ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

5th Junior Balkan Mathematical Olympiad

NICOSIA - CYPRUS

17-22 JUNE 2001

ΤΗΣ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΗ΄ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2001

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΙΗ΄

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2001

Επιμέλεια Έκδοσης

Γρηγόρης Μακρίδης – Ανδρέας Φιλίππου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Διοικητικό Συμβούλιο της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας Σεπτέμβριος 2000 - Δεκέμβριος 2001

Πρόεδρος	: **Γρηγόρης Μακρίδης**
Αντιπρόεδρος	: **Κλαίλια Σουρμελή-Σκοτεινού**
Γενικός Γραμματέας	: **Σάββας Αντωνίου**
Ταμίας	: **Μάριος Αντωνιάδης**
Οργανωτικός Γραμματέας	: **Αντρέας Φιλίππου**
Βοηθός Ταμίας	: **Μάριος Ευσταθίου**
Σύμβουλοι	: **Ανδρέας Σχοινής**
	Αθανάσιος Γαγάτσης
	Ανδρέας Σαββίδης
	Ανδρέας Αθανασίου
	Σάββας Ιωαννίδης
	Νίκος Νικολαΐδης
	Ευθύβουλος Λιασίδης
	Όλγα Παπαγιάννη
	Θεόκλητος Παραγυίου

Κυριότερες Δραστηριότητες
της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας εντός του έτους 2001

1. **Ιανουάριος 2001** (Λάρνακα) – Οργάνωση του Δ' Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παδείας και Α' Συμποσίου Αστροναυτικής και Διαστήματος
2. **Ιανουάριος 2001** - Έκδοση: Πρακτικά Δ' Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας
3. **Ιανουάριος 2001** – Κυκλοφορία έκδοσης «Μαθηματικό Βήμα»
4. **Φεβρουάριος 2001** – Παγκύπριοι Διαγωνισμοί Γυμνασίου και Α' Λυκείου
5. **Φεβρουάριος 2001** - Έκδοση– Θέματα 4ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας για μαθητές κάτω των 15,5 ετών
6. **Μάρτιος 2001** – Παγκύπριος Διαγωνισμός Λυκείων
7. **Μάρτιος 2001** – Διαγωνισμοί Επιλογής για μαθητές κάτω των 15,5 και για μαθητές Λυκείων
8. **Μάρτιος 2001** - Δημιουργία ιστοσελίδας της ΚΥΜΕ με διεύθυνση **www.cms.org.cy** και δεύτερο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο με διεύθυνση cms@cms.org.cy
9. **29 Απριλίου 2001**: 2η Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα
10. **3-9 Μαΐου 2001** - Συμμετοχή στη 18η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (BMO 2001) για μαθητές λυκείου που έγινε στη Γιουγκοσλαβία.
11. **20 Μαΐου 2001** – Τελετή βράβευσης της 2ης Κυπριακής Μαθηματικής Ολυμπιάδας
12. **30 Μαΐου 2001** (Λεμεσός) – Τελετή βράβευσης Παγκύπριου Διαγωνισμού για το Γυμνάσιο και Επαρχιακού Λεμεσού
13. **1 Ιουνίου 2001** (Λάρνακα) – Τελετή βράβευσης Παγκύπριου Α' Λυκείου και Επαρχιακού Λάρνακας και Αμμοχώστου
14. **7 Ιουνίου 2001** (Λευκωσία) – Τελετή βράβευσης Παγκύπριου Διαγωνισμού Λυκείων και Επαρχιακού Λευκωσίας
15. **8 Ιουνίου 2001** (Πάφος) – Τελετή βράβευσης Επαρχιακού Πάφου
16. **17-22 Ιουνίου 2001** - Οργάνωση στην Κύπρο της 5ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας (JBMO) για μαθητές κάτω των 15,5 ετών.
17. **24-29 Ιουνίου και 1-6 Ιουλίου 2001** – Οργάνωση Καλοκαιρινού Μαθηματικού Σχολείου σε δύο περιόδους.
18. **24 Ιουνίου – 6 Ιουλίου 2001** – Συνεργασία σε συνέδριο ERASMUS με το τμήμα Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου
19. **3-14 Ιουλίου 2001** – Συμμετοχή στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές Λυκείου που έγινε στις Η.Π.Α. Αμερικής.
20. **16-22 Ιουλίου 2001** – Συμμετοχή στη Διεθνή Ολυμπιάδα για μαθητές Δημοτικού που έγινε στο Hong-Kong .
21. **Σεπτέμβριος 2001** - Προγραμματισμός και ανακοίνωση της οργάνωσης του 5ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας.
22. **Οκτώβριος 2001** – Συνάντηση στην Αθήνα για την δημιουργία της Μαθηματικής Εταιρείας Νοτιοανατολικής Ευρώπης. Η ΚΥ.Μ.Ε. συμμετέχει ως ιδρυτικό μέλος.
23. **Νοέμβριος 2001** - Πρώτη ανακοίνωση και προγραμματισμός για την οργάνωση του 3ου Μεσογειακού Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας που θα συνδιοργανωθεί με τη Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία στην Αθήνα στις 3-5 Ιανουαρίου 2003.
24. **15 Δεκεμβρίου 2001** – Επαρχιακοί Διαγωνισμοί για μαθητές Β' και Γ' Λυκείου

ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΔΡ. ΠΕΤΡΟΥ Μ. ΚΑΡΕΚΛΑ ΣΤΗΝ 5η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Με ιδιαίτερη χαρά και ικανοποίηση κηρύσσω την έναρξη των εργασιών της 5ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας που έχουμε την τιμή να φιλοξενούμε στην Κύπρο και καλωσορίζω τους συνοδούς καθηγητές και μαθητές από τις φίλες βαλκανικές χώρες που συμμετέχουν σ' αυτή.

Ο καθιερωμένος αυτός θεσμός δίνει την ευκαιρία περαιτέρω σύσφιξης των φιλικών σχέσεων ανάμεσα στους μαθητές και τους καθηγητές των χωρών μελών και συμβάλλει σημαντικά στην ανάπτυξη βαθύτερων σχέσεων Επικοινωνίας και συνεργασίας μεταξύ των νέων, πολλοί από τους οποίους θα συμβιώσουν ως συμπολίτες στα πλαίσια της διεύρυνσης της Ενωμένης Ευρώπης.

Μέσα από το διαγωνισμό αυτό προωθείται σημαντικά η ανέλιξητων παιδιών, που έχουν ιδιαίτερη κλίση στα Μαθηματικά και προσφέρεται η κατάλληλη προετοιμασία όσων θα συμμετάσχουν στη Διεθνή Ολυμπιάδα Μαθηματικών που αποτελεί τη σπουδαιότερη Ολυμπιάδα εφ' όσον σ' αυτή παίρνουν νέοι από ογδόντα και πλέον χώρες.

Τα Μαθηματικά, από την αρχαιότητα ως σήμερα αποτελούν βασικό μάθημα της ελληνικής παιδείας, που καλλιεργεί και επεκτείνει τη σκέψη και τη φαντασία, γι' αυτό τα Μαθηματικά έπαιξαν σημαντικότατο ρόλο, τόσο στην κοινωνική αγωγή, όσο και στην ανάπτυξη των επιστημών.

Ως γνήσιο δημιούργημα της ελληνικής διανόησης συνέτειναν στο να εκλείψουν οι δεισιδαιμονίες, τα δόγματα και οι δοξασίες. Ολόκληρο το οικοδόμημα της σύγχρονης μαθηματικής επιστήμης στηρίζεται πάνω στα γερά θεμέλια που έθεσαν οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι. ο Θαλής ο Μιλήσιος έδωσε τα πρώτα στοιχεία των Μαθηματικών για να ακολουθήσει ο Πυθαγόρας, ο Πλάτωνας, ο Εύδοξος, ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης, ο Ερατοσθένης.

Οι Έλληνες μαθηματικοί εκτός από τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων αντιμετώπισαν με επιτυχία και το τεράστιο πρόβλημα δημιουργίας της μαθηματικής γλώσσας, με την οποία έπρεπε να καθορίζονται απόλυτα οι μαθηματικές έννοιες σε λέξεις. Η γεωμετρία των Ελλήνων, επίτευγμα του ελληνικού πολιτισμού επιδρά σε όλους τους μετέπειτα πολιτισμούς. Από αυτή διδάχτηκαν οι μεταγενέστεροι τη μαθηματική σκέψη και αυτή βοήθησε στην ανάπτυξη νέων επιστημών.

Η μαθηματική σκέψη διακρίνεται για την ακρίβεια, τη σαφήνεια, την ευκρίνεια του συλλογισμού και ιδιαίτερα για τη βεβαιότητα, σε αντίθεση με τις άλλες επιστήμες, που τις χαρακτηρίζει η πιθανότητα γι' αυτό δίνει τη δυνατότητα στις επιστήμες να αντλούν από αυτή το υλικό για τη διατύπωση των θεωριών τους. Τα Μαθηματικά, ακόμη, συστηματοποιούν τη φυσική εμπειρία των αισθημάτων της πραγματικότητας συντονίζοντας φαινόμενα τελείως άσχετα εκ πρώτης όψεως.

Το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού δίνει ιδιαίτερη σημασία στα Μαθηματικά και επιδίωξή μας είναι η αναβάθμιση τους, η οποία επιδιώκεται τόσο με τον εκσυγχρονισμό και αναπροσαρμογή των αναλυτικών προγραμμάτων) όσο και με τη συγγραφή νέων σχολικών βιβλίων, καθώς και με τη διαρκή επιμόρφωση του διδακτικού προσωπικού. Για το λόγο αυτό αποδίδει την ανάλογη σημασία στους Παγκύπριους και τους Επαρχιακούς Διαγωνισμούς που διοργανώνει η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, καθώς επίσης και στους Διεθνείς Διαγωνισμούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας όπως και στους Διαγωνισμούς Μαθηματικής Βαλκανιάδας.

Τελειώνοντας, συγχαίρω θερμά τους διοργανωτές και εύχομαι κάθε επιτυχία στους στόχους της 5ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας.

Χαιρετισμός του Προέδρου της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας Δρα Γρηγόρη Μακρίδη στην τελετή έναρξης του Δ΄ Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας 26 Ιανουαρίου 2001

Κύριε Υπουργέ Παιδείας και Πολιτισμού, Στρατηγέ μου, κ. Διευθυντή Μέσης Εκπαίδευσης, κύριε πρόεδρε της Κυπριακής Αστροναυτικής Εταιρείας, κ. Πρόεδρε της Ελληνικής Αστροναυτικής Εταιρείας, κα Εκπρόσωπε του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, κ. Πρόεδρε της ΕΜΕ, κ. Επαρχιακέ Διευθυντή της Τράπεζας Κύπρου, κ. Εκτελεστικέ Διευθυντή του Intercollege, κ. Διευθυντή της Εταιρίας ΚΕΟ, κ. Πρώην Διευθυντή Δημοτικής Εκπαίδευσης, κύριοι ΠΛΕ, κύριοι Επιθεωρητές, κύριοι και κυρίες συνάδελφοι Μαθηματικοί που πρόσφατα έχετε συνταξιοδοτηθεί και σύζυγοι και οικογένειες συναδέλφων Μαθηματικών που απεβίωσαν πρόσφατα, αγαπητοί συνάδελφοι από την Ελλάδα και Κύπρο, αγαπητοί φοιτητές., Κυρίες και κύριοι

Με μεγάλη μου ευχαρίστηση χαιρετίζω σήμερα το Δ΄ Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας που φέτος ενισχύεται με Συμπόσιο Αστροναυτικής και Διαστήματος . Ιδιαίτερη είναι η χαρά μου όταν βλέπω ένα θεσμό που επεδίωξα προσωπικά με αφετηρία το 1^{ο} Μεσογειακό Συνέδριο Μαθηματικών να εδραιώνεται με επιτυχία και να αναπτύσσεται σε ένα από τα μεγαλύτερα επιστημονικά συνέδρια όχι μόνο της Κύπρου αλλά και της Μεσογείου. Το Μεσογειακό Συνέδριο και το Παγκύπριο Συνέδριο οργανώνονται μαζί από τον Ιανουάριο του 1997 πραγματοποιώντας το Μεσογειακό κάθε τρία χρόνια και το Παγκύπριο κάθε χρόνο.

Τί είναι τα Μαθηματικά;

- τα μαθηματικά αποτελούν το κυριότερο διεθνές μέσο επικοινωνίας και βασικό εργαλείο επεξεργασίας και διαχείρισης δεδομένων και καταστάσεων σε όλους τους παραγωγικούς τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας
- τα μαθηματικά αποτελούν σημαντικό καταλύτη ανάπτυξης και καλλιέργειας βασικών δεξιοτήτων και ικανοτήτων όπως η κριτική και αναλυτική σκέψη, λύση προβλήματος κ.α.
- τα μαθηματικά οργανώνουν, μεθοδεύουν και ασκούν την ανθρώπινη σκέψη, εμπλουτίζουν τη φαντασία και αυξάνουν τη δημιουργικότητα
- τα μαθηματικά είναι ένα αυστηρό οικοδόμημα εννοιών, άθληση του νου και άμεση προέκταση της λογικής
- τα μαθηματικά αποτελούν στοιχειώδη συνιστώσα στην προσπάθεια καλλιέργειας γενικής παιδείας και ανάπτυξης αξιών και αρχών με αποδοχή σε όλο το σύγχρονο κόσμο
- τα μαθηματικά αποτελούν στοιχειώδες εργαλείο για αντιμετώπιση καθημερινής φύσεως αναγκών επικοινωνίας του ανθρώπου
- τα μαθηματικά και η τεχνολογία είναι σώμα και ψυχή, έχουν στενή και αμφίδρομη σχέση, αφού η μεν τεχνολογία στηρίζεται στα μαθηματικά, αυτά με τη σειρά τους εξελίσσονται με τη βοήθεια της.

Οι ραγδαίες τεχνολογικές εξελίξεις και η διεθνοποίηση των κοινωνικών και εργασιακών σχέσεων, καθώς και η αυτόματη μεταφορά της πληροφορίας, είτε αυτή αφορά την εκπαίδευση και την έρευνα, είτε αφορά την επιχείρηση, την οικονομία, την εργασία, απαιτούν νέες ικανότητες από τον άνθρωπο τις οποίες μπορεί να τις πάρει από τα μαθηματικά.

• στο σύγχρονο κόσμο που ζούμε η εκπαίδευση πρέπει να δώσει στο νέο, όχι μόνο τις απαραίτητες γνώσεις αλλά κυρίως να τον κάνει ικανό να ερευνά, να αναλύει, να αξιολογεί, να επιλέγει και να χρησιμοποιεί κατάλληλα τις γνώσεις, δεξιότητες που αναπτύσσονται μέσα από τα μαθηματικά.

Στην Αρχαία Ελλάδα τα μαθηματικά ήταν απαραίτητο εφόδιο για τη μελέτη οποιουδήποτε άλλου θέματος, είτε αυτό ήταν φιλοσοφία, είτε ιατρική, είτε φυσιογνωστικά. Γι'αυτό στην είσοδο της Ακαδημίας του Πλάτωνα ήταν γραμμένο «Μηδείς αγεωμέτρητος εισήτω».

Πέραν όμως από αυτά τα οποία εμείς θεωρούμε κοινούς τόπους, θα πρέπει να υπογραμμίσουμε με έμφαση το γεγονός πως τα μαθηματικά είναι η βάση όλων των επιστημών και πως όσοι μπορούν να κατανοήσουν τα μαθηματικά τότε μπορούν να κατανοήσουν και να μάθουν οτιδήποτε άλλο.

Στο φετινό συνέδριο οι εισηγήσεις έχουν φτάσει τις 40 και προέρχονται από τον Κυπριακό και Ελλαδικό χώρο καθώς καλύπτουν ολόκληρο το φάσμα της εκπαίδευσης , Δημοτική , Μέση και Τριτοβάθμια..

Η ΚΥΜΕ πιστεύοντας πάντοτε στη συνεργασία και επικοινωνία συνεργάστηκε φέτος, εκτός από το Π.Ι., με την Κυπριακή και την Ελληνική Αστροναυτική Εταιρεία ενισχύοντας το Συνέδριο με παράλληλο Συμπόσιο Αστροναυτικής και Διαστήματος.

Ο Κυπριακός εκπαιδευτικός κόσμος σήμερα δίνει μια μάχη....μια μάχη με το παρελθόν και το μέλλον. Αν δεν μπορέσουμε να μελετήσουμε , αξιολογήσουμε και επιμορφωθούμε σωστά από το παρελθόν τότε θα σχεδιάσουμε λανθασμένα και το μέλλον. Το εκπαιδευτικό μέλλον του Κυπριακού λαού δεν είναι απλώς μια επιστημονική επιβίωση αλλά είναι πολύ περισσότερο μια εθνική επιβίωση αφού ήδη ο γείτονας κατακτητής έχει καταφέρει με έξι πανεπιστήμια να κερδίσει την πρώτη εκπαιδευτική μάχη στο διεθνή χώρο. Το παράσιτο που έχει δημιουργήσει ο κατακτητής τρέφεται από το δικό μας αίμα και αν δεν βρούμε σύντομα το αντίδοτο θα αρχίσει σύντομα η αντίστροφη μέτρηση για τη διεθνή αναγνώριση του ψευδοκράτους.

Η καλύτερη άμυνα της Κύπρου είναι η εκπαίδευση.

Ο σχεδιασμός του Ενιαίου Λυκείου αλλά και όλου του φάσματος της εκπαίδευσής μας πρέπει να είναι σχεδιασμός στα πλαίσια ενός Εθνικού Συμβουλίου με προτεραιότητα την επιστημονική προσέγγιση του αναλυτικού προγράμματος, την Ευρωπαϊκή μας πορεία και τις τεχνολογικές προκλήσεις του 21^{ου} αιώνα.

Έχουμε υποχρέωση να διορθώσουμε τα προβλήματα της εκπαίδευσης σήμερα για να μην τα μεταφέρουμε στις επόμενες γενιές γιατί οι επόμενες γενιές δεν θα έχουν την πολυτέλεια του χρόνου για να κάνουν διορθώσεις.

Ο στόχος μας πρέπει να είναι η δημιουργία επαγγελματιών που να μπορούν να συνδυάζουν την ανθρωπιστική επάρκεια με την τεχνολογική επάρκεια. Ας γίνει βίωμα όλων μας ότι τη βάση για την επιτυχία τέτοιου συνδυασμού αδιαμφισβήτητα θα την βρούμε στα Μαθηματικά.

Εύχομαι καλή διαμονή στους Ελλαδήτες συνάδελφους και σε όλους τους συνέδρους επιτυχία στους στόχους τους.

Δ' Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας και Α' Συμπόσιο Αστροναυτικής και Διαστήματος 26-28 Ιανουαρίου 2001

Ουράνιος Ιωαννίδης, Υπουργός Παιδείας και Πολιτισμού.

Τιμητική πλακέττα στον Υπουργό Παιδείας και Πολιτισμού για την προσφορά του στην αναβάθμιση της Μαθηματικής Παιδείας.

Σύνεδροι του Δ' Παγκύπριου Συνεδρίου

Τελετή βράβευσης της 2ης Κυπριακής Μαθηματικής Ολυμπιάδας
20 Μαΐου 2001

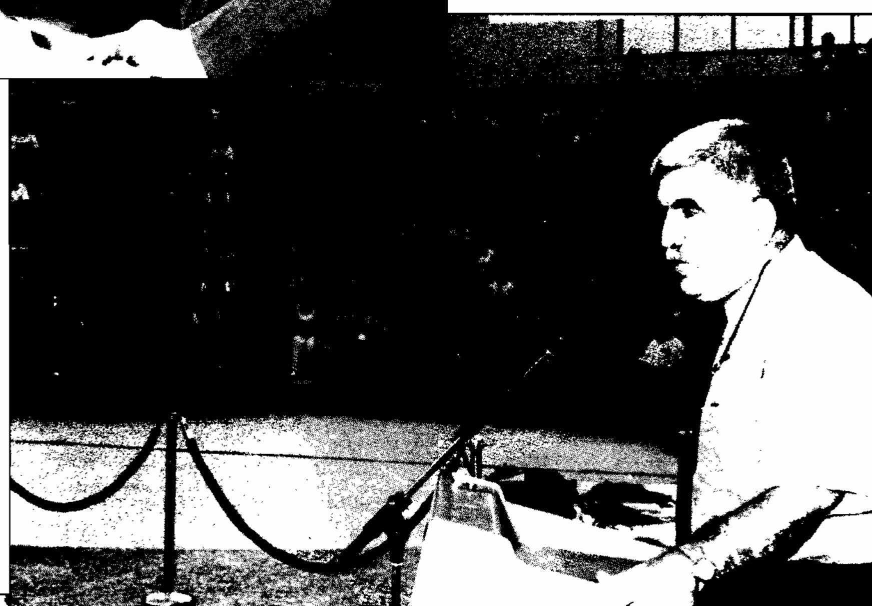
Οι μαθητές που βραβεύτηκαν και μέλη Συμβουλίου ΚΥ.Μ.Ε.
Από αριστερά: Αντρέας Σχοινής, Μάριος Ευσταθίου, Ευθύβουλος Λιασίδης, Μάριος Αντωνιάδης, Σάββας Ιωαννίδης, Κλαίλια Σκοτεινού, Αντρέας Σαββίδης, Θεόκλητος Παραγυίου, Σάββας Αντωνίου.

Γρηγόρης Χόπλαρος, Διευθυντής Δημοτικής Εκπαίδευσης.

Κώστας Μάρκου, Γενικός Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης.

Τελετή βράβευσης της Β' Κυπριακής Μαθηματικής Ολυμπιάδας 20 Μαΐου 2001

Γρηγόρης Μακρίδης, Πρόεδρος ΚΥ.Μ.Ε.



Αθανάσιος Γαγάτσης, Πρόεδρος Τμήματος Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου και Σύμβουλος ΚΥ.Μ.Ε.

Παντελής Δαμιανού, Πρόεδρος Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής Πανεπιστημίου Κύπρου.

Τελετή βράβευσης Παγκύπριου Διαγωνισμού Μαθηματικών για τα Λύκεια
7 Ιουνίου 2001

Πέτρος Καρεκλάς, Γενικός Διευθυντής Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού.

Ανδρέας Σκοτεινός, Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης.

Γλαύκος Αντωνιάδης, Επίτιμος Πρόεδρος ΚΥ.Μ.Ε. Γρηγόρης Μακρίδης, Πρόεδρος ΚΥ.Μ.Ε.

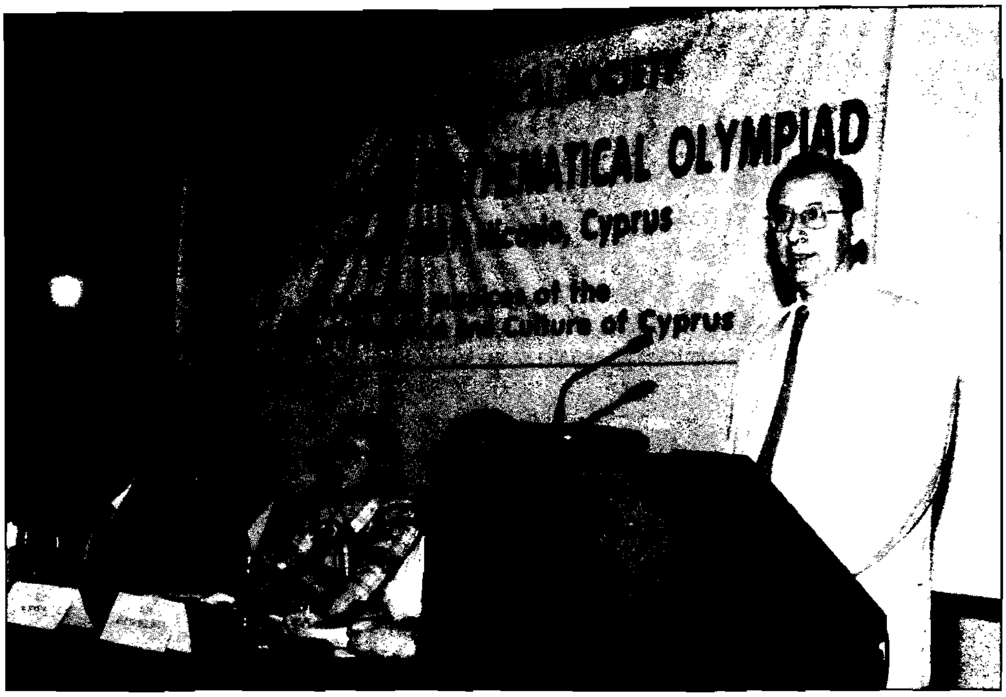
Τελετή βράβευσης Παγκύπριου Διαγωνισμού Μαθηματικών για τα Λύκεια
7 Ιουνίου 2001

Κλαίλια Σουρμελή - Σκοτεινού, Επιθεωρήτρια Μαθηματικών και Αντιπρόεδρος ΚΥ.Μ.Ε.

Σάββας Ιωαννίδης, ΔιευθυντήςΓυμνασίου Αγίου Βασιλείου και υπεύθυνος εκδήλωσης.

Σάββας Αντωνίου, Β.Δ. Ενιαίου Λυκείου Κύκκου Α΄ και Γενικός Γραμματέας ΚΥ.Μ.Ε. Ανδρέας Σαββίδης, Διευθυντής Διανέλλειου Γυμνασίου Λάρνακας και Σύμβουλος ΚΥ.Μ.Ε.

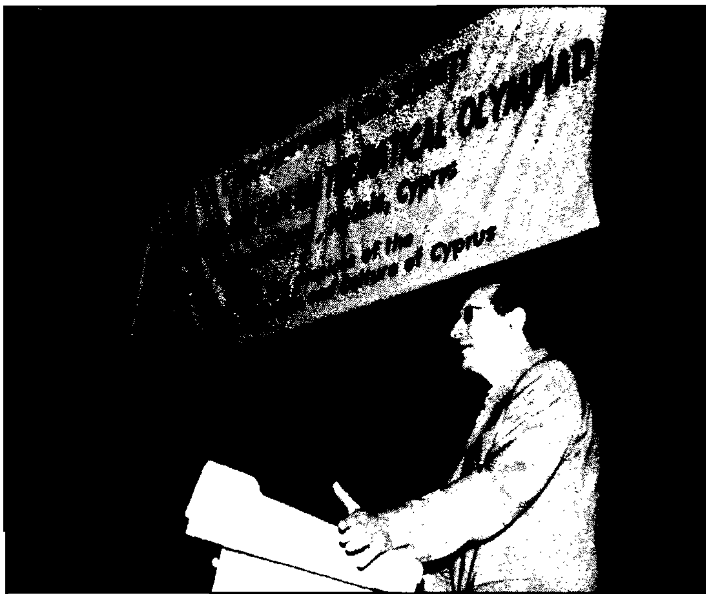
Τελετή έναρξης της 5ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας
για μαθητές κάτω των 15,5 ετών.
17 - 22 Ιουνίου 2001, Λευκωσία



Πέτρος Καρεκλάς, Γενικός Διευθυντής Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού.

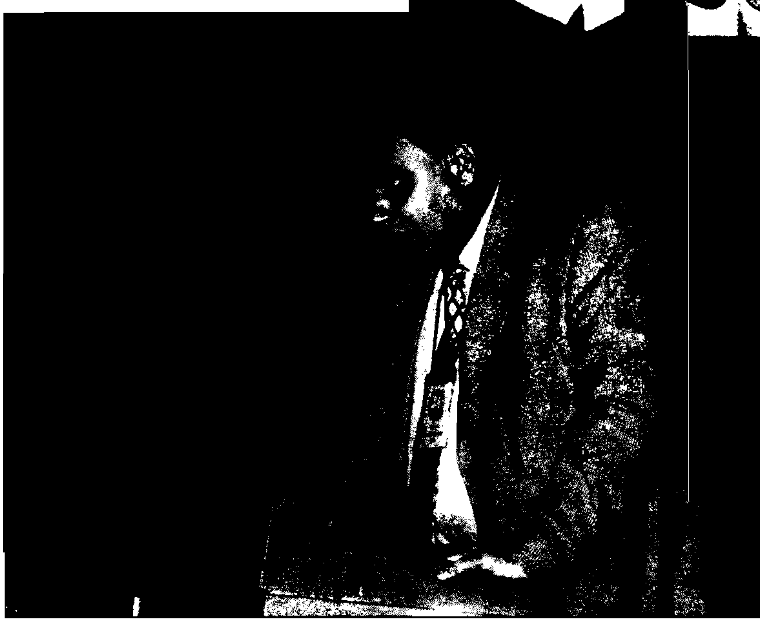
Γρηγόρης Μακρίδης, Πρόεδρος ΚΥ.Μ.Ε. και Πρόεδρος Επιτροπής Κριτών της 5ης JBMO
Επιτροπή Κριτών των Βαλκανικών Χωρών.

Τελετή βράβευσης της 5ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας για μαθητές κάτω των 15,5 ετών.
17 - 22 Ιουνίου 2001, Λευκωσία



Πέτρος Καρεκλάς, Γενικός Διευθυντής Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού.

Πέτρος Καρεκλάς, Γενικός Διευθυντής Υ.Π.Π. κα Γρηγόρης Μακρίδης, Πρόεδρος ΚΥ.Μ.Ε.



Ανδρέας Φιλίππου, Οργανωτικός Γραμματέας ΚΥ.Μ.Ε. και Αρχηγός Κυπριακής Ομάδας.

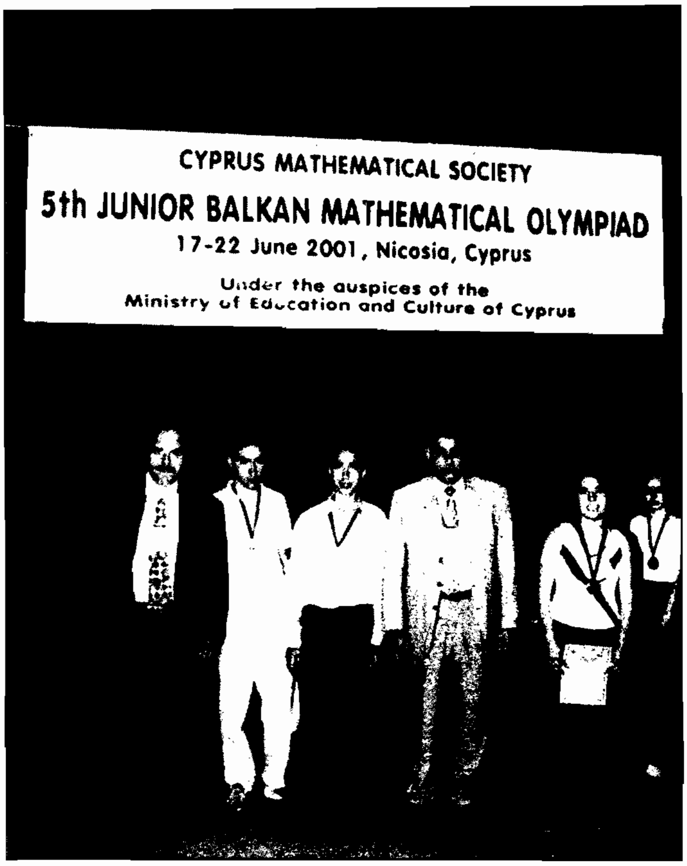
Τελετή βράβευσης της 5ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας για μαθητές κάτω των 15,5 ετών. 17 - 22 Ιουνίου 2001, Λευκωσία

Ανδρέας Σκοτεινός, Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης.

