεριληφθούν $\Rightarrow \dbinom{8}{6} = \dfrac{8\cdot7}{1\cdot2} = 28$ τρόποι

Συνολικά : 70 + 28 = 98 τρόποι

6. Θέτω α = τοξεφ3 $\Leftrightarrow$ εφα = 3, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, β = τξεφ2 $\Leftrightarrow$ εφβ = 2, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

$0<\alpha + \beta< \pi \Rightarrow \varepsilon\phi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha\cdot\varepsilon\phi\beta} = \dfrac{3+2}{1-6} = -1 \Rightarrow \varepsilon\phi(\alpha+\beta) = \varepsilon\phi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \kappa\pi - \dfrac{\pi}{4}$, κ = 1 $\Rightarrow \alpha + \beta = \dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \tau o\xi\varepsilon\phi 3 + \tau o\xi\varepsilon\phi 2 = \dfrac{3\pi}{4}$

7. (i) $\psi = e^{2\chi}\cdot\ln(3\chi+1)$

$$\frac{d\psi}{d\chi} = 2e^{2\chi}\cdot\ln(3\chi+1) + \frac{3}{3\chi+1}\cdot e^{2\chi} = e^{2\chi}\cdot\left[2\ln(3x+1) + \frac{3}{3x+1}\right]$$

(ii) $\psi = \dfrac{\varepsilon\phi\chi}{1+\sigma\upsilon\nu 2\chi} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{\tau\varepsilon\mu^2\chi(1+\sigma\upsilon\nu 2\chi) + 2\cdot\eta\mu 2\chi\cdot\varepsilon\phi\chi}{(1+\sigma\upsilon\nu 2\chi)^2}$

8. $\int(\chi^2+3)\eta\mu 3\chi\, dx = \dfrac{1}{3}\int(\chi^2+3)\, d(-\sigma\upsilon\nu 3\chi) =$

$\dfrac{1}{3}\left[-(\chi^2+3)\sigma\upsilon\nu 3\chi + \int\sigma\upsilon\nu 3\chi\, d(\chi^2+3)\right] = -\dfrac{1}{3}(\chi^2+3)\sigma\upsilon\nu 3\chi + \dfrac{1}{3}\int\sigma\upsilon\nu 3\chi\cdot 2\chi\, d\chi =$

$-\dfrac{1}{3}(\chi^2+3)\sigma\upsilon\nu 3\chi + \dfrac{2}{9}\int\chi\cdot d(\eta\mu 3\chi) = -\dfrac{1}{3}(\chi^2+3)\sigma\upsilon\nu 3\chi + \dfrac{2}{9}\left[\chi\cdot\eta\mu 3\chi - \int\eta\mu 3\chi\, d\chi\right]$

$= -\dfrac{1}{3}(\chi^2+3)\sigma\upsilon\nu 3\chi + \dfrac{2}{9}\chi\cdot\eta\mu 3\chi + \dfrac{2}{27}\sigma\upsilon\nu 3\chi + C$

9. $\dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{\chi\cdot\psi}{\psi^2+1} \Rightarrow \dfrac{\psi^2+1}{\psi}\, d\psi = \chi\, d\chi$

$$\Rightarrow \int\left(\psi+\frac{1}{\psi}\right)d\psi=\int \chi\, d\chi \;\Rightarrow\; \frac{\psi^2}{2}+\ln|\psi|=\frac{\chi^2}{2}+C$$

10. $\dfrac{\eta\mu 7\chi-\eta\mu 5\chi}{\sigma\upsilon\nu 7\chi+\sigma\upsilon\nu 5\chi}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{2}\,\eta\mu\chi\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu 6\chi}}{\cancel{2}\,\sigma\upsilon\nu\chi\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu 6\chi}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\varepsilon\phi 30° \Leftrightarrow$

χ = 180°κ+30° , $\kappa\in\mathbb{Z}$

11. $L=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{e^{\chi}-e^{-\chi}}{\eta\mu\chi}\quad\left(\dfrac{0}{0},\ \alpha\pi\rho o\sigma\delta.\right)$

$$L=\lim_{\chi\to 0}\frac{\left(e^{\chi}-e^{-\chi}\right)'}{(\eta\mu\chi)'}=\lim_{\chi\to 0}\frac{e^{\chi}+e^{-\chi}}{\sigma\upsilon\nu\chi}=\frac{e^{0}+e^{0}}{\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{1+1}{1}=2$$

12. $\psi=\chi^2-4\chi+3\Rightarrow\dfrac{d\psi}{d\chi}=2\chi-4$, $\quad\dfrac{d\psi}{d\chi}=0 \;\Leftrightarrow\; 2\chi-4=0\Leftrightarrow\chi=2$,

$\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}=2>0$ ⇒ για χ = 2 παρουσιάζει ελάχιστο ⇒ ψ = –1 ⇒ (2,–1) ελάχιστο

Για (2,–1) η ψ – λχ + 7 = 0 ⇒ –1 – 2λ +7 = 0 ⇒ **λ = 3**

13. Έστω $\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0$ η εξίσωση του κύκλου

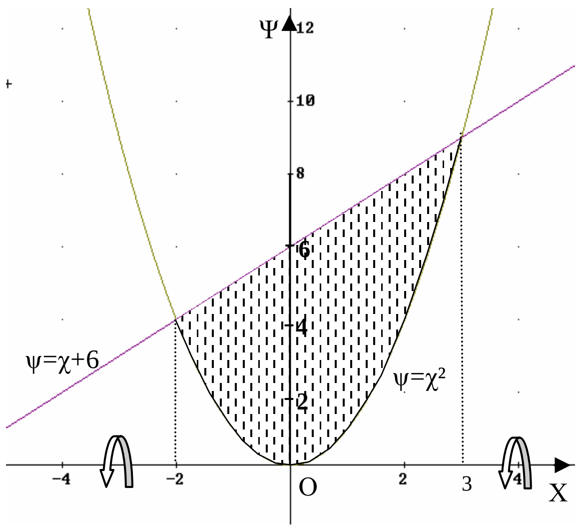
$K(-g,0)\Rightarrow f=0 \Rightarrow$ (K): $\chi^2+\psi^2+2g\chi+c=0$ (1)

Για (7,0) ⇒ $49+14g+c=0$ (2) . Για $\left(0,\sqrt{7}\right)\Rightarrow 7+c=0\Rightarrow c=-7$ (3)

$(3)\wedge(2)\Rightarrow 14g=-42\Rightarrow g=-3$ (4)

$(3)\wedge(4)\wedge(1)\Rightarrow (K):\ \boxed{\chi^2+\psi^2-6\chi-7=0}$

14. Σημεία τομής : ψ=χ², ψ=χ+6 ⇒ χ² – χ – 6 = 0 ⇒ χ=3 ή χ=-2 ⇒ (3,9) , (-2,4)



$$V=\pi\int_{-2}^{3}\left(\psi_1^{\,2}-\psi_2^{\,2}\right)dx=$$
$$=\pi\int_{-2}^{3}\left[(\chi+6)^2-\chi^4\right]dx$$
$$=\pi\int_{-2}^{3}\left(\chi^2+12\chi+36-\chi^4\right)dx$$
$$=\pi\left[\frac{\chi^3}{3}+6\chi^2+36\chi-\frac{\chi^5}{5}\right]_{-2}^{3}$$
$$=\pi\left(9+54+108-\frac{243}{5}\right)-\pi\left(-\frac{8}{3}+24-72+\frac{32}{5}\right)$$
$$=\frac{500\pi}{3}\ \text{κ.μ.}$$

15. ψ = e$^{\chi}$·συνχ ⇒ $\underline{\dfrac{d\psi}{d\chi}=e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi-e^{\chi}\eta\mu\chi}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \cancel{e^\chi \sigma\upsilon\nu\chi} - e^\chi \eta\mu\chi - e^\chi \eta\mu\chi - \cancel{e^\chi \sigma\upsilon\nu\chi} \Rightarrow \underline{\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = -2e^\chi \eta\mu\chi}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} - 2\frac{d\psi}{d\chi} + 2\psi = -2e^\chi \eta\mu\chi - 2\left(e^\chi \sigma\upsilon\nu\chi - e^\chi \eta\mu\chi\right) + 2e^\chi \sigma\upsilon\nu\chi$$

$$= \cancel{-2e^\chi \eta\mu\chi} - \cancel{2e^\chi \sigma\upsilon\nu\chi} + \cancel{2e^\chi \eta\mu\chi} + \cancel{2e^\chi \sigma\upsilon\nu\chi} = 0$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. (α) $\psi = 2\chi^3 - 6\chi$ π.ο. : $\chi \in \mathbb{R}$

Σημεία τομής με άξονες συντ/νων: Για χ = 0 ⇒ ψ = 0 ⇒ (0,0)

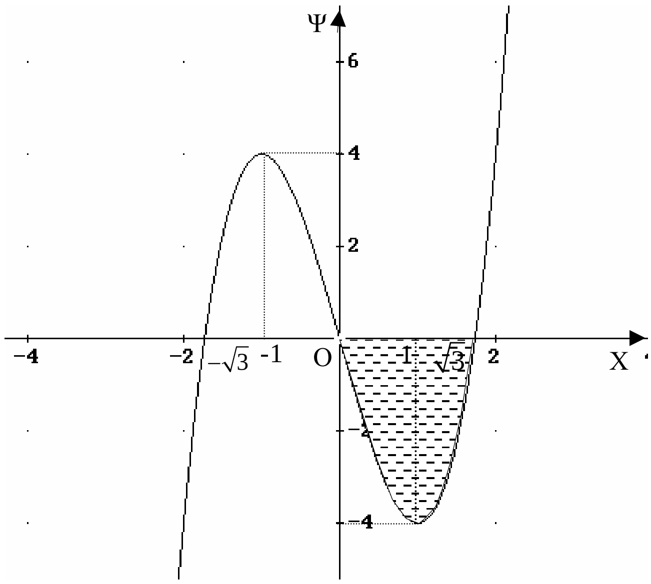
Για ψ = 0⇒ $2\chi\left(\chi^2 - 3\right) = 0$ ⇒ χ=0 ή χ= $\sqrt{3}$ ή χ=- $\sqrt{3}$ ⇒ (0,0), ($\sqrt{3}$,0), (- $\sqrt{3}$,0)

Τοπικά ακρότατα: $\frac{d\psi}{d\chi} = 6\chi^2 - 6$, $\frac{d\psi}{d\chi} = 0$ ⇒ 6(χ² - 1) = 0 ⇒ χ = 1 ή χ = -1

χ	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$\frac{d\psi}{d\chi}$		+ ↗	0	- ↘	0	+ ↗	
ψ							

χ = -1 ⇒ ψ = 4 ⇒ max (-1,4)

χ = 1 ⇒ ψ = -4 ⇒ min (1 , -4)



(β) $E = -\int_0^{\sqrt{3}} \left(2\chi^3 - 6\chi\right) dx$

$= -\left[\frac{\chi^4}{2} - 3\chi^2\right]_0^{\sqrt{3}}$

$= -\left(\frac{9}{2} - 9\right) + \left(0 - 0\right)$

$= 9 - \frac{9}{2}$

$= \frac{9}{2}$ τ.μ.

2. (α) $\left.\begin{array}{l}\chi = t^2 \\ \psi = 4t\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \frac{d\psi}{dt} = 4 \;\Rightarrow\; \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\psi}{dt}} = \frac{4}{2t} = \frac{2}{t} \Rightarrow \underline{\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{2}{t}}$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)\cdot\frac{dt}{d\chi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t}\right)\cdot\frac{1}{2t} = -\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{2t} = -\frac{1}{t^3} \Rightarrow \underline{\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = -\frac{1}{t^3}}$$

$$6\chi^2\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + \chi\frac{d\psi}{d\chi} + \psi = 6t^4\cdot\left(-\frac{1}{t^3}\right) + t^2\cdot\frac{2}{t} + 4t = -6t + 2t + 4t = 0$$

(β) $\frac{1}{\chi\left(\chi+1\right)} = \frac{A}{\chi} + \frac{B}{\chi+1} \Leftrightarrow 1 \equiv A\left(\chi+1\right) + B\chi$.

Για χ = 0 ⇒ <u>Α = 1</u>. Για χ = -1 ⇒ <u>Β= -1</u> ⇒ $\dfrac{1}{\chi(\chi+1)} = \dfrac{1}{\chi} - \dfrac{1}{\chi+1}$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{d\chi}{\chi(\chi+1)} = \int_1^3 \left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\chi+1}\right) d\chi = \left[\ln|\chi| - \ln|\chi+1|\right]_1^3 = \left[\ln\left|\frac{\chi}{\chi+1}\right|\right]_1^3$$

$$= \ln\frac{3}{4} - \ln\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{1}\right) = \ln\frac{3}{2} = \underline{\underline{\ln 3 - \ln 2}}$$

3. $(\chi+1)\cdot\dfrac{d\psi}{d\chi} - 2\psi = (\chi+1)^4 \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} - \dfrac{2}{\psi}\cdot\psi = (\chi+1)^3$

$$\mathrm{I}(\chi) = e^{-\int \frac{2}{\chi+1} d\chi} = e^{-2\ln|\chi+1|} = e^{\ln\frac{1}{(\chi+1)^2}} = \frac{1}{(\chi+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\chi+1)^2}\cdot\frac{d\psi}{d\chi} - \frac{2}{(\chi+1)^3}\cdot\psi = \chi+1 \Rightarrow \frac{d}{d\chi}\left(\frac{1}{(\chi+1)^2}\cdot\psi\right) = \chi+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\chi+1)^2}\cdot\psi = \int(\chi+1)d\chi \;\Rightarrow\; \frac{1}{(\chi+1)^2}\cdot\psi = \frac{\chi^2}{2} + \chi + C \;\Rightarrow$$

$$\psi = (\chi+1)^2\cdot\left(\frac{\chi^2}{2} + \chi + C\right)$$

4. 4 Έλληνες, 2 Ελβετοί, 1 Αιγύπτιος

(α) Θα περιλαμβάνει 1 Έλληνα, 1 Ελβετό, 1 Αιγύπτιο

$\Rightarrow \dbinom{4}{1}\cdot\dbinom{2}{1}\cdot 1$ = 4·2 = <u>8 τρόποι</u>

(β) Θα περιλαμβάνει:

- είτε 2 Έλληνες + 1 Ελβετό ⇒ $\dbinom{4}{2}\cdot\dbinom{2}{1} = \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot 2$ = <u>12 τρόποι</u>
- είτε 2 Έλληνες + 1 Αιγύπτιο ⇒ $\dbinom{4}{2}\cdot 1 = \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}$ = <u>6 τρόποι</u>
- είτε 2 Ελβετούς + 1 Έλληνα ⇒ $1\cdot\dbinom{4}{1}$ = <u>4 τρόποι</u>
- είτε 2 Ελβετούς + 1 Αιγύπτιο ⇒ <u>1 τρόπος</u>

Σύνολο: 12 + 6 + 4 +1 = <u>**23 τρόποι**</u>

5. Σημεία τομής κύκλου με ευθεία:

$\chi + 2\psi = 10 \Rightarrow \chi = 10 - 2\psi$

$\chi^2 + \psi^2 = 25$

⇒ $(10-2\psi)^2 + \psi^2 = 25$ ⇒

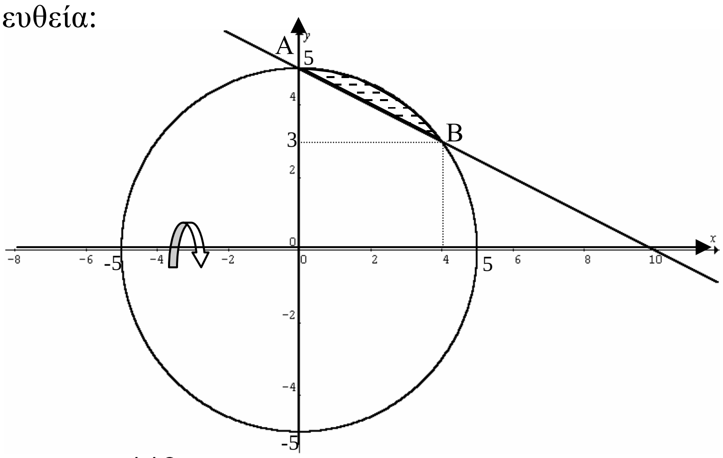
⇒ $100 - 40\psi + 4\psi^2 + \psi^2 - 25$

⇒ $5\psi^2 - 40\psi + 75 = 0$ ⇒

⇒ $\psi^2 - 8\psi + 15 = 0$ ⇒

⇒ $(\psi - 3)(\psi - 5) = 0$ ⇒

⇒ ψ = 3 ή ψ = 5



$\psi = 3 \Rightarrow \chi = 4 \Rightarrow (4,3)$
$\psi = 5 \Rightarrow \chi = 0 \Rightarrow (0,5)$

$$V = \pi\int_0^4\left(\psi_1^{\ 2} - \psi_2^{\ 2}\right)dx = \pi\int_0^4\left[25 - \chi^2 - \frac{(10-\chi)^2}{4}\right]dx = \pi\int_0^4\left(\cancel{25} - \chi^2 - \cancel{25} + 5\chi - \frac{\chi^2}{4}\right)dx$$

$$= \int_0^4\left(5\chi - \frac{5\chi^2}{4}\right)dx = \pi\left[\frac{5\chi^2}{2} - \frac{5\chi^3}{12}\right]_0^4 = \pi\left(5\cdot\frac{16}{2} - 5\cdot\frac{64}{12}\right) = \pi\left(40 - \frac{80}{3}\right) = \underline{\frac{40\pi}{3}\kappa.\mu.}$$

6. (α) $\sigma\upsilon\nu(10° - \chi)\cdot\sigma\upsilon\nu(10° + \chi) + \sigma\upsilon\nu(80° - \chi)\cdot\sigma\upsilon\nu(80° + \chi) =$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu 20° + \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 160° + \sigma\upsilon\nu 2\chi}{2} = \frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu 20°} - \cancel{\sigma\upsilon\nu 20°} + 2\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2} =$$

$= \underline{\underline{\sigma\upsilon\nu 2\chi}}$

(β) $\sigma\upsilon\nu(10° - \chi)\cdot\sigma\upsilon\nu(10° + \chi) + \sigma\upsilon\nu(80° - \chi)\cdot\sigma\upsilon\nu(80° + \chi) = \sigma\upsilon\nu\chi \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$
$\sigma\upsilon\nu 2\chi = \sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow 2\chi = 360°\kappa \pm \chi \ , \ \kappa \in \mathbb{Z}$

(i) $2\chi = 360°\kappa + \chi \Rightarrow \chi = 360°\kappa$
κ = 0 ⇒ **<u>χ = 0°</u>**, κ = 1 ⇒ **<u>χ = 360°</u>**

(ii) $2\chi = 360°\kappa - \chi \Rightarrow 3\chi = 360°\kappa \Rightarrow \chi = 120°\kappa$
κ = 0 ⇒ **<u>χ = 0°</u>**, κ = 1 ⇒ **<u>χ = 120°</u>**, κ = 2 ⇒ **<u>χ = 240°</u>**, κ = 3 ⇒ **<u>χ = 360°</u>**

Λύσεις στο διάστημα [0°,360°] είναι **0°, 120°, 240°, 360° .**

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4

Ιούνιος 2000
Χρόνος: 3 ώρες

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

1. Αν $y = 3e^{2x} - 5e^{-2x}$ να δείξετε ότι: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$

2. Κάποιος αγόρασε ένα αυτοκίνητο και ακολούθως το πούλησε προς £2 990 κερδίζοντας έτσι 15% πάνω στην τιμή αγοράς. Να βρείτε πόσα το αγόρασε.

3. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον εβδομαδιαίο μισθό σε λίρες των 20 υπαλλήλων μιας βιομηχανίας. Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{\chi}$ και την τυπική απόκλιση σ των παρατηρήσεων.

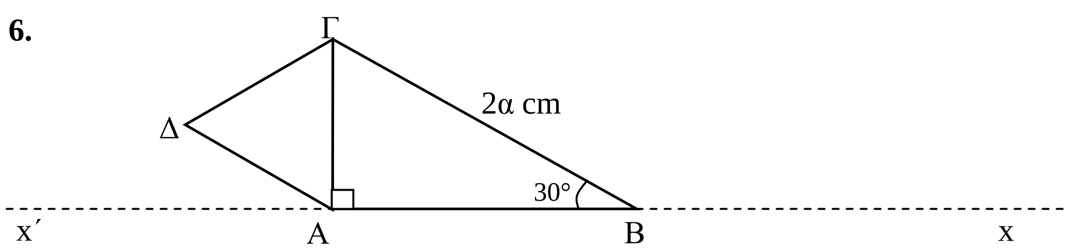
Μισθός x_i	Αριθμός υπαλλήλων f_i
60	3
80	5
110	6
120	4
140	2

4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία, $\psi = -\chi$ και περνά από τα σημεία τομής των κύκλων:
$\chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 10\psi - 24 = 0$, $\chi^2 + \psi^2 + 2\chi + 2\psi - 8 = 0$

5. Δίνεται η διαφορική εξίσωση: $\chi^2\psi\dfrac{d\psi}{d\chi} = \ln\chi$. α) Να βρείτε τη γενική της λύση.

β) Να βρείτε την ειδική της λύση για την οποία ψ=2, όταν χ=1

6.



Στο πιο πάνω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90°$, $\hat{B} = 30°$ και (ΒΓ)=2α cm και το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισόπλευρο. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xx΄ που περιέχει την πλευρά ΑΒ. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

7. Να λύσετε την εξίσωση: 2 Τοξσυν **χ** = Τοξημ **χ**

8. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. α) Να βρείτε τους πίνακες A^2 και A^{20}.

β) Αν $A^{20} + \mu \cdot A^4 + 7\nu \cdot I = (O)$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, Ι είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2 **χ** 2, και (Ο) ο μηδενικός πίνακας 2 **χ** 2, να δείξετε ότι ισχύει: $7\mu + \nu = -7^9$.

9. Δίνεται η παραβολή $\psi^2=4\alpha\chi$ και Ρ $(\alpha\rho^2,2\alpha\rho)$ σημείο πάνω σ' αυτή.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο Ρ είναι: $\rho\psi=\chi+\alpha\rho^2$.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο Ρ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Τ. Από το σημείο Ρ φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα των y. Αν Ε είναι η εστία της παραβολής και η ευθεία ΤΕ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Η, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Η.

10. Δίνονται τα ψηφία 0,3,4, 5,6,7. Να βρείτε πόσους άρτιους αριθμούς μεγαλύτερους του 50 000 μπορούμε να σχηματίσουμε, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

1. Δίνεται η συνάρτηση: $\psi=\dfrac{\chi^2-2\chi+2}{\chi^2-2\chi}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το ακρότατο, τις ασύμπτωτες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

β) Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $\psi=\dfrac{\chi^2-2\chi+2}{\chi^2-2\chi}$ τον άξονα των x και τις ευθείες χ=α και χ=α+1, α>2 είναι $\mathrm{E}=1+\ln\dfrac{3}{2}$.

Να βρείτε την τιμή του α.

2. Γεωργός θέλει να κατασκευάσει δεξαμενή νερού χωρητικότητας 10 000 m^3, που να έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου ανοιχτού στο πάνω μέρος και του οποίου η βάση να είναι τετράγωνο πλευράς x m. Αν το κόστος κατασκευής είναι για μεν τη βάση £5 το τετραγωνικό μέτρο, ενώ για τα πλάγια τοιχώματα £2 το τετραγωνικό μέτρο,

α) να δείξετε ότι το κόστος κατασκευής y είναι: $\psi=5\chi^2+\dfrac{80\,000}{\chi}$

β) να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει η δεξαμενή ώστε το κόστος κατασκευής να είναι ελάχιστο.

3. α) Να βρείτε το $\displaystyle\int\frac{2\chi-1}{4\chi^2+9}\,d\chi$.

β) Να βρείτε στη μορφή ψ=f(x) τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\chi\frac{d\psi}{d\chi}-\psi=\frac{\chi^2(2\chi-1)}{4\chi^2+9},\quad \chi>0\,.$$

4. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $xy=c^2$. Τα σημεία Ρ $\left(c\rho,\dfrac{c}{\rho}\right)$ και $\mathrm{T}\left(ct,\dfrac{c}{t}\right)$ κινούνται πάνω στην υπερβολή έτσι ώστε το μήκος της χορδής ΡΤ να έχει σταθερό μήκος κ. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της χορδής ΡΤ βρίσκεται πάνω στη γραμμή με εξίσωση: $4(\chi\psi-c^2)(\chi^2+\psi^2)=\kappa^2\chi\psi$.

5. Ένας καθηγητής της Φυσικής Αγωγής τοποθετεί μια ομάδα ν μαθητών σε ευθεία γραμμή.

α) Αν δύο από αυτούς είναι αδέλφια, να βρείτε συναρτήσει του ν, την πιθανότητα P_1 του ενδεχομένου τα δύο αδέλφια να μη στέκονται το ένα δίπλα στο άλλο.

β) Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μαθητών που χρειάζονται. ώστε να είναι $P_1 > \frac{3}{4}$.

γ) Αν $ν \le 365$, να βρείτε συναρτήσει του ν, την πιθανότητα P_2 του ενδεχομένου η ομάδα των ν μαθητών να περιέχει τουλάχιστον δύο άτομα που να έχουν τα γενέθλιά τους την ίδια ημέρα του χρόνου. (Να θεωρήσετε ότι ο χρόνος έχει 365 ημέρες).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $y = 3e^{2x} - 5e^{-2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 10e^{-2x} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} - 20e^{-2x} \Rightarrow \frac{dy^2}{dx^2} = 4\underbrace{\left(3e^{2x} - 5e^{-2x}\right)}_{\psi}$

$\Rightarrow \frac{dy^2}{dx^2} = 4y \Rightarrow \frac{dy^2}{dx^2} - 4y = 0$

2.

Αξία	*Κέρδος*	*Πώληση*
£100	*£15*	*£115*
χ;		*£2990*

$\frac{100}{\chi} = \frac{115}{2990} \Rightarrow \chi = \frac{100 \cdot 2990}{115} \Rightarrow \chi = 2600$

*Το αυτοκίνητο το αγόρασε **£2600***

3.

Μισθός x_i	Αριθμός υπαλλήλων f_i	$f_i \cdot \chi_i$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$f_i(\chi_i - \overline{\chi})^2$
60	3	180	40²=1600	3·1600 = 4800
80	5	400	400	2000
110	6	660	100	600
120	4	480	400	1600
140	2	280	1600	3200
	$\sum fi = 20$	$\sum f_i \chi_i = 2000$		$\sum fi(\chi_i - \overline{\chi})^2 = 12200$

$\overline{\chi} = \frac{\sum f_i \chi_i}{\sum f_i} = \frac{2000}{20} = 100, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fi(\chi_i - \overline{\chi})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{12\,200}{20}} = \sqrt{610} = 24,69$

4. *Έστω ότι η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $\chi^2 + \psi^2 + 2g\chi + 2f\psi + c = 0$*

K(-g,-f) και $R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$,

(ε): $\psi = -\chi$ $\quad K \in (ε)$, $\chi = -g$, $\psi = -f \Rightarrow -f = g$ (1)

$\chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 10\psi - 24 = 0$

$\underline{\chi^2 + \psi^2 + 2\chi + 2\psi - 8 = 0} \qquad (-)$

$-4\chi + 8\psi - 16 = 0 \Rightarrow \chi - 2\psi + 4 = 0 \Rightarrow \chi = 2\psi - 4 \quad (1)$

$(2\psi - 4)^2 + \psi^2 - 2(2\psi - 4) + 10\psi - 24 = 0 \Rightarrow$

$4\psi^2 - 16\psi + 16 + \psi^2 - 4\psi + 8 + 10\psi - 24 = 0 \Rightarrow 5\psi^2 - 10\psi = 0 \Rightarrow \psi(\psi - 2) = 0 \Rightarrow$

$\psi=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \chi=-4$ ή $\psi=2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \chi=0 \Rightarrow$ *Σημεία τομής των δύο κύκλων A(-4,0) και B(0,2)*
Τα σημεία A και B ανήκουν στον ζητούμενο κύκλο άρα οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση του.

$$\left.\begin{array}{l}(-4)^2+0^2-8g+0+c=0\\ 0^2+2^2+0+4f+c=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}16-8g+c=0\\ 4+4f+c=0\\ g=-f\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}16+8f+c=0\\ 4+4f+c=0\\ g=-f\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$12+4f=0 \Rightarrow \boxed{f=-3} \Rightarrow \boxed{g=3} \Rightarrow \boxed{c=8} \quad \Rightarrow \boxed{\chi^2+\psi^2+6\chi-6\psi+8=0}$$

2ος τρόπος ("δέσμη κύκλων")

Οι κύκλοι που περνούν από τα σημεία τομής των δοθέντων κύκλων είναι :

$$\chi^2+\psi^2-2\chi+10\psi-24+\mu\cdot\left(\chi^2+\psi^2+2\chi+2\psi-8\right)=0 \Rightarrow$$

$$(\mu+1)\chi^2+(\mu+1)\psi^2+2(-1+\mu)\chi+2(5+\mu)\psi+(-24-8\mu)=0 \Rightarrow$$

$$\chi^2+\psi^2+2\frac{\mu-1}{\mu+1}\chi+2\frac{\mu+5}{\mu+1}\psi-\frac{8\mu+24}{\mu+1}=0 \quad (1) \Rightarrow \mathrm{K}\left(-\frac{\mu-1}{\mu+1},-\frac{\mu+5}{\mu+1}\right),$$

(ε): $\psi=-\chi \quad K\in(\varepsilon) \Rightarrow -\dfrac{\mu+5}{\mu+1}=\dfrac{\mu-1}{\mu+1}, \quad \mu\neq-1 \Rightarrow -(\mu+5)=\mu-1 \Rightarrow \mu=-2$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \chi^2+\psi^2+2\cdot\frac{-3}{-1}\chi+2\cdot\frac{3}{-1}\psi-\frac{-16+24}{-1}=0 \Rightarrow \boxed{\chi^2+\psi^2+6\chi-6\psi+8=0}$$

5. (α) $\chi^2\psi\dfrac{d\psi}{d\chi}=\ln\chi \Rightarrow \psi\,d\psi=\chi^{-2}\ln\chi\,d\chi \Rightarrow \int\psi\,d\psi=\int\chi^{-2}\ln\chi\,d\chi \Rightarrow$

$$\frac{\psi^2}{2}=\int\ln\chi\,d\left(-\chi^{-1}\right) \Rightarrow \frac{\psi^2}{2}=-\chi^{-1}\ln\chi-\int-\chi^{-1}\,d(\ln\chi) \Rightarrow \frac{\psi^2}{2}=-\frac{\ln\chi}{\chi}+\int\frac{1}{\chi}\cdot\frac{1}{\chi}\,d\chi$$

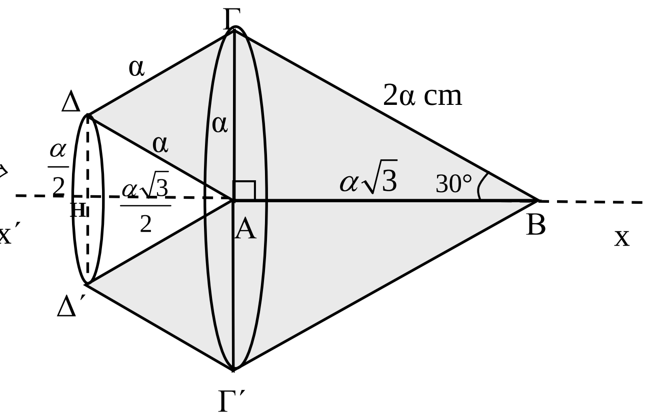
$$\Rightarrow \frac{\psi^2}{2}=-\frac{\ln\chi}{\chi}+\int\chi^{-2}d\chi \Rightarrow \frac{\psi^2}{2}=-\frac{\ln\chi}{\chi}+\left(-\chi^{-1}\right)+c \Rightarrow \boxed{\frac{\psi^2}{2}=-\frac{\ln\chi}{\chi}-\frac{1}{\chi}+c}\ .$$

(β) $\psi=2, \chi=1 \Rightarrow \dfrac{2^2}{2}=-\dfrac{\ln 1}{1}-\dfrac{1}{1}+c \Rightarrow 2=0-1+c \Rightarrow c=3$

$$\frac{\psi^2}{2}=-\frac{\ln\chi}{\chi}-\frac{1}{\chi}+3 \Rightarrow \boxed{\psi^2=-\frac{2\ln\chi}{\chi}-\frac{2}{\chi}+6}$$ *Ειδική λύση.*

6. $V = V_{(\text{ΑΒΓ})} + V_{\text{ΑΓΔΗ}} - V_{(\text{ΑΔΗ})}$

$\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}\right)$ *ορθογώνιο,* $\hat{\text{Β}} = 30° \Rightarrow$



$\text{ΑΓ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2} \Rightarrow$ *ΑΓ=α*

$(ΑΒ)^2=(ΒΓ)^2-(ΑΓ)^2 \Rightarrow (ΑΒ)^2=4α^2-α^2 \Rightarrow$

$(ΑΒ)^2=3α^2 \Rightarrow ΑΒ=α\sqrt{3}$

$\left(\overset{\Delta}{\text{ΑΔΗ}}\right)$ *ορθογώνιο,* $\widehat{\text{ΔΑΗ}} = 30°$ *,ΑΔ=α*

$\Rightarrow ΔΗ = \dfrac{α}{2},\quad ΑΗ=\dfrac{α\sqrt{3}}{2}$

$$V_{ολ} = \frac{1}{3}\pi(\text{ΑΓ})^2\cdot(\text{ΑΒ}) + \frac{\pi(\text{ΗΑ})}{3}\left[(\text{ΑΓ})^2 + (\text{ΑΓ})(\text{ΔΗ}) + (\text{ΔΗ})^2\right] - \frac{1}{3}\pi(\text{ΔΗ})^2\cdot(\text{ΗΑ})$$

$$V_{ολ} = \frac{\pi\left(\frac{α\sqrt{3}}{2}\right)}{3}\left[α^2 + α\cdot\frac{α}{2} + \left(\frac{α}{2}\right)^2\right] - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{α}{2}\right)^2\frac{α\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\piα^2\left(α\sqrt{3}\right)$$

$$V_{ολ} = \frac{\piα^3\sqrt{3}}{3} + \frac{7\piα^3\sqrt{3}}{24} - \frac{\piα^3\sqrt{3}}{24} \Rightarrow \boxed{V_{ολ} = \frac{7\piα^3\sqrt{3}}{12}\ cm^3}$$