Νίκος Περιστιάνης, Εκτελεστικός Διευθυντής Intercollege, Όλγα Παπαγιάννη, Σύμβουλος ΚΥ.Μ.Ε.

Παντελής Δαμιανού, Πρόεδρος Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής Πανεπιστημίου Κύπρου.

Τελετή βράβευσης της 5ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας για μαθητές κάτω των 15,5 ετών.
17 - 22 Ιουνίου 2001, Λευκωσία



Κύπριοι μαθητές που βραβεύτηκαν. Αντρέας Φιλίππου, Αρχηγός Ομάδας, Θεόκλητος Παραγυίου, Αναπληρωτής Αρχηγός Ομάδας.

Ομάδα μαθητών Γυμνασίου Αγίου Βασιλείου που παρουσίασαν καλιτεχνικό πρόγραμμα.

Χορηγοί της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας εντός του 2001

Κυπριακά Διυλιστήρια Πετρελαίου
Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού για την Α΄Λυκείου

Γλαύκος Αντωνιάδης
Βραβείο για μαθητές που διαπρέπουν ή ανήκουν στην ομάδα για BMO / IMO

Μαρία Ακύλα Χριστοδουλίδου
Αθλοθέτης Επαρχιακού Διαγωνισμού Λεμεσού

✝Χαράλαμπος Μορφάκης
Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού ΖΗΝΩΝ

Κανίκλης Αντρέας
Αθλοθέτης Επαρχιακού Λευκωσίας

ΚΕΟ
Αθλοθέτης Διαγωνισμού Γ' Γυμνασίου

Τράπεζα Κύπρου
Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού Μαθηματικών

Κλαίλια Σουρμελή-Σκοτεινού
Βραβείο στο μαθητή με την πιο ψηλή βαθμολογία στην ΙΜΟ.

Τράπεζα Κύπρου (παράρτημα Πάφου) και υπεραγορά Παπαντωνίου
Αθλοθέτηση Επαρχιακού Διαγωνισμού Πάφου

Ευχαριστούμε!

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΠΑΡΧΙΑΚΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΑΞΕΙΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
16 Δεκεμβρίου 2000

Επαρχία Λευκωσίας

Βραβεία

1ο Βραβείο: Κωνσταντίνου Ναβίτ Κωνσταντίνου. Τάξη Γ΄, Λύκειο Ακρόπολης.
2ο Βραβείο: Παμπόρης Αντρέας Γεωργίου. Τάξη Γ΄ , Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ΄.
3ο Βραβείο : Ματσικάρης Κυριάκος Γεωργίου. Τάξη Β΄, Λύκειο Απ. Βαρνάβα.

Έπαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

1ος : Αβάνης Ζένιος Σάββα. Τάξη Β΄, Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ΄.
2ος : Ρωσσίδου Μαριάννα Μιχάλη. Τάξη Γ΄, Ενιαίο Λύκειο Κύκκου Β΄.
3ος : Ασσιώτης Γιάννης Χριστάκη. Τάξη Γ΄, Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ΄.
4ος : Κρύφτης Γιάννος Γεωργίου. Τάξη Γ΄, Λύκειο Ακρόπολης.

Εύφημη Μνεία στους:

1. Κυρατζή Μαρία Γεωργίου. Τάξη Β΄, Παγκύπριο Γυμνάσιο.
2. Μελαχρινός Κωνσταντίνος Χαράλαμπου. Τάξη Β΄, Λύκειο Απ. Βαρνάβα.

Επαρχία Λεμεσού

Βραβεία

1ο Βραβείο: Λουκαΐδης Ευριπίδης Γεωργίου. Τάξη Γ΄, Λανίτειο Λύκειο Β΄.
2ο και 3ο Βραβείο εξίσου στις:
Αγαθοκλέους Θεμούλα Αγαθοκλή. Τάξη Γ, Λύκειο Πολεμιδιών.
Γεωργίου Νατάσα Αιμίλιου. Τάξη Γ΄, Λύκειο Πολεμιδιών.

Έπαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

1ος. Στυλιανού Ματθαίος Ανδρέα. Τάξη Β΄, Λύκειο Πολεμιδιών.
2ος. Ιωάννου Κώστας Γιαννάκη. Τάξη Β΄, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου.
3ος. Σοφοκλέους Βαλεντίνος Ανδρέα. Τάξη Β΄, Λύκειο Πολεμιδιών.
4ος. Βαρνάβα Χαράλαμπος Βαρνάβα. Τάξη Β΄ Λύκειο Απ.Πέτρου και Παύλου.
5ος. Κωνσταντίνου Έλενα Ευάνθη. Τάξη Β΄, Λανίτειο Λύκειο Α΄.

Εύφημη Μνεία στους:

1. Καρανίκκης Φοίβος Ευριπίδη. Τάξη Γ΄, Λανίτειο Λύκειο Α΄.
2. Καραγιώργη Μαρία Αντώνη. Τάξη Γ΄, Λανίτειο Λύκειο Α΄.
3. Πετρίδου Ελια Δημήτρη. Τάξη Γ΄, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου.
4. Ησαία Μαρία Ησαία . Τάξη Γ΄, Λύκειο Πολεμιδιών.
5. Γιάγκου Κατερίνα Αντρέα. Τάξη Β΄, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου.
6. Δημητρίου Ιωάννης Νικολάου. Τάξη Β΄, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου.

Επαρχίες Λάρνακας και Αμμοχώστου

Βραβεία

1ο Βραβείο: Σαββίδου Χριστίνα Ανδρέα. Τάξη Γ', Παγκύπριο Λύκειο.
2ο Βραβείο : Καφατάρης Γιώργος Λουκά. Τάξη Γ', Λύκειο Βεργίνας.
3ο Βραβείο: Χατζιωσήφ Άλκης Μιχαήλ. Τάξη Γ', Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ'.

Έπαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

1ος : Τήλλυρου Δέσποινα Νικόλα. Τάξη Γ', Λύκειο Παραλιμνίου.
2ος : Παναγή Ευστάθιος Παναγιώτη. Τάξη Β', Λύκειο Βεργίνας.
3ος : Χίνης Κωνσταντίνος Κυριάκου. Τάξη Γ', Παγκύπριο Λύκειο.

Εύφημη Μνεία στους:

1. Χρυσοστόμου Αγγέλα Χρυσόστομου. Τάξη Γ', Λύκειο Παραλιμνίου.
2. Αλαμπρίτης Πρόδρομος Καλλίνικου. Τάξη Γ', Λύκειο Βεργίνας.
3. Λιοτάτης Δημήτρης Κώστα. Τάξη Γ', Λύκειο Παραλιμνίου.
4. Τοχνίτης Μίλτος Χριστόφορου. Τάξη Γ', Λύκειο Βεργίνας.
5. Παπακυριακού Παναγιώτης Ανδρέα. Τάξη Β', Λύκειο Αγίου Γεωργίου.
6. Καγιαβά Αλεξία Στέλιου. Τάξη Γ', Λύκειο Παραλιμνίου.
7. Καζάζη Αθανασία Μάμα. Τάξη Β', Λύκειο Βεργίνας.

Επαρχία Πάφου

Βραβεία

1ο Βραβείο: Ζαμπυρίνης Κωνσταντίνος Παντελή. Τάξη Γ', Λύκειο Κύκκου.
2ο Βραβείο: Ζαχαρίας Κυριάκος Σίμου. Τάξη Β', Λύκειο Κύκκου.
3ο Βραβείο: Ηροδότου Μαρία Ανδρέα. Τάξη Γ', Λύκειο Πόλης Χρυσοχούς.
και Κοκκώδης Μάριος Ευαγγέλου. Τάξη Β', Λύκειο Κύκκου.

Έπαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

1ος : Μόρρου Σάββας Ιωάννου. Τάξη Β', Λύκειο Αγ. Νεοφύτου.
2ος : Κασιουλής Χάρης Αντρέα. Τάξη Β', Λύκειο Κύκκου.
3ος : Μιχαηλίδου Κωσταντία Γιώργου. Τάξη Γ', Λύκειο Κύκκου.

Εύφημη Μνεία στους:

1. Λαβρεντίδης Δέμης Δημήτρη. Τάξη Β', Λύκειο Αγ. Νεοφύτου.
2. Νικολαΐδης Νεόφυτος Νίκου. Τάξη Β', Λύκειο Αγ. Νεοφύτου.
3. Νικολαΐδης Χρίστος Αντρέα. Τάξη Β', Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ'.
4. Λαζάρου Σωτήρης Γεωργίου. Τάξη Β', Λύκειο Κύκκου.
5. Νικολάου Αλεξία Μιχάλη. Τάξη Β', Λύκειο Κύκκου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ Γ΄ ΤΑΞΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ 2001

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1$^{\text{Ο}}$ ΒΡΑΒΕΙΟ: ΠΑΥΛΟΥ ΜΑΡΙΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΔΡΟΣΙΑΣ ΛΑΡΝΑΚΑ
2$^{\text{Ο}}$ ΒΡΑΒΕΙΟ: ΚΡΥΦΤΗΣ ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΓΙΩΡΓΟΥ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΔΙΑΝΕΛΛΟΥ & ΘΕΟΔΟΤΟΥ, Λ/ΣΙΑ
3$^{\text{Ο}}$ ΒΡΑΒΕΙΟ: ΤΡΥΦΩΝΟΣ ΧΡΙΣΤΙΑΝΑ ΓΕΩΡΓΙΟΥ, ΤΣΙΡΕΙΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΛΕΜΕΣΟΥ

ΕΠΑΙΝΟ ΣΤΟΥΣ :
ΠΑΠΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΓΙΑΓΚΟΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΓΙΟΥ ΙΩΑΝΝΗ ΛΕΜΕΣΟΣ
ΛΟΥΚΑ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΑΚΗ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΒΕΡΓΙΝΑ ΛΑΡΝΑΚΑ
ΜΕΝΕΛΑΟΥ ΑΝΔΡΟΝΙΚΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ, ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΓΙΑΣ ΒΑΡΒΑΡΑΣ, Λ/ΣΙΑ
ΝΕΟΠΤΟΛΕΜΟΥ ΒΑΛΕΝΤΙΝΑ ΝΕΟΠΤΟΛΕΜΟΥ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΓΙΟΥ ΙΩΑΝΝΗ ΛΕΜΕΣΟΣ
ΖΩΣΙΜΑΣ ΖΩΣΙΜΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΔΡΟΣΙΑΣ ΛΑΡΝΑΚΑ
ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΕΜΙΛΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΑΥΡΟΥ ΛΕΥΚΩΣΙΑ
ΖΑΝΟΣ ΠΑΝΟΣ ΣΩΤΗΡΗ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΓΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΛΕΥΚΩΣΙΑ
ΙΑΚΩΒΙΔΟΥ ΑΦΡΟΔΙΤΗ ΜΙΧΑΛΗ, ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΓ. ΒΑΡΒΑΡΑΣ
ΕΥΤΥΧΙΟΥ ΑΝΤΡΗ ΧΡΙΣΤΟΥ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΛΥΝΟΠΕΤΡΑΣ ΛΕΜΕΣΟΣ
ΜΑΛΗΚΙΔΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ ΓΙΩΡΓΟΥ, ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΛΕΜΕΣΟΣ

ΕΥΦΗΜΗ ΜΝΕΙΑ ΣΤΟΥΣ:
ΦΩΤΗ ΛΟΥΪΖΑ ΦΩΤΗ, ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΛΕΜΕΣΟΣ
ΚΟΥΜΑΛΛΟΣ ΜΑΡΙΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΕΓΚΩΜΗΣ ΛΕΥΚΩΣΙΑ
ΜΟΟΥΡΑΟ ΜΙΧΑΛΗΣ JOSEPH, ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΠΑΛΛΟΥΡΙΩΤΙΣΣΑΣ ΛΕΥΚΩΣΙΑ

<u>ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

1^{O} ΒΡΑΒΕΙΟ: ΖΑΜΠΥΡΙΝΗΣ ΣΟΦΟΚΛΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗ, Β΄ ΛΥΚΕΙΟ ΚΥΚΚΟΥ ΠΑΦΟΥ

2^{O} ΒΡΑΒΕΙΟ: ΧΡΙΣΤΟΦΙΔΗΣ ΠΕΤΡΟΣ ΛΕΑΝΔΡΟΥ, ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ Β΄ ΛΕΜΕΣΟΣ

3^{O} ΒΡΑΒΕΙΟ: ΖΑΧΑΡΙΑΣ ΧΡΙΣΤΟΣ ΣΙΜΟΥ, Β΄ ΛΥΚΕΙΟ ΚΥΚΚΟΥ ΠΑΦΟΥ

ΕΠΑΙΝΟ ΣΤΟΥΣ:

ΤΣΟΥΔΕΡΟΥ ΑΘΗΝΑ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ, ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΛΛΟΥΡΙΩΤΙΣΣΑΣ ΛΕΥΚΩΣΙΑ
ΦΟΙΝΙΚΕΤΤΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΣ, ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ Α΄ ΛΕΜΕΣΟΣ
ΠΡΩΤΟΠΑΠΑ ΕΙΡΗΝΗ ΣΩΚΡΑΤΗ, ΛΥΚΕΙΟ ΚΥΚΚΟΥ ΠΑΦΟΣ
ΠΟΛΙΑΝΙΔΗΣ ΠΑΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΥ, Α΄ ΛΥΚΕΙΟ ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ΄, ΠΑΦΟΣ
ΜΑΡΚΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΛΟΪΖΟΥ, ΛΥΚΕΙΟ ΚΥΚΚΟΥ ΠΑΦΟΥ
ΜΑΤΘΑΙΟΥ ΧΡΙΣΤΙΑΝΑ ΜΕΛΕΤΗ, ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΛΑΙΟΜΕΤΟΧΟΥ ΛΕΥΚΩΣΙΑ
ΧΡΙΣΤΟΥ ΜΙΧΑΛΗΣ ΜΑΝΩΛΗ, ΛΥΚΕΙΟ ΑΠ. ΠΕΤΡΟΥ ΚΑΙ ΠΑΥΛΟΥ, ΛΕΜΕΣΟΣ
ΜΑΣΟΥΡΑΣ ΒΕΛΙΣΑΡΙΟΣ ΘΕΟΧΑΡΗ, ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΥ , ΛΑΡΝΑΚΑ
ΝΕΟΦΥΤΟΥ ΝΙΚΟΛΑΣ ΣΤΑΥΡΟΥ, Β΄ ΛΥΚΕΙΟ ΚΥΚΚΟΥ ΠΑΦΟΣ
ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΠΕΤΡΟΣ ΓΡΗΓΟΡΗ, ΛΥΚΕΙΟ ΠΟΛΕΜΙΔΙΩΝ ΛΕΜΕΣΟΣ
ΜΟΥΡΟΥΖΗΣ ΘΕΟΔΟΣΗΣ ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΣ, 7^{o} ΛΥΚΕΙΟ ΠΟΛΕΜΙΔΙΩΝ ΛΕΜΕΣΟΣ

ΕΥΦΗΜΗ ΜΝΕΙΑ ΣΤΟΥΣ:

ΣΑΒΒΙΔΗΣ ΝΙΚΟΣ ΚΩΣΤΑΣ, ΛΥΚΕΙΟ ΚΥΚΚΟΥ ΠΑΦΟΥ
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ ΧΡΙΣΤΙΑΝΑ ΒΑΣΙΛΗ, ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ Α΄ ΛΕΜΕΣΟΣ
ΠΙΠΗΣ ΜΕΝΕΛΑΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ, ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΛΕΥΚΩΣΙΑ
ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΤΕΛΛΑ ΣΑΒΒΑ, ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ Α΄ ΛΕΜΕΣΟΣ
ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΕΟΥΣ ΠΟΛΥΣ ΑΝΔΡΕΑ, ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ Α΄ ΛΕΜΕΣΟΣ
ΖΑΜΠΥΡΙΝΗΣ ΚΩΣΤΑΣ ΚΕΝΔΕΑΣ , ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΟΥ ΝΕΟΦΥΤΟΥ ΠΑΦΟΣ

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ «ΖΗΝΩΝ» ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

1° Βραβείο: Καφατάρης Γιώργος Λούκα, Λύκειο Βεργίνας, Λάρνακα
2° Βραβείο: Ζαχαρίας Κυριάκος Σίμου, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
3° Βραβείο: Λουκαϊδης Ευρυπίδης Γιώργου, Λανίτειο Λύκειο Β΄, Λεμεσός

Έπαινο κατά σειρά επιτυχίας στους:
Γεωργίου Νατάσα Αιμίλιου, Λύκειο Πολεμιδιών, Λεμεσός
Μελαχρινός Κωνσταντίνος Χαραλάμπους, Λύκειο Αποστόλου Βαρνάβα, Λευκωσία
Σαββίδου Χριστίνα Ανδρέα, Παγκύπριο Λύκειο Λάρνακας
Κωνσταντίνου Ναβίτ Κωνσταντίνου, Λύκειο Ακρόπολης, Λευκωσία
Ζαμπυρίνης Σοφοκλής Παντελή, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
Ματσικάρης Κυριάκος Γιώργου, Λύκειο Αποστόλου Βαρνάβα, Λευκωσία
Στυλιάνου Ματθαίος Αντρέα, Λύκειο Πολεμιδιών, Λεμεσός

Εύφημη Μνεία στους:
Αγαθοκλέους Θεμούλα Αγαθοκλή, Λύκειο Πολεμιδιών, Λεμεσός
Αβάνης Ζένιος Σάββα, Λύκειο Δασούπολης, Λευκωσία
Ζαχαρίας Χρίστου Σίμου, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
Μίτιλλος Χρίστος Γιώργου, Αγγλική Σχολή , Λευκωσία
Τήλλυρου Δέσποινα Νικόλα, Λύκειο Παραλιμνίου, Αμμόχωστος
Χατζηιωσήφ Αλκης Μιχαήλ, Λύκειο Μακαρείου Γ΄, Λάρνακα
Βαρνάβα Χαράλαμπος Βαρνάβα, Λύκειο Απ. Πέτρου & Παύλου, Λεμεσός
Σοφοκλέους Βαλεντίνος Ανδρέα, Λύκειο Πολεμιδιών, Λεμεσός
Ζαμπυρίνης Κωνσταντίνος Παντελή, Λύκειο Κύκκου, Πάφος
Ιωάννου Κώστας Γιαννάκη, Λύκειο Απ. Πέτρου & Παύλου, Λεμεσός
Τοχνίτης Μίλτος Χριστοφόρου, Λύκειο Βεργίνας, Λάρνακα

Προκριθέντες στρατεύσιμοι:
Γεωργίου Νίκος Χρίστου, Λευκωσία
Σωκράτους Νικόλας Βάσου, Πάφος
Πετρίδης Νεοφύτος Δημήτρη, Λεμεσός
Παντζιαράς Μάριος Γεωργίου, Λευκωσία
Ταμάμης Φανούριος Δημήτρη, Λευκωσία

Αποτελέσματα συμμετοχής της Κύπρου στη 42η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα Washington D.C., Ιούλιος 2001

Η Εθνική Ομάδα της Κύπρου είχε φέτος την καλύτερη επιτυχία στα χρονικά της συμμετοχής της στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα. Συγκεκριμένα η εξαμελής ομάδα πέτυχε 4 χάλκινα μετάλλια και 2 επαίνους.

Οι μαθητές που βραβεύτηκαν είναι:

<u>ΧΑΛΚΙΝΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ</u>

Σωκράτους Νικόλας
Ζαχαρίας Κυριάκος
Λουκαΐδης Ευρυπίδης
Σαββίδου Χριστίνα

<u>ΕΠΑΙΝΟ</u>

Καφατάρης Γιώργος
Ζαμπυρίνης Σοφοκλής

ΧΡΗΜΑΤΙΣΤΗΡΙΟ ≡ ΚΟΙΝΩΝΙΑ
ΜΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Δρ Γρηγόρης Α. Μακρίδης
Πρόεδρος της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Εισαγωγή

Αιώνες τώρα ο κόσμος προσπαθεί να έχει δομημένη και οργανωμένη ζωή γι' αυτό έχουμε νομικό σύστημα, οργανοδιαγράμματα, χρονοδιαγράμματα, γραφειοκρατία, ρολόγια και ημερολόγια για να συντονίζουν τις καθημερινές μας δραστηριότητες. Δημοσιεύουμε εγκυκλοπαίδειες, λεξικά, βιβλία, εφημερίδες, περιοδικά, ιστοσελίδες για να οργανώσουμε τη γνώση. Όσο όμως και αν προσπαθούμε να οργανώσουμε τη ζωή μας πάντα έρχεται αυτή η μέρα την οποία δεν έχουμε προβλέψει, δεν έχουμε σκεφτεί και όλα αυτά γιατί ο αριθμός των παραμέτρων που συντονίζουν τη ζωή μας είναι ίσως χίλιες φορές πολλαπλάσιος αυτών που μπορέσαμε να σκεφτούμε ή προλάβαμε να υπολογίσουμε. Γενικά, δεν υπάρχει γνωστή ή προβλεπόμενη ακολουθία γεγονότων στη ζωή μας, πόσο μάλλον δεν πρέπει να αναμένουμε ότι θα υπάρχει στα οικονομικά ή στο χρηματιστήριο.

Το χρηματιστήριο καθρεφτίζει τη ζωή μιας κοινωνίας, τον τρόπο που αντιδρά, που σκέφτεται, που παρασύρεται, που πανικοβάλλεται, που ρισκάρει, που μελετά, που καταλαβαίνει, που ξεγελιέται, που αγοράζει και πωλεί. Αν μπορούσε κανείς να μετρήσει αυτούς τους παράγοντες που χαρακτηρίζουν τη ζωή μιας κοινωνίας τότε ίσως να μπορέσει να προβλέψει με ακρίβεια τη συμπεριφορά του χρηματιστηρίου στην ίδια την κοινωνία. Όσο πιο μικρή είναι η κοινωνία που ζούμε τόσο πιο σημαντικοί είναι οι παράγοντες που την χαρακτηρίζουν λόγω της εύκολης επικοινωνίας μεταξύ των ατόμων, της γρήγορης διάδοσης των πληροφοριών και παραπληροφοριών και ιδιαίτερα της ευαισθησίας σε φήμες και της εύκολης επιρροής μερικών "μεγάλων" οικονομικών δυνάμεων.

Τα στοιχεία όμως δείχνουν ότι παρόλο που η ζωή μας δεν μπορεί να προβλεφθεί, δεν είναι όμως ούτε τυχαία όπως ούτε η συμπεριφορά του χρηματιστηρίου είναι τυχαία. Άρα αν η συμπεριφορά του χρηματιστηρίου δεν είναι τυχαία και δεν είναι προβλεπόμενη (σταθερού ρυθμού ή περιοδική) τότε τι είναι; Θα προσπαθήσω να δώσω απάντηση σε αυτό το ερώτημα παρακάτω.

Για να γίνει όμως μια Μαθηματική πρόβλεψη πρέπει πρώτα να έχουμε μελετήσει και μετρήσει τους παράγοντες που χαρακτηρίζουν την κοινωνία, όπως ανάφερα πιο πάνω, για να μπορέσουμε να τους χρησιμοποιήσουμε στην πρόβλεψή μας, αν μπορεί ποτέ αυτό να γίνει πλήρως. Τώρα το ερώτημα που τίθεται είναι πως μπορούμε να μετρήσουμε αυτούς τους παράγοντες. Στην πραγματικότητα το ιστορικό του ιδίου του χρηματιστηρίου τους μετρά καθημερινά ώστε με την κατάλληλη επεξεργασία των αυξομειώσεων των τιμών των μετοχών μπορούμε να μετρήσουμε πως συμπεριφέρεται η κοινωνία για κάθε μετοχή ξεχωριστά.

Ισορροπία και Φύση

Ένα σύστημα βρίσκεται σε αδράνεια ή αν θέλετε σε ισορροπία αν δεν υπάρχουν εξωγενείς επιδράσεις σε αυτό. Οι οικονομολόγοι ορίζουν μια κατάσταση ως ισορροπία όταν όλα ισοζυγούν, δηλαδή όταν η ζήτηση προϊόντων ισούται με τη διάθεση/παραγωγή των προϊόντων. Μια μικρή αλλαγή στο σύστημα από εξωγενείς παράγοντες θα οδηγήσει το σύστημα σε αστάθεια. Το σύστημα αντιδρά αμέσως διότι επιθυμεί να βρίσκεται σε ισορροπία. Για να εξηγήσουμε λίγο το φαινόμενο αυτό θα δώσω δύο φυσικά παραδείγματα. Όταν ένα εκκρεμές βρίσκεται σε αδράνεια και το μετακινήσουμε λίγο αρχίζει να ταλαντεύεται μέχρι να επανέλθει στην αρχική του αδρανή κατάσταση, δηλαδή το σύστημα αντιδρά από μόνο του για να επανέλθει στην ισορροπία. Η οικονομική ισορροπία της παραγωγής και διάθεσης ενός προϊόντος είναι να πωλείς όσα παράγεις και αυτό επιτυγχάνεται για μια τιμή η οποία ονομάζεται τιμή ισορροπίας. Όταν αυξήσουμε τη τιμή του προϊόντος τότε η ζήτηση αρχίζει να μειώνεται και αφού η ζήτηση μειώνεται τότε το πλεόνασμα θα προκαλέσει την μείωση της παραγωγής για να επανέλθει το σύστημα σε ισορροπία.

Η ίδια η φύση όμως απορρίπτει τελικά την ισορροπία γι'αυτό και χάνονται ζωικά είδη ενώ άλλα αναπτύσσονται επικίνδυνα. Το οικονομικό σύστημα της Σοβιετικής Ένωσης απέτυχε γιατί προσπάθησε να διατηρήσει την οικονομική ισορροπία. Τα φυσικά συστήματα μπορούν να αναπτυχθούν όταν ξεφύγουν από την ισορροπία και έτσι για να αναπτυχθεί το χρηματιστήριο θα πρέπει να ξεφεύγει από ισορροπίες. Οποιαδήποτε προσπάθεια διατήρησης της ισορροπίας με νομοθεσίες και κανονισμούς θα το οδηγήσουν σε αποτυχία γιατί αυτό μας διδάσκει η φύση. Γενικά μια αποτελεσματική αγορά θεωρείται αυτή στην οποία οι τιμές είναι δίκαιες με βάση τις υπάρχουσες πληροφορίες και ούτε οι αγοραστές αλλά ούτε οι πωλητές βρίσκονται σε πλεονεκτική θέση. Τέτοια αγορά στο χώρο του χρηματιστηρίου θα αποτύχαινε διότι απλώς δεν θα υπάρχει ικανοποιητικό ενδιαφέρον για αγορά ή πώληση.

Τίθεται τώρα το ερώτημα κατά πόσο μια υγιής οικονομία είναι αυτή που απέχει αρκετά από την ισορροπία. Οι οικονομολόγοι που χρησιμοποιούν θεωρίες ισορροπίας για να μοντελοποιήσουν συστήματα που βρίσκονται εκτός ισορροπίας θα καταλήξουν σε λανθασμένα αποτελέσματα. Η φυσική πραγματικότητα είναι ότι ένα συμβάν μπορεί να αλλάξει το μέλλον, γεγονός που βασίζεται στη θεωρία της ευαισθησίας δυναμικών συστημάτων σε αρχικές καταστάσεις ή τιμές. Η συμπεριφορά του επενδυτή δεν βασίζεται στην ιστορία αλλά στην πιο πρόσφατη εμπειρία ή συμπεριφορά. Δηλαδή μια μετοχή Α που είχε εντυπωσιακή ανοδική πορεία κατά το δεύτερο εξάμηνο του 1999 αλλά σήμερα βρίσκεται σε αξία 10 φορές μικρότερη από το 1999 με μικροαυξομειώσεις δεν μας ενθαρρύνει να την αγοράσουμε απλώς γιατί οι διάφοροι ανθρώπινοι παράγοντες λειτουργούν με τέτοιο τρόπο που δεν μας ενδιαφέρει η ιστορία αλλά το άμεσο παρελθόν, το σήμερα, το χτες ή το προχθές τα οποία δεν είναι τίποτα λιγότερο από την αρχική κατάσταση ενός δυναμικού συστήματος που καθορίζει την πορεία της τιμής της μετοχής. Το γεγονός ότι δεν λαμβάνουμε υπόψη την ιστορία προφανώς να είναι λανθασμένο αλλά η ανθρώπινη φύση δεν μπορεί να έχει τη δυνατότητα μνήμης που χρειάζεται. Τα μαθηματικά όμως μπορούν να μας βοηθήσουν για να κάνουμε χρήση της ιστορίας και να υπολογίσουμε το συντελεστή συσχέτισης του παρόντος και του μέλλοντος όπως περιγράφεται στο [1]. Ακόμη με τη βοήθεια της θεωρίας της Γεωμετρίας των Μορφοκλασμάτων (Fractals) μπορούμε να μελετήσουμε χρονοσειρές τιμών των μετοχών διαφορετικών χρονοβημάτων και χρονικών περιόδων ψάχνοντας για αυτοόμοιες χρονοπεριοχές οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πρόβλεψη. Γραφικό παράδειγμα παρουσιάζεται στο [1].

Μαθηματικό παράδειγμα εφαρμογής

Έστω ότι έχουμε μια μετοχή με τιμή P(t) μικρότερη από 1 λίρα. Επειδή υπάρχουν πολλοί αγοραστές η ζήτηση προκαλεί την αύξηση της τιμής σε ένα συγκεκριμένο ρυθμό αύξησης λ. Η μελλοντική τιμή της μετοχής σε χρόνο (t+1) υπολογίζεται ως:

$$P(t+1) = \lambda \cdot P(t) \qquad (1)$$

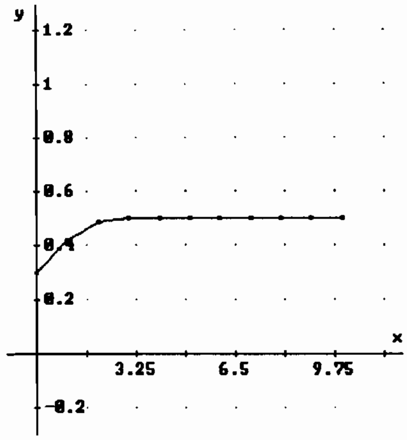
Η εξίσωση θεωρεί ότι υπάρχουν μόνο αγοραστές. Για να κάνουμε το μοντέλο πιο αληθοφανές μπορούμε να προσθέσουμε μία επίδραση από τους πωλητές. Έστω ότι ενώ οι τιμές αυξάνονται σε $\lambda \cdot P(t)$, οι πωλητές μειώνουν την τιμή κατά $\lambda \cdot P(t)^2$. Το μοντέλο (1) μετασχηματίζεται στο :

$$P(t+1) = \lambda \cdot P(t) - \lambda \cdot P(t)^2 = \lambda \cdot P(t) \cdot (1 - P(t)) \qquad (2)$$

Αυτό το μοντέλο δεν είναι πραγματικό αλλά μας λέει ότι ενώ η πίεση της ζήτησης αυξάνει τις τιμές με ρυθμό λ, η πίεση της πώλησης μειώνει τις τιμές με ρυθμό $\lambda \cdot P(t)$.

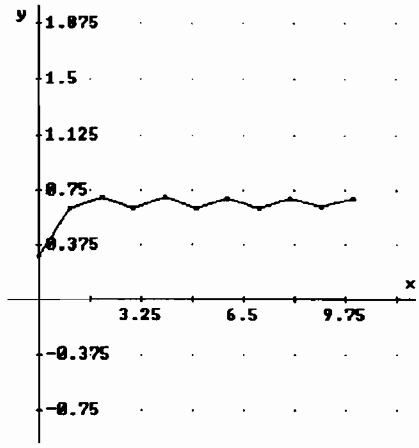
Ας εξετάσουμε τη συμπεριφορά του μοντέλου επαναληπτικής σχέσης (2) και να τη συσχετίσουμε με τη συμπεριφορά της μετοχής στο χρηματιστήριο.

Έστω ότι η αγοραστική πίεση στη μετοχή Α δίνει ρυθμό αύξησης λ=2 και έστω ότι η αρχική τιμή της μετοχής στο χρόνο 0 είναι P(0) = 0,30 . Στο διάγραμμα 1 παρατηρούμε ότι σε μικρό χρονικό διάστημα η μετοχή θα φτάσει οριακά την τιμή 0,50 . Αυτό μας λέει ότι σε ένα επίπεδο ζήτησης που καθορίζει την τιμή του λ , η τιμή της μετοχής συγκλίνει προς μια μοναδική τιμή η οποία θεωρείται ως η δίκαια αναμενόμενη τιμή ή τιμή ισορροπίας.



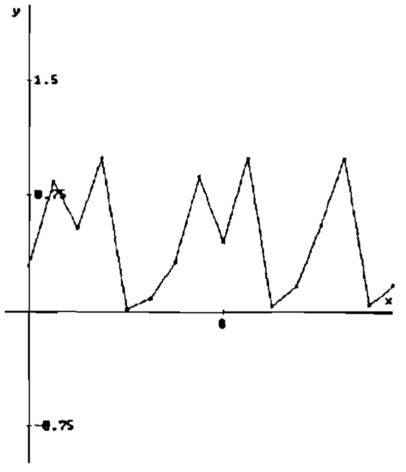
Διάγραμμα 1. P(0)=0,30 , λ=2

Αν τώρα η αγοραστική πίεση αυξηθεί αυξάνοντας έτσι το ρυθμό αύξησης της μετοχής σε λ=3 τότε εμφανίζονται δύο αναμενόμενες δίκαιες τιμές της μετοχής και το σύστημα ταλαντεύεται μεταξύ των δύο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2. Στην πραγματικότητα στη μια τιμή οι πωλητές πωλούν και στην άλλη οι αγοραστές αγοράζουν. Δηλαδή εδώ χάνεται η ισορροπία μεταξύ πωλητών και αγοραστών. Με μαθηματικά, οι πωλητές κάνουν την τιμή της $\lambda \cdot P(t)^2$ να υπερβαίνει του δυναμικού του ρυθμού αύξησης λ και έτσι να μειώνεται η τιμή της μετοχής. Στη συνέχεια, όταν η τιμή φθάσει στο χαμηλότερο σημείο ο ρυθμός αύξησης επικρατεί λόγω ενδιαφέροντος από τους αγοραστές και αλλάζει η πορεία της τιμής της μετοχής προς τα άνω και πάλι μέχρι να φθάσει το ψηλότερο επίπεδο και πάλι από την αρχή. Αυτό θα αλλάξει όταν υπάρξει νέος εξωγενής παράγοντας ο οποίος δεν προβλέπεται από το μοντέλο.



Διάγραμμα 2. P(0)=0,30 , λ=3

Τώρα ας υποθέσουμε ότι εμφανίζονται περισσότεροι αγοραστές στο σύστημα που δημιουργούν μια νέα αγοραστική πίεση η οποία ανεβάζει το ρυθμό αύξησης της μετοχής στο λ=4. Σε αυτή την περίπτωση τα Μαθηματικά προβλέπουν άπειρο αριθμό αναμενόμενων δίκαιων τιμών της μετοχής. Επειδή το σύστημα δεν μπορεί να καταλήξει σε συγκεκριμένη τιμήν ισορροπίας δημιουργείται μια ακολουθία τιμών η οποία περιγράφεται ως χαοτική, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3.



Διάγραμμα 3. P(0)=0,30 , λ=4

Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις μεθόδους μπορούν να μελετηθούν στο [1].

[1] Γρ. Μακρίδης, «Χρηματιστήριο≡Κοινωνία : Μια Μαθηματική Προσέγγιση», Πρακτικά 17ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, (Κεντρική Ομιλία), Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
και
Πρακτικά 4ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας, Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία.

Ένα αλλιώτικο Πυθαγόρειο Θεώρημα

Ιωάννη Φάκα
Μαθηματικού

Εισαγωγή

Το 1989 ο γιος μου φοιτούσε στην Γ΄ Λυκείου στο Λύκειο Παλουριώτισσας. Ένα απόγευμα ήρθε και με ρώτησε: **«παπά γιατί ο Πυθαγόρας είπε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτεινούσης ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών. Εγώ πιστεύω ότι ισχύει το ίδιο θεώρημα και για το τρίγωνο της υποτεινούσης, το πεντάγωνο της υποτεινούσης, το εξάγωνο της υποτεινούσης κτλ».**

Ως Μαθηματικός που είμαι όφειλα και έτσι έπραξα και ερεύνησα το όλο θέμα. Διαπίστωσα ότι ήταν αληθινό. Σε επίσκεψη μου στην Αθήνα το ανέφερα και στον καθηγητή μου κ. Σ.Π. Ζερβό, ο οποίος αφού έκαμε στην παρουσία μου και μερικά τηλεφωνήματα με πληροφόρησε ότι πράγματι είναι αξιόλογο και εκ πρώτης όψεως φαίνεται γενικά πρωτότυπο. Όπως και να έχει το πράγμα, σήμερα που η έγκριτος εφημερίδα Σημερινή μου ζήτησε να παρουσιάζω στις σελίδες της θέματα επιστημονικά κρίνω σκόπιμο να παρουσιάσω και αυτό το **αλλοιώτικο Πυθαγόρειο Θεώρημα** ανεξάρτητα αν είναι όντως πρωτότυπο ή όχι και προτρέπω τους γονείς που έχουν παιδιά στο Λύκειο να τους το δώσουν για μελέτη, για προβληματισμό και έλεγχο.

Οι Πυθαγόρειοι και η Πυθαγόρειος Σχολή

Ο μεγάλος Έλληνας Μαθηματικός Πυθαγόρας που έζησε τον 6ον π.Χ. αιώνα ασχολήθηκε πάρα πολύ με την θεωρία των αριθμών και συγκαταλέγεται μεταξύ εκείνων των Ελλήνων Μαθηματικών που για πρώτη φορά έθεσαν την αρχή της απόδειξης στην Μαθηματική Επιστήμη. Ίδρυσε την Σχολή την ονομαζόμενη Πυθαγόρειο Σχολή η οποία λειτουργούσε για 10 αιώνες και είχε μεγάλη επίδραση ακόμη και στις φιλοσοφικές σχολές. Ο Πλάτων παρόλο ότι ήταν κατά κύριο λόγο φιλόσοφος και πολύ λιγότερο Μαθηματικός, έγραψε στην είσοδο της Ακαδημίας του το περίφημο **«Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω»**, που σήμαινε απαγορεύεται η είσοδος σε όσους δεν γνωρίζουν Γεωμετρία.

«Αυτός έφα»

Εξάλλου το απόφθεγμα **«αυτός έφα»** αναφέρεται για τον μεγάλο διδάσκαλο Πυθαγόρα στο άκουσμα του οποίου όλοι οι μαθητές έσκυβαν το κεφάλι, προπαντός οι μαθητές της Α΄ τάξης ονομαζόμενης **ομακόιον** (ομού και ακούω) που ήσαν οι **κατηχούμενοι** μαθητές που για 5 χρόνια έπρεπε να κάθονται όλοι μαζί και να μην ομιλούν καθόλου, μόνο να ακούνε και να σκέφτονται. Μετά τα 5 χρόνια ο Πυθαγόρας ο ίδιος αποφάσιζε για τον καθένα αν θα συνέχιζε ή αν θα αποπέμπετο.

Οι Έλληνες αεί παίδες

Η Edith Hamilton στο περίφημο βιβλίο της «Αθάνατη Ελλάδα» – «The Greek way to Western Civilization», μεταξύ άλλων αρετών με τις οποίες εγκωμιάζει τους Έλληνες αναφέρει και το παιχνίδι και μάλιστα επισημαίνει ότι είναι αρετή που υπάρχει μόνο στους Έλληνες. Τι άλλο παρά παιχνίδι ήταν για τους Πυθαγόρειους να τρέχουν πίσω από τους ακέραιους αριθμούς και να ικανοποιούνται βρίσκοντας ιδιότητες σε αυτούς. Το 1 έλεγαν είναι ο γεννήτορας και ταυτόχρονα συμβόλιζε τη νόηση, το 2 συμβόλιζε την γνώση και είναι ο πρώτος άρτιος ο θήλυς, το 3 είναι ο πρώτος περιττός μετά τον γεννήτορα και τον θεωρούσαν ότι είναι ο πρώτος άρρεν. Το 5 άθροισμα του θήλεως και του άρρενος συμβόλιζε τον γάμο.

Και το παιχνίδι συνεχιζότανε: **τέλειος αριθμός είναι εκείνος που ισούται με το άθροισμα των διαιρετών του:** $6 = 1+2+3$, $28 = 1+2+4+7+14$.

Μετά οι Πυθαγόρειοι είπαν να ορίσουμε και τον υπερτέλειο καθώς και τον ελλειπή που είναι εκείνοι που είναι μεγαλύτεροι από το άθροισμα των διαιρετών τους και μικρότεροι αντίστοιχα: $4 > 1+2$ και $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6$

Πως ευχαρίστησε τους Θεούς ο Πυθαγόρας για την ανακάλυψη του

Σύμφωνα με την παράδοση ο Πυθαγόρας τόσο πολύ συνεκλονίσθη από την ανακάλυψη του ομώνυμου θεωρήματος του και το οποίο περιέλαβε ο Ευκλείδης στο πρώτο του βιβλίο στην παράγραφο 47, που για να ευχαριστήσει τους Θεούς του Ολύμπου που τον εφώτισαν να το ανακαλύψει και να το διατυπώσει έσφαξε 100 βόδια (εκατόμβη) και τα θυσίασε προς τιμή τους.

Βεβαίως στο σημείο αυτό πρέπει να παραδεχτούμε ότι το μεγαλείο του Πυθαγόρα και του Ευκλείδη με τους μαθητές τους ήταν ότι μάζεψαν όλες τις μαθηματικές γνώσεις που προϋπήρχαν στην Ελλάδα και σε άλλους λαούς και αφού τις έθεσαν υπό την αυστηρή κρίση της απόδειξης τις παρουσίασαν ως σύνολο. Υπάρχει και η περίπτωση ότι είναι μια πρόταση από εκείνες που προϋπήρχαν και όχι από εκείνες που δημιούργησαν οι μεγάλοι Έλληνες Μαθηματικοί της εποχής εκείνης. Το γεγονός όμως, ότι ο Πυθαγόρας έσφαξε τα 100 βόδια φαίνεται ότι και να προϋπήρχε είτε δεν το είχε υπόψη του ή το ολιγότερο αυτός το απέδειξε πρώτος.

Πυθαγόρειο Θεώρημα – Πυθαγόρειες Τριάδες

Ειδικά για το πυθαγόρειο θεώρημα μελέτησαν σε βάθος και βρήκαν πολλές τριάδες ακεραίων αριθμών που άκουαν στο πυθαγόρειο θεώρημα, όπως είναι (3,4,5,), (5,12,13), (6,8,10) κ.ο.κ. Ο Μαθηματικός μάλιστα Διόφαντος ανακάλυψε ότι όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες (χ,ψ,ζ) ακούνε στις εξισώσεις

$$x = m^2 - n^2,\ \psi = 2\,mm,\ z = m^2 + n^2 \quad \text{με } m > n, \text{ ακέραιοι}$$

Για να μπορέσουμε να παρακολουθήσουμε το αλλοιώτικο πυθαγόρειο θεώρημα διατυπώνουμε το πυθαγόρειο θεώρημα ως εξής:

« Το τετράγωνο που έχει πλευρά την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου έχει εμβαδόν όσον εμβαδόν έχουν το τετράγωνο που έχει πλευρά την μια κάθετο του ορθογωνίου τριγώνου μαζί με το τετράγωνο που έχει πλευρά την άλλη κάθετο του ορθογωνίου τριγώνου ». Ή πιο απλά όπως το διδάσκομε στα σχολεία:

« Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτεινούσης ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του».

Τα αλλιώτικα πυθαγόρεια θεωρήματα

« Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το ισόπλευρο τρίγωνο της υποτεινούσης ισούται με το άθροισμα των ισοπλεύρων τριγώνων των καθέτων πλευρών αυτού».

«Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το κανονικό πεντάγωνο μιας καθέτου πλευράς σύν το κανονικό πεντάγωνο της άλλης καθέτου πλευράς, έχουν συνολικό εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κανονικού πενταγώνου της υποτείνουσας».

«Το κανονικό εξάγωνο της υποτεινούσης ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται σε εμβαδόν με το άθροισμα των κανονικών εξαγώνων των καθέτων πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου».
Έχουμε ελέγξει και το θεώρημα ισχύει γενικά για όλα τα κανονικά πολύγωνα δηλαδή:
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο αν δημιουργήσουμε με τις πλευρές του κανονικά δεκάγωνα, εικοσάγωνα και γενικά ν – γωνα τότε ισχύει:

το κανονικό πολύγωνο με πλευρά την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου έχει εμβαδόν όσον εμβαδόν έχουν μαζί το κανονικό πολύγωνο με πλευρά την μια κάθετο του ορθογωνίου τριγώνου και το κανονικό πολύγωνο με πλευρά την άλλη κάθετο του ορθογωνίου τριγώνου

Το ίδιο θεώρημα ισχύει και για κύκλους και ημικύκλια

Το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει όπως είπαμε όχι μόνο για τετράγωνο αλλά και για κάθε κανονικό πολύγωνο. Ισχύει όμως και για ημικύκλια:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το ημικύκλιο με διάμετρο την υποτείνουσα του έχει το ίδιο εμβαδόν που έχουν μαζί τα ημικύκλια με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

Ακόμη δε ισχύει και για κύκλους. Έτσι αν δημιουργήσουμε κύκλους με διαμέτρους τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, παρόλο ότι αυτοί οι κύκλοι συμπλέκονται και μεταξύ τους και με το μητρικό ορθογώνιο τρίγωνο εντούτοις και πάλι ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα:

Ο κύκλος με διάμετρο την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου έχει το ίδιον εμβαδόν που έχουν μαζί οι κύκλοι με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου.

Αποδείξεις των πιο πάνω προτάσεων

Όσον αφορά την πρώτη πρόταση με το ισόπλευρο τρίγωνο η απόδειξη επιτυγχάνεται με τον πολλαπλασιασμό της σχέσης: $\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$ με το ½ ημ 60° και έχουμε:

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha^2\,\eta\mu 60° = \tfrac{1}{2}\,\beta^2\,\eta\mu 60° + \tfrac{1}{2}\,\gamma^2\,\eta\mu 60° \quad \text{δηλαδή } E_1 = E_2 + E_3$$

Για τις άλλες προτάσεις αρκεί να δώσουμε απόδειξη για το κανονικό ν - γωνο ξεκινούμε και πάλι από την σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ και την πολλαπλασιάζουμε επί ¼ ν σφ (180° / ν) και έτσι έχουμε:

$$\tfrac{1}{4}\,\nu\alpha^2\,\sigma\varphi\,(180°/\nu) = \tfrac{1}{4}\,\nu\beta^2\,\sigma\varphi\,(180°/\nu) + \tfrac{1}{4}\,\nu\gamma^2\,\sigma\varphi\,(180°/\nu)$$

$$\text{δηλαδή } E_1 = E_2 + E_3$$

Σχετικά με τον κύκλο και το ημικύκλιο αρκεί να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ με $\pi/8$ και $\pi/4$ αντίστοιχα και θα έχουμε:

$$\pi\alpha^2/8 = \pi\beta^2/8 + \pi\gamma^2/8 \text{ και } \pi\alpha^2/4 = \pi\beta^2/4 + \pi\gamma^2/4 \quad \text{δηλαδή } E_1 = E_2 + E_3$$

Επίλογος

Τελειώνοντας αναφέρω ότι ο εξοστρακισμός της Ευκλείδειου Γεωμετρίας από τις Σχολές Μέσης Παιδείας που διήρκησε για δεκαετίες είχε σαν αποτέλεσμα να δημιουργηθούν επί σειρά ετών και στην Ευρώπη και στην Κύπρο μαθητές τύπου «ρομπότ» που εξασκούντο στο να λύουν με τυποποιημένες μεθόδους ασκήσεις πολλές φορές μάλιστα και δύσκολες ασκήσεις. Η μη ενασχόληση όμως με την καθαυτό επεξεργασία - ανάλυση – σύνθεση – απόδειξη των προτάσεων τους έχουν καταντήσει κυριολεκτικά άψυχα ρομπότ.
Με αυτές τις σκέψεις παρουσιάζω τα πιο πάνω και καλώ τους γονείς που έχουν παιδιά στο Λύκειο να τους τα παραδώσουν για προβληματισμό, για απόδειξη και για εμβάθυνση, ενόψει μάλιστα και του γεγονότος ότι τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μία αποτυχία των μαθητών μας όσον αφορά την απόδοση τους στα Μαθηματικά όπως φάνηκε από τους τελευταίους διαγωνισμούς που έγιναν.

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΠΡΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2002

Ιωάννη Φάκα
Μαθηματικού

ΕΚΛΕΙΨΕΙΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2002

Το έτος 2082 υπάρχουν 5 εκλείψεις, 2 του Ηλίου και 3 της Σελήνης.

1. Έκλειψη Σελήνης εκ της παρασκιάς της Γης, 26 - 27/05/2002. Αόρατη από την Κύπρο.

Στοιχεία της έκλειψης:

Είσοδος στην παρασκιά	12ω	13λ
Μέσον της έκλειψης 1	4ω	03λ
Έξοδος εκ της παρασκιάς	15ω	55λ

2. Δακτυλοειδής Έκλειψη Ηλίου 10- 11/06/2002. Αόρατη από την Κύπρο.

Η όλη διαδικασία της έκλειψης αρχίζει στις 10/06/2002 στις 22ω 52λ και τελειώνει στις 11/06/2002 στις 04ω 37λ.
Η έκλειψη είναι ορατή σε μία ζώνη που ξεκινά από την Ινδονησία, διασχίζει τον Ειρηνικό Ωκεανό και καταλήγει στις δυτικές ακτές του Μεξικού.

3. Έκλειψη Σελήνης εκ της παρασκιάς της Γης. 24-25/06/2002.

Είσοδος της Σελήνης στην παρασκιά της Γης 24/06/2002 στις 22ω 19λ.
Μέσον Έκλειψης 24/06/2002 στις 23ω 27λ.
Έξοδος εκ της παρασκιάς 25/06/2002 στις 00ω 35λ
Η Έκλειψη θα είναι ορατή από την Κύπρο αλλά επειδή προέρχεται εκ της παρασκιάς, δεν θα είναι πρακτικά ορατή.

4. Έκλειψη Σελήνης εκ της παρασκιάς της Γης. 19-28/11/2002

Η Σελήνη εισέρχεται στην παρασκιά στις 20/11/2002 στις 01ω 32λ.
Μέσον της Έκλειψης 20/I 1/2002 στις 3ω 47λ.
Η Σελήνη εξέρχεται από την παρασκιά στις 20/11/2002 στις 6ω και 01λ.
Η Έκλειψη θα είναι ορατή από την Κύπρο αλλά επειδή προέρχεται εκ της παρασκιάς δεν θα είναι πρακτικά ορατή.

5. Ολική Έκλειψη Ηλίου 04/12/2002. Αόρατη από την Κύπρο.

Η ύλη διαδικασία της έκλειψης αρχίζει στις 06ω 51 λ και τελειώνει στις 12ω 11 λ
Είναι ορατή σε μία ζώνη που ξεκινά από τον Ατλαντικό Ωκεανό, διασχίζει τη Νότιο Αφρική και φθάνει μέχρι και την Αυστραλιανή Ήπειρο.

Οι χρόνοι δίνονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΠΡΟΥ

ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2002

Ιωάννη Φάκα

1. Ο Ήλιος ευρίσκεται στο περίγειο στις 2 Ιανουαρίου στις 16ω. Αρχή του έτους.
2. Ο Ήλιος ευρίσκεται στο απόγειο στις 6η Ιουλίου και ώρα 06ω. Μέσον του έτους.
3. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Κριόν την 20ην Μαρτίου εις τις 21ω 16λ. Αρχή του Έαρος.
4. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Καρκίνο την 21ην Ιουνίου εις τις 15ω 24λ. Αρχή του Θέρους.
5. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Ζυγόν την 23ην Σεπτεμβρίου εις τις 06ω 55λ. Αρχή του Φθινοπώρου.
6. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Αιγόκερω την 22ην Δεκεμβρίου εις τις 03ω 14λ. Αρχή του Χειμώνα.

ΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΣΕΛΗΝΗΣ

	ημ ω λ		ημ ω λ		ημ ω λ		ημ ω λ
----	-----------	---	----------	---	----------	Ιαν.	06 05 55
Ιαν.	13 15 29	Ιαν.	21 19 46	Ιαν.	29 00 50	Φεβ.	04 15 33
Φεβ.	12 09 41	Φεβ.	20 14 02	Φεβ.	27 11 17	Μαρ.	06 03 24
Μαρ.	14 04 02	Μαρ.	22 04 28	Μάρ.	28 20 25	Απρ.	04 17 29
Απρ.	12 21 21	Απρ.	20 14 48	Απρ.	27 05 00	Μάης	04 09 16
Μάης	12 12 45	Μάης	19 21 42	Μάης	26 13 51	Ιούν.	03 02 05
Ιούν.	11 01 46	Ιούν.	18 02 29	Ιούν.	24 23 42	Ιούλ.	02 19 19
Ιούλ.	10 12 26	Ιούλ.	17 06 47	Ιούλ.	24 11 87	Αύγ.	01 12 22
Αύγ.	08 2115	Αύγ.	15 12 12	Αύγ.	23 00 29	Αύγ.	31 04 31
Σεπτ.	07 05 10	Σεπτ.	13 20 08	Σεπτ.	21 15 59	Σεπ.	29 19 03
Οκτ.	06 13 18	Οκτ.	13 07 33	Οκτ.	21 09 20	Οκτ.	29 07 28
Νιόβ.	04 22 34	Νιόβ.	11 22 52	Νιόβ.	20 03 34	Νιόβ.	27 17 46
Δεκ.	04 0934	Δεκ.	111749	Δεκ.	19 21 10	Δεκ.	27 02 31

Οι χρόνοι δίνονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ

Β' ΚΑΙ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ "Ιάκωβος Πατάτσος"

ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες Δεκέμβριος 2000

Επιμέλεια: Σάββας Αντωνίου – Κ. Αντωνίου

Να απαντηθούν όλα τα θέματα

1. Αν για την ακολουθία α_ν δίνεται ότι :
i) $\alpha_1 = \alpha_2$
ii) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}$ $\forall \nu \geq 2$, $\nu \in \mathbb{N}$
Να δείξετε ότι $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 = \alpha_1 \cdot \alpha_{\nu+1}$

2. *Στο* εσωτερικό τεταρτοκυκλίου ΑΟΒ με κέντρο το Ο και ακτίνα R, γράφουμε δύο ημικύκλια. Το ημικύκλιο με διάμετρο την ΑΟ και το ημικύκλιο ΒΓΔ με διάμετρο την ΒΔ (Δ σημείο της ΟΒ) και Γ το σημείο επαφής με το ημικύκλιου ΟΑ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του τεταρτοκυκλίου που είναι έξω από ημικύκλια συναρτήσει του R.

3. Το Σ είναι εσωτερικό σημείο του τετραγώνου ΑΒΓΔ, που δεν βρίσκεται πάνω στις διαγώνιους του. Αν α, β, γ, δ είναι οι γωνίες υπό τις οποίες φαίνονται από το σημείο Σ οι πλευρές του τετραγώνου ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sigma\varphi\alpha + \alpha\varphi\gamma} + \frac{1}{\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\delta} = 1$$

4. Δυο κύκλοι (Κ, α) και (Λ , β) εφάπτονται εξωτερικά στο *Α*. Αν ΒΓ το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους να δείξετε ότι $\mathrm{B\Gamma} = 2\sqrt{\alpha \cdot \beta}$. Αν (Ν,γ) ο κύκλος που εφάπτεται των κύκλων (Κ,α), (Λ,β) και του ΒΓ να δείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

5. Αν X_1, X_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $X^2 + \Pi X + K = 0$ καθώς και ρίζες τηε εξίσωσης $X^{2\nu} + \Pi^\nu X^\nu + K^\nu = 0$ όπου ν άρτιος αριθμός και $X_1 \neq X_2$ να δείξετε ότι:

(α) $X_1^\nu + X_2^\nu + \Pi^\nu = 0$

(β) $\left(X_1 + X_2\right)^\nu = \Pi^\nu$

(γ) οι αριθμοί $\frac{X_1}{X_2}$ *και* $\frac{X_2}{X_1}$ είναι ρίζες της εξίσωσης $X^\nu + 1 + \left(X + 1\right)^\nu = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Για ν = 1 $\Rightarrow \alpha_1^2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1^2 = \alpha_1^2 \Rightarrow$ αληθεύει.
Δεχόμαστε ότι ισχύει για ν = κ $\Rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots \alpha_\kappa^2 = \alpha_\kappa \cdot \alpha_{\kappa+1}$
Θα δείξουμε ότι ισχύει για ν = κ+1, δηλ. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots \alpha_\kappa^2 + \alpha_{\kappa+1}^2 = \alpha_{\kappa+1} \cdot \alpha_{\kappa+2}$

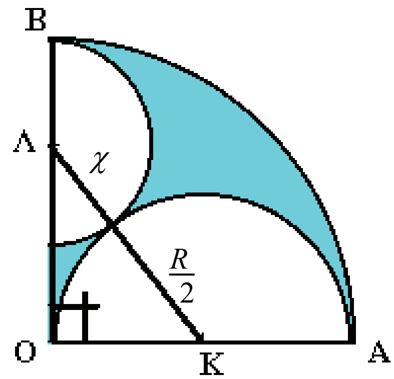
Απόδειξη:

Α΄ μέλος = $\left(\alpha_1^{2}+\alpha_2^{2}+\ldots\alpha_\kappa^{2}\right)+\alpha_{\kappa+1}^2=\alpha_\kappa\cdot\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa+1}^2=\alpha_\kappa\left(\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa+1}\right)$

λόγω της (ii) $\Rightarrow$ $\alpha_{\kappa+2}=\alpha_{\kappa+1}+\alpha_\kappa$

Άρα Α΄ μέλος = $\alpha_{\kappa+1}\cdot\alpha_{\kappa+2}$ $\Rightarrow$ ισχύει $\forall\, \nu\in\mathbb{N}$

2. $\text{ΟΛ}=R-\chi,\quad \text{ΟΚ}=\dfrac{R}{2},\qquad \text{ΚΛ}=\chi+\dfrac{R}{2}$



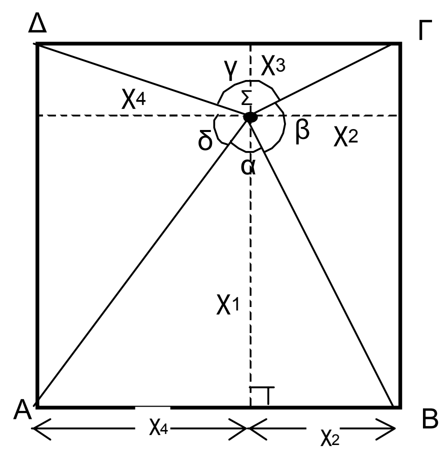
$$\widehat{\text{ΛΟΚ}}=90^\circ\Rightarrow(\text{ΛΚ})^2+(\text{ΟΚ})^2+(\text{ΟΛ})^2\Rightarrow$$

$$\left(\chi+\frac{R}{2}\right)^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2+(R-\chi)^2\Rightarrow 3R\chi=R^2\Rightarrow\boxed{\chi=\frac{R}{3}}$$

$$\text{Ε}_{\gamma\rho\alpha\mu}=\frac{\pi R^2}{4}-\left(\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}+\frac{\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{\pi R^2}{8}-\frac{\pi R^2}{18}=\boxed{\frac{\pi R^2}{8}-\frac{\pi R^2}{18}}$$

3. Έστω λ η πλευρά του τετραγώνου και $\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4$ οι αποστάσεις του σημείου Σ από τις πλευρές του τετραγώνου.