7. *2 Τοξσυν χ = Τοξημ χ (1)*

Θέτουμε τοξχσυνχ=α $\Rightarrow$ *συνα=χ ,* $0 \le α \le \pi$

τοξημχ = β $\Rightarrow$ *ημβ = χ ,* $-\dfrac{\pi}{2} \le β \le \dfrac{\pi}{2}$

(1) $\Rightarrow 2α= β \Rightarrow συν2α = συνβ \Rightarrow 2συν^2α - 1 = +\sqrt{1-ημ^2β} \qquad (συνβ \ge 0) \Rightarrow$

$2χ^2 - 1 = \sqrt{1-χ^2} \Rightarrow \left(2χ^2-1\right)^2 = 1-χ^2 \Rightarrow 4χ^4 - 3χ^2 = 0 \Rightarrow χ^2\left(4χ^2-3\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow χ^2\left(2χ-\sqrt{3}\right)\left(2χ+\sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow χ = 0 \quad ή \quad \Rightarrow χ = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

<u>*Επαλήθευση*</u>

(i) $χ=0 \Rightarrow 2\,τοξσυν0 \overset{;}{=} τοξημ0 \Rightarrow 2\cdot\dfrac{\pi}{2} \ne 0 \Rightarrow χ = 0$ *Απορρίπτεται*

(ii) $χ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2τοξσυν\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \overset{;}{=} τοξημ\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow 2\cdot\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) \ne -\dfrac{\pi}{3}$

Άρα $χ=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *απορρίπτεται.*

(iii) $χ=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\,τοξσυν\dfrac{\sqrt{3}}{2} \overset{;}{=} τοξημ\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\cdot\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ *Ισχύει. Άρα* $\boxed{χ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ *Δεκτή*

8. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$

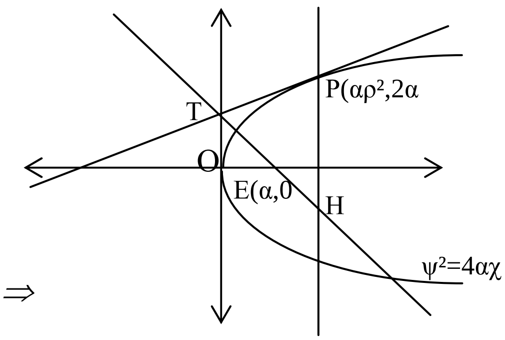
$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot3+3\cdot(-1)\\ 2\cdot1+(-1)\cdot2 & 2\cdot3+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=7\cdot I$$

$A^4 = A^2\cdot A^2 = (7\cdot \mathbf{I})\cdot(7\cdot\mathbf{I})=7^2\cdot\mathbf{I}^2=7^2\cdot\mathbf{I}$, $\qquad A^{20}=\left(A^2\right)^{10}=\left(7\cdot I\right)^{10}=7^{10}\cdot I^{10}=7^{10}\cdot I$

$$A^{20}+\mu\cdot A^4+7\nu\cdot I=(O)\Rightarrow 7^{10}\cdot I+\mu\cdot 7^2\cdot I+7\nu\cdot I=(O)\Rightarrow\left(7^{10}+7^2\mu+7\nu\right)\cdot I=(O)\Rightarrow$$

$$7^{10}+7^2\mu+7\nu=0\Rightarrow 7^9+7\mu+\nu=0\Rightarrow\boxed{7\mu+\nu=-7^9}$$

9. *(α)* $\psi^2=4\alpha\chi\Rightarrow 2\psi\dfrac{d\psi}{d\chi}=4\alpha\Rightarrow\dfrac{d\psi}{d\chi}=\dfrac{2\alpha}{\psi}\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\phi}=\dfrac{\cancel{2\alpha}}{\cancel{2\alpha}\rho}\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\phi}=\dfrac{1}{\rho}$



εφ: $\psi-\psi_1=\lambda\left(\chi-\chi_1\right)\Rightarrow\ \psi-2\alpha\rho=\dfrac{1}{\rho}\left(\chi-\alpha\rho^2\right)$

$\psi\rho-2\alpha\rho^2=\chi-\alpha\rho^2\ \Rightarrow\ \boxed{\rho\psi=\chi+\alpha\rho^2}$ *(1)*

(β) $\boxed{T}$ $\chi=0\overset{(1)}{\Rightarrow}\rho\psi=0+\alpha\rho^2\Rightarrow\ \psi=\alpha\rho\ \Rightarrow\ T(0,\alpha\rho)$

Εξίσωση PH: $\chi=\alpha\rho^2$,

Εξίσωση TE: $T(0,\alpha\rho)$, $E(\alpha,0)$ $\qquad\dfrac{\psi-\psi_1}{\chi-\chi_1}=\dfrac{\psi_2-\psi_1}{\chi_2-\chi_1}\ \Rightarrow$

$$\frac{\psi-\alpha\rho}{\chi-0}=\frac{0-\alpha\rho}{\alpha-0}\ \Rightarrow\ \frac{\psi-\alpha\rho}{\chi}=\frac{-\rho}{1}\Rightarrow\psi-\alpha\rho=-\rho\chi\Rightarrow\boxed{\rho\chi+\psi=\alpha\rho}\ \textit{(TE)}$$

$$\boxed{H}\quad\left.\begin{array}{l}\chi=\alpha\rho^2\\ \rho\chi+\psi=\alpha\rho\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha\rho^3+\psi=\alpha\rho\Rightarrow\psi=\alpha\rho\left(1-\rho^2\right)\Rightarrow H\left(\alpha\rho^2,\alpha\rho\left(1-\rho^2\right)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\chi=\alpha\rho^2\\ \psi=\alpha\rho\left(1-\rho^2\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\rho^2=\dfrac{\chi}{\alpha}\\ \psi^2=\alpha^2\rho^2\left(1-\rho^2\right)^2\end{array}\right\}\Rightarrow\psi^2=\alpha^{\cancel{2}}\frac{\chi}{\cancel{\alpha}}\left(1-\frac{\chi}{\alpha}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \psi^2=\alpha\chi\frac{\left(\alpha-\chi\right)^2}{\alpha^2}\Rightarrow\boxed{\psi^2=\frac{\chi\left(\alpha-\chi\right)^2}{\alpha}}$$ *Γεωμετρικός τόπος του H*

10. *0,3,4,5,6,7 (α) Πενταψήφιοι*

i. Αρχίζει με 5,7 και τελειώνει με 0,4,6

2	4	3	2	3

= 144 αριθμοί

ii. Αρχίζει με 6 και τελειώνει σε 0,4

1	4	3	2	2

= 48 αριθμοί

(β) Εξαψήφιοι

i. Αρχίζει με 4,6,1 και τελειώνει με 4,6

2	4	3	2	1	2

= 96 αριθμοί

ii. Αρχίζει με 3,5,6 και τελειώνει σε 0,4,6

3	4	3	2	1	3

= 216 αριθμοί

Συνολικά 144+48+96+216 = 504 αριθμοί.

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. $\psi = \dfrac{\chi^2 - 2\chi + 2}{\chi^2 - 2\chi}$

(α) Πεδίο ορισμού: χ^2-$2\neq 0 \Rightarrow \chi(\chi-2)\neq 0 \Rightarrow \chi\neq 0$ *και* $\chi\neq 2 \Rightarrow \chi \in \mathbb{R} - \{0,2\}$

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{(2\chi-2)(\chi^2-2\chi)-(2\chi-2)(\chi^2-2\chi+2)}{(\chi^2-2\chi)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{(2\chi-2)\left[\chi^2-2\chi-\chi^2+2\chi-2\right]}{\chi^2(\chi-2)^2} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{-4(\chi-1)}{\chi^2(\chi-2)^2}$$

$$\frac{d\psi}{d\chi} = 0 \Rightarrow \frac{-4(\chi-1)}{\chi^2(\chi-2)^2} = 0 \Rightarrow \chi = 1 \text{ , } \chi\neq 0 \text{ και } \chi\neq 2$$

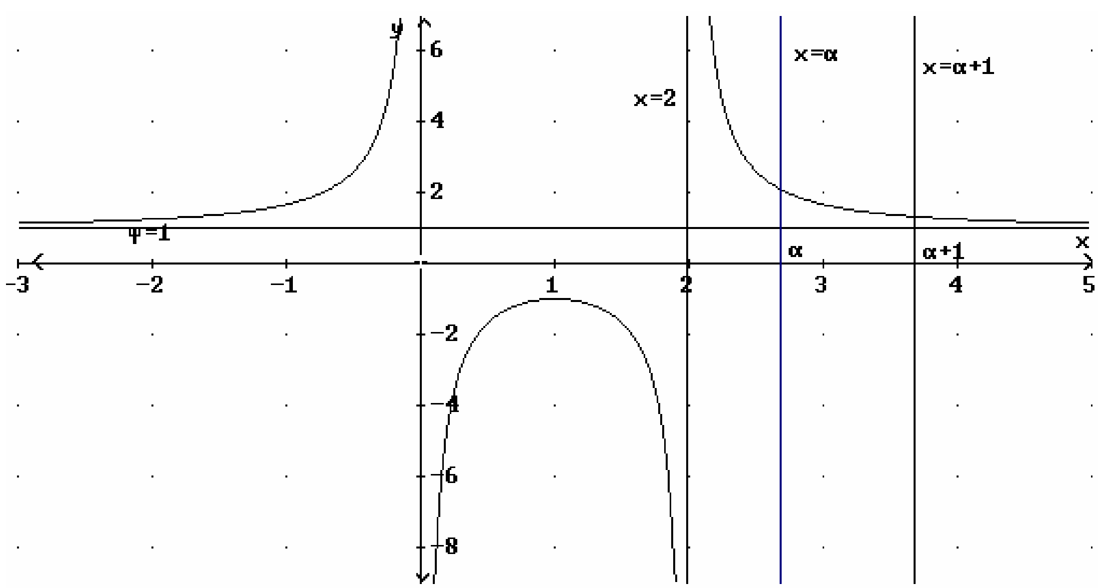
χ	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$\frac{d\psi}{d\chi}$	+	‖	+	0	−	‖	−	
ψ	↗	‖	↗		↘	‖	↘	

Για $\chi=1 \Rightarrow \psi_{\max} = \dfrac{1-2+2}{1-2} = -1$

$\Rightarrow$ ***max(1,–1)***

Κατακόρυφη ασύμπτωτη: $\chi = 0$ *και* $\chi = 2$

Οριζόντια ασύμπτωτη: $L = \lim\limits_{\chi\to\pm\infty} \dfrac{\chi^2-2\chi+2}{\chi^2-2\chi} = 0 \Rightarrow$ *Κατακόρυφη ασύμπτωτη:* $\psi = 0$



$$\text{E} = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{\chi^2-2\chi+2}{\chi^2-2\chi} d\chi = \int_{\alpha}^{\alpha+1}\left(1+\frac{2}{\chi^2-2\chi}\right)d\chi = \int_{\alpha}^{\alpha+1}\left(1+\frac{2}{\chi(\chi-2)}\right)d\chi$$

$$\frac{2}{\chi(\chi-2)} = \frac{\text{A}}{\chi} + \frac{\text{B}}{\chi-2} \Rightarrow 2 \equiv \text{A}(\chi-2)+\text{B}\chi \Rightarrow \text{A} = -1 \text{ , } \text{B} = 1$$

$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi-2}\right)d\chi=\left[\chi-\ln|\chi|+\ln|x-2|\right]_{\alpha}^{\alpha+1}$$

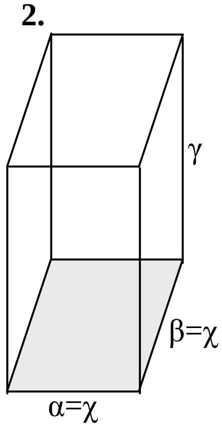
$$\mathrm{E}=\left[\alpha+1-\ln(a+1)+\ln(a-1)\right]-\left[a-\ln a+\ln(a-2)\right]$$

$$E=\cancel{\alpha}+1-\ln(a+1)+\ln(a-1)-\cancel{\alpha}+\ln a-\ln(a-2)\Rightarrow\ E=1+\ln\frac{a(a-1)}{(a+1)(a-2)}$$

$$\cancel{1}+\ln\frac{3}{2}=\cancel{1}+\ln\frac{a(a-1)}{(a+1)(a-2)}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{a(a-1)}{(a+1)(a-2)}\Rightarrow 3(a+1)(a-2)=2a(a-1)\Rightarrow$$

$3\alpha^2-3\alpha-6=2\alpha^2-2\alpha \Rightarrow \alpha^2-\alpha-6=0 \Rightarrow (\alpha-3)(\alpha-2)=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=3}$ *ή α=-2 απορρίπτεται (α>2)*

2.



$\alpha=\beta=\chi\ ,\ \ V=10\,000\,m^3$

$V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \Rightarrow 10\,000=\chi\cdot\chi\cdot\gamma \Rightarrow \gamma=\frac{10\,000}{\chi^2}$

$\mathrm{E}_{\mathrm{B}}=\chi^2\ \ ,\ \ \mathrm{E}_{\Pi}=4\chi\cdot\gamma \Rightarrow \mathrm{E}_{\Pi}=4\chi\frac{10\,000}{\chi^2}\Rightarrow \mathrm{E}_{\Pi}=\frac{40\,000}{\chi}$

Κόστος $\psi=5\cdot\mathrm{E}_{\mathrm{B}}+2\cdot\mathrm{E}_{\mathrm{B}}\ \Rightarrow \boxed{\psi=5\chi^2+\frac{80\,000}{\chi}}$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\psi}{d\chi}=10\chi-\frac{80\,000}{\chi^2}\\&\frac{d\psi}{d\chi}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow 10\chi-\frac{80\,000}{\chi^2}=0\Rightarrow 10\chi^3-80000=0\Rightarrow$$

$10\chi^3=80000 \Rightarrow \chi^3=8000 \Rightarrow \chi=20\ m$

$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=10+\frac{160\,000}{\chi^3}>0\ \Rightarrow$ *για* $\chi=20$ *η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο.*

$\Rightarrow \alpha=20\ m\ ,\ \beta=20\ m\ \ ,\ \gamma=25\ m$.

3. *(α)* $\int\frac{2\chi-1}{4\chi^2+9}d\chi=\int\frac{2\chi}{4\chi^2+9}d\chi-\int\frac{1}{4\chi^2+9}d\chi$

$$=\int\frac{\left(4\chi^2+9\right)'}{4\chi^2+9}d\chi-\frac{1}{9}\int\frac{1}{\left(\frac{2\chi}{3}\right)^2+1}d\chi\ =\frac{1}{4}\ln\left(4\chi^2+9\right)-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{2\chi}{3}\right)+c$$

$$=\ \boxed{\frac{1}{4}\ln\left(4\chi^2+9\right)-\frac{1}{6}\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{2\chi}{3}\right)+c}$$

(β) $\chi\frac{d\psi}{d\chi}-\psi=\frac{\chi^2(2\chi-1)}{4\chi^2+9}\ \Rightarrow\ \frac{d\psi}{d\chi}-\frac{1}{\chi}\cdot\psi=\frac{\chi(2\chi-1)}{4\chi^2+9}\qquad(\chi>0)$

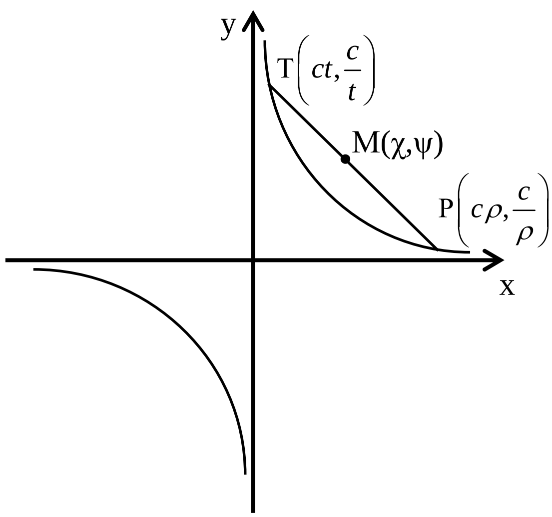
Παράγοντας Ολοκλήρωσης $\mathrm{I}(\chi)=e^{\int -\frac{1}{\chi}d\chi}=e^{-\ln\chi}=\frac{1}{\chi}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\chi}\cdot\frac{d\psi}{d\chi}-\frac{1}{\chi^2}\cdot\psi=\frac{2\chi-1}{4\chi^2+9} \Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{\chi}\cdot\psi\right)}{d\chi}=\frac{2\chi-1}{4\chi^2+9} \Rightarrow$$

$$\int d\left(\frac{1}{\chi}\psi\right)=\int\frac{2\chi-1}{4\chi^2+9}d\chi \Rightarrow \frac{\psi}{\chi}=\frac{1}{4}\ln\left(4\chi^2+9\right)-\frac{1}{6}\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{2\chi}{3}\right)+c \Rightarrow$$

$$\boxed{\psi=\frac{\chi}{4}\ln\left(4\chi^2+9\right)-\frac{\chi}{6}\tau o\xi\varepsilon\phi\left(\frac{2\chi}{3}\right)+c\chi} \quad , \ c \text{ σταθερά}$$

4.



$(PT)=\kappa \Rightarrow (PT)^2=\kappa^2 \Rightarrow$

$$\left(c\rho-ct\right)^2+\left(\frac{c}{\rho}-\frac{c}{t}\right)^2=\kappa^2 \Rightarrow$$

$$c^2\left(\rho-t\right)^2+c^2\frac{\left(\rho-t\right)^2}{\rho^2t^2}=\kappa^2 \Rightarrow$$

$$c^2\left(\rho-t\right)^2\left(1+\frac{1}{\rho^2t^2}\right)=\kappa^2$$

Ισχύει $\left(\rho-t\right)^2=\left(\rho+t\right)^2-4\rho t \Rightarrow$

$$c^2\left[\left(\rho+t\right)^2-4\rho t\right]\left[1+\frac{1}{\left(\rho t\right)^2}\right]=\kappa^2 \quad (1)$$

Μ μέσο του ΤΡ $\chi_M=\frac{c\rho+ct}{2}=\frac{c\left(\rho+t\right)}{2}$ *(2)*, $\quad \psi_M=\frac{\frac{c}{\rho}+\frac{c}{t}}{2}=\frac{c\left(\rho+t\right)}{2\rho t}$ *(3)*

$$\frac{(2)}{(3)} \Rightarrow \frac{\chi}{\psi}=\frac{\frac{c\cancel{(\rho+t)}}{\cancel{2}}}{\frac{c\cancel{(\rho+t)}}{\cancel{2}\rho t}} \Rightarrow \frac{\chi}{\psi}=\rho t \quad (4), \qquad (2) \Rightarrow \rho+t=\frac{2\chi}{c} \Rightarrow$$

Αντικαθιστώντας στην (1) $\Rightarrow c^2\left[\left(\frac{2\chi}{c}\right)^2-4\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right]\left[1+\frac{1}{\left(\frac{\chi}{\psi}\right)^2}\right]=\kappa^2 \Rightarrow$

$$c^2\left[\frac{4\chi^2}{c^2}-\frac{4\chi}{\psi}\right]\left[1+\frac{\psi^2}{\chi^2}\right]=\kappa^2 \Rightarrow \cancel{c^2}\,\frac{4\chi^{\cancel{2}}\psi-4\cancel{\chi}c^2}{\cancel{c^2}\psi}\cdot\frac{\chi^2+\psi^2}{\chi^{\cancel{2}}}=\kappa^2 \Rightarrow$$

$\boxed{4\left(\chi\psi - c^2\right)\left(\chi^2+\psi^2\right)=\kappa^2\chi\psi}$ *Εξίσωση του γεωμετρικού τόπου*

5. *ν μαθητές σε ευθεία γραμμή, 2 αδέλφια*

(α) $P_1=1-P$(τα δύο αδέλφια να στέκονται το ένα δίπλα στο άλλο) $\Rightarrow$

$$P_1=1-\frac{(\nu-1)!\cdot 2!}{\nu!}\Rightarrow P_1=1-\frac{\cancel{(\nu-1)!}\cdot 2}{\cancel{(\nu-1)!}\cdot\nu}\Rightarrow P_1=1-\frac{2}{\nu}\Rightarrow \boxed{P_1=\frac{\nu-2}{\nu}}$$

(β) $P_1>\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\nu-2}{\nu}>\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\nu-2}{\nu}-\frac{3}{4}>0\Rightarrow\frac{4\nu-8-3\nu}{4\nu}>0\Rightarrow\frac{\nu-8}{4\nu}>0\overset{\nu>0}{\Rightarrow}$

$\nu-8>0\Rightarrow\nu>8\Rightarrow$ $\boxed{\nu_{\min}=9}$

(γ) $\nu\leq 365$

$P_2=1-P$(όλοι διαφορετικοί ημερομηνία) $\Rightarrow$ $P_2=1-\frac{\Delta_\nu^{365}}{\delta_\nu^{365}}\Rightarrow P_2=1-\frac{\frac{365!}{(365-\nu)!}}{365^\nu}\Rightarrow$

$$\boxed{P_2=1-\frac{365!}{(365-\nu)!\cdot 365^\nu}}$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 8

Ιούνιος 2000
Χρόνος: 3 ώρες

ΜΕΡΟΣ Α΄ (Να λύσετε όλες τις ασκήσεις)

1. Να βρείτε το συντελεστή του χ^{10} στο ανάπτυγμα του διωνύμου $\left(\chi^2 + \frac{1}{\chi}\right)^8$, $\chi \neq 0$.

2. Η συνάρτηση $y = \alpha\chi + \beta\ln\chi$ έχει ακρότατο το σημείο Α(1,2). Να βρείτε τις τιμές των α και β και να χαρακτηρίσετε το είδος του ακρότατου.

3. Δίνεται ο κύκλος (κ): $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 4\psi = 0$. Να βρείτε:
i) Το μήκος της ακτίνας του και τις συντεταγμένες του κέντρου του.
ii) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου (κ) που είναι παράλληλες προς την ευθεία (ε): $\chi + 2y = 5$.

4. Δίνεται ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.
i) Να δείξετε ότι $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, όπου **I** είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2x2.
ii) Να βρείτε τον πίνακα Μ για τον οποίο ισχύει $A^{2001} \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Δίνεται η λέξη ΑΜΑΛΓΑΜΑ. Να βρείτε.
i) Το πλήθος των αναγραμματισμών της. Πόσοι από αυτούς τους αναγραμματισμούς έχουν όλα τα Α συνεχόμενα;
ii) Το πλήθος των αναγραμματισμών που μπορούμε να σχηματίσουμε, χρησιμοποιώντας, κάθε φορά, 3 από τα γράμματα της λέξης ΑΜΑΛΓΑΜΑ.

6. Δίνεται η καμπύλη $\psi = e^{\chi}$. Να βρείτε:
i) Την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της Α(0,1).
ii) Τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, την εφαπτομένη της καμπύλης στο Α και την ευθεία $\chi=1$, γύρω από τον άξονα Οχ.

7. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $\chi\frac{d\psi}{d\chi} + 2\psi = 3\chi + \eta\mu\chi$

8. Το 40% των ατόμων μιας ομάδας έχουν άδεια οδηγού μοτοσικλέτας ενώ το 45% δεν έχουν άδεια οδηγού αυτοκινήτου. Η πιθανότητα να έχει κάποιο άτομο της ομάδας άδεια οδηγού αυτοκινήτου, δεδομένου ότι έχει άδεια οδηγού μοτοσικλέτας, είναι 0,375. Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
i) Β: Να έχει κάποιο άτομο της ομάδας και τις δυο άδειες οδηγού.
ii) Γ: Να έχει κάποιο άτομο της ομάδας άδεια οδηγού αυτοκινήτου αλλά όχι άδεια οδηγού μοτοσικλέτας.

9. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\int_{\sigma\upsilon\nu\chi}^{\chi} \frac{dt}{1+t^2}$.

i) Να βρείτε την παράγωγο f΄ (x) της συνάρτησης.

ii) Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους του αναπτύγματος της f(x) σε σειρά Maclaurin.

10. Δίνεται η καμπύλη (κ): $\psi^2 = \chi$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της καμπύλης στο σημείο της Α(1,1*)*.

ii) Να βρείτε την εικόνα (κ_1) της (κ) και την εικόνα (ει) της (ε) Κάτω από το μετασχηματισμό που δίνεται από τον πίνακα Μ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) Να δείξετε ότι η (ε_1) είναι εφαπτομένη της (κ_1).

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> (*Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις)*

1. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{\chi^2-\chi-2}{\chi+2}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τις ασύμπτωτες και τα ακρότατά της.

ii) Να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

iii) Να γράψετε το σύνολο των ακέραιων τιμών που δε λαμβάνει το κλάσμα $\frac{\chi^2-\chi-2}{\chi+2}$ για τιμές του x στο πεδίο ορισμού του.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη ψ = f(x), την πλάγια ασύμπτωτή της και τους άξονες Οx και Οy.

2. Δίνονται οι ημιευθείες (ε_1): $\psi = \frac{\chi}{2}$, $\chi \geq 0$ και (ε_2): $\psi = -\frac{\chi}{2}$, $\chi \geq 0$. Πάνω στην (ε_1) παίρνουμε σημείο Α και πάνω στην (ε_2) σημείο Β τέτοια ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ να ισούται με 2 τετρ. μονάδες (Ο η αρχή των αξόνων).

i) Να δείξετε ότι το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ βρίσκεται πάνω σε κλάδο υπερβολής της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii) Να αναφέρετε, δικαιολογώντας την απάντησή σας, τη σχέση των ημιευθειών (ε_1) και (ε_2) με την υπερβολή.

3. Δίνεται η διαφορική εξίσωση: $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + 2\frac{d\psi}{d\chi} + 2\psi = 2\chi + 2$.

i) Να βρείτε τη γενική λύση της.

ii) Να βρείτε την ειδική λύση της, ψ = f_1(χ), για την οποία ψ =1 και $\frac{d\psi}{d\chi} = 0$ όταν χ=0.

iii) Αν f_2(χ) = $e^{-\chi}\eta\mu\chi + \chi$ να αποδείξετε ότι $\left| f_1(\chi) - f_2(\chi) \right| \leq \sqrt{2}e^{-\chi}$ και να βρείτε την τιμή του ορίου $A = \lim_{\chi\to\infty}\left[f_1(\chi) - f_2(\chi) \right]$.

4. Δίνεται η καμπύλη $\psi_\alpha = \frac{1}{\alpha}\left(-\chi^2 + 2\chi\right)$, α > 0, 0 ≤ χ ≤ 2.

i) Να κάμετε πρόχειρο διάγραμμα της καμπύλης.

ii) Αν $\kappa \in \mathbb{N}$ να βρείτε το εμβαδόν E_κ που περικλείεται μεταξύ των καμπυλών $\psi_{2\kappa-1}$ και $\psi_{2\kappa+1}$.

iii) Να βρείτε το $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\mathrm{E}_\kappa$, $\nu \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\mathrm{E}_\kappa$ συγκλίνει και να βρείτε την τιμή της.

5. Δίνονται τα σημεία Α(2, 0, 0), Β(2, 2, 0), Γ(0, 2, 0), Δ(1, 1, 3) και Ο η αρχή των αξόνων.

i) Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση της ευθείας ΒΔ.

ii) Να δείξετε ότι η ΒΔ τέμνει τον άξονα Oz και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ε της τομής τους.

iii) Να δείξετε ότι τα επίπεδα xOz, yOz, xOy, ΑΒΔ και ΓΒΔ σχηματίζουν πυραμίδα με βάση το τετράπλευρο ΟΑΒΓ. Στη συνέχεια να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας.

iv) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ΒΔ με το επίπεδο της βάσης της πυραμίδας.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

1. $\left(\chi^2 + \frac{1}{\chi}\right)^8$, $\qquad \mathrm{T}_{\kappa+1} = \binom{8}{\kappa}\left(\chi^2\right)^{8-\kappa}\left(\frac{1}{\chi}\right)^{\kappa} = \binom{8}{\kappa}\chi^{16-3\nu}$ $\Rightarrow$ 16 – 3κ =10 $\Rightarrow$ κ=2

άρα ο συντελεστής του χ^{10} είναι $\binom{8}{2}$ = **28**

2. $\psi = \alpha\chi + \beta\ln\chi$, Α(1,2) $\Rightarrow$ ψ(1) =2 $\Rightarrow$ $2 = \alpha + \beta\cancel{\ln 1}^{0}$ $\Rightarrow$ **α = 2**

$\frac{d\psi}{d\chi} = \alpha + \frac{\beta}{\chi}$ ακρότατο στο χ=1 $\Rightarrow$ 0 = α + β $\Rightarrow$ 0 = 2 + β $\Rightarrow$ β = –2

$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = -\frac{\beta}{\chi^2}$ στο χ = 1 $\Rightarrow$ $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = -\frac{-2}{1^2} = 2 > 0$ άρα έχουμε <u>min</u> στο Α

3. (κ): $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 4\psi = 0$ $\Rightarrow$ g=-1, f=2, c=0, K(-g,-f) $\Rightarrow$ K(1,-2)

$R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ $\Rightarrow$ $R = \sqrt{1+4}$ $\Rightarrow$ $R = \sqrt{5}$

Οι εφαπτόμενες του κύκλου που είναι παράλληλες προς την χ+2ψ=5 έχουν τη μορφή χ+2ψ=m.

Η διακρίνουσα του συστήματος $\begin{cases} \chi + 2\psi = m \\ \chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 4\psi = 0 \end{cases}$ πρέπει να είναι 0.

$\Rightarrow \left(m - 2\psi\right)^2 + \psi^2 - 2\left(m - 2\psi\right) + 4\psi = 0 \Rightarrow 5\psi^2 + 4\left(2 - m\right)\psi + m^2 - 2m = 0 \overset{\Delta=0}{\Rightarrow}$

$16\left(2 - m\right)^2 + 20\left(m^2 - 2m\right) = 0 \Rightarrow 4\left(2 - m\right)\left(m + 8\right) = 0 \Rightarrow m = 2$ ή $m = -8$

άρα η ζητούμενες εξισώσεις είναι $\begin{matrix} \chi + 2\psi = 2 \\ \chi + 2\psi = -8 \end{matrix}$.

4. i) $\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$

ii) $\mathbf{A}^{2001} \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\left(A^2\right)^{1000} \cdot A\right) \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left((I)^{1000} \cdot A\right) \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\mathbf{(I \cdot A) \cdot M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A \cdot M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} =$

$\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$

5. (i) α) $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$ β) $\frac{5!}{2!} = 60$

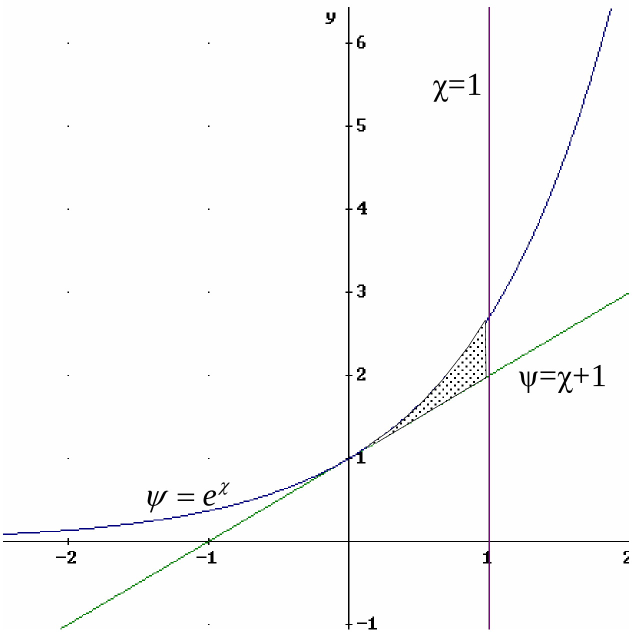
(ii) Αν χρησιμοποιήσω 3Α έχω 1 τρόπο αναγραμματισμού

Αν χρησιμοποιήσω 2Α ή 2Μ και ένα άλλο γράμμα έχω $\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} = 18$ τρόπους αναγραμματισμού.

Αν χρησιμοποιήσω 3 διαφορετικά γράμματα έχω $\binom{4}{3} \cdot 3! = 24$ τρόπους αναγραμματισμού

Σύνολο: **43 τρόποι**

6. $\psi = e^{\chi} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = e^{\chi}$ στο $\chi = 0 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = 1 \Rightarrow$



εξίσωση εφαπτομένης (ψ-1)=1(χ-0)

$\Rightarrow \psi - 2 = \chi \Rightarrow \boldsymbol{\psi = \chi + 1}$

$V = \pi \int_0^1 \left[e^{2\chi} - (\chi+1)^2 \right] d\chi \Rightarrow$

$= \pi \left[\frac{e^{2\chi}}{2} - \frac{(\chi+1)^3}{3} \right]_0^1$

$= \pi \left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right]$

$= \frac{\pi}{6}\left(3e^2 - 17\right)$

7. $\chi \frac{d\psi}{d\chi} + 2\psi = 3\chi + \eta\mu\chi, \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} + \frac{2}{\chi}\psi = 3 + \frac{\eta\mu\chi}{\chi}$ (1)

παράγοντας ολοκλήρωσης $I = e^{\int \frac{2d\chi}{\chi}} = e^{2\ln\chi} = \chi^2$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \chi^2 \frac{d\psi}{d\chi} + 2\chi\psi = 3\chi^2 + \chi\eta\mu\chi \Rightarrow \psi\chi^2 = \int\left(3\chi^2 + \chi\,\eta\mu\chi\right)d\chi \Rightarrow$$

$$\psi\chi^2 = \chi^3 + \int \chi\,\eta\mu\chi\, d\chi \Rightarrow \psi\chi^2 = \chi^3 + \int \chi\, d\left(-\sigma\upsilon\nu\chi\right)$$

$$\psi\chi^2 = \chi^3 - \chi\,\sigma\upsilon\nu\chi + \int \sigma\upsilon\nu\chi\, d\chi \Rightarrow \psi\chi^2 = \chi^3 - \chi\,\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi + C \Rightarrow$$

$$\psi = \chi - \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{\chi^2} + \frac{C}{\chi^2}$$

8. Μ: ενδεχόμενο να έχει κάποιος άδεια μοτοσικλέτας
Α: ενδεχόμενο να έχει κάποιος άδεια αυτοκινήτου
P(M) = 0,4, P(A΄)=0,45 , $P(A/M) = 0,375$

P(A) = 1 – P(A΄) $\Rightarrow$ P(A) = 1 – 0,45 $\Rightarrow$ P(A) = 0,55

(i) $P(B) = P(A \cap M) = P(A/M) \cdot P(M) = (0,375) \cdot (0,4) = 0,15$

(ii) $P(\Gamma) = P(A - M) = P(A) - P(A \cap M) = 0,55 - 0,15 = 0,40$

9. $f(\chi) = \int_{\sigma\upsilon\nu\chi}^{\chi} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\tau o\xi\varepsilon\phi t\right]_{\sigma\upsilon\nu\chi}^{\chi} = \tau o\xi\varepsilon\phi\chi - \tau o\xi\varepsilon\phi\left(\sigma\upsilon\nu\chi\right)$

i) $f'(\chi) = \frac{1}{1+\chi^2} + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu^2\chi}$

ii) $f''(\chi) = \frac{-2\chi}{\left(1+\chi^2\right)^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\chi\right) + 2\sigma\upsilon\nu\chi\,\eta\mu^2\chi}{\left(1+\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)^2}$

$f(0) = -\frac{\pi}{4}$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow$ $\boxed{f(\chi) = -\frac{\pi}{4} + \chi + \frac{\chi^2}{4} + \ldots}$

10. (i) $\psi^2 = \chi \Rightarrow 2\psi \cdot \psi' = 1 \overset{A(1,1)}{\Rightarrow} \lambda_{\varepsilon\phi} = \frac{1}{2}$.