$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2\Rightarrow\sigma\phi\alpha=\sigma\phi(\alpha_1+\alpha_2)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma\phi\alpha&=\frac{\sigma\phi\alpha_1\cdot\sigma\phi\alpha_2-1}{\sigma\phi\alpha_1+\sigma\phi\alpha_2}\\ \sigma\phi\alpha_1&=\frac{\chi_1}{\chi_2},\ \sigma\phi\alpha_2=\frac{\chi_1}{\chi_4}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sigma\phi\alpha=\frac{\frac{\chi_1}{\chi_2}\cdot\frac{\chi_1}{\chi_4}-1}{\frac{\chi_1}{\chi_2}+\frac{\chi_1}{\chi_4}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sigma\phi\alpha=\frac{\chi_1^{2}-\chi_2\chi_4}{\chi_1(\chi_2+\chi_4)}\overset{\chi_2+\chi_4=\lambda}{\Rightarrow}\sigma\phi\alpha=\frac{\chi_1^{2}-\chi_2\chi_4}{\lambda\chi_1}$$

ομοίως $\sigma\phi\gamma=\dfrac{\chi_3^{2}-\chi_2\chi_4}{\lambda\chi_3}\Rightarrow$

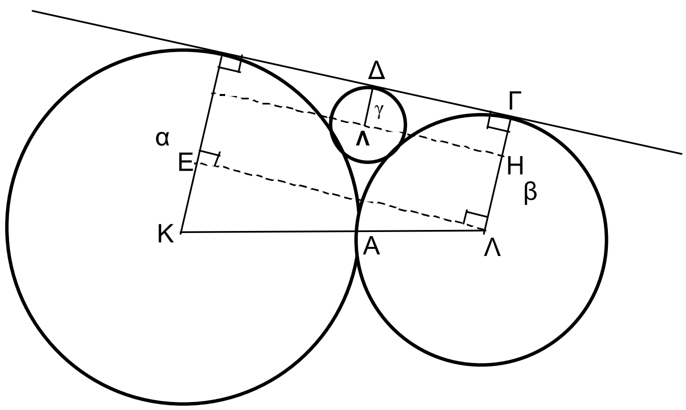
$$\sigma\phi\alpha+\sigma\phi\gamma=\frac{\chi_1^{2}-\chi_2\chi_4}{\lambda\chi_1}+\frac{\chi_3^{2}-\chi_2\chi_4}{\lambda\chi_3}=\frac{\chi_1^{2}\chi_3-\chi_2\chi_3\chi_4+\chi_1\chi_3^{2}-\chi_1\chi_2\chi_4}{\lambda\chi_1\chi_3}$$

$$=\frac{\chi_1\chi_3\overbrace{(\chi_1+\chi_3)}^{\lambda}-\chi_2\chi_4\overbrace{(\chi_1+\chi_3)}^{\lambda}}{\lambda\chi_1\chi_3}=\frac{\chi_1\chi_3-\chi_2\chi_4}{\chi_1\chi_3}\Rightarrow\boxed{\sigma\phi\alpha+\sigma\phi\gamma=\frac{\chi_1\chi_3-\chi_2\chi_4}{\chi_1\chi_3}}$$

κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι: $\sigma\phi\beta+\sigma\phi\delta=\dfrac{\chi_2\chi_4-\chi_1\chi_3}{\chi_2\chi_4}$

Άρα $\frac{1}{\sigma\phi\alpha+\alpha\phi\gamma}+\frac{1}{\sigma\phi\beta+\sigma\phi\delta}=\frac{\chi_1\chi_3}{\chi_1\chi_3-\chi_2\chi_4}+\frac{\chi_2\chi_4}{\chi_2\chi_4-\chi_1\chi_3}=\frac{\chi_1\chi_3-\chi_2\chi_4}{\chi_1\chi_3-\chi_2\chi_4}=1$

4.



Φέρω την ΕΛ//ΒΓ $\Rightarrow$ ΒΓΛΕ ορθογώνιο

$\Rightarrow$ ΕΛ = ΒΓ, ΕΚ = α – β , ΚΛ = α + β

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Lambda\mathrm{E}\mathrm{K}}$:

$(\mathrm{E}\Lambda)^2=(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$

ΕΛ=ΒΓ$\Rightarrow$ $(\mathrm{B}\Gamma)^2=4\alpha\beta\Rightarrow(\mathrm{B}\Gamma)=2\sqrt{\alpha\beta}$

Κατά τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι:

$(\Delta\Gamma)=2\sqrt{\beta\gamma},\ (\mathrm{B}\Delta)=2\sqrt{\alpha\gamma}$

$\mathrm{B}\Gamma=\mathrm{B}\Delta+\Delta\Gamma\Rightarrow \cancel{2}\sqrt{\alpha\beta}=\cancel{2}\sqrt{\beta\gamma}+\cancel{2}\sqrt{\alpha\gamma}$ διαιρώ με $\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ $\Rightarrow\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}=\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}+\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

5. Επειδή χ_1,χ_2 είναι ρίζες της $\mathrm{X}^{2\nu}+\Pi^\nu\mathrm{X}^\nu+\mathrm{K}^\nu=0\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathrm{X}_1^{2\nu}+\Pi^\nu\mathrm{X}_1^{\nu}+\mathrm{K}^\nu=0\\ \mathrm{X}_2^{2\nu}+\Pi^\nu\mathrm{X}_2^{\nu}+\mathrm{K}^\nu=0\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\chi_1^{2\nu}-\chi_2^{2\nu}\right)+\Pi^\nu\left(\chi_1^{\nu}-\chi_2^{\nu}\right)=0\Rightarrow\left(\chi_1^{\nu}+\chi_2^{\nu}\right)\cancel{\left(\chi_1^{\nu}-\chi_2^{\nu}\right)}+\Pi^\nu\cancel{\left(\chi_1^{\nu}-\chi_2^{\nu}\right)}=0\overset{\chi_1\neq\chi_2}{\Rightarrow}$

$\chi_1^{\nu}+\chi_2^{\nu}+\Pi^\nu=0$ (1)

χ_1,χ_2 είναι ρίζες της $\Rightarrow\mathrm{X}^2+\Pi\mathrm{X}+\mathrm{K}=0\Rightarrow\chi_1+\chi_2=-\Pi\Rightarrow(\chi_1+\chi_2)^\nu=(-\Pi)^\nu$

Επειδή ν άρτιος $\Rightarrow(\chi_1+\chi_2)^\nu=\Pi^\nu$ (2) . Από τις (1) και (2)$\Rightarrow$ $\chi_1^{\nu}+\chi_2^{\nu}+(\chi_1+\chi_2)^\nu=0$ (3)

Αντικαθιστώ στην $\mathrm{X}^\nu+1+(\mathrm{X}+1)^\nu=0$ όπου $\mathrm{X}=\frac{\chi_1}{\chi_2}\Rightarrow$

$\frac{\chi_1^{\nu}}{\chi_2^{\nu}}+1+\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}+1\right)^\nu\overset{(3)}{=}\frac{\chi_1^{\nu}+\chi_2^{\nu}+(\chi_1+\chi_2)^\nu}{\chi_2^{\nu}}=0\Rightarrow\frac{\chi_1}{\chi_2}$ είναι ρίζα της $\mathrm{X}^\nu+1+(\mathrm{X}+1)^\nu=0$

κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και $\frac{\chi_2}{\chi_1}$ είναι ρίζα την $\mathrm{X}^\nu+1+(\mathrm{X}+1)^\nu=0$

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΛΕΜΕΣΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ « *ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΛΑΜΗΣ* »

Χρόνος: 3 ώρες — Δεκέμβριος 2000

Επιμέλεια: Μάριος Ευσταθίου – Θεόκλητος Παραγιού

- Να λύσετε και τα πέντε θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με10 μονάδες.

1. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία Ο(0 ,0) , Α(0,1) Β(2,3) και Γ(5,0).Αν Ε και Ζ τα συμμετρικά σημεία του Γ ως προς τα σημεία Ο και Β αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΟΑΒ , είναι το μέσον Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ.

2. Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{\nu+1} = \left[1 + \dfrac{4\nu - 2}{(2\nu - 1)^2}\right] \cdot \alpha_\nu$ με $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

(α) Να βρείτε τους λόγους $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$, $\dfrac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_{\nu+1}}$ και να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

(β) Να αποδείξετε ότι ο γενικός όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_\nu = 4\nu - 2$ και να βρείτε το άθροισμα $\sum_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Αν (Ι,ρ) ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο κύκλος και Ε, Ζ τα σημεία επαφής του κύκλου (Ι,ρ) με τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι: (α) ΒΖ = τ –β (α ,β , γ οι πλευρές του τριγώνου, $\tau = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$) και (β) $A\Gamma = \dfrac{2\rho(\tau - \beta)\alpha}{\rho^2 + (\tau - \beta)^2}$.

4. Από σημείο Ο του επιπέδου φέρουμε τις ημιευθείες Οx, Οy και Οz έτσι ώστε οι γωνίες , xOy , yOz και zOx να είναι ίσες με 120°. Πάνω στις ημιευθείες Οx, Οy και Οz παίρνουμε τα σημεία Α ,Β και Γ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\widehat{BA\Gamma} = 60°$. Αν ΑΟ = λ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΓ συναρτήσει του λ .

5. Να λυθεί στο R το σύστημα : $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 9} = y \\ y(x-3)^2 = 2(x+3) \end{cases}$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

1. Επειδή Ζ συμμετρικό του Γ ώς προς το Β οι συντεταγμένες του Ζ είναι:

$x_B = \dfrac{x_\Gamma + x_Z}{2} \Leftrightarrow 2 = \dfrac{5 + x_Z}{2} \Leftrightarrow x_Z = -1$, $y_B = \dfrac{y_\Gamma + y_Z}{2} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{0 + y_Z}{2} \Leftrightarrow y_Z = 6$ άρα Ζ(-1,6).

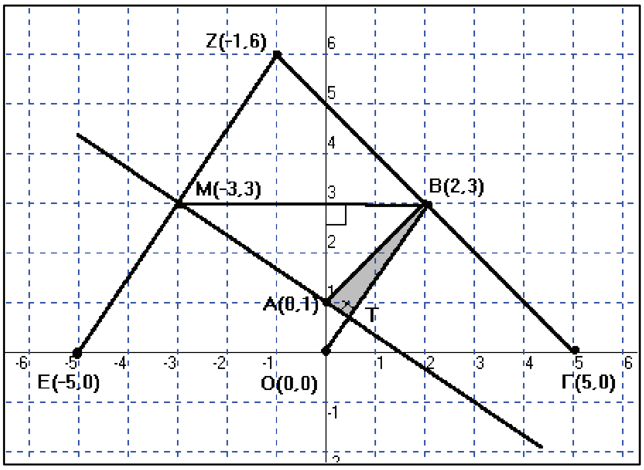
Το σημείο Ε έχει συντεταγμένες Ε(-5,0). Το μέσον Μ του ΕΖ έχει συντεταγμένες Μ(-3,3).
Άρα ΒΜ ⊥ΑΟ δηλ. ΒΜ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΟΒ απο το Β.
Έστω ΑΤ ⊥ΒΟ, θα δείξουμε ότι η ευθεία ΑΤ περνά απο το Μ.

$$\lambda_{AT}\cdot\lambda_{BO}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{AT}\cdot\frac{3}{2}=-1$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{AT}=-\frac{2}{3}$$

Εξίσωση ΑΤ : $y-1=-\frac{2}{3}x$

Η ευθεία ΑΤ περνά από το σημείο Μ(-3,3) ,επομένως το Μ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΟΒ ,αφού είναι σημείο τομής των υψών του ΒΜ και ΑΤ.



2.

$$(a)\quad \alpha_{\nu+1}=\frac{(2\nu-1)^2+2(2\nu-1)}{(2\nu-1)^2}\cdot\alpha_\nu \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1}=\frac{(2\nu-1)(2\nu-1+2)}{(2\nu-1)^2}\cdot\alpha_\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\frac{2\nu+1}{2\nu-1},\quad (1)\quad \mu\varepsilon\quad \alpha_\nu\neq 0$$

Επίσης $\frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_{\nu+1}}=\frac{2\nu+3}{2\nu+1}$ (2).Απο τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\alpha_{\nu+2}+\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}=\frac{2\nu+3+2\nu-1}{2\nu+1}=\frac{4\nu+2}{2\nu+1}=\frac{2(2\nu+1)}{2\nu+1}=2 \quad \text{άρα έχουμε:}$$

$2\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+\alpha_{\nu+2}$ (3) για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ δηλ. η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

(β) Από την σχέση (3) έχουμε : $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\alpha_{\nu+2}-\alpha_{\nu+1}$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.Για ν =1 η (1) δίνει $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{3}{1}\Leftrightarrow\alpha_2=6$,άρα $\alpha_2-\alpha_1=4$ και επομένως $\alpha_{k+1}=\alpha_k+4$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

για k =1 $\alpha_2=\alpha_1+4$

για k =2 $\alpha_3=\alpha_2+4$

…………………………

…………………………

για k =ν-1 $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+4$. Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

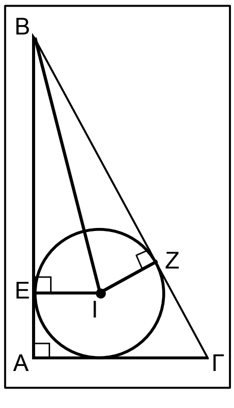
$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)4\Leftrightarrow\alpha_\nu=2+4\nu-4\Leftrightarrow\alpha_\nu=4\nu-2\quad(4)$$

Το άθροισμα $\sum_\nu$ είναι: $\sum_\nu=\alpha_1+\alpha_2+.......+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu\Leftrightarrow\sum_\nu=\frac{(\alpha_1+\alpha_\nu)\cdot\nu}{2}\Leftrightarrow\sum_\nu=2\nu^2$.

3. (α) Έχουμε: 2ΒΖ +2ΑΕ+2ΓΝ = α +β + γ, γιατί ΒΖ =ΒΕ , ΑΕ =ΑΝ και ΓΝ=ΓΖ

$$BZ+AE+\Gamma N=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\Leftrightarrow BZ=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-\beta\Leftrightarrow BZ=\frac{2(\tau-\beta)}{2}$$

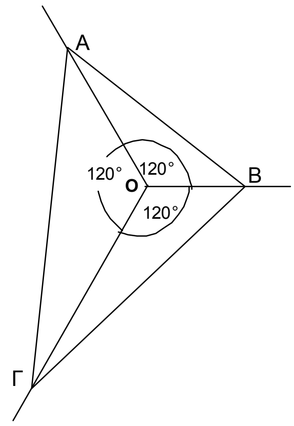
$$\Leftrightarrow BZ=\tau-\beta\qquad(1)$$



(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: ΑΓ = ημΒ·ΒΓ

$\Leftrightarrow \text{ΑΓ} = 2\eta\mu\frac{\text{Β}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\text{Β}}{2}\cdot\text{ΒΓ}$ Επειδή ΒΙ διχοτόμος της γωνίας Β και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΙΖ έχουμε: $\text{ΑΓ} = 2\cdot\frac{\rho}{\text{ΒΙ}}\cdot\frac{\text{ΒΖ}}{\text{ΒΙ}}\cdot\text{ΒΓ} \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = 2\cdot\frac{\rho\cdot(\tau-\beta)\cdot\alpha}{\text{ΒΙ}^2}$ άρα από το (α) έχουμε: $\text{ΑΓ} = 2\cdot\frac{\rho\cdot(\tau-\beta)\cdot\alpha}{\text{ΒΙ}^2} \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = 2\cdot\frac{\rho\cdot(\tau-\beta)\cdot\alpha}{\rho^2+(\tau-\beta)^2}$.

4. $\hat{\text{Β}} = 180^0 - \left(120^0 + \widehat{\text{Α}_1}\right) \Rightarrow \hat{\text{Β}}_1 = 60^0 - \widehat{\text{Α}_2}$.Επειδή η γωνία ΒΑΓ είναι 60° έχουμε: $\widehat{\text{Α}_2} = 60^0 - \widehat{\text{Α}_1}$.Επομένως $\widehat{\text{Β}_1} = \widehat{\text{Α}_2}$ και άρα τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΑΟΒ είναι όμοια γιατί: $\widehat{\text{Β}_1} = \widehat{\text{Α}_2}$ και $\widehat{\text{Ο}_1} = \widehat{\text{Ο}_2}$



Από την ομοιότητα έχουμε:

$\frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΓ}} \Rightarrow \text{ΟΒ}\cdot\text{ΟΓ} = \text{ΟΑ}^2 = \lambda^2$ (1).

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΓ είναι:

$\text{Ε} = \frac{1}{2}\cdot\text{ΟΒ}\cdot\text{ΟΓ}\cdot\eta\mu 120 \Rightarrow \text{Ε} = \frac{1}{2}\cdot\text{ΟΒ}\cdot\text{ΟΓ}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$ και από την (1)

το εμβαδόν του τριγώνου ΒΟΓ είναι: $\text{Ε} = \frac{\lambda^2\sqrt{3}}{4}$.

5. Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε: $y - x = \sqrt{x^2-9}$ και συμπεραίνουμε ότι: y-x ≥ 0.Υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη έχουμε:

$(y-x)^2 = x^2 - 9 \Leftrightarrow x = \frac{y^2+9}{2y}$ (Α), με $y \neq 0$ <u>γιατί αν y =0</u> η δεύτερη εξίσωση μας δίνει 2(x +3)=0 δηλ. x = -3 και η πρώτη εξίσωση δίνει -3 = 0 (αδύνατη).

Αντικαθιστώντας την (Α) στην δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε:

$$y\cdot\left(\frac{y^2+9}{2y}-3\right)^2 = 2\left(\frac{y^2+9}{2y}+3\right) \Leftrightarrow y\cdot\left[\frac{(y-3)^2}{2y}\right]^2 = 2\left(\frac{y^2+9}{2y}+3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\cdot\frac{(y-3)^4}{4y^2} = 2\cdot\frac{(y+3)^2}{2y} \Leftrightarrow (y-3)^4 = 4\cdot(y+3)^2$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε: $(y-3)^2 = 2(y+3)$ (Β) ή $(y-3)^2 = -2(y+3)$ (Γ)

Οι (Β) και (Γ) κάνοντας τις πράξεις δίνουν τις εξισώσεις: $y^2 - 8\text{y} + 3 = 0$ (Δ) και $y^2 - 4\text{y} + 15 = 0$ (Ε) αντίστοιχα. Λύνοντας την (Δ) έχουμε $y = 4 \pm \sqrt{13}$.

Η λύση $y = 4 - \sqrt{13}$ απορρίπτεται γιατί δεν ικανοποιεί το περιορισμό y-x ≥ 0 και από την (Α) $y - \frac{y^2+9}{2y} = \frac{y^2-9}{2y} \geq 0$. Άρα από την (Δ) κάνουμε δεκτή την $y = 4 + \sqrt{13}$.

Αντικαθιστώντας το y στην (Α) έχουμε: $x = 8 - \sqrt{13}$.

Από την (Ε) έχουμε την διακρίνουσά της Δ< 0 , άρα δεν έχει λύση στο R.

Αρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι: $y = 4 + \sqrt{13}$ και $x = 8 - \sqrt{13}$.

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ «ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΚΥΠΡΙΑΝΟΥ»

ΛΑΡΝΑΚΑΣ – ΑΜΜΟΧΩΣΤΟΥ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες Δεκέμβριος 2000

Επιμέλεια: Δημήτριος Ιωαννίδης – Ανδρέας Φιλίππου

- Να απαντηθούν όλα τα θέματα

1. *Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α(3,4). Η διχοτόμος ΒΕ έχει εξίσωση ψ = 2 και το ύψος ΓΖ έχει εξίσωση* $3\chi + 2\psi - 10 = 0$. *Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.*

2. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει* $\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^3\frac{B}{2} = \eta\mu\frac{B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^3\frac{A}{2}$, *να δειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*

3. *Να βρεθούν όλες οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ έτσι ώστε η εξίσωση :*

$\left[\chi^2 - 2\mu\chi - 4\left(\mu^2+1\right)\right]\cdot\left[\chi^2 - 4\chi - 2\mu\left(\mu^2+1\right)\right] = 0$ *να έχει ακριβώς 3 διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες.*

4. *Δίνεται κύκλος* $\Gamma_1\left(O,R\right)$ *με διάμετρο ΑΒ. Εάν Ρ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου και Ν η ορθή προβολή του Π πάνω στην ΑΒ. Κύκλος* $\Gamma_2\left(\mathrm{P},\mathrm{PN}\right)$ *τέμνει τον κύκλο* Γ_1 *στα σημεία Γ και Δ. Η ΓΔ τέμνει την ΡΝ στο Ε. Λ είναι το μέσο του τμήματος ΑΝ. Εάν* $\Lambda Z \perp \Gamma\Delta$, *όπου* $Z \in \Gamma\Delta$. *Να δείξετε ότι: (α) ΕΡ = ΕΝ = ΕΖ (β) Α, Ζ, Ρ είναι συνευθειακά.*

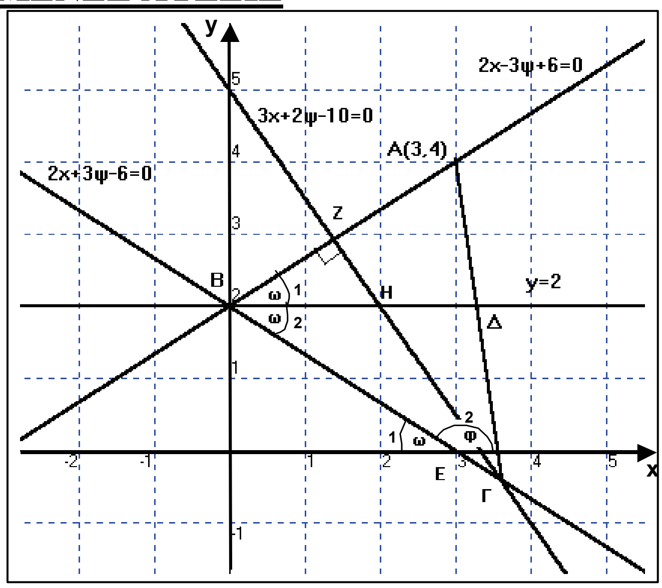
5. *Αν* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \ldots \alpha_\nu$ *είναι αριθμητική πρόοδος και*

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_\mu = \alpha_{\mu+1} + \alpha_{\mu+2} + \ldots + \alpha_{\mu+\nu} = \alpha_{\mu+1} + \alpha_{\mu+2} + \ldots + \alpha_{\mu+\lambda}$ *όπου* $\mu \neq \lambda \neq \nu \neq \mu$

τότε να δείξετε : $\left(\mu+\nu\right)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right) = \left(\mu+\lambda\right)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}\right)$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1.



$$\left.\begin{aligned}\lambda_{\Gamma Z} &= -\frac{2}{3}\\ AB &\perp \Gamma Z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_{AB} = \frac{2}{3},\quad A\left(3,4\right)$$

$$\Rightarrow \left(AB\right): \left(\psi - 4\right) = \frac{2}{3}\left(\chi - 3\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{2\chi - 3\psi + 6 = 0} \quad \left(AB\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(AB\right):\ 2\chi - 3\psi + 6 &= 0\\ \psi &= 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi = 0 \Rightarrow B\left(0,2\right)$$

$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \omega$ *(ΒΔ διχοτόμος),*

$\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1 = \omega$ *(εντός εναλλάξ)* $\Rightarrow$

$$\lambda_{\Gamma\mathrm{B}} = \varepsilon\phi\phi = \varepsilon\phi\left(180^\circ - \omega\right) = -\varepsilon\phi\omega = -\lambda_{\mathrm{AB}} = -\frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_{\Gamma\mathrm{B}} = \dfrac{2}{3} \\ \mathrm{B}(0,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \psi - 2 = \frac{2}{3}\chi \Rightarrow \boxed{2\chi - 3\psi + 6 = 0}\ (\mathrm{B}\Gamma)$$

2. $$\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^3\frac{\mathrm{B}}{2} = \eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^3\frac{\mathrm{A}}{2} \Rightarrow \frac{\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{\mathrm{B}}{2} = \frac{\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{B}}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{\mathrm{A}}{2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}\cdot\frac{1}{\tau\varepsilon\mu^2\frac{\mathrm{B}}{2}} = \varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}\cdot\frac{1}{\tau\varepsilon\mu^2\frac{\mathrm{A}}{2}} \Rightarrow \frac{\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}}{1+\varepsilon\phi^2\frac{\mathrm{B}}{2}} = \frac{\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}}{1+\varepsilon\phi^2\frac{\mathrm{A}}{2}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2} + \varepsilon\phi^3\frac{\mathrm{A}}{2} = \varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2} + \varepsilon\phi^3\frac{\mathrm{B}}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2} - \varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}\right) + \left(\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2} - \varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}\right)\left(\varepsilon\phi^2\frac{\mathrm{A}}{2} + \varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2} + \varepsilon\phi^2\frac{\mathrm{B}}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2} - \varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2}\right)\left(1 + \varepsilon\phi^2\frac{\mathrm{A}}{2} + \varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2} + \varepsilon\phi^2\frac{\mathrm{B}}{2}\right) = 0$$

$$1 + \varepsilon\phi^2\frac{\mathrm{A}}{2} + \varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2}\cdot\varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2} + \varepsilon\phi^2\frac{\mathrm{B}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2} - \varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2} = 0 \Rightarrow \varepsilon\phi\frac{\mathrm{A}}{2} = \varepsilon\phi\frac{\mathrm{B}}{2} \qquad \left(0 < \frac{\mathrm{A}}{2}, \frac{\mathrm{B}}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} \Rightarrow \overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ *ισοσκελές.*

---

3. $$\left[\chi^2 - 2\mu\chi - 4\left(\mu^2+1\right)\right]\cdot\left[\chi^2 - 4\chi - 2\mu\left(\mu^2+1\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$\chi^2 - 2\mu\chi - 4\left(\mu^2+1\right) = 0$ *(1)* *ή* $\chi^2 - 4\chi - 2\mu\left(\mu^2+1\right) = 0$ *(2)*

(I) Οι δύο εξισώσεις να έχουν μια κοινή ρίζα $\chi = \chi_0$. $\Rightarrow$

$$\cancel{\chi_0^2} - 2\mu\chi_0 - 4\left(\mu^2+1\right) = \cancel{\chi_0^2} - 4\chi_0 - 2\mu\left(\mu^2+1\right) = 0 \Rightarrow$$

$\underline{2\cancel{(2-\mu)}}\chi_0 = \underline{2\cancel{(2-\mu)}}\left(\mu^2+1\right)$ *(* $\mu \neq 2$ *διότι αν μ=2 οι δύο εξισώσεις θα ταυτίζονταν)*

$$\Rightarrow \chi_0 = \mu^2 + 1$$

Αντικαθιστούμε στην (1) $\Rightarrow \left(\mu^2+1\right)^{\cancel{2}} - 2\mu\cancel{\left(\mu^2+1\right)} - 4\cancel{\left(\mu^2+1\right)} = 0 \Rightarrow \mu^2 - 2\mu - 3 = 0 \Rightarrow$

$(\mu+1)(\mu-3) = 0 \Rightarrow$ *μ= -1 ή μ = 3* *(α) μ= -1* $\Rightarrow \left.\begin{cases} \chi^2+2\chi-8=0 \Rightarrow (\chi+4)(\chi-2)=0 \Rightarrow \underline{\chi=-4},\ \underline{\chi=2} \\ \chi^2-4\chi+4=0 \Rightarrow (\chi-2)^2=0 \Rightarrow \underline{\chi=2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \mu=-1$ *(απορρ)*

(β) μ=3 $\Rightarrow \left.\begin{cases} \chi^2-6\chi-40=0 \Rightarrow (\chi-10)(\chi-4)=0 \Rightarrow \chi=10,\ \chi=4 \\ \chi^2-4\chi-60=0 \Rightarrow (\chi-10)(\chi-6)=0 \Rightarrow \chi=10,\ \chi=6 \end{cases}\right\} \Rightarrow \mu=3$ (δεκτή)

(ΙΙ) Εάν δεν έχουν κοινή ρίζα

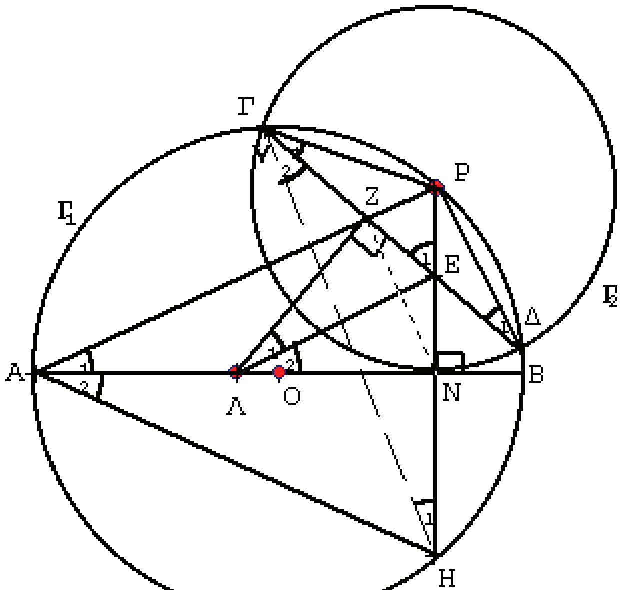
(α) $\Delta_1 = 0 \Rightarrow 4+5\mu^2>0$

(β) $\Delta_2 = 0 \Rightarrow 4+2\mu(\mu^2+1)$ *(πρέπει να έχει μόνο μια ρίζα* $\Rightarrow \Delta_2 = 0 \Rightarrow \mu=-1$

(απορρίπτεται όπως προηγουμένως)

---

4. *Δίνεται κύκλος* $\Gamma_1(O,R)$ *με διάμετρο ΑΒ. Εάν Ρ είναι τυχαίο σημείο του κύκλου και Ν η ορθή προβολή του Π πάνω στην ΑΒ. Κύκλος* $\Gamma_2(\mathrm{P},\mathrm{PN})$ *τέμνει τον κύκλο* Γ_1 *στα σημεία Γ και Δ. Η ΓΔ τέμνει την ΡΝ στο Ε. Λ είναι το μέσο του τμήματος ΑΝ. Εάν* $\Lambda Z \perp \Gamma\Delta$, *όπου* $Z \in \Gamma\Delta$. *Να δείξετε ότι: (α) ΕΡ = ΕΝ = ΕΖ (β) Α, Ζ, Ρ είναι συνευθειακά.*



Έστω Η το σημείο τομής της ΡΝ με Γ_1

$\mathrm{PH} \perp \mathrm{AB}$ *(δεδ.)* $\Rightarrow$ *ΑΒ μεσοκάθετος της ΡΗ,* $\Rightarrow$

$\mathrm{PN}=\mathrm{NH} \wedge \widehat{\mathrm{PAN}}=\widehat{\mathrm{HAN}}$

$\mathrm{P\Gamma}=\mathrm{PN}=\mathrm{P\Delta}(=R) \Rightarrow$

$\widehat{\mathrm{PH\Gamma}}=\widehat{\mathrm{P\Delta\Gamma}}=\chi$ *(εγ/νες στο* $\widehat{\Gamma\mathrm{P}}$ *)*

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{PH\Gamma}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{P\Gamma E}}$