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο A(1,1) : $\psi - 1 = \frac{1}{2}(\chi - 1) \Rightarrow \boxed{2\psi = \chi + 1}$

(ii) $\begin{pmatrix}\chi'\\ \psi'\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}\chi'\\ \psi'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi'\\ \psi'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\chi' - 2\psi'\\ \psi'\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\chi &= \chi' - 2\psi'\\ \psi &= \psi'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned}&\kappa_1: \ (\psi')^2 = \chi' - 2\psi' \Rightarrow \underline{\psi^2 = \chi - 2\psi}\\ &\varepsilon_1: \ 2\psi' = \chi' - 2\psi' + 1 \Rightarrow 4\psi' = \chi' + 1 \Rightarrow \underline{4\psi = \chi + 1}\end{aligned}$

Το σύστημα $\left.\begin{aligned}\psi^2 - 2\psi &= \chi\\ 4\psi - 1 &= \chi\end{aligned}\right\} \Rightarrow \psi^2 - 2\psi = 4\psi + 1 \Rightarrow \psi^2 - 2\psi + 1 = 0 \Rightarrow (\psi - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow$ ψ=1 έχει μόνο μια λύση (Δ=0) $\Rightarrow$ (ε_1) εφαπτομένη της (κ_1).

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. (i) f(x) = $\dfrac{\chi^2-\chi-2}{\chi+2}$, Πεδίο ορισμού: $\chi \in \mathbb{R}-\{-2\}$

Τομές με άξονες: $\chi=0 \Rightarrow \psi=-1 \Rightarrow (0,-1)$

$\psi=0 \Rightarrow \chi^2-\chi-2=0 \Rightarrow \chi=-1, \chi=2 \Rightarrow (-1,0)$, $(2,0)$

Κατακόρυφη ασύμπτωτη: $\chi=-2$, Πλάγια ασύμπτωτη: $\psi=\chi-3$

$$\begin{array}{r|l} \chi^2-\chi-2 & \chi+2 \\ \underline{-\chi^2-2\chi} & \chi-3 \\ -3\chi-2 & \\ \underline{3\chi+6} & \\ 4 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(\chi)=\chi^2-\chi-2=\chi-3+\frac{4}{\chi+2}$$

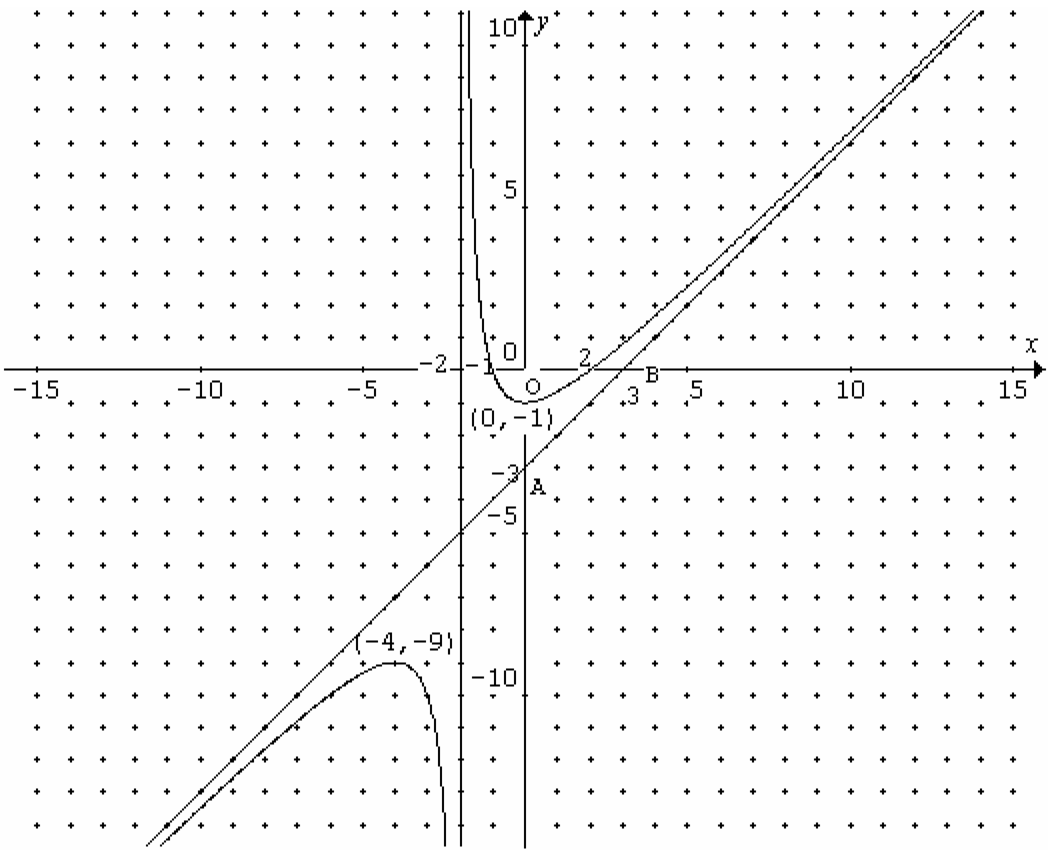
$f'(\chi)=\dfrac{\chi^2+4\chi}{(\chi+2)^2}=0 \Rightarrow \chi=0$ ή $\chi=-4$, $\chi\neq-2$

χ	$-\infty$	-4		-2		0		$+\infty$
$f'(\chi)$	+	0	−	‖	−	0	+	
$f(\chi)$	↗		↘	‖	↘		↗	

$\chi=-4 \Rightarrow \psi_{max}=-9 \Rightarrow \max(-4,-9)$

$\chi=0 \Rightarrow \psi_{min}=-1 \Rightarrow \min(0,-1)$

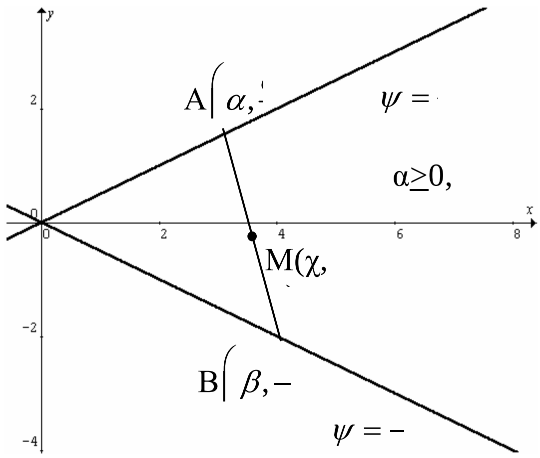
(ii) {-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8}



(iii) $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\overset{\Delta}{\mathrm{AOB}}} + \int_0^2 \left(\chi - 3 + \frac{4}{\chi+2} \right) d\chi = \frac{9}{2} + \left[\frac{\chi^2}{2} - 3\chi + 4\ln|\chi+2| \right]_0^2 =$

$\frac{9}{2} + 2 - 6 - 4\ln 4 - 4\ln 2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2} + 4\ln 2$ τ.μ.

2. $\mathrm{M}(\chi,\psi) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{4} \right)$



$$\mathrm{E}_{\mathrm{OAB}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2} & 1 \\ \beta & -\frac{\beta}{2} & 1 \end{vmatrix} \right| = 2$$

$\Rightarrow \left| -\frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} \right| = 4 \Rightarrow |\alpha\beta| = 4 \Rightarrow \alpha\beta = 4 \quad (\alpha\beta \geq 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \chi = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \psi = \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \alpha\beta = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} \alpha + \beta = 2\chi & \\ \underline{\alpha - \beta = 4\psi} & \\ 2\alpha = 2\chi + 4\psi & \Rightarrow \alpha = \chi + 2\psi \\ 2\beta = 2\chi - 4\psi & \Rightarrow \beta = \chi - 2\psi \end{array}$$

$\overset{\alpha\beta=4}{\Rightarrow} (\chi + 2\psi)\cdot(\chi - 2\psi) = 4 \Rightarrow \chi^2 - 4\psi^2 = 4$ Επειδή $\chi \geq 0$, έχω ένα σκέλος υπερβολής. Οι δύο ευθείες $\psi = \pm\frac{\chi}{2}$ γράφονται $\chi^2 - 4\psi^2 = 0$ και συμπίπτουν με τις ασύμπτωτες τις υπερβολής.

3. $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + 2\frac{d\psi}{d\chi} + 2\psi = 2\chi + 2 \quad (1)$

(i) $m^2 + 2m + 2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = 1 \pm i \Rightarrow \psi_\sigma = e^{-\chi}\left(\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\chi + \mathrm{B}\eta\mu\chi\right)$

$\psi_\varepsilon = \Gamma\chi + \Delta \Rightarrow \quad \frac{d\psi}{d\chi} = \Gamma, \quad \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = 0$

$\Rightarrow 0 + 2\Gamma + 2(\Gamma\chi + \Delta) = 2\chi + 2 \Rightarrow \Gamma = 1, \; \Delta = 0$

$\Rightarrow \psi_\varepsilon = \chi$. Η γενική λύση: $\psi = \psi_\sigma + \psi_\varepsilon \Rightarrow \boxed{\psi = e^{-\chi}\left(\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\chi + \mathrm{B}\eta\mu\chi\right) + \chi} \quad (2)$

(ii) για $\chi=0$, $\psi=1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mathrm{A}=1$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=-e^{-\chi}\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\chi+\mathrm{B}\eta\mu\chi+e^{-\chi}\left(-\mathrm{A}\eta\mu\chi+\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\chi\right)+1 \quad , \quad \chi=0,\ \frac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow$$

$$-\mathrm{A}+\mathrm{B}+1=0 \overset{\mathrm{A}=1}{\Rightarrow} \mathrm{B}=0 \Rightarrow \text{ειδική λύση: } \boxed{\psi=e^{-\chi}\sigma\upsilon\nu\chi+\chi}$$

(iii) $\quad f_1(\chi)=e^{-\chi}\sigma\upsilon\nu\chi+\chi\,,\quad f_2(\chi)=e^{-\chi}\eta\mu\chi+\chi$

$$|\psi_1-\psi_2|=e^{-\chi}\,|\sigma\upsilon\nu\chi-\eta\mu\chi|=e^{-\chi}\left|\sigma\upsilon\nu\chi+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)\right|$$

$$= e^{-\chi}\left|2\sigma\upsilon\nu\frac{\chi+\frac{\pi}{2}+\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\cancel{\chi}-\frac{\pi}{2}-\cancel{\chi}}{2}\right|=$$

$$e^{-\chi}\left|2\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right|=e^{-\chi}\sqrt{2}\left|\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Επειδή $-1\le\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\le 1,\ \forall\chi\in\mathbb{R}\,,\Rightarrow -1{\cdot}e^{-\chi}\sqrt{2}\le e^{-\chi}\sqrt{2}{\cdot}\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\le 1{\cdot}e^{-\chi}\sqrt{2}$

$$\Rightarrow\ -e^{-\chi}\sqrt{2}\le e^{-\chi}\sqrt{2}{\cdot}\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\le e^{-\chi}\sqrt{2}\Rightarrow\left|e^{-\chi}\sqrt{2}{\cdot}\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le e^{-\chi}\sqrt{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\left|f_1(\chi)-f_2(\chi)\right|\le e^{-\chi}\sqrt{2}}\ (3)$$

$$\mathrm{A}=\lim_{\chi\to\infty}\left[f_1(\chi)-f_2(\chi)\right]$$

$$(3)\Rightarrow\left|f_1(\chi)-f_2(\chi)\right|\le e^{-\chi}\sqrt{2}\ \Rightarrow\ -e^{-\chi}\sqrt{2}\le f_1(\chi)-f_2(\chi)\le e^{-\chi}\sqrt{2}\ \Rightarrow$$

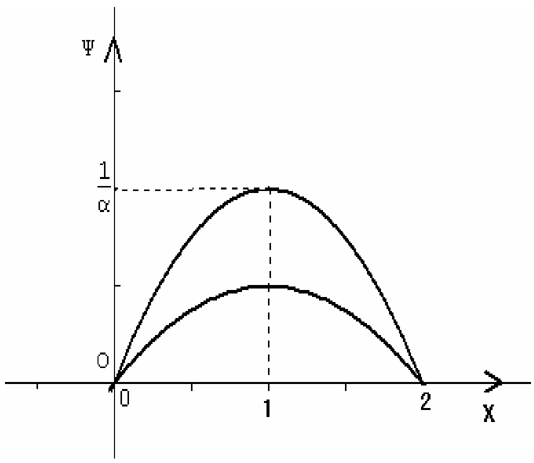
$$\Rightarrow\ \lim_{\chi\to\infty}\left(-e^{-\chi}\sqrt{2}\right)\le\lim_{\chi\to\infty}\left[f_1(\chi)-f_2(\chi)\right]\le\lim_{\chi\to\infty}\left(e^{-\chi}\sqrt{2}\right)\Rightarrow\ 0\le\lim_{\chi\to\infty}\left[f_1(\chi)-f_2(\chi)\right]\le 0$$

$$\Rightarrow\ \lim_{\chi\to\infty}\left[f_1(\chi)-f_2(\chi)\right]=0$$

4. (i) $\psi_\alpha=\frac{1}{\alpha}\left(-\chi^2+2\chi\right)$, $\alpha>0$, $0\le\chi\le 2$.

$\psi=0\Rightarrow -\chi^2+2\chi=0\Rightarrow \chi\,(2-\chi)=0\Rightarrow$

$\chi=0$ ή $\chi=2\Rightarrow$ (0,0) , (2 , 0)



$$\frac{d\psi_\alpha}{d\chi}=\frac{1}{\alpha}\left(-2\chi+2\right)=0 \quad\Rightarrow\ \chi = 1\ ,\quad \frac{d^2\psi}{dx^2}=-\frac{2}{a}<0\ \Rightarrow\ \max\left(1,\frac{1}{a}\right)$$

(ii) $$E_\kappa=\int_0^2\left(\psi_{2\kappa-1}-\psi_{2\kappa+1}\right)d\chi=\int_0^2\left(\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa+1}\right)\left(-\chi^2+2\chi\right)d\chi=$$

$$=\left(\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa+1}\right)\left[-\frac{\chi^3}{3}+\chi^2\right]_0^2=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa+1}\right)$$

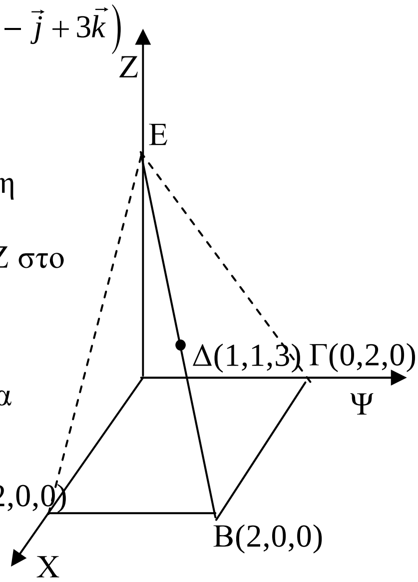
(iii) $$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\mathrm{E}_\kappa=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa+1}\right)\right]=\frac{4}{3}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa+1}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\ \dots\ +\cancel{\frac{1}{2\nu-1}}-\frac{1}{2\nu+1}\right)=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2\nu+1}\right)$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\mathrm{E}_\kappa=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\mathrm{E}_\kappa=\lim_{\nu\to\infty}\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2\nu+1}\right)=\frac{4}{3}.$$ Άρα η σειρά συγκλίνει.

5.

i) ΒΔ: $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}\left(-1,-1,3\right)$, Β(2,2,0) $\Rightarrow \vec{r}=2\vec{i}+2\vec{j}+\lambda\left(-\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)$



ii) Η ευθεία ΟΖ έχε εξίσωση $\vec{r}=\mu\vec{k}$

Το σύστημα $\chi=2-\lambda,\ \psi=2-\lambda,\ \psi=2-\lambda$ έχει λύση

λ = 2, μ =6 άρα η ευθεία ΒΔ συναντά τον άξονα ΟΖ στο

σημείο Ε(0,0,6)

iii) Το σημείο Ε βρίσκεται πάνω στον άξονα ΟΖ άρα

βρίσκεται και πάνω στα επίπεδα ΧΟΖ, ΨΟΖ.