$\left.\begin{array}{l} \hat{\mathrm{H}}_1=\hat{\Gamma}_1=\chi \\ \widehat{\Gamma\mathrm{PH}}=\widehat{\Gamma\mathrm{PE}}(\kappa o\iota\nu\eta\,\gamma\omega\nu\iota\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\overset{\Delta}{\mathrm{HP\Gamma}} \approx \overset{\Delta}{\Gamma\mathrm{PE}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{HP}}{\Gamma\mathrm{P}}}=\dfrac{\mathrm{H\Gamma}}{\Gamma\mathrm{E}}=\boxed{\dfrac{\mathrm{P\Gamma}}{\mathrm{PE}}} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} (\Gamma\mathrm{P})^2=\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PE} \\ \Gamma\mathrm{P}=\mathrm{PN}=R \end{array}\right\} \Rightarrow$

$(\mathrm{PN})^{\cancel{2}}=2\cancel{(\mathrm{PN})}\cdot(\mathrm{PE}) \Rightarrow \mathrm{E}\,\mu\varepsilon\sigma o\,\mathrm{PN} \Rightarrow \mathrm{PE}=\mathrm{EN}$

$\overset{\Delta}{\mathrm{AP\Delta}}$ *ισοσκελές τρίγωνο*

ΑΝ ύψος $\Rightarrow$ *ΑΝ διχοτόμος* $\Rightarrow \hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2$

$\left.\begin{array}{l} \Lambda\,\mu\varepsilon\sigma o\,\mathrm{AN} \\ \mathrm{E}\,\mu\varepsilon\sigma o\,\mathrm{PN} \end{array}\right\} \Rightarrow \Lambda\mathrm{E}/\!/\mathrm{AP} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\Lambda}_2$ *(εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες)*

$\Rightarrow \hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\Lambda}_2$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}_{1,2} \quad (1) \\ \hat{\Gamma}_{1,2} = \hat{A}_{1,2}\left(\varepsilon\gamma/\nu\varepsilon\varsigma\ \widehat{PBH}\right) \\ \hat{E}_1 = \hat{\Lambda}_{1,2}\left(\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\varepsilon\varsigma\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\tau\varepsilon\varsigma\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{\Gamma}_{1,2} = \hat{A}_{1,2} = \hat{\Lambda}_{1,2} \Rightarrow \hat{A}_{1,2} = \hat{\Lambda}_{1,2} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2$$

$$\Rightarrow \hat{\Lambda}_2 + \cancel{\hat{\Lambda}_2} = \hat{\Lambda}_1 + \cancel{\hat{\Lambda}_2} \Rightarrow \hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2 \Rightarrow \Rightarrow Z\overset{\Delta}{\Lambda}E = N\overset{\Delta}{\Lambda}E \Rightarrow EZ = EN \Rightarrow EP = EN = EZ$$

(β) Ισχύει $\hat{A}_1 = \hat{\Lambda}_2 \Rightarrow AZ // \Lambda E$

$$\left(A\overset{\Delta}{P}N\right): \left.\begin{array}{l}\Lambda\ \mu\varepsilon\sigma o\ AN \\ E\ \mu\varepsilon\sigma o\ PN\end{array}\right\} \Rightarrow \Lambda E // AP \quad \Rightarrow AZ // AP \Rightarrow A, Z, P \text{ είναι συνευθειακά.}$$

---

5. *Αν* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \ldots \alpha_\nu$ *είναι αριθμητική πρόοδος και*

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_\mu = \alpha_{\mu+1} + \alpha_{\mu+2} + \ldots + \alpha_{\mu+\nu} = \alpha_{\mu+1} + \alpha_{\mu+2} + \ldots + \alpha_{\mu+\lambda}$ *όπου* $\mu \neq \lambda \neq \nu \neq \mu$

τότε να δείξετε : $(\mu+\nu)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right) = (\mu+\lambda)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \dfrac{2\alpha_1 + (\mu-1)\delta}{2}\cdot\mu \\ \alpha_{\mu+1} + \alpha_{\mu+2} + \ldots + \alpha_{\mu+\nu} = \dfrac{2\alpha_{\mu+1} + (\nu-1)\delta}{2}\cdot\nu \\ \alpha_{\mu+1} + \alpha_{\mu+2} + \ldots + \alpha_{\mu+\lambda} = \dfrac{2\alpha_{\mu+1} + (\lambda-1)\delta}{2}\cdot\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{2\alpha_1 + (\mu-1)\delta}{\cancel{2}}\cdot\mu = \frac{2\alpha_{\mu+1} + (\nu-1)\delta}{\cancel{2}}\cdot\nu = \frac{2\alpha_{\mu+1} + (\lambda-1)\delta}{\cancel{2}}\cdot\lambda \Rightarrow$$

$$\frac{2\alpha_1 + (\mu-1)\delta}{\frac{1}{\mu}} = \frac{2(2\alpha_1 + \mu\delta) + (\nu-1)\delta}{\frac{1}{\nu}} = \frac{2(2\alpha_1 + \mu\delta) + (\lambda-1)\delta}{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\frac{2\alpha_1 + (\mu-1)\delta - 2(\alpha_1 + \mu\delta) - (\nu-1)\delta}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}} = \frac{2\alpha_1 + (\mu-1)\delta - 2(\alpha_1 + \mu\delta) + (\lambda-1)\delta}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}}$$

$$\frac{\cancel{\delta}(-\mu-\nu)}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}} = \frac{\cancel{\delta}(-\mu-\lambda)}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}} \Rightarrow \boxed{(\mu+\nu)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right) = (\mu+\lambda)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}\right)}$$

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΦΟΥ
"ΑΝΔΡΕΑΣ ΧΑΤΖΗΘΕΟΡΗΣ" ΓΙΑ ΤΙΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΕΙΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες Δεκέμβριος 2000

Επιμέλεια: Ευθύβουλος Λιασίδης – Νίκος Νικολαΐδης

- Να απαντηθούν όλα τα θέματα

1. α) Να υπολογίσετε την τετραγωνική ρίζα του $f\left(\theta\right)\equiv\left(1+\eta\mu\theta\right)\left(3\eta\mu\theta+4\sigma\upsilon\nu\theta+5\right)$

β) Να βρείτε το πεδίο τιμών ης συνάρτησης $\psi=\dfrac{1+\eta\mu\chi}{7+6\sigma\upsilon\nu\chi}$

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ < ΔΓ και ΑΒ // ΔΓ. Οι διαγώνιες του τέμνονται στο Ρ. Ένας κύκλος περνά από το Δ, Ρ και Γ και εφάπτεται στην ΑΔ στο Δ και στην ΒΓ στο Γ. Να αποδείξετε ότι:
α) $\widehat{\text{ΒΑΓ}}=\widehat{\text{ΑΔΒ}}$
β) Ο κύκλος που περνά από το Α, Ρ και Δ εφάπτεται ης ΒΑ στο Α
γ) Από τα Α, Β, Γ Και Δ περνά ένας κύκλος.

3. Να εξετάσετε αν το άθροισμα των κύβων τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται ακριβώς με το 9. Μήπως το συμπέρασμα σας ισχύει για οποιουσδήποτε διαδοχικούς ακεραίους; Δώστε απόδειξη.

4. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνετε την ΑΔ και στην προέκταση της πάρτε σημείο Ε. Η ΒΕ συναντά ην ΑΓ και την ΓΔ στα σημεία Η και Θ αντίστοιχα.
Αν (ΒΘ) = 60 cm (ΒΕ) = 90 cm, να βρείτε το μήκος του (ΒΗ).

5. α) Έστω $f\left(\chi\right)\equiv\left(\lambda-1\right)\chi^2-6\left(\lambda-1\right)\chi+\lambda+3$. Να προσδιοριστούν οι τιμές του λ ώστε οι ρίζες $\left(\rho_1<\rho_2\right)$ της εξίσωσης $f\left(\chi\right)=0$ να βρίσκονται μεταξύ των αριθμών 2 και 7.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\text{Α}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta$ με $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ είναι πάντα θετική οποιαδήποτε και αν είναι τα α., β, γ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α) <u>1^ος^ τρόπος</u>

$$f\left(\theta\right)=3\eta\mu\theta+4\sigma\upsilon\nu\theta+5+3\eta\mu^2\theta+4\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+5\eta\mu\theta$$

$$=8\eta\mu\theta+4\sigma\upsilon\nu\theta+4\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta+3\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta+4=\left(2\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+2\right)^2$$

Άρα $\sqrt{f\left(\theta\right)}=\sqrt{\left(2\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+2\right)^2}=|\,2\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+2\,|$

<u>2^ος^ τρόπος</u> Θέτω $t=\varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}$

$$f\left(\theta\right)=\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\left(3\frac{2t}{1+t^2}+4\frac{1-t^2}{1+t^2}+5\right)=\left(\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\right)\left(\frac{6t+4-4t^2+5+5t^2}{1+t^2}\right)=$$

$$=\frac{(1+t)^2(t^2+6t+9)}{(1+t^2)^2}=\frac{(1+t)^2(t+3)^2}{(1+t^2)^2}$$

Άρα $\sqrt{f(\theta)}=\sqrt{\frac{\left(1+\varepsilon\phi\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\varepsilon\phi\frac{\theta}{2}+3\right)^2}{\left(1+\varepsilon\phi^2\frac{\theta}{2}\right)^2}}=\left|\frac{\left(1+\varepsilon\phi\frac{\theta}{2}\right)\left(\varepsilon\phi\frac{\theta}{2}+3\right)}{\left(1+\varepsilon\phi^2\frac{\theta}{2}\right)}\right|$

β) $\psi=\frac{1+\eta\mu\chi}{7+6\sigma\upsilon\nu\chi}$, Θέτω $t=\varepsilon\phi\frac{\theta}{2}\Rightarrow\psi=\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{7+6\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+t^2+2t}{7+7t^2+6-6t^2}\Rightarrow\psi=\frac{(1+t)^2}{t^2+13}$

$\Rightarrow\psi t^2+13\psi=1+t^2+2t\Rightarrow(\psi-1)t^2-2t+13\psi-1=0$

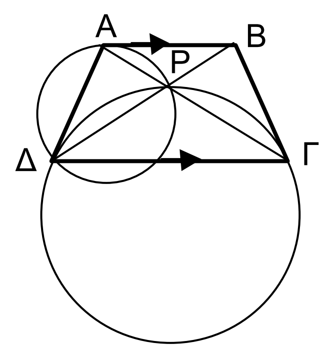
$t\in\mathbb{R}$ άρα $\Delta\geq0\Rightarrow 2^2-4(\psi-1)(13\psi-1)\geq0\Rightarrow1-(\psi-1)(13\psi-1)\geq0\Rightarrow$

$-13\psi^2+14\psi\geq0\Rightarrow\psi(-13\psi+14)\geq0\Rightarrow\boxed{0\leq\psi\leq\frac{14}{13}}$ Σύνολο Τιμών.

2. (α) $\widehat{\mathrm{B A \Gamma}}=\widehat{\mathrm{A \Gamma \Delta}}$ (εντός και εναλλάξ)

$\widehat{\mathrm{A\Gamma\Delta}}=\widehat{\mathrm{A\Delta B}}$ (εγγεγρ και χορδή, εφαπτ.)

$\Rightarrow\ \widehat{\mathrm{BA\Gamma}}=\widehat{\mathrm{A\Delta B}}$



(β) Στο κύκλο που περνά από Α, Δ, Ρ η ΑΡ χορδή και η $\widehat{\mathrm{A\Delta B}}$ εγγεγραμ. αφού $\widehat{\mathrm{A\Delta B}}=\widehat{\mathrm{BA\Gamma}}\Rightarrow$ ΑΒ εφαπτομένη.

(γ) ΔΓ χορδή του κύκλου, ΔΑ και ΒΓ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της χορδής. Άρα $\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}=\widehat{\mathrm{\Delta\Gamma B}}$

αλλά $\widehat{\mathrm{\Delta\Gamma B}}+\widehat{\mathrm{BA\Delta}}=\widehat{\mathrm{A\Delta\Gamma}}+\widehat{\mathrm{BA\Delta}}=180°$ (εντός και επί αυτά)

Άρα οι απέναντι γωνιές του ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματικές και επομένως εγγράψιμο.

3. 1, 2, 3 $\Rightarrow$ $1^3+2^3+3^3=1+8+27=27$ διαιρείται με 9.

-1, 0, 1 $\Rightarrow(-1)^3+0^3+1^3=0$ διαιρείται με 9.

-3, -2, -1 $\Rightarrow(-3)^3+(-2)^3+(-1)^3=-36$ διαιρείται με 9.

Γενικά: Έστω ν-1, ν, ν+1 διαδοχικοί ακέραιοι θετικοί και $A_\nu\equiv(\nu-1)^3+\nu^3+(\nu+1)^3$

για ν = 1 $\Rightarrow A_1=0^3+1^3+2^3=9$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για ν = κ δηλ. $A_\kappa=(\kappa-1)^3+\kappa^3+(\kappa+1)^3$ διαιρείται με 9

Αρκεί να αποδείξω ότι ισχύει για ν=κ+1 δηλ. $A_{\kappa+1}=\kappa^3+(\kappa+1)^3+(\kappa+2)^3$ διαιρείται με 9.

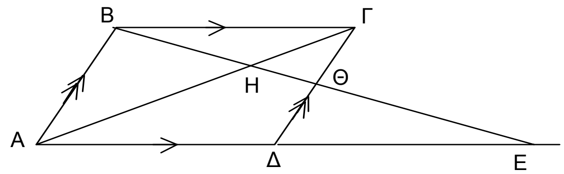
Αφαιρώ τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη $\Rightarrow A_{\kappa+1}-A_\kappa=(\kappa+2)^2-(\kappa-1)^3\Rightarrow$

$A_{\kappa+1}-A_\kappa=(\kappa+2-\kappa+1)[(\kappa+2)^2+(\kappa+2)(\kappa-1)+(\kappa-1)^2]=3\cdot(3\kappa^2+3\kappa+3)=9(\kappa^2+\kappa+1)\Rightarrow$

$\therefore\ A_{\kappa+1}=A_\kappa+9(\kappa^2+\kappa+1)$ και αφού A_κ διαιρείται με 9 και $9(\kappa^2+\kappa+1)$ διαιρείται με 9 $\Rightarrow$

$A_{\kappa+1}$ διαιρείται με 9. Επειδή για τους αρνητικούς ακέραιους η διαφορά είναι μόνο το πρόσημο $\Rightarrow$ η πρόταση ισχύει για οποιοδήποτε διαδοχικούς ακέραιους.

4. ΒΕ = 90 m, ΒΘ = 60 cm



$$\overset{\Delta}{\mathrm{AB}\mathrm{H}} \approx \overset{\Delta}{\Gamma\Theta\mathrm{H}} \Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Theta} = \frac{\mathrm{BH}}{\Theta\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{AH}}{\Gamma\mathrm{H}}$$

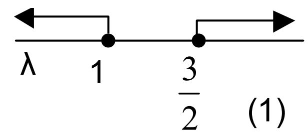
$$\Rightarrow \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{\mathrm{BH}}{\Theta\mathrm{H}} \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{\Delta\Theta\mathrm{E}} \approx \overset{\Delta}{\Gamma\Theta\mathrm{B}} \Rightarrow \frac{\Delta\Theta}{\Gamma\Theta} = \frac{\Theta\mathrm{E}}{\Theta\mathrm{B}} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\Gamma\mathrm{B}} \Rightarrow \frac{\Delta\Theta + \Gamma\Theta}{\Gamma\Theta} = \frac{\Theta\mathrm{E} + \Theta\mathrm{B}}{\Theta\mathrm{B}} \Rightarrow \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma\Theta} = \frac{\mathrm{BE}}{\Theta\mathrm{B}} \quad (2)$$

$$(1)\,\kappa\alpha\iota\,(2) \Rightarrow \frac{\mathrm{BH}}{\Theta\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{BE}}{\Theta\mathrm{B}} \Rightarrow \frac{\mathrm{BH}}{\Theta\mathrm{H} + \mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{BE}}{\Theta\mathrm{B} + \mathrm{BE}} \Rightarrow \frac{\mathrm{BH}}{\Theta\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{BE}}{\Theta\mathrm{B} + \mathrm{BE}} \Rightarrow \frac{\mathrm{BH}}{60} = \frac{90}{60 + 90} \Rightarrow \boxed{\mathrm{BH} = 36cm}$$

5. (α) $\rho_1 < \rho_2 \Rightarrow \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$

$\Delta \geq 0 \Rightarrow 6^2(\lambda - 1)^2 - 4(\lambda - 1)(\lambda + 3) \geq 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(8\lambda - 12) \geq 0 \Rightarrow$



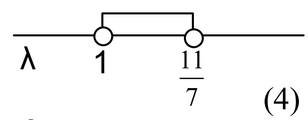
(1)

Για να είναι $2 < \rho_1 < \rho_2 < 7$ πρέπει

$\alpha \cdot f(2) > 0 \Rightarrow (\lambda - 1)\left[(\lambda - 1)4 - 6(\lambda - 1) \cdot 2 + \lambda + 3\right] > 0 \qquad (2)$

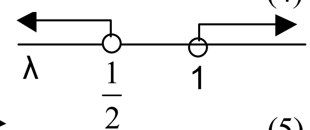
$\alpha \cdot f(7) > 0 \Rightarrow (\lambda - 1)\left[(\lambda - 1)49 - 6(\lambda - 1) \cdot 7 + \lambda + 3\right] > 0 \quad (3)$

(2) $\Rightarrow (\lambda - 1)\left[-8(\lambda - 1) + \lambda + 3\right] > 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(-7\lambda + 11) > 0 \Rightarrow$



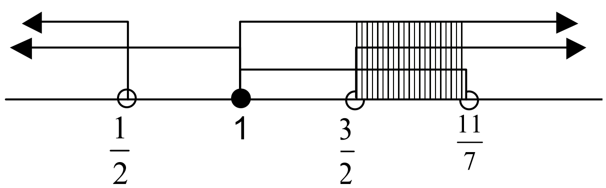
(4)

(3) $\Rightarrow$ $(\lambda - 1)\left[7(\lambda - 1) + \lambda + 3\right] > 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(8\lambda - 4) > 0 \Rightarrow$



(5)

Από (1) , (4) και (5) $\Rightarrow$



Άρα $\boxed{\frac{3}{2} < \lambda < \frac{11}{7}}$

(β) *1^ος τρόπος*

$$\left.\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 > 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta > 0 \\ (\beta - \gamma)^2 > 0 \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma > 0 \\ (\gamma - \alpha)^2 > 0 \Rightarrow \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma > 0$$

(β) *2^ος τρόπος*

$\alpha^2 - (\beta + \gamma)\alpha + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$, Εξίσωση β΄ βαθμού ως προς α.

Επειδή ο συντελεστής του α^2 είναι1>0 και

$$\Delta = (\beta + \gamma)^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma) = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma - 4\beta^2 - 4\gamma^2 + 4\beta\gamma = -3(\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma)$$

$\Rightarrow \Delta = -3(\beta - \gamma)^2 < 0$ (αφού $\beta \neq \gamma$)

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma > 0 \qquad \forall \alpha \neq \beta \neq \gamma$.

Παγκύπριος Διαγωνισμός Μαθηματικών για την Γ ' Γυμνασίου
"Ευαγόρας Παλληκαρίδης"

ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες — Φεβρουάριος 2001

Επιμέλεια: Ανδρέας Αθανασίου – Όλγα Παπαγιάννη

- Να απαντηθούν όλα τα θέματα

ΘΕΜΑ 1

i) Να κάνετε τις πράξεις: $\dfrac{\chi^{\kappa+1}-\chi^{\kappa}}{8\chi^2-12\chi}\cdot\dfrac{4\chi^2-6\chi}{\chi^{\kappa+1}+2\chi^{\kappa}}$

ii) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}=\alpha$

ΘΕΜΑ 2

i. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$\dfrac{2\alpha+\beta}{\alpha^2+1}+\dfrac{2\beta+\alpha}{\beta^2+1}$, αν $\alpha+\beta=5$ και $\alpha\cdot\beta=6$.

ii. Δίνεται η παράσταση $p(\chi)=(\alpha+\beta)^2\chi^2-4(\alpha+\beta)\chi+\gamma^2+4$, όπου οι αριθμοί α, β, γ είναι ακέραιοι με $\alpha>0$, $\beta>0$ και $\gamma\geq 0$. Αν η παράσταση αυτή παίρνει τιμή 0 για χ=1, να βρεθούν οι αριθμοί α, β και γ.

ΘΕΜΑ 3

Σε τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ έχουμε $\widehat{\mathrm{B}}<90^\circ$ και $\widehat{\mathrm{B}}=2\cdot\widehat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος ΑΔ και στην προέκταση της ΑΒ προς το μέρος του Β παίρνουμε τμήμα ΒΕ=ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ διέρχεται από το μέσο Μ της πλευράς ΑΓ.

ΘΕΜΑ 4

i. Ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχει ΒΓ=ΓΔ=ΑΔ και τη βάση ΑΒ κατά 2cm μικρότερη από το άθροισμα των τριών αυτών πλευρών. Αν το ύψος του είναι 5cm, να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου.

ii. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\gamma+\alpha)\geq 6\alpha\beta\gamma$$

ΘΕΜΑ 5

Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμού:

$2^{40}+2^{28}+2^{23}+2^{20}+2^{18}+2^{17}+2^{6}+2^{5}+2+1$ δια του $2^{23}+2+1$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

(i) $\dfrac{\chi^{\kappa+1}-\chi^{\kappa}}{8\chi^2-12\chi}\cdot\dfrac{4\chi^2-6\chi}{\chi^{\kappa+1}+2\chi^{\kappa}}=\dfrac{\cancel{\chi^{\kappa}}(\chi-1)}{{}_2\cancel{4}\cancel{\chi}\cancel{(2\chi-3)}}\cdot\dfrac{\cancel{2}\cancel{\chi}\cancel{(2\chi-3)}}{\cancel{\chi^{\kappa}}(\chi+2)}=\dfrac{\chi-1}{2(\chi+2)}$

$$(\mathrm{ii})\quad \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{\dfrac{\alpha-\cancel{\beta}+\alpha+\cancel{\beta}}{\alpha-\beta}}}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{\cancel{2}\beta^2(\alpha-\beta)}{\cancel{2}\alpha}}$$

$$=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\dfrac{\alpha(\alpha^2-\beta^2)+\beta^2(\alpha-\beta)}{\alpha}}=\frac{\alpha(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)+\beta^2(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)+\beta^2(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)\left[\alpha(\alpha+\beta)+\beta^2\right]}=\frac{\alpha\cancel{(\alpha-\beta)}\cancel{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}}{\cancel{(\alpha-\beta)}\cancel{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}}=\alpha$$

ΘΕΜΑ 2

$$(\mathrm{i})\quad \frac{2\alpha+\beta}{\alpha^2+1}+\frac{2\beta+\alpha}{\beta^2+1}=\frac{(2\alpha+\beta)(\beta^2+1)+(2\beta+\alpha)(\alpha^2+1)}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}$$

$$=\frac{2\alpha\beta^2+2\alpha+\beta^3+\beta+2\alpha^2\beta+\alpha^3+2\beta+\alpha}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}$$

$$=\frac{2\alpha\beta^2+\beta^3+2\alpha^2\beta+\alpha^3+3\beta+3\alpha}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+3(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-\alpha\beta(\alpha+\beta)+3(\alpha+\beta)}{\alpha^2\beta^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3+(\alpha+\beta)(3-\alpha\beta)}{\alpha^2\beta^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1}$$

Αν τώρα αντικαταστήσω το α+β=5 και αβ=6 θα έχω:

$$\frac{5^3+5\cdot(3-6)}{6^2+5^2-2\cdot6+1}=\frac{125-15}{36+25-12+1}=\frac{110}{50}=\frac{11}{5}=\boxed{2\frac{1}{5}}.$$

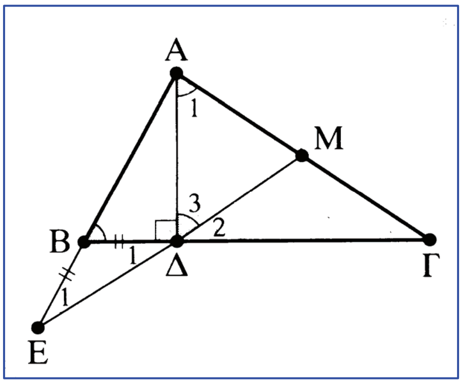
$$(\mathrm{ii})\quad p(\chi)=(\alpha+\beta)^2\chi^2-4(\alpha+\beta)\chi+\gamma^2+4$$

$$\chi=1\Rightarrow p(1)=0\Leftrightarrow 0=(\alpha+\beta)^2-4(\alpha+\beta)+\gamma^2+4\Leftrightarrow 0=(\alpha+\beta-2)^2+\gamma^2$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta-2)^2=0\quad \text{και}\quad \boxed{\gamma=0}\Rightarrow\alpha+\beta-2=0\Rightarrow\alpha+\beta=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\alpha=\beta=1}(\alpha>0,\beta>0)$$

ΘΕΜΑ 3



(i) Έστω Μ το σημείο τομής των ΔΕ και ΑΓ.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΕ έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{E_1} = \widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2} \\ \widehat{B} = 2\widehat{E_1} \quad (\omega\varsigma\ \varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\eta) \\ \widehat{B} = 2\widehat{\Gamma} \quad (\upsilon\pi o\theta\varepsilon\sigma\eta) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 \Rightarrow$$

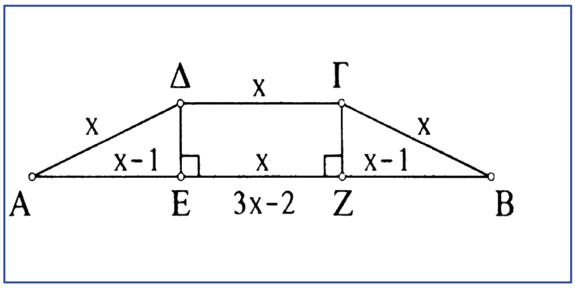
$$\Rightarrow \boxed{\Delta M = M\Gamma}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = 90^0 - \hat{\Gamma} \\ \hat{\Delta}_3 = 90^0 - \hat{\Delta}_2 = 90^0 - \hat{\Gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Delta}_3 \Rightarrow \boxed{\Delta M = MA} \quad \Rightarrow \Delta M = MA = M\Gamma \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>Μ μέσο της ΑΓ.</u>

ΘΕΜΑ 4



(i) Αν ΑΒ = ΓΔ = ΑΔ = χ τότε
ΑΒ = ΒΓ +ΓΔ +ΑΔ - 2 ή ΑΒ = 3χ - 2
Φέρουμε τα ύψη ΔΕ και ΓΖ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ και έχουμε:

$$AE = BZ = \frac{AB - EZ}{2} = \frac{3\chi - 2 - \chi}{2} = \frac{2\chi - 2}{2} = \chi - 1$$ Από το ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$AE^2 + \Delta E^2 = A\Delta^2 \Leftrightarrow (\chi - 1)^2 + 5^2 = \chi^2 \Leftrightarrow \cancel{\chi^2} - 2\chi + 1 + 25 = \cancel{\chi^2} \Leftrightarrow -2\chi + 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\chi = 13}$$

Επομένως, $AB = 3\chi - 2 = 3 \cdot 13 - 2 = 37, \quad \Gamma\Delta = 13$

και $E_{AB\Gamma\Delta} = \dfrac{(AB + \Gamma\Delta)\cdot \upsilon}{2} = \dfrac{(37+13)\cdot 5}{2} = \dfrac{50 \cdot 5}{2} = 125\text{cm}^2$.

$(ii)\ \alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta\gamma(\beta+\gamma) + \alpha\gamma(\gamma+\alpha) = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \alpha\gamma^2 + \alpha^2\gamma$

$= \beta(\alpha^2 + \gamma^2) + \alpha(\beta^2 + \gamma^2) + \gamma(\alpha^2 + \beta^2) \geq \beta \cdot 2\alpha\gamma + \alpha \cdot 2\beta\gamma + \gamma \cdot 2\alpha\beta = 6\alpha\beta\gamma$

* $(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$
Ομοίως $(\alpha-\gamma)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2+\gamma^2 - 2\alpha\gamma \geq 0 \Rightarrow \alpha^2+\gamma^2 \geq 2\alpha\gamma$,
$(\gamma-\beta)^2 \geq 0 \Rightarrow \gamma^2+\beta^2 - 2\gamma\beta \geq 0 \Rightarrow \gamma^2+\beta^2 \geq 2\gamma\beta$ (α>0, β>0 και γ>0)

ΘΕΜΑ 5

$$2^{40} + 2^{28} + 2^{23} + 2^{20} + 2^{18} + 2^{17} + 2^6 + 2^5 + 2 + 1$$

$$= (2^{40} + 2^{28} + 2^{23}) + (2^{18} + 2^6 + 2) + (2^{17} + 2^5 + 1) + 2^{20}$$

$$= 2^{23}(2^{17} + 2^5 + 1) + 2(2^{17} + 2^5 + 1) + (2^{17} + 2^5 + 1) + 2^{20} = (2^{17} + 2^5 + 1)(2^{23} + 2 + 1) + 2^{20}$$

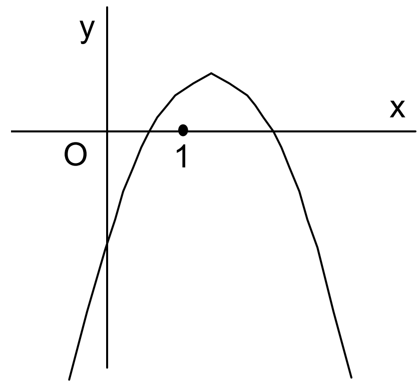
Άρα το πηλίκο είναι: $2^{17} + 2^5 + 1$ και το υπόλοιπο: 2^{20}.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2001

ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες **Φεβρουάριος 2001**

- Να απαντηθούν όλα τα θέματα

1. α) Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση της $\psi = f\left(\chi\right) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma,\ \chi \in \mathbb{R}$, και α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε και να δικαιολογήσετε αν τα πιο κάτω είναι θετικά ή αρνητικά.
(i) $\alpha\beta$ (ii) $\alpha\gamma$ (iii) $\alpha - \beta + \gamma$ (iv) $3\alpha - \beta$
(v) $4\alpha + 2\beta$

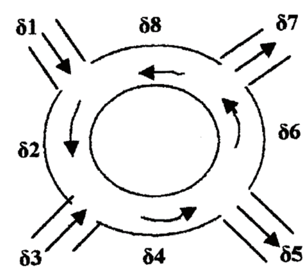


β) Αν κ και λ είναι οι ρίζες της $\chi^2 + \mathrm{A}\chi + \mathrm{B} = 0$ και $\kappa^2 - \lambda^2$ είναι διπλή ρίζα της $\chi^2 + \mathrm{E}\chi + \mathrm{Z} = 0$, να βρείτε το Ζ συναρτήσει των Α και Β.

2. α) Πάνω σε μια ευθεία ΧΨ που χωρίζει επίπεδο σε δυο ημιεπίπεδα παίρνουμε τρία σημεία Α, Β και Γ έτσι, ώστε ΑΒ<ΒΓ. Σ' ένα από τα δυο ημιεπίπεδα κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΓΔ.

β) Σ ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ =90°) η εσωτερική διχοτόμος της γωνιάς Β τέμνει την εξωτερική διχοτόμο της γωνιάς Γ στο Δ. Να αποδείξετε ότι $\widehat{\mathrm{B}\Delta\Gamma} = 45°$.

3. α) Στο διπλανό κυκλικό κυκλοφοριακό κόμβο η κυκλοφορία γίνεται όπως δείχνουν τα βέλη.
Κάθε ώρα



- 1500 αυτοκίνητα εισέρχονται από το δρόμο δ1.
- 900 αυτοκίνητα βγαίνουν από τον κόμβο από το δρόμο δ5.
- 2000 αυτοκίνητα περνούν από το δρόμο δ2.
- 1500 αυτοκίνητα περνούν από το δρόμο δ6.

Πόσα αυτοκίνητα μπαίνουν κάθε ώρα στον κόμβο από το δρόμο δ3 και πόσα αυτοκίνητα βγαίνουν από το δρόμο δ7 ;

β) Πέντε άνθρωποι (Α, Β, Γ, Δ και Ε) κατάγονται είτε από την Εντοπία είτε από την Ουτοπία. Είναι γνωστό ότι όσοι κατάγονται από την Εντοπία λέγουν πάντα την αλήθεια, ενώ όσοι κατάγονται από την Ουτοπία λέγουν πάντα ψέματα. Επίσης, είναι γνωστά τα πιο κάτω:

- Ο Α είναι από την Εντοπία.
- Ο Β λέγει ότι είναι από την Εντοπία.
- Ο Γ λέγει ότι ο Δ είναι από την Εντοπία,
- Ο Δ λέγει ότι σι Β και Ε δεν είναι από την Εντοπία.
- Ο Ε λέγει ότι οι Α και Β είναι από την Εντοπία.

Πόσοι από τους Α. Β. Γ, Δ και Ε κατάγονται από την Εντοπία ;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ =90°). Έξω από το τρίγωνο ΑΒΓ σχηματίστε τα

τετράγωνα ΒΓΡΘ και ΑΓΗΚ. Η προέκταση της ΑΓ τέμνει την ΡΗ στο Δ.
Να αποδείξετε ότι (ΑΒ) = 2(ΓΔ) και (ΡΔ) = (Δ Η).

5. α) Να βρείτε και να σχολιάσετε (διερευνήσετε) τις λύσεις του συστήματος

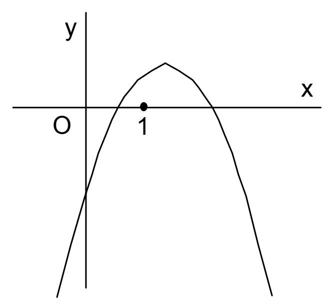
$$\frac{\chi+\psi}{\chi\psi}+\frac{\chi\psi}{\chi+\psi}=\alpha+\frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha,\beta\neq 0$$

$$\frac{\chi-\psi}{\chi\psi}+\frac{\chi\psi}{\chi-\psi}=\beta+\frac{1}{\beta}$$

β) Τα α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον μία από τις εξισώσεις $\chi^2-2\alpha\chi+2\beta\gamma=0$, $\chi^2-2\beta\chi+2\alpha\gamma=0$ και $\chi^2-2\gamma\chi+2\alpha\beta=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες..

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ



1. (α) (i) $-\frac{\beta}{2\alpha}>0\Rightarrow\frac{\beta}{\alpha}<0\Rightarrow\alpha\beta<0$

ή α < 0 διότι η f(x) έχει μέγιστο και $-\frac{\beta}{2a}>0\Rightarrow$ β>0 $\Rightarrow$ α·β<0

ή $x_1+x_2>0$ από σχήμα $\Rightarrow -\frac{\beta}{a}<0 \Rightarrow \frac{\beta}{a}>0 \Rightarrow$ α·β <0

ii) $x_1{\cdot}x_2>0\Rightarrow\frac{\gamma}{a}>0\Rightarrow\alpha{\cdot}\gamma>0$

ή α<0 , γ = f(0) <0 από σχήμα $\Rightarrow$ α·γ>0

iii) α – β +γ = f(-1) < 0 από σχήμα α < 0, β > 0 $\Rightarrow$ -β < 0, γ < 0 άρα α – β + γ < 0

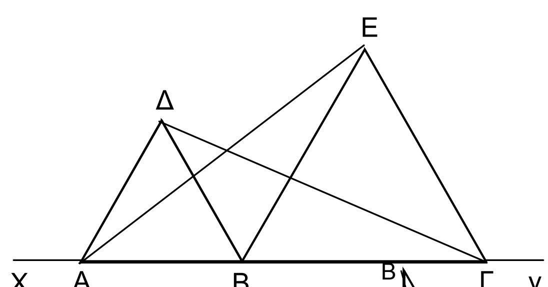
iv) α < 0, β < 0 $\Rightarrow$ 3α – β < 0

v) $-\frac{\beta}{2\alpha}>1$ από σχήμα $\Rightarrow -\frac{2\beta}{4\alpha}>1$ επειδή –4α > 0 $\Rightarrow$ 2β > - 4α $\Rightarrow$ 4α + 2β > 0

(β) $Z=\left(\kappa^2-\lambda^2\right)^2$ διπλή ρίζα $Z=(\kappa+\lambda)^2{\cdot}(\kappa-\lambda)^2=(\kappa+\lambda)^2{\cdot}\left[(\kappa+\lambda)^2-4\kappa\lambda\right]$

επειδή $\kappa+\lambda=-\mathrm{A}$ και $\kappa{\cdot}\lambda=\mathrm{B}\Rightarrow Z=(-A)^2\left[(-A)^2-4B\right]\Rightarrow Z=A^2\left(A^2-4B\right)$

2. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΒΓ έχουν ΑΒ=ΔΒ, πλευρές ισοπλεύρου τριγώνου.

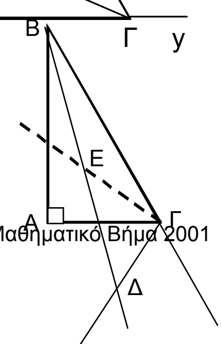


$\widehat{ABE}=\widehat{\Delta\mathrm{B}\Gamma}=60^0+\widehat{\Delta\mathrm{BE}}$ (ή =120°)

ΒΕ = ΒΓ , πλευρές ισοπλεύρου τριγώνου

$\Rightarrow \overset{\Delta}{\mathrm{AB}E}=\overset{\Delta}{\Delta\mathrm{B}\Gamma}\Rightarrow$ ΑΕ = ΓΔ

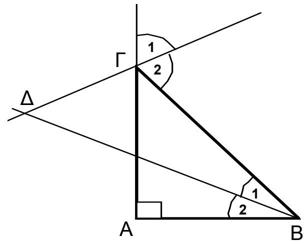
(β) Φέρω την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ που συναντά την ΒΔ στο Ε



Επειδή $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90° \Rightarrow \dfrac{\hat{B}}{2}+\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}=45°$, $\widehat{\Gamma E\Delta}$ εξωτερική γωνία του $\overset{\Delta}{B E\Gamma} \Rightarrow$

$\widehat{\Gamma E\Delta}=\dfrac{\hat{B}}{2}+\dfrac{\hat{\Gamma}}{2}=45°$.

Επειδή $\overset{\Delta}{E\Gamma\Delta}$ ορθογώνιο στο Γ (εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος) και $\widehat{\Gamma E\Delta}=45° \Rightarrow$ $\widehat{B\Gamma\Delta}=45°$.



ή

εξωτερική $\hat{\Gamma}=90°+\hat{B} \Rightarrow 2\hat{\Gamma}_2=90°+2\hat{B}_1 \Rightarrow \hat{\Gamma}_2=45°+\hat{B}_1$ (1)

$\hat{\Gamma}_2$ εξωτερική του $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta B} \Rightarrow \hat{\Gamma}_2=\hat{\Delta}+\hat{B}_1$ (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ $\hat{\Delta}=45°$ δηλ. $\widehat{B\Delta\Gamma}=45°$

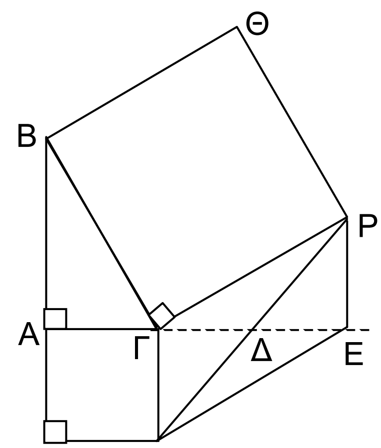
3. (α) Από το δ_2 περνούν 2000 αυτοκίνητα. Αυτά έρχονται από δ_1 (1500) και από δ_8 . Άρα από δ_8 περνούν 500. Από τα 2000 που περνούν από το δ_2 τα 900 βγαίνουν από δ_5. Άρα 1100 συνεχίζουν στο δ_6, όμως από το δ_6 περνούν 1500. Άρα από το δ_3 εισέρχονται 400.
Αφού από το δ_6 περνούν 1500 και τα 500 συνεχίζουν στο δ_8 $\Rightarrow$ ότι από δ_7 βγαίνουν 1000.

(β) Ο Α είναι από Εντοπία. Επειδή όσοι είναι από την Εντοπία λέγουν πάντα την αλήθεια και ο Ε λέγει την αλήθεια για τον Α (άρα και για τον Β) και επομένως είναι και ο ίδιος από την Εντοπία. Ο Δ συνεπώς λέγει ψέματα καθώς επίσης και ο Γ. Άρα από την Εντοπία κατάγονται τρεις οι Α, Β και ο Ε.

4. Προεκτείνω την ΓΔ και παίρνω σημείο Ε: ΓΕ = ΑΒ. Τότε

$\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{\Gamma EP}$ (διότι ΑΒ=ΓΕ, $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, ΒΓ=ΓΡ)

Άρα $\hat{E}=\hat{A}=90°$ και ΡΕ=ΑΓ=ΓΗ δηλ. ΡΕ//=ΓΗ$\Rightarrow$ΓΗΕΡ#.
Επειδή οι διαγώνιοι του διχοτομούνται $\Rightarrow$ ΓΔ=ΔΕ και ΡΔ=ΔΗ $\Rightarrow$ ΑΒ=ΓΕ=2ΓΔ και ΡΔ=ΔΗ $\Rightarrow$ (ΑΒ)=2(ΓΔ) και (ΡΔ)=(ΔΗ)



ή

Από το Ρ φέρουμε κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Έστω Ε το κοινό σημείο. Τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{E\Gamma P}$ (ορθογώνια με ΒΓ=ΓΡ και $\widehat{AB\Gamma}=\widehat{P\Gamma E}$) $\Rightarrow$ ΡΕ//=ΓΗ (κάθετες στην ίδια ευθεία) $\Rightarrow$
ΡΕ=ΑΓ=ΓΗ, ΡΕ//=ΓΗ $\Rightarrow$ ΓΗΕΡ #.
Επειδή οι διαγώνιες του διχοτομούνται $\Rightarrow$ ΓΔ=ΔΕ και ΡΔ=ΔΗ $\Rightarrow$ ΑΒ=ΓΕ=2·ΓΔ και ΡΔ=ΔΗ $\Rightarrow$ (ΑΒ)=2(ΓΔ) και (ΡΔ)=ΔΗ)

5. (α) Επειδή $\dfrac{\chi+\psi}{\chi\psi}$, $\dfrac{\chi\psi}{\chi+\psi}$ αντίστροφοι αριθμοί $\Rightarrow \dfrac{\chi+\psi}{\chi\psi}=a$ ή $\dfrac{\chi+\psi}{\chi\psi}=\dfrac{1}{a}$ (1)

ομοίως $\dfrac{\chi-\psi}{\chi\psi}=\beta$ ή $\dfrac{\chi-\psi}{\chi\psi}=\dfrac{1}{\beta}$ (2). Από (1) και (2) προκύπτουν τα συστήματα:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\chi+\psi}{\chi\psi}=\alpha\\ \dfrac{\chi-\psi}{\chi\psi}=\beta\end{matrix}\right\}(3)\quad \left.\begin{matrix}\dfrac{\chi+\psi}{\chi\psi}=\alpha\\ \dfrac{\chi-\psi}{\chi\psi}=\dfrac{1}{\beta}\end{matrix}\right\}(4)\qquad \left.\begin{matrix}\dfrac{\chi\psi}{\chi+\psi}=\dfrac{1}{\alpha}\\ \dfrac{\chi-\psi}{\chi\psi}=\beta\end{matrix}\right\}(5)\quad \left.\begin{matrix}\dfrac{\chi\psi}{\chi+\psi}=\dfrac{1}{\alpha}\\ \dfrac{\chi-\psi}{\chi\psi}=\dfrac{1}{\beta}\end{matrix}\right\}(6)$$

Από (3) $\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\chi}=\alpha\\ \dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\chi}=\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{2}{\psi}=\alpha+\beta\\ \dfrac{2}{\chi}=\alpha-\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}\psi=\dfrac{2}{\alpha+\beta}\\ \chi=\dfrac{2}{\alpha-\beta}\end{matrix}$

Από (4) $\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\chi}=\alpha\\ \dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{1}{\beta}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{2}{\psi}=\alpha+\dfrac{1}{\beta}\\ \dfrac{2}{\chi}=\alpha-\dfrac{1}{\beta}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}\psi=\dfrac{2\beta}{\alpha\beta+1}\\ \chi=\dfrac{2\beta}{\alpha\beta-1}\end{matrix}$

Από (5) $\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{1}{\alpha}\\ \dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\chi}=\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{2}{\psi}=\dfrac{1}{\alpha}+\beta\\ \dfrac{2}{\chi}=\dfrac{1}{\alpha}-\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}\psi=\dfrac{2\alpha}{\alpha\beta+1}\\ \chi=\dfrac{2\alpha}{1-\alpha\beta}\end{matrix}$

Από (6) $\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{1}{\alpha}\\ \dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{1}{\beta}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{2}{\psi}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\\ \dfrac{2}{\chi}=\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}\psi=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\\ \chi=\dfrac{2\alpha\beta}{\beta-\alpha}\end{matrix}$

Διερεύνηση: για να ισχύουν οι πιο πάνω λύσεις πρέπει $\alpha\neq\pm\beta$ και $\alpha\beta\neq\pm1$

(β) $\begin{matrix}\chi^2-2\alpha\chi+2\beta\gamma=0\\ \Delta_1=4\left(\alpha^2-2\beta\gamma\right)\end{matrix}$, $\begin{matrix}\chi^2-2\beta\chi+2\alpha\gamma=0\\ \Delta_2=4\left(\beta^2-2\alpha\gamma\right)\end{matrix}$, $\begin{matrix}\chi^2-2\gamma\chi+2\alpha\beta=0\\ \Delta_3=4\left(\gamma^2-2\alpha\beta\right)\end{matrix}$

λόγω της κυκλικής εναλλαγής μπορεί να υποθέσουμε ότι $\alpha\geq\beta\geq\gamma$

Αν $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ ισόπλευρο (α=β=γ) $\Rightarrow$ $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=-4\alpha^2<0$ $\Rightarrow$ οι τρεις διακρίνουσες δεν έχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Αν το $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ ισοσκελές: α = β > γ (1) ή α > β = γ (2)

αν (1) $\Rightarrow$ $\Delta_1=4\beta(\beta-2\gamma)$; $\Delta_2=4(\beta^2-2\beta\gamma)=4\beta[\beta(\beta-2\gamma)]$; $\Delta_3=4(\gamma^2-2\beta^2)<0$ διότι η τρίτη εξίσωση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

αν (2) $\Rightarrow$ $\Delta_1=4(\alpha^2-2\beta^2)<0$ διότι α>β. $\Delta_2=4(\beta^2-2\alpha\gamma)<0$ διότι α>β. $\Delta_3=4\beta(\beta-2\alpha)<0$ διότι α>β. όλες οι παραστάσεις δεν έχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Αν το $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ σκαληνό: α > β > γ

$\Delta_1=4(\alpha^2-2\beta\gamma)$; $\Delta_2=2(\beta^2-2\alpha\gamma)$; $\Delta_3=4(\gamma^2-2\alpha\beta)<0$ διότι $\gamma^2<\alpha\beta$

Άρα η τρίτη παράσταση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Κατά συνέπεια τουλάχιστο μια από τις εξισώσεις δεν θα έχει ρίζες πραγματικές.

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ "ΖΗΝΩΝ"

ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες Μάρτιος 2001

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μακρίδης – Σάββας Ιωαννίδης

- Να απαντηθούν όλα τα θέματα

Θέμα 1.

α) Να βρεθεί τα υπόλοιπο της διαίρεσης του 22^7 δια του 123.

β) Εξετάστε κατά πόσον η παρακάτω εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις (χ,ψ). Σε περίπτωση που υπάρχουν, να βρεθούν όλες. Σε περίπτωση που δεν υπάρχουν, να αποδειχθεί γιατί δεν υπάρχουν.

$$2\chi^2 + 6\chi\psi + 10\psi^2 - 2\chi + 6\psi + 10 = 0$$

Θέμα 2.

Να λυθεί ανίσωση, $2^{2\chi} \leq 3 \cdot 2^{\chi+\sqrt{\chi}} + 4 \cdot 2^{2\sqrt{\chi}}$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Θέμα 3.

Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα εννέα, το άθροισμα δέκα και το άθροισμα έντεκα διαδοχικών θετικών ακέραιων αριθμών. Να βρεθούν επίσης οι ομάδες των διαδοχικών ακεραίων.

Θέμα 4.

Δίδονται οι διάφοροι του μηδενός πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ, οι οποίοι ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις,

$$\alpha + \beta + \gamma = \delta$$
$$\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta = \alpha\beta\gamma$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 343$$

Να βρεθεί η αριθμητική τιμή του αθροίσματος $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

Θέμα 5.

Δίδεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε $\widehat{E\Gamma\Delta} = \widehat{\mathrm{E}\Delta\Gamma} = 15°$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισόπλευρο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1. (α)

Μέθοδος Ι

Παρατηρούμε ότι $(123 + p)(123 + q) = 123(123 + p + q) + pq = 123k + pq \Rightarrow$

$$22^7 = 2^7 \cdot 11^7 = (2^7)(11^2)(11^2)(11^2)(11) = (123+5)(123-2)(123-2)(123-2)(11) =$$
$$= 123m - 440 = 123m - 492 + 52 = 123(m-4) + 52$$

Το υπόλοιπο όταν το 22^7 διαιρεθεί με 123 είναι 52.

Μέθοδος ΙΙ

$$22^7 = (2^7)(2^{11})(2^{11})(2^{11})(2) = (128)(121)(121)(121)(11)(\mathrm{mod}\,123) =$$
$$= (5)(-2)(-2)(-2)(11)(\mathrm{mod}\,123) = -440(\mathrm{mod}\,123) = 52(\mathrm{mod}\,123)$$

$\Rightarrow$ Υπόλοιπο 52

(β)

Η εξίσωση μπορεί να γραφεί στη μορφή ως:

$$\left(\chi^2+6\chi\psi+9\psi^2\right)+\left(\chi^2-2\chi+1\right)+\left(\psi^2+6\psi+9\right)=0 \Rightarrow \left(\chi+3\psi\right)^2+\left(\chi-1\right)^2+\left(\psi+3\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\chi+3\psi=0\\ \chi-1=0\\ \psi+3=0\end{array}\right| \text{ Το σύστημα δεν έχει λύση.}$$

Θέμα 2.

$\chi \geq 0$

$$4\cdot 2^{2\sqrt{\chi}}+3\cdot 2^{\chi+\sqrt{\chi}}-2^{2\chi}\geq 0 \Rightarrow 4\cdot 2^{2\sqrt{\chi}}+4\cdot 2^{\chi+\sqrt{\chi}}-2^{\chi+\sqrt{\chi}}-2^{2\chi}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot 2^{\sqrt{\chi}}\left(2^{\sqrt{\chi}}+2^{\chi}\right)-2^{\chi}\left(2^{\sqrt{\chi}}+2^{\chi}\right)\geq 0 \Rightarrow \left(2^{\sqrt{\chi}}+2^{\chi}\right)\left(4\cdot 2^{\sqrt{\chi}}-2^{x}\right)\geq 0$$

Εφόσον $2^{\sqrt{\chi}}+2^{\chi}>0$ για όλα τα $\chi\in\mathbb{R}$, αρκεί να λύσουμε: $4\cdot 2^{\sqrt{\chi}}-2^{x}\geq 0 \Rightarrow 4\cdot 2^{\sqrt{\chi}}\geq 2^{x}\Rightarrow$

$$\sqrt{\chi}+2\geq\chi \Rightarrow \chi-\sqrt{\chi}-2\leq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{\chi}-1\right)\left(\sqrt{\chi}-2\right)\leq 0 \Rightarrow \sqrt{\chi}\in[0,2] \Rightarrow \chi\in[0,4]$$

Θέμα 3.

Ο μέσος όρος εννέα διαδοχικών ακεραίων είναι ο 5^{ος} ακέραιος (α_5). Παρόμοια ο μέσος όρος έντεκα διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 6^{ος} (β_6)και των δέκα ο μέσος όρος του 5^{ου} και 6^{ου} ακεραίων ($\gamma_{5,6}$). Ο ζητούμενος ακέραιος ισούται με:

$9\cdot\alpha_5$, $11\cdot\beta_6$, $10\cdot\dfrac{\gamma_5+\gamma_6}{2}=5\left(\gamma_5+\gamma_6\right)$. Ο αριθμός διαιρείται με το 9, 11 και 5.

Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός είναι $9\cdot 11\cdot 5=495$.

Έλεγχος: $495=\underbrace{51+52+\ldots+59}_{9\,\delta\iota\alpha\delta o\chi\iota\kappa o\iota}=\underbrace{45+46+\ldots+54}_{10\,\delta\iota\alpha\delta o\chi\iota\kappa o\iota}=\underbrace{40+41+\ldots 50}_{11\,\delta\iota\alpha\delta o\chi\iota\kappa o\iota}$

Θέμα 4.

$\alpha+\beta+\gamma=\delta$

$\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta+\alpha\beta\delta=\alpha\beta\gamma \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\delta}$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=343$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=\delta\\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\delta}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\alpha+\beta+\gamma\right)\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=1 \Rightarrow 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+1+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+1=1 \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+2=0 \Rightarrow \alpha^2\gamma+\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\beta+\gamma^2\alpha+2\alpha\beta\gamma=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\alpha^2\gamma}+\underline{\underline{\alpha^2\beta}}+\underline{\underline{\underline{\beta^2\gamma}}}+\underline{\underline{\underline{\beta^2\alpha}}}+\underline{\underline{\underline{\underline{\gamma^2\beta}}}}+\underline{\gamma^2\alpha}+\underline{\underline{\alpha\beta\gamma}}+\underline{\underline{\underline{\underline{\alpha\beta\gamma}}}}=0 \Rightarrow$$

$$\alpha\gamma\left(\alpha+\gamma\right)+\alpha\beta\left(\alpha+\gamma\right)+\beta^2\left(\alpha+\gamma\right)+\beta\gamma\left(\alpha+\gamma\right)=0 \Rightarrow \left(\alpha+\gamma\right)\left(\alpha\gamma+\alpha\beta+\beta^2+\beta\gamma\right)=0 \Rightarrow$$

$$\left(\alpha+\gamma\right)\left[\alpha\left(\beta+\gamma\right)+\beta\left(\beta+\gamma\right)\right]=0 \Rightarrow \left(\alpha+\gamma\right)\left(\beta+\gamma\right)\left(\alpha+\beta\right)=0.$$

Άρα δύο από τους δοθέντες ακέραιους είναι αντίθετοι.

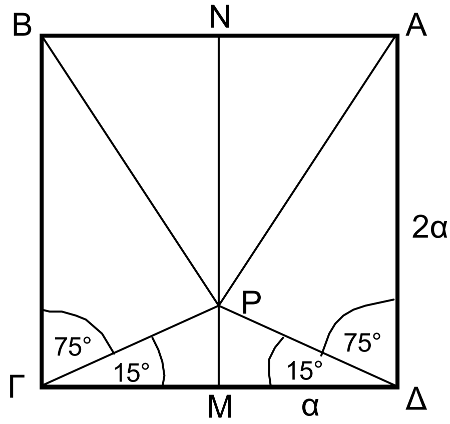
Έστω $\alpha+\beta=0 \Rightarrow \alpha=-\beta \Rightarrow \gamma=\delta$

Τότε η τρίτη σχέση μας δίνει κατά σειρά

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=343 \Rightarrow \left(-\beta\right)^3+\beta^3+\gamma^3=343 \Rightarrow -\beta^3+\beta^3+\gamma^3=343 \Rightarrow \gamma^3=343 \Rightarrow \gamma=\delta=7$$

Άρα $\alpha+\beta+\gamma+\delta=7+7=14$.

Θέμα 5.



Το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές με ΡΓ=ΡΔ $\Rightarrow$

$\overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma P}} = \overset{\Delta}{\mathrm{AP\Delta}} \Rightarrow \mathrm{BP} = \mathrm{AP}$.

Άρα η από το Ρ κάθετη στις πλευρές ΓΔ και ΑΒ είναι και διάμεσος των τριγώνων ΡΓΔ και ΑΒΡ

Θέτουμε ΜΔ = α $\Rightarrow$ ΑΔ = 2α,

Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta MP}}$: $\varepsilon\phi 15^0 = \dfrac{\mathrm{PM}}{\alpha} \Rightarrow \mathrm{PM} = \alpha \cdot \varepsilon\phi 15^0 \Rightarrow$

$\mathrm{NP} = 2\alpha - \alpha \cdot \varepsilon\phi 15^0 \Rightarrow \varepsilon\phi \widehat{\mathrm{BAP}} = \dfrac{\mathrm{NP}}{\mathrm{NA}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon\phi \widehat{\mathrm{BAP}} = \dfrac{2\alpha - \alpha \cdot \varepsilon\phi 15^0}{\alpha} = 2 - \varepsilon\phi 15^0$

Έχουμε $\varepsilon\phi 15^0 = \varepsilon\phi\left(45^0 - 30^0\right) = \dfrac{\varepsilon\phi 45^0 - \varepsilon\phi 30^0}{1 + \varepsilon\phi 45^0 \cdot \varepsilon\phi 30^0} = \dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$

$\varepsilon\phi \widehat{\mathrm{BAP}} = 2 - \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon\phi \widehat{\mathrm{BAP}} = \dfrac{6 + 2\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon\phi \widehat{\mathrm{BAP}} = \dfrac{3 + 3\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow$

$\varepsilon\phi \widehat{\mathrm{BAP}} = \dfrac{\sqrt{3}\left(3 + \sqrt{3}\right)}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon\phi \widehat{\mathrm{BAP}} = \sqrt{3} \Rightarrow\Rightarrow \widehat{\mathrm{BAP}} = 60^0 \Rightarrow \overset{\Delta}{\mathrm{BPA}}$ ισόπλευρο τρίγωνο.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 ½

«ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ»

ΧΡΟΝΟΣ: 3 ώρες | Απρίλιος 2001

Επιμέλεια: Ανδρέας Σαββίδης – Μάριος Αντωνιάδης

- Να απαντηθούν όλα τα θέματα

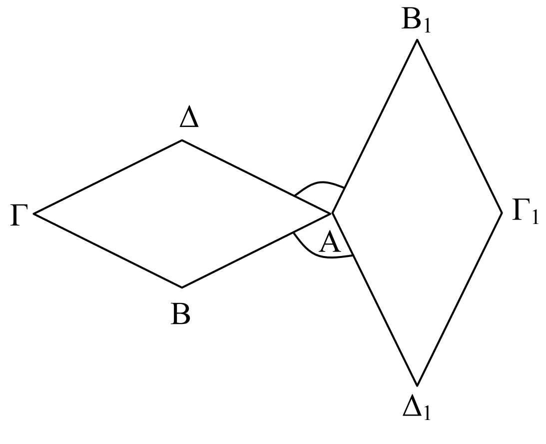
1. (α) Αν $\chi - \frac{1}{\chi} = \alpha$ και $\chi^2 - \frac{1}{\chi^2} = \beta$ να δείξετε ότι: $\alpha^2\left(\alpha^2 + 4\right) = \beta^2$

(β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, να βρείτε την πιο μικρή τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση: $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

2. Δυο ευθείες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ο. Να πάρετε 4 σημεία στις ευθείες αυτές για να σχηματίσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ (το Ο να είναι εσωτερικό σημείο του τετραπλεύρου) για το οποίο ισχύουν $\mathrm{O\mathrm{A}} = \mathrm{O}\Delta = 2\mathrm{OB}$ και $\mathrm{O}\Gamma = 2\mathrm{OA}$. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ σχηματίζουν ορθογώνιο και αν $\mathrm{AB} = 125\,cm$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

3. Σ' ένα σχολείο έγινε ψηφοφορία για την επιλογή μιας αντιπροσωπίας. Ο λόγος των μαθητών προς τις μαθήτριες ήταν $\alpha : \beta$. Επειδή κατά τη μέρα της ψηφοφορίας έλειπαν γ μαθητές και δ μαθήτριες, ο λόγος των μαθητών προς τις μαθήτριες έγινε $\kappa : \lambda$. Να υπολογίσετε συναρτήσει των α, β, γ, δ, κ, λ το πλήθος των μαθητών και μαθητριών του σχολείου.

4. Δυο ρόμβοι ΑΒΓΔ και $\mathrm{AB_1\Gamma_1\Delta_1}$ έχουν κοινή κορυφή Α και $\widehat{\Delta\mathrm{AB}_1} = \widehat{\mathrm{BA}\Delta_1}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να δείξετε ότι τα σημεία τομής των διαγωνίων κάθε ρόμβου και το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $\mathrm{B}\Delta_1$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.