Το σημείο Ε βρίσκεται πάνω στην ευθεία ΒΔ άρα

βρίσκεται και πάνω στα επίπεδα ΑΒΔ, ΓΒΔ. Το σημείο Ε είναι εκτός του επιπέδου ΧΟΨ. Άρα το Ε είναι κορυφή της πυραμίδας Ε.ΟΑΒΓ με βάση πάνω στο ΧΟΨ. Το ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο με πλευρά 2 μον. $\Rightarrow$ $E_{OAB\Gamma}$ = 4 τετρ. μον.

ΟΕ $\perp$ (ΟΑΒΓ) $\Rightarrow$ άρα (ΟΕ) = 6 μον. είναι το ύψος της πυραμίδας .

$V=\frac{1}{3}E_B\cdot\upsilon=\frac{1}{3}\cdot4\cdot6$ =8 κυβ. μονάδες.

iv) $\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\widehat{\mathrm{OBE}} = \dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BE}} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{44}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

<u>ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.)</u>

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΙ Ιούνιος 2000

Χρόνος: 2 ώρες 30 λεπτά

Από τα 6 ζητήματα να λύσετε τα 4.

<u>Ζήτημα 1ο</u>

α) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης ημ (2χ + 30°) – συν (χ - 12°) = 0 (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $2συν^2χ – 5ημχ + 1 = 0$ που βρίσκονται στο διάστημα $0° \leq χ < 360°$

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες

(ι) $\dfrac{συν2β - συν2α}{ημ2α + ημ2β} = εφ(α - β)$ (ιι) συν4θσυν3θ – ημ8θημθ = συν5θσυν4θ

(Μονάδες 9)

<u>Ζήτημα 2º</u>

α) Να δείξετε ότι: $(ημ2θ+συν2θ)^2 + (ημ2θ-συν2θ)^2 – 2συν2θ = 4ημ^2 θ$ (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η τριγωνομετρική εξίσωση

$ημ(θ+60°) = 2ημθ$ για $θ \neq 180^0κ+90°$, $κ \in \mathbb{Z}$ μετασχηματίζεται στην εξίσωση $εφθ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

και ακολούθως να βρείτε η γενική ης λύση. (Μονάδες 8)

γ) (ι) Να δείξετε ότι $\dfrac{1-εφ^2θ}{1+εφ^2θ} = συν2θ$

(ιι) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα που αποδείξατε στο (ι), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να δείξετε ότι: $\dfrac{1}{συν2θ} + εφ2θ = εφ(θ + 45°)$ και στη συνέχεια να βρείτε η γενική λύση ης εξίσωσης: $\dfrac{1}{συν2θ} + εφ2θ = εφ4θ$

(Μονάδες 9)

<u>Ζήτημα 3º</u>

α) Κύβος και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχουν τον ίδιο όγκο. Η ακμή του κύβου είναι 6 cm και το ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι 12 cm.

Αν η μία πλευρά της βάσης του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι διπλάσια της άλλης να βρείτε:

(ι) τον όγκο του κύβου

(ιι) τις διαστάσεις της βάσης του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

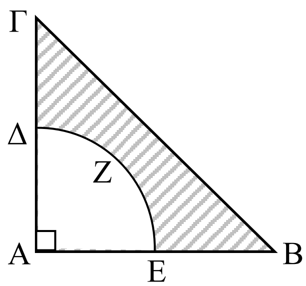
ιιι) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. (Μονάδες 8)

(β) Η ακτίνα R και το ύψος υ ορθού κυκλικού κυλίνδρου ικανοποιούν τις σχέσεις R+υ=9 και υ>R. Αν το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $E_K=40π\ cm^2$, να βρείτε:

(ι) το μήκος της ακτίνας R και του ύψους υ του κυλίνδρου.

(ιι) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του κυλίνδρου. (Μονάδες 8)

γ)



Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90°$ και (ΑΒ)=(ΑΓ)=4α cm. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΕ μήκους 2α cm γράψαμε το τόξο ΕΖΔ. Το σχήμα στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά ΑΓ. Να βρείτε συναρτήσει του α το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από το γραμμοσκιασμένο χωρίο.

(Μονάδες 9)

<u>Ζήτημα 4ο</u>

α) Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2α cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_{\pi\alpha\rho} = 68\alpha^2 \text{ cm}^2$. Να βρείτε συναρτήσει. του α

(ι) το ύψος του πρίσματος

(ιι) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος

(ιιι) τον όγκο του πρίσματος

(Μονάδες 8)

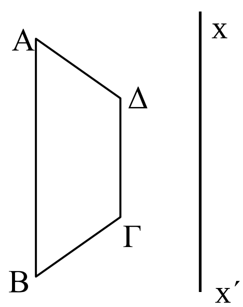
β) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 8cm και παράπλευρη ακμή $4\sqrt{5}$ cm. Να βρείτε:

(ι) το μήκος του ύψους υ και του παράπλευρου ύψους h της πυραμίδας.

(ιι) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

(Μονάδες 8)

γ)



Στο σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις (ΑΒ) = 4α cm, (ΓΔ) 2α cm και ύψος α cm. Το τραπέζιο στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα **χ΄χ** που είναι παράλληλος προς την πλευρά ΔΓ και απέχει από αυτή απόσταση α cm. Να βρείτε συναρτήσει του α το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

(Μονάδες 9)

<u>Ζήτημα 5º</u>

α) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 \left(5\chi^4 - \frac{3}{\chi^2} + 2\right) d\chi$ (Μονάδες 8)

β) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{\chi^2 + 1}$

(ι) Να δείξετε ότι $\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{2\chi^2 - 2}{\left(\chi^2 + 1\right)^2}$

(ιι) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατά της (μέγιστο και ελάχιστο)

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \chi^2 + 1$

(ι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο Α αυτής που έχει τετμημένη χ=1 (ιι) Η εφαπτομένη της καμπύλης σε σημείο $B(\chi_1,\psi_1)$ αυτής έχει συντελεστή κατεύθυνσης $\lambda=-\frac{1}{2}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

(Μονάδες 9)

ΖΗΤΗΜΑ 6º

α) Αν $\psi=\chi^3+\frac{1}{\chi^3}$ να δείξετε ότι ισχύει: $\chi^2\frac{d^2\psi}{d\chi^2}+\chi\frac{d\psi}{d\chi}-9\psi=0$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\int\left(1+\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)dx$ (Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+3$

(ι) Αν το σημείο Α(1,4) είναι τοπικό ακρότατο της καμπύλης να δείξετε ότι α = –1 και β=2.

(ιι) Αφού βρείτε και τα σημεία τομής της καμπύλης με τους άξονες των συντεταγμένων να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(ιιι) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των χ.

(Μονάδες 9)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1º

(α) $\eta\mu(2\chi+30°)-\sigma\upsilon\nu(\chi-12°)=0 \Rightarrow \eta\mu(2\chi+30°)=\sigma\upsilon\nu(\chi-12°) \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu(90°-2\chi-30°)=\sigma\upsilon\nu(\chi-12°) \Rightarrow= \sigma\upsilon\nu(60°-2\chi)=\sigma\upsilon\nu(\chi-12°) \Rightarrow$

$60°-2\chi=360^o\kappa\pm(\chi-12°) \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

(ι) $60°-2\chi=360°\kappa+\chi-12° \Rightarrow -3\chi=360°\kappa-72 \Rightarrow \boxed{\chi=-120°\kappa+24° \ , \ \kappa\in\mathbb{Z}}$

(ιι) $60°-2\chi=360°\kappa-\chi+12° \Rightarrow -\chi=360°\kappa+48° \Rightarrow \boxed{\chi=-360°\kappa+48° \ , \ \kappa\in\mathbb{Z}}$

(β) $2\sigma\upsilon\nu^2\chi-5\eta\mu\chi+1=0 \Rightarrow 2(1-\eta\mu^2\chi)-5\eta\mu\chi+1=0 \Rightarrow 2-2\eta\mu^2\chi-5\eta\mu\chi+1=0 \Rightarrow$

$2\eta\mu^2\chi+5\eta\mu\chi-3=0 \Rightarrow (2\eta\mu\chi+1)(\eta\mu\chi+3)=0 \Rightarrow$

(ι) $2\eta\mu\chi-1=0 \Rightarrow \eta\mu\chi=\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\chi=\eta\mu30° \Rightarrow$

$\chi=360°\kappa+30°$ ή $\chi=360°\kappa+150°$

$\kappa=0 \Rightarrow \boxed{\chi=30°}$, $\boxed{\chi=150°}$.

$\kappa=1 \Rightarrow \chi>360°$

(ιι) $\eta\mu\chi+3=0 \Rightarrow \eta\mu\chi=-3$ *Αδύνατη εξίσωση*

(γ)

(ι) $$\frac{\sigma\upsilon\nu2\beta-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{\eta\mu2\alpha+\eta\mu2\beta}=\frac{\cancel{2}\,\eta\mu\frac{2\beta+2\alpha}{2}\eta\mu\frac{2\alpha-2\beta}{2}}{\cancel{2}\,\eta\mu\frac{2\alpha+2\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{2\alpha-2\beta}{2}}=\frac{\cancel{\eta\mu(\alpha+\beta)}\eta\mu(\alpha-\beta)}{\cancel{\eta\mu(\alpha+\beta)}\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}=\varepsilon\phi(\alpha-\beta)$$

(ιι) $\sigma\upsilon\nu4\theta\sigma\upsilon\nu3\theta-\eta\mu8\theta\eta\mu\theta=$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\sigma\upsilon\nu(4\theta+3\theta)+\sigma\upsilon\nu(4\theta-3\theta)\right]-\left[\sigma\upsilon\nu(8\theta-\theta)-\sigma\upsilon\nu(8\theta+\theta)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cancel{\sigma\upsilon\nu 7\theta} + \sigma\upsilon\nu\theta - \cancel{\sigma\upsilon\nu 7\theta} + \sigma\upsilon\nu 9\theta\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{9\theta+\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{9\theta-\theta}{2}$$

$$= \sigma\upsilon\nu 5\theta\,\sigma\upsilon\nu 4\theta$$

ΖΗΤΗΜΑ 2º

(α) $(\eta\mu 2\theta+\sigma\upsilon\nu 2\theta)^2 + (\eta\mu 2\theta-\sigma\upsilon\nu 2\theta)^2 - 2\sigma\upsilon\nu 2\theta =$

$$= \underline{\eta\mu^2 2\theta + \sigma\upsilon\nu^2 2\theta} + \cancel{2\sigma\upsilon\nu 2\theta\,\eta\mu 2\theta} + \underline{\eta\mu^2 2\theta + \sigma\upsilon\nu^2 2\theta} - \cancel{2\sigma\upsilon\nu 2\theta\,\eta\mu 2\theta} - 2\sigma\upsilon\nu 2\theta$$

$$= 1 + 1 - 2\sigma\upsilon\nu 2\theta = 2(1 - \sigma\upsilon\nu 2\theta) = 2\left(1-1+2\eta\mu^2\theta\right) = 4\eta\mu^2\theta$$

(β) $\eta\mu(\theta+60°) = 2\eta\mu\theta$ για $\theta \neq 180^0\kappa+90°$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu 60° + \eta\mu 60°\sigma\upsilon\nu\theta = 2\eta\mu\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\eta\mu\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\theta = 2\eta\mu\theta \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3\eta\mu\theta = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\theta$ Διαιρώ με $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$ $(\theta \neq 180^0\kappa+90°$, $\kappa \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow 3\varepsilon\phi\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\phi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi 30° \Rightarrow \boxed{\theta = 180°\kappa + 30°} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

(γ) (ι)

$$\frac{1-\varepsilon\phi^2\theta}{1+\varepsilon\phi^2\theta} = \frac{1-\dfrac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}{1+\dfrac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\theta-\eta\mu^2\theta}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}}{\dfrac{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta}^{\,1}}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}} = \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta = \sigma\upsilon\nu 2\theta$$

(ιι)

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\theta} + \varepsilon\phi 2\theta \overset{(\iota)}{=} \frac{1+\varepsilon\phi^2\theta}{1-\varepsilon\phi^2\theta} + \frac{2\varepsilon\phi\theta}{1-\varepsilon\phi^2\theta} = \frac{1+\varepsilon\phi^2\theta+2\varepsilon\phi\theta}{1-\varepsilon\phi^2\theta} = \frac{\left(1+\varepsilon\phi\theta\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\left(1+\varepsilon\phi\theta\right)}\left(1-\varepsilon\phi\theta\right)} =$$

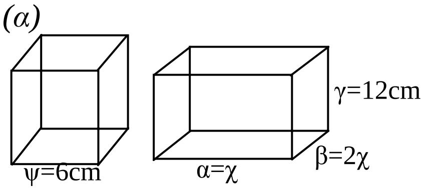
$$= \frac{1+\varepsilon\phi\theta}{1-\varepsilon\phi\theta} = \frac{1+\varepsilon\phi 45°\varepsilon\phi\theta}{1-\varepsilon\phi 45°\varepsilon\phi\theta} = \boxed{\varepsilon\phi\left(\theta+45°\right)}$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\theta} + \varepsilon\phi 2\theta = \varepsilon\phi 4\theta \overset{(\iota\iota)}{\Rightarrow} \varepsilon\phi\left(\theta+45°\right) = \varepsilon\phi 4\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta + 45° = 180°\kappa + 4\theta \Rightarrow 3\theta = -180°\kappa + 45° \Rightarrow \boxed{\theta = -60°\kappa + 15°} \text{ , } \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΖΗΤΗΜΑ 3º

(α)



(ι) $V_\kappa = \psi^3 = 6^3 = 216\,cm^3$, $\Rightarrow \boxed{V_K = 216\ cm^3}$

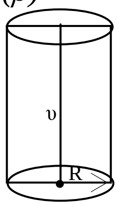
(ιι) $V_\Pi = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma \Rightarrow 216 = \chi\cdot 2\chi\cdot 12 \Rightarrow \chi^2 = 9 \Rightarrow \chi = 3\ cm$

$\boxed{a = 3m \quad , \quad \beta = 6cm}$.

(ιιι) $E_K = 6\psi^2 \Rightarrow E_K = 6\cdot 6^2 \Rightarrow \boxed{E_K = 216\,cm^2}$

$$E_{\Pi\alpha\rho} = 2\left(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha\right) \Rightarrow E_{\Pi\alpha\rho} = 2\left(3\cdot 6 + 6\cdot 12 + 12\cdot 3\right) \Rightarrow \boxed{E_{\Pi\alpha\rho} = 252\,cm^2}$$

(β)



(ι) $R+\upsilon=9 \quad (\upsilon> R), \quad E_K=40\pi\ cm^2 \Rightarrow 2\pi R \upsilon = 40\pi \Rightarrow R\upsilon = 20$

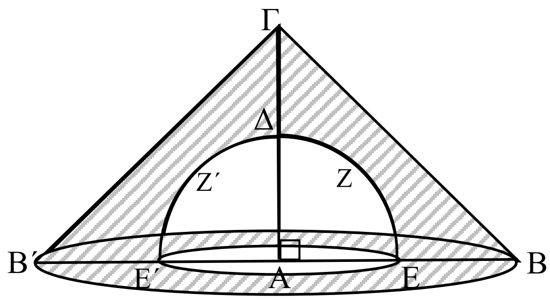
$$\begin{matrix} R+\upsilon=9 \\ R\upsilon=20 \end{matrix} \Rightarrow \chi^2-9\chi+20=0 \Rightarrow (\chi-4)(\chi-5)=0 \Rightarrow \chi = 4 \ \text{ή}\ \chi = 5 \quad (\upsilon>R) \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = 5cm}\ ,\ \boxed{R = 4cm}$$

(ιι) $E_{o\lambda} = E_K + 2\pi R^2 \Rightarrow E_{o\lambda} = 40\pi + 2\pi 4^2 \Rightarrow \boxed{E_{o\lambda} = 72\pi\ cm^2}$

$V = \pi R^2\upsilon \Rightarrow V = \pi 4^2\cdot 5 \Rightarrow \boxed{V = 80\pi\ cm^3}$

(γ)



$\hat{A} = 90°$, $(AB)=(A\Gamma)=4a\ cm.$ $(AE)=2\alpha$

$(B\Gamma)^2=(A\Gamma)^2+(AB)^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2=16\alpha^2+16\alpha^2 \Rightarrow$

$(B\Gamma)^2=32\alpha^2 \Rightarrow B\Gamma = 4\alpha\sqrt{2}$

$V_{o\lambda} = V_{K\omega\nu o\upsilon} - V_{H\mu\iota\sigma\varphi\alpha\iota\rho\iota o\upsilon}$

$V_{o\lambda} = \frac{1}{3}\pi(AB)^2(A\Gamma) - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi(AE)^3$

$V_{o\lambda} = \frac{1}{3}\pi(4\alpha)^2(4\alpha) - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi(2\alpha)^3$

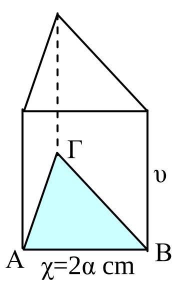
$$V_{o\lambda} = \frac{64\pi\alpha^3}{3} - \frac{16\pi\alpha^3}{3} \Rightarrow \boxed{V_{o\lambda} = 16\pi\alpha^3\ \ cm^3}$$

$$E_{\sigma\kappa} = E_{\kappa.\kappa\omega\nu} + E_{\eta\mu\iota\sigma\varphi} + E_{\delta\alpha\kappa\tau} \Rightarrow E_{\sigma\kappa} = \pi(AB)(B\Gamma) + \frac{1}{2}4\pi(AE)^2 + \pi(AB)^2 - \pi(AE)^2$$

$$E_{\sigma\kappa} = \pi(AB)(B\Gamma) + \pi(AE)^2 + \pi(AB)^2 \Rightarrow E_{\sigma\kappa} = \pi(4\alpha)\left(4\alpha\sqrt{2}\right) + \pi(2\alpha)^2 + \pi(4\alpha)^2 \Rightarrow$$

$$E_{\sigma\kappa} = 16\pi\alpha^2\sqrt{2} + 4\pi\alpha^2 + 16\pi\alpha^2 \Rightarrow E_{\sigma\kappa} = 16\pi\alpha^2\sqrt{2} + 20\pi\alpha^2 \Rightarrow \boxed{E_{\sigma\kappa} = 4\pi\alpha^2\left(4\sqrt{2}+5\right)cm^2}$$

<u>ΖΗΤΗΜΑ 4º</u>



(α)

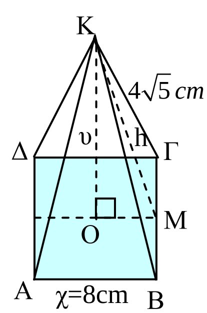
(ι) $E_{\pi\alpha\rho} = 60\alpha^2\ cm^2$, $E_{\pi\alpha\rho} = \Pi_B\cdot\upsilon \Rightarrow 60\alpha^2 = 3\cdot 2\alpha\cdot\upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon = 10\alpha\ cm}$

(ιι) $E_B = \frac{\chi^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\alpha)^2\sqrt{3}}{4} = \alpha^2\sqrt{3}$

$E_{o\lambda} = E_{\pi\alpha\rho} + 2E_B \Rightarrow E_{o\lambda} = 60\alpha^2 + 2\alpha^2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{E_{o\lambda} = 2\alpha^2\left(30+\sqrt{3}\right)cm^2}$

(ιιι) $V = E_B\cdot\upsilon \Rightarrow V = \alpha^2\sqrt{3}\cdot 10\alpha \Rightarrow \boxed{V = 10\alpha^3\sqrt{3}\ cm^3}$

(β)



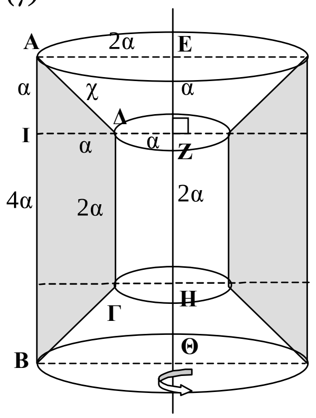
$\overset{\Delta}{KM\Gamma}: (K\Gamma)^2 = (KM)^2 + (M\Gamma)^2 \Rightarrow \left(4\sqrt{5}\right)^2 = h^2 + 4^2 \Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow \boxed{h = 8\ cm}$

$\overset{\Delta}{KO\Gamma}: (KM)^2 = (KO)^2 + (MO)^2 \Rightarrow (8)^2 = \upsilon^2 + 4^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 48 \Rightarrow \boxed{\upsilon = 4\sqrt{3}\ cm}$

$$E_{o\lambda} = E_\Pi + E_B = \frac{\Pi_B\cdot h}{2} + 64 = \frac{32\cdot 8}{2} + 64 = 192 \Rightarrow \boxed{E_{o\lambda} = 192\,cm^2}$$

$$V=\frac{E_B\cdot\upsilon}{3}=\frac{64\cdot4\cdot\sqrt{3}}{3}=\frac{256\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\boxed{V=\frac{256\sqrt{3}}{3}cm^3}$$

(γ)



$$V_{\Sigma\chi\eta\mu.}=V_{\mu\varepsilon\gamma.\kappa\upsilon\lambda}-V_{\mu\iota\kappa\ \kappa\upsilon\lambda.}-2V_{K o\lambda.K\omega\nu o\upsilon}$$

$(\overset{\Delta}{\mathrm{AI\Delta}})$: $\chi^2=\alpha^2+\alpha^2\Rightarrow$

$\chi=\alpha\sqrt{2}$

$$V_{\mu\varepsilon\gamma\ \kappa\upsilon\lambda}=\pi\left(AE\right)^2\cdot AB=\pi\left(2\alpha\right)^2\cdot4\alpha=16\pi\alpha^3$$

$$V_{\mu\iota\kappa\ \kappa\upsilon\lambda}=\pi(\Delta Z)^2\cdot\Delta\Gamma=\pi\left(\alpha\right)^2\cdot2\alpha=2\pi\alpha^3$$

$$V_{K o\lambda.K\omega\nu o\upsilon}=\frac{\pi(\mathrm{EZ})}{3}\left((\mathrm{AE})^2+(\mathrm{AE})(\Delta\mathrm{Z})+(\Delta\mathrm{Z})^2\right)$$

$$=\frac{\pi\alpha}{3}\left(4\alpha^2+2\alpha^2+\alpha^2\right)=\frac{7\pi\alpha^3}{3}$$

$$V_{\Sigma\chi\eta\mu}=16\pi\alpha^3-2\pi\alpha^3-2\cdot\frac{7\pi\alpha^3}{3}=\frac{28\pi\alpha^3}{3}\Rightarrow\boxed{V_{\Sigma\chi\eta\mu.}=\frac{28\pi\alpha^3}{3}cm^3}$$

$$E_{O\lambda.}=E_{K\,M\varepsilon\gamma.K\upsilon\lambda.}+E_{K\,\mu\iota\kappa.\kappa\upsilon\lambda}+2E_{K\,\kappa o\lambda.\kappa\omega\nu o\upsilon}$$

$$=2\pi(\mathrm{AE})(\mathrm{AB})+2\pi(\Delta\mathrm{Z})(\Delta\Gamma)+2\cdot\pi\left[(\mathrm{AE})+(\Delta\mathrm{Z})\right](\mathrm{A}\Delta)$$

$$=2\pi\cdot2\alpha\cdot4\alpha+2\pi\cdot\alpha\cdot2\alpha+2\pi(2\alpha+\alpha)\alpha\sqrt{2}$$

$$=16\pi\alpha^2+4\pi\alpha^2+6\pi\alpha^2\sqrt{2}=20\pi\alpha^2+6\pi\alpha^2\sqrt{2}\Rightarrow\boxed{E_{o\lambda}=2\pi\alpha^2\left(10+3\sqrt{2}\right)cm^2}$$

ΖΗΤΗΜΑ 5^{o}

$$(\alpha)\quad\int_1^2\left(5\chi^4-\frac{3}{\chi^2}+2\right)dx=\int_1^2\left(5\chi^4-3\chi^{-2}+2\right)dx=\left[\chi^5+3\chi^{-1}+2\chi\right]_1^2$$

$$=\left[32+\frac{3}{2}+4\right]-\left[1+3+2\right]=\frac{63}{2}$$

$$(\beta)\ \psi=\frac{\chi^2-2\chi+1}{\chi^2+1},\quad\chi\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{(2\chi-2)\cdot\left(\chi^2+1\right)-\left(\chi^2-2\chi+1\right)\cdot(2\chi)}{\left(\chi^2+1\right)^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2\chi^2-2}{\left(\chi^2+1\right)^2}$$

$$(\gamma)\ \frac{dy}{dx}=0\Rightarrow2\chi^2-2=0\Rightarrow2\left(\chi-1\right)\left(\chi-1\right)=0\Rightarrow\chi=1\ ,\ \chi=-1$$

χ	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
ψ		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$x=-1\Rightarrow\psi=2\Rightarrow\max\left(-1,2\right)$

$x=1\Rightarrow\psi=0\Rightarrow\min\left(1,0\right)$

(γ) (i) $\psi=\chi^2+1,\qquad\chi=1\Rightarrow\psi=2\Rightarrow A\left(1,2\right)$,

$$\frac{dy}{dx}=2\chi\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\phi}=2\cdot1=2\ \Rightarrow\lambda_{\kappa\alpha\theta}=-\frac{1}{2}$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο Α(1,2) $\Rightarrow\psi-2=2(\chi-1)\Rightarrow\psi=2\chi$

Εξίσωση κάθετης στο σημείο Α(1,2) $\Rightarrow\psi-2=-\frac{1}{2}\left(\chi-1\right)\Rightarrow\chi+2\psi=5$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{\varepsilon\phi.\mathrm{B}} = -\dfrac{1}{2} \\ \mathrm{B}(\chi_1, \psi_1) \\ \dfrac{dy}{dx} = 2\chi \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\phi.\mathrm{B}} = 2\chi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\chi_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \chi_1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow \psi_1 = \chi_1^2 + 1 = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16} \Rightarrow \mathrm{B}\left(-\frac{1}{4}, \frac{17}{16}\right)$$

ΖΗΤΗΜΑ 6ο

(α) $\psi = \chi^3 + \dfrac{1}{\chi^3} \Rightarrow \underline{\dfrac{dy}{dx} = 3\chi^2 - 3\chi^{-4}} \Rightarrow \underline{\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6\chi + 12\chi^{-5}}$

$$\chi^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \chi \frac{dy}{dx} - 9\psi = \chi^2\left(6\chi + 12\chi^{-5}\right) + \chi\left(3\chi^2 - 3\chi^{-4}\right) - 9\left(\chi^3 + \chi^{-3}\right)$$

$$= \cancel{6\chi^3} + \cancel{12\chi^{-3}} + \cancel{3\chi^3} - \cancel{3\chi^{-3}} \cancel{-9\chi^3} - \cancel{9\chi^{-3}} = 0$$

(β) $\displaystyle\int\left(1 + \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi\right)dx = \chi - \sigma\upsilon\nu\chi + \int \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi}{2} dx = \chi - \sigma\upsilon\nu\chi + \frac{1}{2}\left(\chi + \frac{\eta\mu 2\chi}{4}\right) + C$

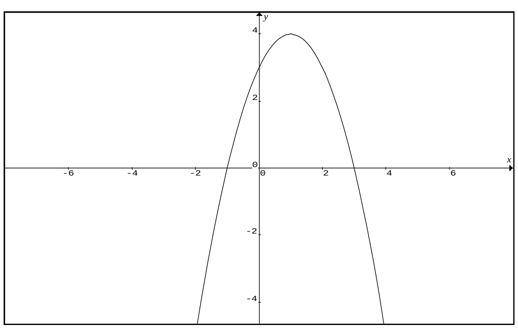
$= \dfrac{3\chi}{2} - \sigma\upsilon\nu\chi + \dfrac{\eta\mu 2\chi}{4} + C$

(γ) (i) $\left.\begin{array}{l} \psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + 3, \\ \mathrm{A}(1,4) \Rightarrow \chi = 1, \psi = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 = \alpha + \beta + 3 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \quad (1)$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = 2\alpha\chi + \beta \\ \dfrac{dy}{dx} = 0,\ \chi = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\alpha + \beta = o \Rightarrow \beta = -2\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha - 2\alpha = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -1}},\ \underline{\underline{\beta = 2}}$

(ιι) $\psi = -\chi^2 + 2\chi + 3$, $\chi = 0 \Rightarrow \psi = 3 \Rightarrow (0,3)$

$\psi = 0 \Rightarrow -\chi^2 + 2\chi + 3 = 0 \Rightarrow \chi^2 - 2\chi - 3 = 0 \Rightarrow (\chi - 3)(\chi + 1) = 0 \Rightarrow \chi = 3$ ή $\chi = -1 \Rightarrow (3,0)$



, $(-1,0)$

$$\mathrm{E} = \int_{-1}^{3} \psi\, dx = \int_{-1}^{3} \left(-\chi^2 + 2\chi + 3\right) dx$$

$$\mathrm{E} = \left[-\frac{\chi^3}{3} + \chi^2 + 3\chi\right]_{-1}^{3} = (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right)$$

$$\mathrm{E} = \frac{32}{3}\ \tau.\mu.$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (για απόφοιτους Τεχνικών Σχολών) Ιούνιος 2000

Χρόνος : 3 ώρες

ΜΕΡΟΣ Α΄ (Να λύσετε όλες τις ασκήσεις).

1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi \to 0} \dfrac{\chi^2 + 2\chi}{\chi + \eta\mu\chi}$

2. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \left(3\chi^2 + \chi - 2\right) dx$

3. Στο ανάπτυγμα του $\left(\chi^2 + \dfrac{1}{\chi}\right)^8$, να βρείτε το συντελεστή του όρου που περιέχει το $\chi.^4$

4. α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu 10\chi + \eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu 7\chi + \sigma\upsilon\nu\chi} = 2\eta\mu 3\chi$

β) Να βρείτε η γενική λύση της εξίσωσης $\dfrac{\eta\mu 10\chi + \eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu 7\chi + \sigma\upsilon\nu\chi} = 1$

5. Δίνεται ο κύκλος $\chi^2 + \psi^2 - 10\chi - 4\psi + 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του.

β) Να δείξετε ότι το σημείο Α(8,6) βρίσκεται πάνω στον κύκλο και να βρείτε την εξίσωση ης εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α.

6. Πόσους άρτιους τριψήφιους αριθμούς μπορείτε να σχηματίσετε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου;

7. Να βρείτε την ειδική λύση ης διαφορικής εξίσωσης $2\psi(\chi+1)\dfrac{d\psi}{d\chi} = 4 + \psi^2$ για την οποία είναι ψ=2 όταν χ=3.

8. Να αναπτύξετε την παράσταση $(8+\chi)^{\frac{1}{3}}$, $-8 < \chi < 8$, σε άθροισμα, κατά τις ανιούσες δυνάμεις του χ, μέχρι και τον όρο που περιέχει το χ^2.

9. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = 2\eta\mu^2\chi - \eta\mu 2\chi$, $0 \le \chi \le \pi$. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η συνάρτηση ψ έχει τοπικά ακρότατα και στη συνέχεια να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα αυτά.

10. Σε σύστημα ορθογώνιων αξόνων δίνονται τα σημεία Ο(0,0), Α(χ,0) και Β(0, lnχ), με χ>1. Αν το χ μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του τριγώνου ΟΑΒ στη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι χ=5 cm.

ΜΕΡΟΣ Β΄ (Να λύσετε όλες τις ασκήσεις)

1. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\chi^3 \dfrac{d\psi}{d\chi} + 4\chi^2\psi = \dfrac{2}{\chi^2(\chi+2)}$

2. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $2\psi = \chi^2$, την ευθεία $\chi + \psi = 4$ και τον άξονα των χ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των χ. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή αυτή.

3. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \dfrac{1+\chi}{1-\chi}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τις ασύμπτωτές της και να μελετήσετε τη μονοτονία της. Στη συνέχεια, να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των χ, τον άξονα των ψ και την ευθεία $\chi = \dfrac{1}{2}$.

4. α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από το σημείο Α(2,2) και εφάπτεται του άξονα των x στο σημείο *B(5,0)*.

β) Σε μια κλινική εργάζονται τέσσερις γιατροί και δέκα νοσοκόμοι. Πόσες πενταμελείς ομάδες μπορούμε να σχηματίσουμε, αν σ' αυτές πρέπει να περιλαμβάνονται: (i) δύο ακριβώς γιατροί. (ii) τουλάχιστον ένας γιατρός.

5. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \int e^{\chi}\eta\mu\chi\, dx$. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} - 2\dfrac{d\psi}{d\chi} + 2\psi$, είναι ανεξάρτητη του χ (σταθερά).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{\chi^2+2\chi}{\chi+\eta\mu\chi} = \dfrac{0+0}{0+0} = \dfrac{0}{0}$ (απροσδιοριστία)

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{\chi^2+2\chi}{\chi+\eta\mu\chi} = \lim_{\chi\to 0}\frac{(\chi^2+2\chi)'}{(\chi+\eta\mu\chi)'} = \lim_{\chi\to 0}\frac{2\chi+2}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{0+2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

2. $$\int_0^1 (3\chi^2+\chi-2)dx = \left[\chi^3 + \frac{\chi^2}{2} - 2\chi\right]_0^1 = \left(1+\frac{1}{2}-2\right) - (0) = -\frac{1}{2}$$

3. $$\mathrm{T}_{\kappa+1} = \binom{\nu}{\kappa}\cdot(\chi^2)^{\nu-\kappa}\cdot\left(\frac{1}{\chi}\right)^{\kappa} \Rightarrow \binom{8}{\kappa}\cdot(\chi^2)^{8-\kappa}\cdot\left(\frac{1}{\chi}\right)^{\kappa} = \mathrm{A}\chi^4 \Rightarrow$$

$$16-2\kappa-\kappa = 4 \Leftrightarrow 16-3\kappa = 4 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 4}, \qquad \mathrm{A} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 70$$

4. (α) $$\frac{\eta\mu 10\chi+\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu 7\chi+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{\cancel{2}\eta\mu 6\chi\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu 4\chi}}{\cancel{2}\,\cancel{\sigma\upsilon\nu 4\chi}\cdot\sigma\upsilon\nu 3\chi} = \frac{2\eta\mu 3\chi\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu 3\chi}}{\cancel{\sigma\upsilon\nu 3\chi}} = 2\eta\mu 3\chi$$

(β) $$\frac{\eta\mu 10\chi+\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu 7\chi+\sigma\upsilon\nu\chi} = 1 \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} 2\eta\mu 3\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 3\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 3\chi = \eta\mu 30^\circ \Rightarrow$$

$3\chi = 360^\circ\kappa + 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \underline{\chi = 120^\circ\kappa + 10^\circ} \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

ή $3\chi = 360^\circ\kappa + 150^\circ \Rightarrow \quad \underline{\chi = 120^\circ\kappa + 50^\circ} \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

5. (α) $\chi^2+\psi^2-10\chi-4\psi+4=0 \Rightarrow$ g=-5, f=-2, c=4, K(-g,-f), $R=\sqrt{g^2+f^2-c}$

K(5,2), $R=\sqrt{25+\cancel{4}-\cancel{4}} \Rightarrow$ **R=5**

(β) $\chi^2+\psi^2-10\chi-4\psi+4=0$, A(8,6) , $64+36-80-24+4=0$ Ισχύει,
άρα το σημείο Α ανήκει στον κύκλο.