5. Ο Α έχει μόνο μια επιταγή και πηγαίνει σε τράπεζα να την εξαργυρώσει. Ο ταμίας από λάθος πληρώνει στον Α αντί το ποσό των λιρών το ποσό των σεντ και αντί το ποσό των σέντ το ποσό των λιρών. Ο Α αφού εξόδευσε £3,50 από τα λεφτά που εξαργύρωσε αντιλαμβάνεται το λάθος που έγινε. Μετρά τότε τα λεφτά που του έμειναν και βλέπει ότι το ποσό που κατέχει είναι ακριβώς το διπλάσιο που ήταν γραμμένο στην επιταγή. Για πιο ποσό είχε εκδοθεί η επιταγή;

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. (α) $\alpha^2\left(\alpha^2+4\right)=\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^2\left[\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^2+4\right]=\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^2\left(\chi^2-2+\frac{1}{\chi^2}+4\right)=$

$=\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^2\left(\chi^2+2+\frac{1}{\chi^2}\right)=\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^2\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)^2=\left[\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)\right]^2$

$=\left(\chi^2-\frac{1}{\chi^2}\right)^2=\beta^2$

β΄ τρόπος

$\alpha^2\left(\alpha^2+4\right)=\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^2\cdot\left[\left(\chi-\frac{1}{\chi}\right)^2+4\right]=\left(\chi^2-2+\frac{1}{\chi^2}\right)\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}-2+4\right)=$

$=\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}-2\right)\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}+2\right)=\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)^2-4=\chi^4+\frac{1}{\chi^4}-2$

$\beta^2=\left(\chi^2-\frac{1}{\chi^2}\right)^2=\chi^4+\frac{1}{\chi^4}-2$

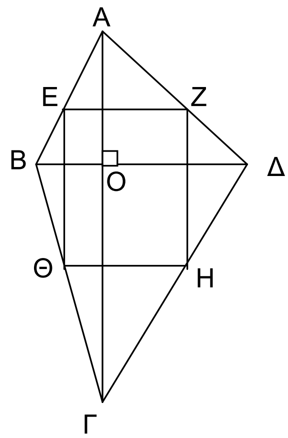
Άρα $\alpha^2\left(\alpha^2+4\right)=\beta^2$

(β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$

Επειδή $\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2\geq 0\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha\geq 0\Rightarrow 1+2\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)\geq 0$

$\Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\geq-\frac{1}{2}$ άρα η πιο μικρή τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση είναι $-\frac{1}{2}$.

2. Ε, Ζ μέσα των πλευρών του ΑΒΔ
Θ, Η μέσα των πλευρών του ΓΒΔ



$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} EZ\,//=\frac{\mathrm{B\Delta}}{2} \\ \Theta\mathrm{H}\,//=\frac{\mathrm{B\Delta}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{EZ}\,//=\Theta\mathrm{H}\Rightarrow$ ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο

(απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες)

$\widehat{\mathrm{AO\Delta}}=\widehat{\mathrm{E\Theta H}}$ (γωνίες με πλευρές παράλληλες)

$\widehat{\mathrm{AO\Delta}}=90^0\Rightarrow\widehat{\mathrm{E\Theta H}}=90^0\Rightarrow$ ορθογώνιο.

Έστω ΟΒ = χ τότε ΟΑ = ΟΔ =2χ και ΟΓ = 4χ.

$AB^2=OB^2+OA^2\Rightarrow 125^2=\chi^2+4\chi^2\Rightarrow 5\chi^2=125\Rightarrow \chi=25\sqrt{5}$ cm

$\mathrm{B\Delta}=3\chi\Rightarrow \mathrm{EZ}=\frac{1}{2}\mathrm{B\Delta}=\frac{3\chi}{2},\quad \mathrm{A\Gamma}=6\chi\Rightarrow \mathrm{E\Theta}=\frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}=3\chi$

$\left(\mathrm{EZH\Theta}\right)=\frac{3\chi}{2}\cdot 3\chi=\frac{9}{2}\chi^2=\frac{9}{2}\cdot 5\cdot 25^2=\frac{1}{2}\cdot 28125\,cm^2$.

3. Έστω μ ο αριθμός των μαθητών και ν ο αριθμός των μαθητριών

$\frac{\mu}{\nu}=\frac{\alpha}{\beta}\ (1)\quad ,\quad \frac{\mu-\gamma}{\nu-\delta}=\frac{\kappa}{\lambda}\ (2)$. Ζητούμενο: $\mu+\nu$

$$(1) \Rightarrow \mu = \frac{\alpha\nu}{\beta}\ (3) \qquad , \qquad (2) \Rightarrow \mu\lambda - \gamma\lambda = \kappa\nu - \delta\kappa$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{\alpha\nu}{\beta}\lambda - \gamma\lambda = \nu - \delta\kappa \Rightarrow \alpha\nu\lambda - \gamma\lambda\beta = \beta\kappa\nu - \beta\delta\kappa \Rightarrow \lambda\alpha\nu - \beta\kappa\nu = \gamma\lambda\beta - \beta\delta\kappa \Rightarrow$$

$$\nu(\alpha\lambda - \beta\kappa) = \beta(\gamma\lambda - \delta\kappa) \Rightarrow \nu = \frac{\beta(\gamma\lambda - \delta\kappa)}{\alpha\lambda - \beta\kappa} \qquad (4)$$

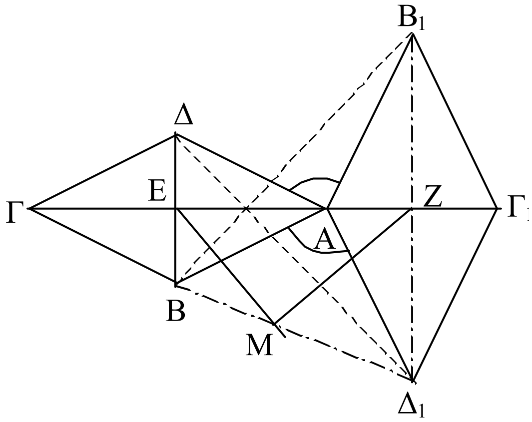
$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} \mu = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta(\gamma\lambda - \delta\kappa)}{\alpha\lambda - \beta\kappa} = \frac{\alpha(\gamma\lambda - \delta\kappa)}{\alpha\lambda - \beta\kappa}.$$ Άρα από (4) και (5)

$$\mu + \nu = \frac{\alpha(\gamma\lambda - \delta\kappa)}{\alpha\lambda - \beta\kappa} + \frac{\beta(\gamma\lambda - \delta\kappa)}{\alpha\lambda - \beta\kappa} = \frac{(\alpha+\beta)(\gamma\lambda - \delta\kappa)}{\alpha\lambda - \beta\kappa}$$

4. Στο τρίγωνο $\mathrm{B}\Delta\Delta_1$

$$\left.\begin{array}{l} E\ \mu\varepsilon\sigma o\ \mathrm{B}\Delta \\ \mathrm{M}\ \mu\varepsilon\sigma o\ \mathrm{B}\Delta_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{EM} = \frac{1}{2}\Delta\Delta_1$$

Όμοια στο τρίγωνο $\Delta_1\mathrm{BB}_1$: $\quad \mathrm{MZ} = \frac{1}{2}\mathrm{BB}_1$



Συγκρίνω τα τρίγωνα ABB_1 και $\mathrm{A}\Delta\Delta_1$

$\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Delta$ πλευρές ρόμβου ΑΒΓΔ

$\mathrm{AB}_1 = \mathrm{A}\Delta_1$ πλευρές ρόμβου $\mathrm{AB}_1\Gamma_1\Delta_1$

$\widehat{\mathrm{BAB}_1} = \widehat{\Delta\mathrm{A}\Delta_1}$

διότι $\widehat{\Delta AB_1} = \widehat{BA\Delta_1}$ δεδομένο

$+ \quad \widehat{\mathrm{BA}\Delta} = \widehat{\mathrm{BA}\Delta}$

$\widehat{\mathrm{BAB}_1} = \widehat{\Delta\mathrm{A}\Delta_1}$

Ώστε τα τρίγωνα ABB_1, $\mathrm{A}\Delta\Delta_1$ είναι ίσα διότι έχουν 2 πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες $\Rightarrow \mathrm{BB}_1 = \Delta\Delta_1$ (3)

Οπότε από τις σχέσεις (1), (2) και (3) $\Rightarrow$ ΕΜ = ΜΖ. Άρα ΜΕΖ ισοσκελές τρίγωνο.

5. Το ποσό της επιταγής είναι σε £ και σεντ.

Έστω ότι οι £ είναι χ (χ είναι ακέραιος) και ψ τα σέντ. ($0 \le \psi \le 100$, ψ ακέραιος)

Το ποσό της επιταγής είναι 100χ + ψ σέντ.

Ο ταμίας όμως εξαργυρώνει την επιταγή για 100ψ +χ σεντ.

$100\psi + \chi - (3\cdot 100 + 50) = 2(100\chi + \psi) \Rightarrow$

$100\psi + \chi - 350 = 200\chi + 2\psi \Rightarrow 199\chi - 98\psi = -350 \Rightarrow$

$$\chi = \frac{98\psi - 350}{199} = \frac{14(7\psi - 25)}{199}$$

Αλλά χ ακέραιος αριθμός και το 14 με το 199 είναι πρώτοι αριθμοί.

Άρα πρέπει: $7\psi - 25 = 199t$, $\quad 0 \le 7\psi < 700 \Rightarrow 0 \le 199t + 25 < 700 \Rightarrow -25 \le 199t < 725$.

Ώστε το t μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1, 2, 3 και το ψ είναι ακέραιος

για t=0 $\Rightarrow$ 7ψ=25 απορ. , t=1 $\Rightarrow$ 7ψ=199+25=225 $\Rightarrow$ ψ = 32, χ = 24

t = 2 $\Rightarrow$ 7ψ = 423 απορ. , t = 3 $\Rightarrow$ 7ψ = 622 απορ.

Ποσόν επιταγής : £ 14,32 σεντ.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΓΙΑ BMO – IMO 2001

ΧΡΟΝΟΣ: 4 ½ ώρες Μάρτιος 2001

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μακρίδης - Ανδρέας Σχοινής

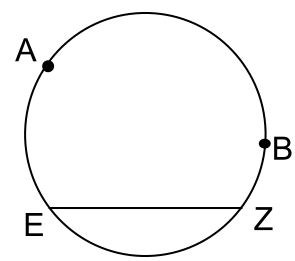
- Να απαντηθούν όλα τα θέματα

Θέμα 1.

α) Ο Ζήνων εναλλάσσει τις θέσεις ενός τετραψήφιου αριθμού δημιουργώντας νέους τετραψήφιους ώστε τα ψηφία του αρχικού αριθμού να βρίσκονται σε διαφορετική θέση μετά την εναλλαγή. Μετά αφαιρεί κάθε νέο αριθμό από τον αρχικό. Να βρεθεί το αποτέλεσμα ή αποτελέσματα που βρήκε ο Ζήνων, αν το αποτέλεσμα είναι τριψήφιος αριθμός και τέλειο τετράγωνο.

β) Η ακολουθία α_ν ορίζεται επαγωγικά με $\alpha_0 = -1$, $\alpha_\nu = \dfrac{2\cdot\alpha_{\nu-1} - 3}{3\cdot\alpha_{\nu-1} - 4}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Να βρεθεί κλειστός τύπος για το γενικό όρο της ακολουθίας.

Θέμα 2.



Στη διπλανή περιφέρεια δίνονται τα σταθερά σημεία Α και Β και η σταθερή χορδή ΕΖ. Από τυχαίο Γ της περιφέρειας φέρνουμε τις χορδές ΓΑ και ΓΒ που τέμνουν τη σταθερή χορδή ΕΖ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να δείξετε έτι ο λόγος: $\dfrac{(\mathrm{EM})(\mathrm{NZ})}{(\mathrm{MN})}$ είναι σταθερός.

ΘΕΜΑ 3.

Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι ν για τους οποίους ο αριθμός $\nu^8 - \nu^2$ **δεν** διαιρείται με το 72.

ΘΕΜΑ 4.

Δίδεται $f(x) = \chi^4 - 4\chi^3 + (3+\lambda)\chi^2 - 12\chi + 12$ όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι λ ώστε η παρακάτω εξίσωση να έχει τουλάχιστο μια ακέραια λύση, $f(\chi) = f(1-\chi) - 4\chi^3$

β) Να βρεθούν όλες οι τιμές του **λ,** ώστε το $f(\chi) \geq 0$ να ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του χ.

ΘΕΜΑ 5.

Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε, Δ, Ζ έτσι ώστε: $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BA}} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\mathrm{AZ}}{\mathrm{A\Gamma}} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma\mathrm{B}} = \dfrac{2}{7}$. να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 7 cm².

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

(α) $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\alpha\delta\gamma$, $\gamma\delta\alpha\beta$, $\delta\gamma\beta\alpha$, $\beta\delta\alpha\gamma$, $\gamma\alpha\delta\beta$

$$1000\alpha+100\beta+10\gamma+\delta$$
$$-1000\beta-100\alpha-10\delta-\gamma$$
$$-1000\gamma-100\delta-10\alpha-\beta$$
$$-1000\delta-100\gamma-10\beta-\alpha$$
$$-1000\beta-100\delta-10\alpha-\gamma$$
$$-1000\gamma-100\alpha-10\delta-\beta$$

$$900\alpha-900\beta-9\delta+9\gamma=9\kappa$$
$$990\alpha+99\beta-990\gamma-99\delta=9\kappa$$
$$999\alpha+90\beta-90\gamma-999\delta=9\kappa$$
$$\vdots$$

Άρα το αποτέλεσμα διαιρείται με το 9. Τριψήφιος και τέλειο τετράγωνο και πολλαπλάσιο του 9.

3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10

12^2 15^2 18^2 21^2 24^2 27^2 30^2

144, 225, 324, 441, 24^2, 27^2, 30^2. 576, 729, 900

(β)

$$\alpha_1=\frac{5}{7}=\frac{6\cdot1-1}{6\cdot1+1}$$
$$\alpha_2=\frac{11}{13}=\frac{6\cdot2-1}{6\cdot2+1}$$
$$\alpha_3=\frac{17}{19}=\frac{6\cdot3-1}{6\cdot3+1}$$
$$\vdots$$
$$\alpha_\nu=\frac{6\cdot\nu-1}{6\cdot\nu+1}$$

Απόδειξη με επαγωγή.

$\nu=1$ $\quad \alpha_1=\dfrac{2\alpha_0-3}{3\alpha_0-4}=\dfrac{2\cdot(-1)-3}{3\cdot(-1)+4}=\dfrac{5}{7}=\dfrac{6\cdot1-1}{6\cdot1+1}$ Ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για ν=κ $\Rightarrow \alpha_\kappa=\dfrac{6\cdot\kappa-1}{6\cdot\kappa+1}$

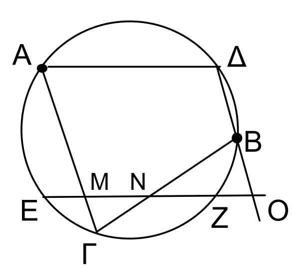
$$\alpha_{\kappa+1}=\frac{2\alpha_\kappa-3}{3\alpha_\kappa-4}=\frac{\dfrac{2(6\kappa-1)}{6\kappa+1}-3}{3\left(\dfrac{(6\kappa-1)}{6\kappa+1}\right)-4}=\frac{12\kappa-2-18\kappa-3}{18\kappa-3-24\kappa-4}=\frac{-6\kappa-5}{6\kappa+7}=\frac{6(\kappa+1)-1}{6(\kappa+1)+1}\ \text{Ισχύει}\ \forall\,\nu\in\mathbb{N}$$

ΘΕΜΑ 2.

Από το σημείο Α φέρουμε τη χορδή ΑΔ//ΕΖ, και τη ΔΒ που τέμνει την ΕΖ στο σημείο Ο. Τα τρίγωνα ΜΓΝ και ΒΟΝ είναι όμοια γιατί:

$\widehat{\text{ΜΝΓ}}=\widehat{\text{ΒΝΟ}}$ και

$$\hat{\text{Ο}}=\widehat{\text{ΕΖΔ}}-\widehat{\text{ΖΔΒ}}=\frac{1}{2}\left(\widehat{\text{ΕΑΔ}}-\widehat{\text{ΒΖ}}\right)=\frac{1}{2}\left(\widehat{\text{ΕΑΔΒ}}-\widehat{\text{ΔΖ}}\right)$$



$=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{\mathrm{EA\Delta B}}-\overset{\frown}{\mathrm{AE}}\right)=\frac{1}{2}\overset{\frown}{\mathrm{A\Delta B}}=\hat{\Gamma}$.

Άρα $\frac{\mathrm{MN}}{\Gamma\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{NO}}\Rightarrow \mathrm{MN}\cdot\mathrm{NO}=\Gamma\mathrm{N}\cdot\mathrm{NB}$. Αλλά $\Gamma\mathrm{N}\cdot\mathrm{NB}=\mathrm{NE}\cdot\mathrm{NZ}$ επομένως $\mathrm{NE}\cdot\mathrm{NZ}=\mathrm{MN}\cdot\mathrm{NO}$

$\Rightarrow \frac{\mathrm{EN}}{\mathrm{MN}}=\frac{\mathrm{NO}}{\mathrm{NZ}}\Rightarrow \frac{\mathrm{EN}-\mathrm{MN}}{\mathrm{MN}}=\frac{\mathrm{NO}-\mathrm{NZ}}{\mathrm{NZ}}\Rightarrow \frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{MN}}=\frac{\mathrm{ZO}}{\mathrm{NZ}}\Rightarrow \frac{\mathrm{EM}\cdot\mathrm{NZ}}{\mathrm{MN}}=\mathrm{ZO}$ σταθερό γιατί το ZO εξαρτάται μόνο από τη θέση των σημείων Α, Β και της χορδής ΕΖ.

ΘΕΜΑ 3.

Έστω $\mathrm{A}(\nu)=\nu^8-\nu^2$

$$\mathrm{A}(\nu)=\nu^2\left(\nu^6-1\right)=\nu^2\left[\left(\nu^2\right)^3-1\right]=\nu^2\left(\nu^2-1\right)\left(\nu^4+\nu^2+1\right)=\nu^2\left(\nu-1\right)\left(\nu+1\right)\left(\nu^4+\nu^2+1\right)=$$

$$=\nu^2\left(\nu-1\right)\left(\nu+1\right)\left(\nu^2-\nu+1\right)\left(\nu^2+\nu+1\right)$$

$72=8\cdot 9$

Πρώτα θα δείξουμε ότι το $\mathrm{A}(\nu)$ διαιρείται με το 9.

$\nu\equiv 0\pmod 3\Rightarrow \nu^2\equiv 0\pmod 9$

$\nu\equiv 1\pmod 3\Rightarrow \nu-1\equiv 0\pmod 3\Rightarrow \nu^2+\nu+1\equiv 0\pmod 3$

$\nu^2\equiv 1\pmod 3$

$\nu\equiv -1\pmod 3\Rightarrow \nu+1\equiv 0\pmod 3\Rightarrow \nu^2-\nu+1\equiv 0\pmod 3$

$\nu^2\equiv 1\pmod 3$

$\Rightarrow \nu^8-\nu^2\equiv 0\pmod 3\quad \forall \nu\in\mathbb{N}^*$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\mathrm{A}(\nu)$ δεν διαιρείται με το 8.

Αν ν περιττός τότε $(\nu-1)(\nu+1)$ διαιρείται με το 8 εφόσον στο $(\nu-1)(\nu+1)$ υπάρχουν τουλάχιστον τρεις παράγοντες που είναι 2.

Αν ν άρτιος και ν διαιρείται με το 4 τότε το $\nu^2\equiv 0\pmod 8$.

Αν ν άρτιος και $\nu\equiv 2\pmod 4$ τότε το $\mathrm{A}(\nu)$ διαιρείται με το 4 αλά όχι με το 8.

$\nu=4\kappa+2\Rightarrow \nu^2=(4\kappa+2)^2=2^2(2\kappa+1)^2$

$$\left.\begin{array}{l}\nu-1 \text{ περιττός}\\ \nu+1 \text{ περιττός}\\ \nu^2-\nu+1 \text{ περιττός}\\ \nu^2+\nu+1 \text{ περιττός}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}(\nu-1)(\nu+1)(\nu^2-\nu+1)(\nu^2+\nu+1) \text{ περιττός} \neq 2\kappa\Rightarrow\\ \nu^2(\nu-1)(\nu+1)(\nu^2-\nu+1)(\nu^2+\nu+1)\neq 4\cdot 24\end{array}$$

ΘΕΜΑ 4.

(α) $f(\chi)-f(1-\chi)+4\chi^3=0\Rightarrow$

$$\chi^4-4\chi^3+(3+\lambda)\chi^2-12\chi+12-(1-\chi)^4+4(1-\chi)^3-(3+\lambda)(1-\chi)^2+12(1-\chi)-12+4\chi^3=0$$

$$\Rightarrow 6\chi^2-26\chi+2\lambda\chi+12-\lambda=0\quad\Rightarrow\quad 6\chi^2-2(13-\lambda)\chi+12-\lambda=0\qquad(1)$$

$$\Delta=4(13-\lambda)^2-24(12-\lambda)=4\left(169-26\lambda+\lambda^2\right)-288+24\lambda=4\lambda^2-80\lambda+388=4\left[(\lambda-10)^2-3\right]$$

Για ακέραιες λύσεις $\Rightarrow$ Δ = τέλειο τετράγωνο $\Rightarrow$ $(\lambda-10)^2-3=\alpha^2 \Rightarrow (\lambda-10)^2=\alpha^2+3$

$\alpha^2+3=\beta^2 \Rightarrow \beta^2-\alpha^2=3 \Rightarrow \underbrace{(\beta-\alpha)}_{1}\underbrace{(\beta+\alpha)}_{3}=3 \Rightarrow \alpha=1, \quad \beta=2 \Rightarrow$

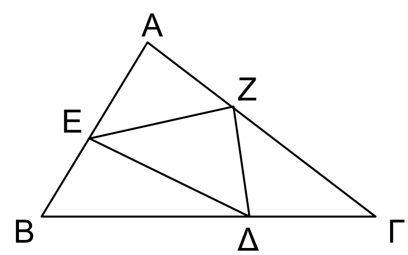
$(\lambda-10)^2-3=1 \Rightarrow (\lambda-10)^2=4 \Rightarrow \lambda=12 \;\; \eta' \; \lambda=8$

Αν λ = 8 $\Rightarrow$ (1) : $6\chi^2 - 10\chi + 4 = 0 \Rightarrow \chi = 1$ ακέραια λύση.
Αν λ = 12 $\Rightarrow$ (1): $6\chi^2 - 2\chi = 0 \Rightarrow \chi = 0$ ακέραια λύση .

(β) $f(\chi)=\chi^4-4\chi^3+(3+\lambda)\chi^2-12\chi+12=(\chi^2+3)(\chi-2)+\chi^2(\lambda-4)$

Αν $\lambda < 4$ ή $\lambda - 4 < 0$ τότε υπάρχει πραγματικό χ ώστε $f(\chi) < 0$, για παράδειγμα $f(2) = 4(\lambda - 4)$.
Έστω τώρα $\lambda \geq 4$. Τότε $\lambda - 4 \geq 0$ και εφόσον $\chi^2 + 3 \geq 0$, $(\chi - 2)^2 \geq 0$ και $\chi^2 \geq 0 \Rightarrow f(\chi) \geq 0$.
Άρα $f(\chi) \geq$ μόνον αν $\lambda \geq 4$.

ΘΕΜΑ 5.



$$\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}}=\frac{\text{ΒΓ}-\text{ΔΓ}}{\text{ΒΓ}}=1-\frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΒΓ}}=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{ΕΑ}}{\text{ΒΑ}}=\frac{\text{ΒΑ}-\text{ΒΕ}}{\text{ΒΑ}}=1-\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΒΑ}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΓΑ}}=\frac{\text{ΓΑ}-\text{ΖΑ}}{\text{ΓΑ}}=1-\frac{\text{ΖΑ}}{\text{ΓΑ}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{(\text{ΑΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{\frac{1}{2}(\text{ΑΕ})(\text{ΑΖ})\eta\mu\text{Α}}{\frac{1}{2}(\text{ΑΒ})(\text{ΑΓ})\eta\mu\text{Α}}=\frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}}\cdot\frac{\text{ΑΖ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \quad (i)$$

$$\frac{(\text{ΓΖΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{(\text{ΓΖ})(\text{ΓΔ})}{(\text{ΓΑ})(\text{ΓΒ})}=\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΓΑ}}\cdot\frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΓΒ}}=\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{7}=\frac{4}{21} \quad (ii)$$

$$\frac{(\text{ΔΕΒ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{(\text{ΒΔ})(\text{ΒΕ})}{(\text{ΒΓ})(\text{ΒΑ})}=\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ}}\cdot\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΒΑ}}=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{14} \quad (iii)$$

Προσθέτω τις (i) , (ii) και (iii): $\dfrac{(\text{ΑΕΖ})+(\text{ΓΖΔ})+(\text{ΔΕΒ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{21}+\dfrac{5}{14}=\dfrac{5}{7} \Rightarrow$

$$\frac{(\text{ΑΒΓ})-(\text{ΔΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{5}{7} \Rightarrow 1-\frac{(\text{ΔΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=\frac{5}{7} \Rightarrow \frac{(\text{ΔΕΖ})}{(\text{ΑΒΓ})}=1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7} \Rightarrow (\text{ΔΕΖ})=\frac{2}{7}(\text{ΑΒΓ}) \Rightarrow$$

$$(\text{ΔΕΖ})=\frac{2}{7}\cdot 7=2 \;\; cm^2$$

5η Βαλκανιάδα Νέων κάτω των 15 ½
JBMO (Junior Balkan Mathematical Olympiad)
17-22 Ιουνίου, 2001, Λευκωσία, Κύπρος

Ημερομηνία διαγωνισμού : Πέμπτη, 19 Ιουνίου, 15.00-19.30

Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Θεόκλητος Παραγιού

<u>Να λυθούν όλα τα προβλήματα</u>

1. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι a, b, c ώστε να ισχύει:* $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

2. *Θεωρούμε τρίγωνο ABC με* $\widehat{ACB} = 90°$ *και* $AC \neq BC$. *Παίρνουμε τα σημεία L και H της πλευράς AB ώστε* $\widehat{ACL} = \widehat{LCB}$ *και με CH κάθετο ευθύγραμμο τμήμα πάνω στην AB.*
   α) Για κάθε σημείο X (διαφορετικό από το C) της ευθείας CL να αποδείξετε ότι $\widehat{XAC} \neq \widehat{XBC}$.
   β) Για κάθε σημείο Y (διαφορετικό από το C) της ευθείας CH να αποδείξετε ότι $\widehat{YAC} \neq \widehat{YBC}$.

3. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABC. Έστω D, E τυχαία σημεία των πλευρών AB και AC αντίστοιχα. Αν DF, EG* ($F \in AE$, $G \in AD$) *είναι εσωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ADE, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων DEF και DEG είναι μικρότερο ή ίσο από εμβαδόν του τριγώνου ABC. Επίσης να εξηγήσετε σε ποια περίπτωση ισχύει η ισότητα.*

4. *Δίνεται κυρτό πολύγωνο με 1415 πλευρές το οποίο έχει περίμετρο ίση με 2001cm. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τρεις κορυφές αυτού του πολυγώνου, που σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν μικρότερο από 1cm².*

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>Άσκηση 1.</u>

Αν υποθέσουμε ότι $a \le b \le c$ θα αποδείξουμε ότι έχουμε μια μοναδική λύση την $a = 1$ και $b = c = 10$.

Εστω $n \in N$. Αν $n = 3k$, $k \in N$ τότε $n^3 = 9\lambda$ και αν $n = 3k \pm 1$ τότε $n^3 = 9\lambda \pm 1$.(1)

Παρατηρούμε ότι $2001 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 9)$. Επειδή $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$ για να ισχύει $a^3 + b^3 + c^3 = 2001 \equiv 3(\mathrm{mod}\, 9)$ η μοναδική περίπτωση απο την (1) είναι:

$\alpha^3 \equiv b^3 \equiv c^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 9)$ και άρα $a \equiv b \equiv c \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$, δηλαδή $a = 3m + 1$, $b = 3n + 1$, $c = 3p + 1$ και επομένως έχουμε:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 27\left(m^3 + n^3 + p^3\right) + 27\left(m^2 + n^2 + p^2\right) + 9\left(m + n + p\right) + 3 = 2001$$

Άρα $\left(3m^3 + 3m^2 + m\right) + \left(3n^3 + 3n^2 + n\right) + \left(3p^3 + 3p^2 + p\right) = 222$ με $m, n, p \ge 0$.

Παρατηρούμε ότι: $3\cdot 4^3+3\cdot 4^2+4=244\rangle 222$, άρα $m,n,p\le 3$.

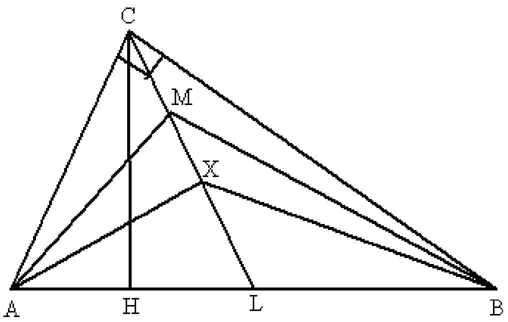
Αν $m=0\Rightarrow 3m^3+3m^2+m=0$. Αν $m=1\Rightarrow 3m^3+3m^2+m=7$

Αν $m=2\Rightarrow 3m^3+3m^2+m=48$ Αν $m=3\Rightarrow 3m^3+3m^2+m=111$

Για να πάρουμε άθροισμα 222 πρέπει $m=0$ και $n=p=3$ και επομένως τελικά θα έχουμε $a=1$ και $b=c=10$.

Άσκηση 2.

(α) Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής».

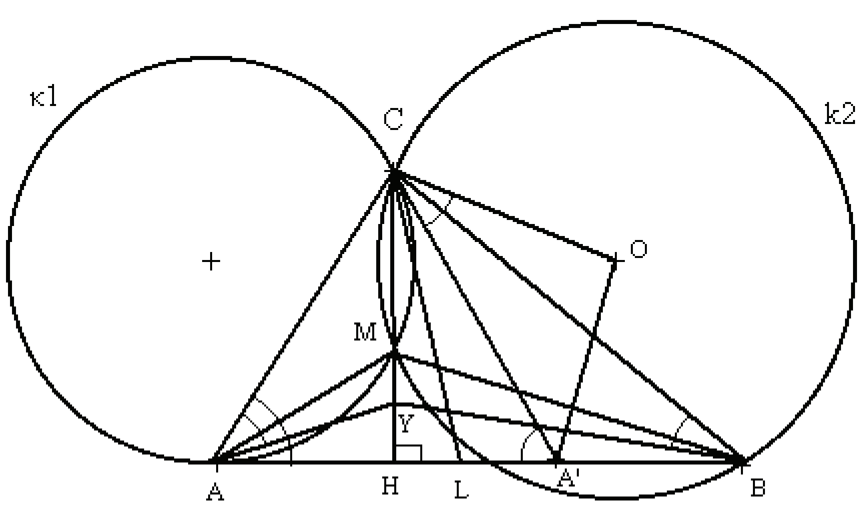


Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σημείο M πάνω στην CL για το οποίο ισχύει $\widehat{MAC}=\widehat{MBC}$.

Επειδή η CL είναι διχοτόμος της $\widehat{ACB}$ έχουμε ότι: $\widehat{ACM}=\widehat{MCB}$ και επομένως $\widehat{AMC}=\widehat{CMB}$.

Τα τρίγωνα AMC και BMC είναι ίσα, άρα, AC=BC, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση AC≠BC, επομένως δεν υπάρχει κανένα σημείο M της CL για το οποίο ισχύει $\widehat{MAC}=\widehat{MBC}$. Δηλαδή για κάθε σημείο X της CL ισχύει: $\widehat{XAC}\neq\widehat{XBC}$.

(β) Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σημείο M πάνω στην CH για το οποίο ισχύει $\widehat{MAC}=\widehat{MBC}$. Τότε ο περιγεγραμμένος κύκλος (k_1) του AMC είναι ίσος με τον περιγεγραμμένο κύκλο (k_2) του BMC.



Αν το σημείο A΄ είναι συμμετρικό ώς προς το H τότε το Άρα βρίσκεται πάνω στον κύκλο (k2) και πάνω στην AB.

Έστω O το κέντρο του (k2).Αφού $\widehat{AA'C} = \widehat{A'AC} = \widehat{BAC}$ έχουμε ότι:

$\widehat{COA'} = 2\widehat{BAC} = 2\widehat{AA'C}$ (επειδή το A΄ βρίσκεται πάνω στον κύκλο (k2) και είναι επίκεντρη – εγγεγραμμένη στο ίδιο τόξο CA΄.)

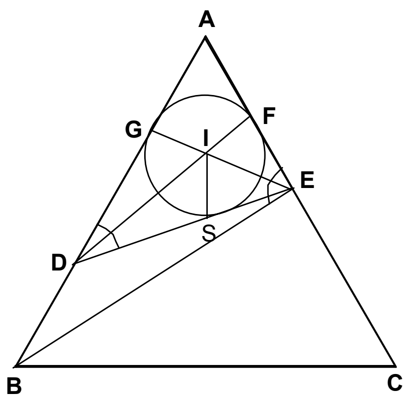
Το τρίγωνο COA΄ είναι ισοσκελές άρα έχουμε:

$$2\widehat{OCA'} = 180^{\circ} - \widehat{COA'} \Rightarrow \widehat{OCA'} = 90^{\circ} - \frac{\widehat{COA'}}{2} \Rightarrow \widehat{OCA'} = 90^{\circ} - \widehat{CBA}$$

Άρα από την τελευταία σχέση και από το ορθογώνιο τρίγωνο ABC έχουμε: $\widehat{OCA'} = \widehat{CAB}$.

Όμως $\widehat{ACH} = \widehat{ABC}$ (πλευρές κάθετες) και $\widehat{ACH} = \widehat{A'CH}$ (το τρίγωνο ACA΄ ισοσκελές) επομένως $\widehat{HCA'} = \widehat{ABC}$ και έχουμε: $\widehat{HCO} = \widehat{HCA'} + \widehat{A'CO} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 90^{\circ}$, άρα $CH \perp CO$ δηλαδή CH εφαπτομένη του κύκλου (k2) .Αυτό είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει τέτοιο σημείο M ≠C με $\widehat{MAC} = \widehat{MBC}$ πάνω στην εφαπτόμενη του κύκλου (k2).

Άσκηση 3.



Έχουμε :

$$\widehat{AGI} = \widehat{ADE} + \widehat{GED}$$

$$= \widehat{ADE} + \frac{180^{o} - \widehat{A} - \widehat{ADE}}{2} = 60^{o} + \frac{\widehat{ADE}}{2}$$

και από το τρίγωνο ADF έχουμε:

$$\widehat{IFE} = \widehat{A} + \widehat{ADF} = 60^{o} + \frac{\widehat{ADE}}{2}.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{AGI} = \widehat{IFE}$.(1)

Παίρνουμε ένα σημείο S πάνω στην DE τέτοιο ώστε $\widehat{GID} = \widehat{DIS}$.

Τα τρίγωνα DGI και DIS είναι ίσα γιατί DI=DI και $\widehat{GDI} = \widehat{IDS}$. Άρα έχουμε ότι : DG =DS (2)

Τα τρίγωνα IFE και ISE είναι ίσα γιατί: IE=IE, $\widehat{IEF} = \widehat{IES}$ και $\widehat{ISE} = \widehat{AGE} = \widehat{IFE}$ από την (1).

Άρα έχουμε ότι : EF =ES (3)

Απο τις (2) και (3) έχουμε: DG +EF =DE (4).

Αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ADE τότε έχουμε:

$$\frac{1}{2}\rho \cdot DG + \frac{1}{2}\rho \cdot EF = \frac{1}{2}\rho \cdot DE \Rightarrow E_{IDG} + E_{IEF} = E_{IDE} \text{ . Άρα } E_{DEF} + E_{DEG} = 3E_{IDE} \ (5)$$

Αν το M είναι σημείο που ανήκει στο τόξο με χορδή την BC , τότε το εμβαδόν του τριγώνου MBC μεγιστοποιείται όταν το M είναι μέσον του τόξου. Αρα έχουμε:

$E_{IDE} \le E_{DME}$ όπου M είναι το μέσον του τόξου $\widehat{BC} = 120^o$.

Έχουμε επίσης ότι: $DE \le BE \le BC$ (γιατί $\widehat{BDE} \ge 60^o \ge \widehat{ABE}$ και $\widehat{BEC} \ge 60^o$)

Άρα έχουμε: $E_{IDE} \le E_{OBC}$ όπου O είναι το κέντρο του τριγώνου ABC.

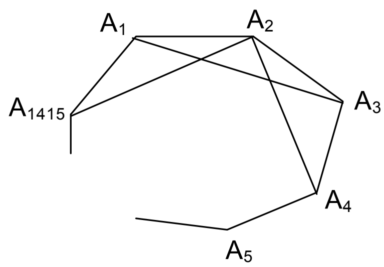
Τελικά από την (5) έχουμε:

$$E_{IDE} \le E_{OBC}$$

$$E_{DEF} + E_{DEG} = 3E_{IDE} \le 3E_{OBC} = E_{ABC}$$

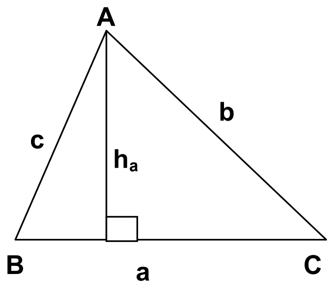
Η ισότητα ισχύει όταν το D ταυτιστεί με το B και το F ταυτιστεί με το C.

<u>Άσκηση 4.</u>



Έστω $A_1 A_2 A_3 \dots A_{1415}$ το δεδομένο πολύγωνο. Στο πολύγωνο υπάρχουν 1415 τρίγωνα που ορίζονται από τρεις διαδοχικές κορυφές: $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$,…., $A_{1414}A_{1415}A_1$, $A_{1415}A_1A_2$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής». Υποθέτουμε ότι κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα έχει ***εμβαδόν*** $E \ge 1$ (1).



Για κάθε τρίγωνο με πλευρές a και b έχουμε: $2E = a \cdot h_a \le a \cdot b$ (2) επειδή $h_a \le b$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) για κάθε ένα από τα παραπάνω τρίγωνα ισχύουν: $A_1A_2 \cdot A_2A_3 \ge 2$,

$A_2A_3 \cdot A_3A_4 \ge 2$, …, $A_{1415}A_1 \cdot A_1A_2 \ge 2$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα για τον αριθμητικό και γεωμετρικό μέσο $\left(\alpha + b \ge 2\sqrt{\alpha b}\right)$, στις παραπάνω ανισότητες έχουμε:

$A_1A_2 + A_2A_3 \ge 2\sqrt{2}$, $A_2A_3 + A_3A_4 \ge 2\sqrt{2}$,…, $A_{1415}A_1 + A_1A_2 \ge 2\sqrt{2}$.

Αν Π η περίμετρος του πολυγώνου, προσθέτοντας τις τελευταίες ανισότητες έχουμε:

$2\Pi \ge 1415 \cdot 2\sqrt{2} \Rightarrow \Pi \ge 1415\sqrt{2}$ αλλά $\sqrt{2} \approx 1.4142$ έτσι έχουμε:

$\Pi \ge 2001,093 \Rightarrow \Pi > 2001$. Το τελευταίο είναι άτοπο από την υπόθεση, άρα υπάρχουν κάποια από τα τρίγωνα που έχουν εμβαδόν E<1 .

18η (ΒΜΟ) ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Βελιγράδι, Γιουγκοσλαβία, 3 – 9 Μαΐου 2001

ΧΡΟΝΟΣ: 4 ½ ώρες Μάιος 2001

Επιμέλεια: Ευθύβουλος Λιασίδης – Θεόκλητος Παραγιού

- Να απαντηθούν όλα τα θέματα

Πρόβλημα 1.

Έστω n ένας θετικός ακέραιος .Ν' αποδειχτεί ότι αν a και b είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1 τέτοιοι ώστε $2^n - 1 = ab$, τότε ο αριθμός $ab - (a-b) - 1$ είναι της μορφής $k \cdot 2^{2m}$, όπου k είναι περιττός και m είναι ένας θετικός ακέραιος.

(Κύπρος)

Πρόβλημα 2.

Ν' αποδειχτεί ότι αν ένα κυρτό πεντάγωνο ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:
(α) όλες οι εσωτερικές γωνίες του είναι ίσες , και (α) τα μήκη όλων των πλευρών του είναι ρητοί αριθμοί τότε αυτό είναι ένα κανονικό πεντάγωνο.

(Μολδαβία)

Πρόβλημα 3.

Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a + b + c \geq abc$.
Ν' αποδειχτεί ότι $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

(Ρουμανία)

Πρόβλημα 4.

Ένας κύβος διαστάσεων 3 x 3 x 3 υποδιαιρείται σε 27 ίσα μοναδιαία κυβικά κύτταρα. Ένα απ' αυτά τα κύτταρα είναι κενό και τα υπόλοιπα γεμίζονται με μοναδιαίους κύβους που μαρκάρονται με τους αριθμούς 1, 2 ,…….,26 κατ' αυθαίρετο τρόπο. Μια *αποδεκτή κίνηση* είναι μια μετακίνηση ενός μοναδιαίου κύβου σ' ένα διπλανό κενό κύτταρο. Υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία αποδεκτών κινήσεων μετά από την οποία ο μοναδιαίος κύβος μαρκαρισμένος με τον αριθμό k και ο μοναδιαίος κύβος μαρκαρισμένος με τον $27 - k$ ανταλλάσσουν θέσεις για κάθε $k = 1,2,.......,13$; (Δύο κύτταρα θεωρούνται διπλανά αν έχουν κοινή έδρα).

(Βουλγαρία)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1.

Λύση 1η: Ο αριθμός γράφεται ab-a+b-1 =(a+1)(b-1) , άρα αρκεί να βρούμε την μορφή των αριθμών a+1 και b-1.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: Αν n=2s, (άρτιος) s∈N έχουμε: $2^n - 1 = 2^{2s} - 1 = \left(2^s - 1\right) \cdot \left(2^s + 1\right) = a \cdot b$ και άρα μπορούμε να θέσουμε

$a = 2^s - 1$, $b = 2^s + 1$ και θα έχουμε $a + 1 = 1 \cdot 2^s$, $b - 1 = 1 \cdot 2^s$,άρα
(a+1)(b-1)=$1 \cdot 2^{2s}$, m=s και k=1.

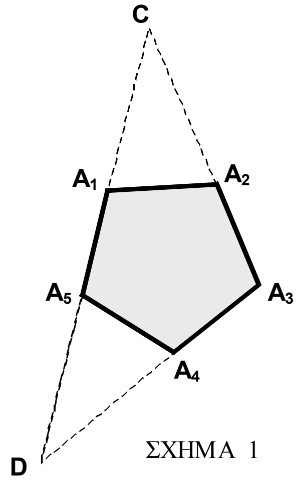
Περίπτωση 2η: Αν n=(2t+1)(2r+1) t ,r∈N (περιττός σύνθετος)
έχουμε: $a \cdot b = \left(2^{2t+1}\right)^{2r+1} - 1 = \left(2^{2t+1} - 1\right)\left[\left(2^{2t+1}\right)^{2r} + \left(2^{2t+1}\right)^{2r-1} + ... + \left(2^{2t+1}\right) + 1\right]$ και άρα έχουμε:

$a = 2^{2t+1} - 1$ και επομένως $a + 1 = 2^{2t+1}$ και $b = \left[\left(2^{2t+1}\right)^{2r} + \left(2^{2t+1}\right)^{2r-1} + ... + \left(2^{2t+1}\right) + 1\right]$ άρα
$b - 1 = 2^{2t+1} \cdot (2z+1)$, z∈N και άρα $b =$(a+1)(b-1)=$\left(2z+1\right) \cdot 2^{2(2t+1)}$, με k=2z+1 και m=2t+1.

Περίπτωση 3η: Αν n = p όπου p περιττός πρώτος.
Επειδή 2^n-1 είναι περιττός έπεται ότι a, b είναι περιττοί, και έστω ότι είναι: a=2L-1 και b =2U+1. Οι αριθμοί L και U δεν μπορεί να είναι της μορφής $L=2^{d-1}$, και $U=2^{f-1}$, γιατί (ι)Αν $L=2^{d-1}$ τότε a=2^d-1 και επειδή $a / 2^n-1$ πρέπει n=πολλ/σιο του d, άτοπο γιατί n πρώτος.
(ιι) Αν $U=2^{f-1}$ τότε b=2^f+1 και επειδή $b / 2^n-1$ πρέπει n =άρτιο πολλ/σιο του f, άτοπο γιατί n πρώτος. Άρα έχουμε ότι οι αριθμοί L και U είναι της μορφής: $L=2^{d-1}\cdot(2h+1)$ και $U=2^{f-1}\cdot(2v+1)$ και επομένως $a+1=2^d(2h+1)$ και $b-1=2^f(2v+1)$. Τώρα αρκεί να δείξουμε ότι d =f.
Έχουμε: $2^n-1=a\cdot b=\left[2^d(2h+1)-1\right]\cdot\left[2^f(2v+1)+1\right]$ ή
$2^n=2^{d+f}(2h+1)(2v+1)+2^d(2h+1)-2^f(2v+1)$,αν d >f διαιρώντας με 2^d την τελευταία σχέση έχουμε άρτιος ίσος με περιττό , άτοπο .Όμοια αν d <f διαιρώντας με 2^f καταλήγουμε σε άτοπο , επομένως d=f και άρα
(a+1)(b-1)=$2^{2d}(2h+1)(2v+1)$, m=d και k=(2h+1)(2v+1).

Λύση 2η : Ονομάζουμε $\deg_2 x$ τον μεγαλύτερο $k\in N$ τέτοιο ώστε ο 2^k να διαιρεί τον x . Τότε αν $T=ab-(a-b)-1$ έχουμε:
$\deg_2 T=\deg_2\left((a+1)\cdot(b-1)\right)=\deg_2\left((a+1)\cdot(b-1)\cdot a\right)$, αφού a είναι περιττός (επειδή $2^n-1=ab$). Άρα έχουμε:
$\deg_2 T=\deg_2\left((a+1)\cdot(ab-a)\right)=\deg_2\left((a+1)\cdot(2^n-1-a)\right)=\deg_2\left((a+1)\cdot(2^n-(a+1))\right)=$
$\deg_2\left(c(2^n-c)\right)$ όπου c = a+1 άρτιος και $c<2^n$.Έστω $\deg_2 c=k$
(δηλ. 2^k /c).Τότε $\deg_2\left(2^n-c\right)=k$ και $\deg_2 T=\deg_2 c+\deg_2\left(2^n-c\right)=2k$ δηλαδή 2^{2k} / T ή $T=\rho\cdot 2^{2k}$ όπου ρ περιττός και k θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 2.
Λύση : Έστω ότι το πεντάγωνο $A_1A_2A_3A_4A_5$ έχει τις δεδομένες ιδιότητες .Τότε οι εσωτερικές του γωνίες ισούνται με 108^o .
Έστω ότι η A_1A_5 τέμνει τις A_2A_3 και A_3A_4 στα σημεία C και D αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα 1.Τα τρίγωνα A_1CA_2 , A_4DA_5 και CA_3D είναι ισοσκελή. Επομένως έχουμε $CA_3=A_3D$ και $2CA_2\sigma\upsilon\nu72^o=A_1A_2$, $2DA_4\sigma\upsilon\nu72^o=A_4A_5$.
Επειδή $CA_2+A_2A_3=A_3A_4+A_4D$ έχουμε:
$2\sigma\upsilon\nu72^o\left(A_2A_3-A_3A_4\right)=A_4A_5-A_1A_2$.



ΣΧΗΜΑ 1

Αν $A_2A_3\neq A_3A_4$ αυτό σημαίνει ότι το $\sigma\upsilon\nu72^o$ είναι ένας ρητός αριθμός , το οποίο είναι άτοπο. (Πράγματι ,
$4\sigma\upsilon\nu72^o\sigma\upsilon\nu36^o=4\eta\mu18^o\left(1-2\eta\mu^2 18^o\right)=1$, άρα ο αριθμός $\alpha=\eta\mu18^o=\sigma\upsilon\nu72^o$ είναι λύση της εξίσωσης $4x\left(1-2x^2\right)=1\Leftrightarrow(2x-1)\left(4x^2+2x-1\right)=0$. Όμως $\alpha\neq\frac{1}{2}$ επομένως ο αριθμός α είναι άρρητος).

Άρα έχουμε $A_2A_3 = A_3A_4$ και $A_1A_2 = A_4A_5$. Ανάλογα μπορούμε να αποδείξουμε ότι όλες οι πλευρές του πενταγώνου είναι ίσες. Επομένως το πεντάγωνο είναι κανονικό.

Πρόβλημα 3.

Λύση 1η:

$\alpha \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ Από την υπόθεση $\alpha + b + c \geq abc$. Αν $A = a^2 + b^2 + c^2$ και $B = abc\sqrt{3}$ έχουμε:

$$B^2 = 3a^2b^2c^2 \leq 3\alpha bc(\alpha + b + c) \leq 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 (a+b+c) \leq$$

$$\frac{1}{9}(a+b+c)^4 = \frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)^2 \leq \frac{1}{9}\left[3\left(a^2+b^2+c^2\right)\right]^2 \leq$$

$$\leq \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 = A^2$$

Λύση 2η:

Από την υπόθεση $\alpha + b + c \geq abc \Leftrightarrow \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \geq 1 \quad (1).$

Ισχύει: $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} \geq 2\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}\right)$ και από την (1) έχουμε:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 1 \Leftrightarrow (bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2 \geq (abc)^2 \Leftrightarrow$$

$$(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) \geq (abc)^2 \Leftrightarrow$$

$$(ab+bc+ca)^2 \geq abc\left[2abc(a+b+c) + abc\right] \geq 3(abc)^2$$ (επειδή ισχύει $\alpha + b + c \geq abc$)

Άρα έχουμε: $bc + ac + ab \geq \sqrt{3}abc$ ισχύει η ανισότητα $a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ac + ab$ και τελικά $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4.

Χρωματίζουμε τα κύτταρα με μαύρο και άσπρο χρώμα έτσι ώστε διαδοχικά κύτταρα να έχουν διαφορετικό χρώμα. Αριθμούμε τα κύτταρα 1,2,3,……..,27 με τέτοιο τρόπο ώστε διαδοχικοί αριθμοί να αντιστοιχούν σε διπλανά κύτταρα.
Μια τέτοια αρίθμηση μπορεί να γίνει ως εξής:
Χωρίζεται ο κύβος σε τρία επίπεδα με 9 κύτταρα σε κάθε επίπεδο.
Αν [I] το πάνω επίπεδο η διάταξη είναι από το 1-9 και η αρίθμηση γίνεται για την πρώτη γραμμή από αριστερά προς τα δεξιά, για την δεύτερη γραμμή από δεξιά προς τα αριστερά και για την τρίτη γραμμή από αριστερά προς τα δεξιά.

1	2	3
6	5	4
7	8	9

[I]

18	17	16
13	14	15
12	11	10

[II]

19	20	21
24	23	22
25	26	27

[III]

Το μεσαίο επίπεδο [ΙΙ] 10 – 18 όπου το κύτταρο 10 είναι κάτω από το κύτταρο 9 , και διατάσσονται τα κύτταρα όπως στο προηγούμενο επίπεδο.
Το κάτω επίπεδο [ΙΙΙ] 19- 27 , διατάσσονται τα κύτταρα ομοίως με το προηγούμενο επίπεδο με το κύτταρο 19 κάτω από το κύτταρο 18.

Ορισμός

Καλούμε το ζευγάρι των κύβων $\{m,n\}$ αντιστρέψιμο αν ο κύβος με τον μεγαλύτερο αριθμό είναι μέσα στο κύτταρο με τον μικρότερο αριθμό.

Δηλώνουμε με $I(\kappa)$ τον συνολικό αριθμό των *αντιστρέψιμων* μη διατεταγμένων ζευγαριών των κύβων μετά από $\kappa > 0$ κινήσεις.
Με μία κίνηση ένας κύβος τοποθετείται μέσα σε κύτταρο με διαφορετικό χρώμα .Στην αρχική τοποθέτηση ο κύβος που είναι στο κελί k και στο κελί 27-k είναι σε διαφορετικό χρώμα και επομένως για να ανταλλάξουν θέση χρειάζεται άρτιος αριθμός κινήσεων .Κάθε κίνηση μετατρέπει το I(.) από άρτιο σε περιττό ή από περιττό σε άρτιο δηλαδή οι κινήσεις διατηρούν το I(.) σε άρτιο ή περιττό. Υποθέτουμε ότι έχουμε αναδιατάξει τους κύβους (όπως χρειάζεται) σε z κινήσεις.26 κύβοι σχηματίζουν $\binom{26}{2} = 25 \cdot 13 = 325$ μη διατεταγμένα ζευγάρια.

Ένα ζευγάρι κύβων σε δύο κύτταρα είναι *αντιστρέψιμο* στην τελική διάταξη αν και μόνο αν το ζευγάρι των κύβων μέσα στα ίδια αυτά κύτταρα *δεν* είναι *αντιστρέψιμο* στην αρχική διάταξη.
(για *παράδειγμα* έστω ότι στην αρχική διάταξη έχουμε :
τον κύβο με αριθμό 4 να είναι στο κελί με αριθμό 7 και
τον κύβο με αριθμό 23 να είναι στο κελί με αριθμό 15
Το ζευγάρι των κύβων $\{4,23\}$ *δεν* είναι *αντιστρέψιμο* σύμφωνα με τον ορισμό που έχουμε δώσει. Όμως στην τελική διάταξη θα έχουμε:
τον κύβο με αριθμό 23 να είναι στο κελί με αριθμό 7 και
τον κύβο με αριθμό 4 να είναι στο κελί με αριθμό 15.
Άρα το ζευγάρι των κύβων $\{4,23\}$ είναι *αντιστρέψιμο δηλαδή* $\{4,23\} \equiv \{23,4\}$)
Έστω I(0) ο αριθμός των αντιστρέψιμων ζευγαριών στην αρχική διάταξη
και $I(z)$ ο αριθμός αντιστρέψιμων ζευγαριών όταν γίνει η ζητούμενη αναδιάταξη. Οι $I(0)$ και $I(z)$ είναι και οι δύο άρτιοι ή περιττοί.
Επειδή πρέπει να ισχύει $I(z) + I(0) = 325$ (γιατί τα αντιστρέψιμα μετατρέπονται σε μη αντιστρέψιμα και αντίστροφα) και αυτό άτοπο, είναι αδύνατη επομένως η αναδιάταξη των κύβων με αυτό τον τρόπο.

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ
(Λ.Ε.Μ.)

<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Σ 1,4,5</u> **ΙΟΥΝΙΟΣ 2001**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ/ ΧΡΟΝΟΣ 2 ώρες και 30 λεπτά

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να απαντήσετε σε 12 μόνο από τις 15 ερωτήσεις.. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $2\eta\mu 3\chi = \sqrt{3}$.

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $\psi = 3\chi^2 - 4\chi + 2$.

3. Έμπορος πώλησε ένα εμπόρευμα με κέρδος 15% επί της αξίας του και εισέπραξε £920. Ποια ήταν η αξία του εμπορεύματος;

4. Πόσο τόκο δίνει κεφάλαιο £640 τοκιζόμενο προς 6,25% με απλό τόκο για 3 χρόνια;

5. Να βρείτε τις τιμές των
i) Δ_3^5 (οι διατάξεις των 5 πραγμάτων ανά 3) και
ii) $\binom{5}{3}$ (οι συνδυασμοί των 5 πραγμάτων ανά 3).

6. Ο μέσος μισθός των 15 υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι £650. Αν ένας υπάλληλος με μισθό £850 αφυπηρέτησε και στη θέση του προσλήφθηκε νέος υπάλληλος με μισθό £400, ποιος ο νέος μέσος μισθός των 15 υπαλλήλων;

7. Κλειστό κυλινδρικό δοχείο έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας $E_{o\lambda} = 96\pi\ m^2$ και ύψος υ=8 cm. Να υπολογίσετε την ακτίνα R και τον όγκο V του δοχείου.

8. Κανονικό τριγωνικό πρίσμα έχει ύψος $\upsilon = 20\,cm$ και περίμετρο βάσης $\Pi_\beta = 15\ cm$. Να υπολογίσετε:
i) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος.
ii) τον όγκο του πρίσματος.

9. Μια τριμελής επιτροπή πρόκειται να επιλεγεί από ένα κατάλογο 4 αντρών και 3 γυναικών. Ποια η πιθανότητα να επιλεγούν:
i) όλο γυναίκες.
ii) δύο άντρες και μια γυναίκα
iii) τουλάχιστον ένας άντρας.

10. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ. Αν πάρω ένα από αυτούς στην τύχη ποια η πιθανότητα να αρχίζει και να τελειώνει με Ε;
(Οι απαντήσεις μπορούν να δοθούν σε παραγοντική μορφή).

11. Να βρείτε τις τιμές του χ για τις οποίες η εφαπτόμενη της καμπύλης με εξίσωση $\psi = 3\chi^4 - 6\chi^2 + 5$ έχει κλίση ίση με 0.

12. Η περίμετρος της βάσης κώνου είναι 12π cm και το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας είναι $60\pi\, cm^2$. Να βρείτε το ύψος και τον όγκο του κώνου.

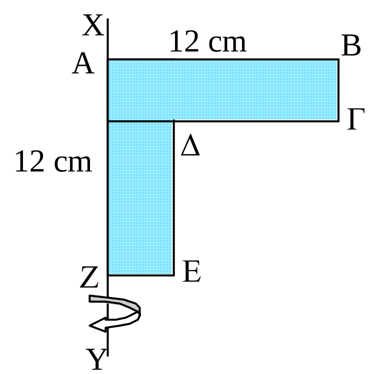
13. Η αξία των ημερήσιων πωλήσεων ενός καταστήματος σε μια βδομάδα φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο
Πώληση σε £	550	450	380	480	620	520

Να βρείτε τη μέση τιμή (αριθμητικό μέσο) και την τυπική απόκλιση των ημερήσιων πωλήσεων για τη βδομάδα αυτή με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

14. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης εφχ=3σφχ όταν $0° \le \chi \le 180°$.

15. Στο σκιασμένο μέρος του διπλανού σχήματος οι γωνιές Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ είναι ορθές και ΑΒ=ΑΖ=12 cm ΒΓ=ΖΕ=4cm. Το σχήμα ΑΒΓΔΕΖ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία ΑΖ. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που σχηματίζεται.



ΜΕΡΟΣ Β΄

Να απαντήσετε σε 4 μόνο από τις 6 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $4\eta\mu^2\chi - 12\sigma\upsilon\nu\chi + 3 = 0$. Ακολούθως να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης αυτής για τις οποίες είναι $-180° \le \chi \le +180°$.

2. Η συνάρτηση $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi$ έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο Α με συντεταγμένες (4,-4). Να βρείτε τις τιμές των α και β και να προσδιορίσετε το είδος του ακρότατου.

3. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας η βάση είναι τετράγωνο πλευράς α cm και το παράπλευρο ύψος της h συνδέεται με το α με τη σχέση 13α =10h. Αν επιπλέον, το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας είναι $E_{\pi\alpha\rho} = 260\ cm^2$ να βρείτε:

i) Την πλευρά α της βάσης, το παράπλευρο ύψος h και το ύψος υ της πυραμίδας.
ii) Τον όγκο V και το εμβαδόν $E_{o\lambda}$ της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

4. Κάποιος τόκισε £20000 προς 6% με ανατοκισμό για 2 χρόνια. Πόσα περισσότερα θα εισέπραττε σε τόκους αν τόκιζε το ποσό αυτό με απλό τόκο προς 7% για το ίδιο χρονικό διάστημα.

5. Πόσους διαφορετικούς πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 3 ή 4; Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα από αυτούς να υπολογίσετε την πιθανότητα να αρχίζει και να τελειώνει σε 4.

6. Σε μια έρευνα μεταξύ των υποψηφίων των εισαγωγικών εξετάσεων ρωτήθηκαν 125 υποψήφιοι πόσα μαθήματα δήλωσαν για τις εισαγωγικές εξετάσεις. Τα αποτελέσματα δίνονται στο διπλανό πίνακα.

i) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων των αποτελεσμάτων.

ii) Να βρείτε πόσα μαθήματα δήλωσε κατά μέσο όρο καθένας από τους τελειοφοίτους αυτούς.

iii) Να βρείτε το ποσοστό των τελειοφοίτων που δήλωσαν τουλάχιστον 6 μαθήματα.

Αρ. Μαθημάτων χ_i	Αρ. Τελειοφοίτων f_i
2	5
3	10
4	25
5	30
6	35
7	15
8	5

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α'

1. $2\eta\mu 3\chi = \sqrt{3} \Rightarrow \eta\mu 3\chi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \eta\mu 3\chi = \eta\mu 60° \Rightarrow$

(i) $3\chi = 360°\kappa + 60° \Rightarrow \boxed{\chi = 120°\kappa + 20°}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ ή

(ii) $3\chi = 360°\kappa + 180 - 60° \Rightarrow \boxed{\chi = 120°\kappa + 40°}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

2. $\psi = 3\chi^2 - 4\chi + 2 \Rightarrow \underline{\dfrac{d\psi}{d\chi} = 6\chi - 4}$

3. Έστω χ η αξία του εμπορεύματος $\dfrac{115}{100}\cdot\chi = 920 \Rightarrow \chi = \dfrac{920\cdot 100}{115} \Rightarrow \underline{\chi = £800}$

4. $T = \dfrac{\text{ΚΕΧ}}{100} = \dfrac{640\cdot 6,25\cdot 3}{100} = £120 \Rightarrow \underline{\text{Τ