(εφ): $\chi^2+\psi^2-10\chi-4\psi+4=0 \Rightarrow 2\chi+2\psi\dfrac{d\psi}{dx}-10-4\dfrac{d\psi}{dx}=0 \Rightarrow$

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{5-\chi}{\psi-2} \Rightarrow \qquad \lambda_{\varepsilon\phi}=\left.\frac{5-\chi}{\psi-2}\right|_{(8,6)} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\phi}=-\frac{3}{4}$$

$$(\psi-\psi_1)=\lambda(\chi-\chi_1) \Rightarrow (\psi-6)=-\frac{3}{4}(\chi-8) \Rightarrow \boxed{3\chi+4\psi-48=0}$$

ή (εφ): $\chi_1\chi+\psi_1\psi+g(\chi+\chi_1)+f(\psi+\psi_1)+c=0 \Rightarrow 8\chi+6\psi-5(\chi+8)-2(\psi+6)+4$

$\Rightarrow \boxed{3\chi+4\psi-48=0}$

6. 0,1,2,3,4,5,6 Άρτιοι τριψήφιοι χωρίς επανάληψη ψηφίου

(α) Αριθμοί που τελειώνουν σε 0 $\boxed{5}\boxed{6}\boxed{1}$ = 30 αριθμοί

(β) Αριθμοί που τελειώνουν σε 2, 4, 6 $\boxed{5}\boxed{5}\boxed{3}$ = 75 αριθμοί

Σύνολο : 30 + 75 = **105 αριθμοί**

7. $2\psi(\chi+1)\dfrac{d\psi}{d\chi}=4+\psi^2 \Rightarrow \dfrac{2\psi}{4+\psi^2}d\psi=\dfrac{dx}{\chi+1} \Rightarrow \displaystyle\int\frac{2\psi}{4+\psi^2}d\psi=\int\frac{dx}{\chi+1}$

$\ln(4+\psi^2)=\ln|\chi+1|+\ln c \Rightarrow \ln(\psi^2+4)=\ln c\,|x+1| \Rightarrow \psi^2+4=c|\chi+1|$

$\underset{\psi=2}{\overset{\chi=3}{\Rightarrow}}\ 8=4c \Rightarrow c=2 \Rightarrow \underline{\psi^2+4=2|\chi+1|}$

8. $$(8+\chi)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{\chi}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{\chi}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\cdot\left(\frac{\chi}{8}\right)^2+\dots\right)=2+\frac{\chi}{12}-\frac{\chi^2}{288}+\dots$$

9. $\dfrac{d\psi}{d\chi}=4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi-2\sigma\upsilon\nu2\chi \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi}=2\eta\mu2\chi-2\sigma\upsilon\nu2\chi$,

$\dfrac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow 2\eta\mu2\chi-2\sigma\upsilon\nu2\chi=0 \Rightarrow \eta\mu2\chi=\sigma\upsilon\nu2\chi \Rightarrow$ εφ2χ = 1 $\Rightarrow \varepsilon\phi2\chi=\varepsilon\phi\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$

$2\chi=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \chi=\dfrac{\kappa\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, $0\le\chi\le\pi$.

$\kappa=0 \Rightarrow \chi=\dfrac{\pi}{8}$, $\kappa=1 \Rightarrow \chi=\dfrac{5\pi}{8}$,

$\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}=4\sigma\upsilon\nu2\chi+4\eta\mu2\chi \quad \Rightarrow \left.\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}\right|_{\chi=\frac{\pi}{8}}=4\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}+4\eta\mu\dfrac{\pi}{4}>0$

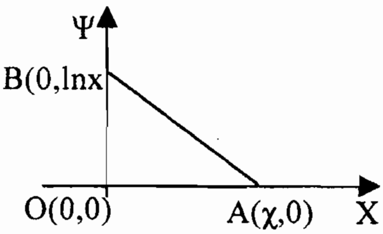
άρα για $\chi = \dfrac{\pi}{8}$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.

$$\left.\frac{d^2\psi}{d\chi^2}\right|_{\chi=\frac{5\pi}{8}} = 4\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4} + 4\eta\mu\frac{5\pi}{4} < 0$$ άρα για $\chi = \dfrac{5\pi}{8}$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή.

10. $\mathrm{E} = \dfrac{(\mathrm{OA})\cdot(\mathrm{OB})}{2} \Rightarrow \mathrm{E} = \dfrac{\chi \cdot \ln\chi}{2} \Rightarrow \dfrac{d\mathrm{E}}{d\chi} = \dfrac{\ln\chi + 1}{2}$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\chi}\cdot\frac{d\chi}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \left(\frac{\ln\chi+1}{2}\right)\cdot\frac{d\chi}{dt},\quad \frac{d\chi}{dt} = 4\,cm/\sec,$$

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\ln 5+1}{2}\right)\cdot 4 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 2(\ln 5+1)\ cm^2/\sec$$



ΜΕΡΟΣ Β΄

1. $\chi^3\dfrac{d\psi}{d\chi} + 4\chi^2\psi = \dfrac{2}{\chi^2(\chi+2)} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} + \dfrac{4}{\chi}\psi = \dfrac{2}{\chi^5(\chi+2)},\quad \mathrm{I} = e^{\int\frac{4}{x}dx} = e^{4\ln x} = e^{\ln x^4} = x^4$

$$\Rightarrow \chi^4\frac{d\psi}{d\chi} + 4\chi^3\psi = \frac{2}{\chi(\chi+2)} \Rightarrow \frac{d}{d\chi}(\psi\cdot\chi^4) = \frac{2}{\chi(\chi+2)} \Rightarrow \psi\cdot\chi^4 = \int\frac{2}{\chi(\chi+2)}dx \Rightarrow$$

$$\psi\cdot\chi^4 = \int\left(\frac{1}{\chi} - \frac{1}{\chi+2}\right)dx \Rightarrow \psi\cdot\chi^4 = \ln|\chi| - \ln|\chi+2| + \ln c \Rightarrow \psi\cdot\chi^4 = \ln c\left|\frac{x}{x+2}\right| \Rightarrow$$

$$\psi = \frac{1}{\chi^4}\ln c\left|\frac{x}{x+2}\right|$$

2. $\chi + \psi = 4 \Rightarrow \psi = 4 - \chi$

$2\psi = \chi^2 \Rightarrow 2(4-\chi) = \chi^2 \Rightarrow \chi^2 + 2\chi - 8 = 0$

$(\chi+4)(\chi-2) = 0 \Rightarrow \chi = -4$ ή $\chi = 2$

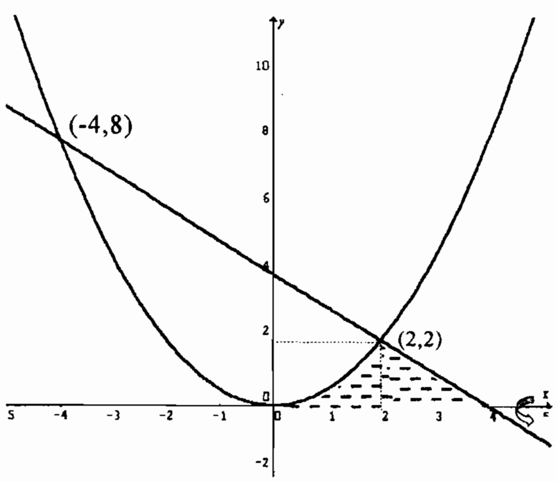
$\chi = -4 \Rightarrow \psi = 8 \Rightarrow (-4,8)$

$\chi = 2 \Rightarrow \psi = 2 \Rightarrow (2,2)$

$$V = V_1 + V_2 = \pi\int_0^2 \psi_1{}^2 dx + \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$$

$$= \pi\int_0^2 \frac{\chi^4}{4}dx + \frac{\pi\cdot 2^2\cdot 2}{3} = \left.\frac{\pi\chi^5}{20}\right|_0^2 + \frac{\pi\cdot 2^2\cdot 2}{3}$$

$$= \frac{\pi\cdot 32}{20} + \frac{8\pi}{3} = \frac{8\pi}{5} + \frac{8\pi}{3} = \frac{64\pi}{15}\ \kappa.\mu.$$



3. $\psi = \dfrac{1+\chi}{1-\chi}$. Πεδίο ορισμού: $\chi \in \mathbb{R} - \{1\}$

Σημεία τομής με άξονες: $\chi = 0 \Rightarrow \psi = 1 \Rightarrow$ **(0,1)**. $\psi = 0 \Rightarrow \chi = -1 \Rightarrow$ **(- 1,0)**.

Κατακόρυφη ασύμπτωτος: $\chi = 1$, Οριζόντια ασύμπτωτος: $\psi = -1$

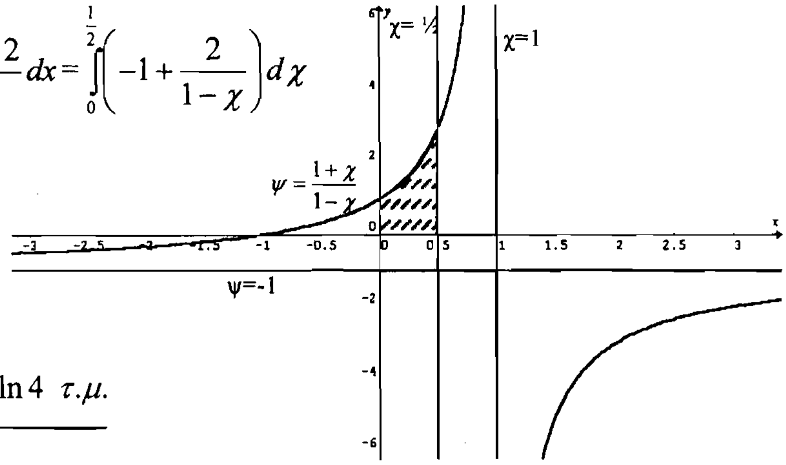
$$\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{1-\cancel{\chi}+1+\cancel{\chi}}{(1-\chi)^2} = \frac{2}{(1-\chi)^2} > 0 \quad \forall\chi \in \mathbb{R}-\{1\} \Rightarrow \text{αύξουσα}\ \ \forall\chi\in\mathbb{R}-\{1\}$$

(β) $E=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+\chi}{1-\chi}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\chi-1+2}{1-\chi}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{2}{1-\chi}\right)d\chi$

$=\left[-\chi-2\ln|1-\chi|\,\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\left(-\frac{1}{2}-2\ln\frac{1}{2}\right)-(0)$

$=-\frac{1}{2}+\ln 4-0=\underline{-\frac{1}{2}+\ln 4\ \ \tau.\mu.}$



4. (α) Έστω η εξίσωση του κύκλου $\chi^2+\psi^2+2g\chi+2fc+c=0$ (1)

$A(2,2)\Rightarrow 4+4+4g+4f+c=0\Rightarrow 4g+4f+c=-8$ (2)
$B(5,0)\Rightarrow 25+0+10g+0+c=0\Rightarrow c=-10g-25$ (3)

Άξονας τετμημένων (ΧΧ΄): $\psi=0$ εφάπτεται του κύκλου (1) $\Rightarrow \chi^2+2g\chi+\psi=0\overset{\Delta=0}{\Rightarrow}$
$4g^2-4c=0\Rightarrow c=g^2$ (4)

$(3)\&(4)\Rightarrow g^2+10g+25=0\Rightarrow(g+5)^2=0\Rightarrow \underline{g=-5}\Rightarrow \underline{c=25}\overset{(2)}{\Rightarrow}\underline{f=-\frac{13}{4}}$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι: $\boldsymbol{\chi^2+\psi^2-10\chi-\frac{13}{2}\psi+25=0}$

(β) 4 γιατροί και 10 νοσοκόμοι → 5μελής ομάδες

(i) δύο ακριβώς γιατροί $\binom{4}{2}\cdot\binom{10}{3}=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=$ **720 ομάδες**

(ii) τουλάχιστον ένας γιατρός

$\binom{14}{5}-\binom{10}{5}=\frac{14!}{5!9!}-\frac{10!}{5!5!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=$ **1750 ομάδες**

ή $\binom{4}{1}\cdot\binom{10}{4}+\binom{4}{2}\cdot\binom{10}{3}+\binom{4}{3}\cdot\binom{10}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{10}{1}=$ **1750 ομάδες**

5. $\psi=\int e^\chi\eta\mu\chi\,dx\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}=e^\chi\eta\mu\chi\Rightarrow\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=e^\chi\cdot\eta\mu\chi+e^\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi$

$\psi=\int e^\chi\eta\mu\chi\,dx=\int\eta\mu\chi\,d\left(e^\chi\right)=e^\chi\cdot\eta\mu\chi-\int e^\chi d(\eta\mu\chi)=e^\chi\cdot\eta\mu\chi-\int e^\chi\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=$

$=e^\chi\cdot\eta\mu\chi-\int\sigma\upsilon\nu\chi\,d\left(e^\chi\right)=e^\chi\cdot\eta\mu\chi-\left(e^\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-\int e^\chi d(\sigma\upsilon\nu\chi)\right)=$

$=e^\chi\cdot\eta\mu\chi-e^\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-\int e^\chi\cdot\eta\mu\chi dx\Rightarrow 2\int e^\chi\cdot\eta\mu\chi dx=e^\chi\cdot\eta\mu\chi-e^\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\Rightarrow$

$\psi=\int e^\chi\eta\mu\chi\,dx=\frac{1}{2}e^\chi\cdot(\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi)+C$

$A=\frac{d^2\psi}{d\chi^2}-2\frac{d\psi}{d\chi}+2\psi=e^\chi\cdot\eta\mu\chi+e^\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi-2e^\chi\eta\mu\chi+2\cdot\left[\frac{1}{2}e^\chi\cdot(\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi)+C\right]\Rightarrow$

$A=\cancel{e^\chi\cdot\eta\mu\chi}+\cancel{e^\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi}-\cancel{2e^\chi\eta\mu\chi}+\cancel{e^\chi\cdot\eta\mu\chi}-\cancel{e^\chi\sigma\upsilon\nu\chi}+2C\Rightarrow$ **A = 2C = σταθερά**

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία
Φαξ - Τηλ: 2-379122 / Κοιν:9-641843
e-mail: cms@cyearn.pi.ac.cy

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΤΑΚΤΙΚΑ ΜΕΛΗ
(για Μαθηματικούς μόνο)

Ημερομηνία αίτησης............ 20..........

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως έκτακτο μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από το καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____
(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία :

ΕΠΩΝΥΜΟ..
ΟΝΟΜΑ..
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ..
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΗΣΗΣ......................19........
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ............................Α.Κ.Α. ....
ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*
B.S. ΕΤΟΣ................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ...
M.S. ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ...
Ph.D. ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ...
Αλλο..
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ
Αριθμός και οδός..
Πόλη...Τ.Τ. ....
Χωριό..
Τηλέφωνα................................/ ..../ ....
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ
Ιδιότητα- Βαθμός ....
Σχολείο-Ίδρυμα-Υπηρεσία......................................
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα .... Ιδιωτικό Τομέα...............
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
....

Αριθμός αποδ.................... Εγγραφή: £2
Ημερομηνία αποδ..................... Ετήσια Συνδρομή: £10
Να επισυναπτούν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία
Φαξ - Τηλ: 2-379122 / Κοιν:9-641843
e-mail: cms@cyearn.pi.ac.cy

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΕΚΤΑΚΤΑ ΜΕΛΗ

(ειδικότητες εκτός Μαθηματικών ή για φοιτητές)

Ημερομηνία αίτησης..............20......

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως έκτακτο μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από το καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____
(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία :

ΕΠΩΝΥΜΟ...
ΟΝΟΜΑ...
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ..
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΗΣΗΣ......................19........
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ.............................Α.Κ.Α. ....
ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*
B.S. ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ..
M.S. ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ..
Ph.D. ΕΤΟΣ.................ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ..
Αλλο...
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ
Αριθμός και οδός...
Πόλη..Τ.Τ. ....
Χωριό..
Τηλέφωνα............................../ ..../ ....
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ
Ιδιότητα- Βαθμός ....
Σχολείο-Ιδρυμα-Υπηρεσία......................................
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα .... Ιδιωτικό Τομέα...............
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
....

Αριθμός αποδ.................... Εγγραφή: £2
Ημερομηνία αποδ..................... Ετήσια Συνδρομή: £10

****Να επισυναπτούν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας***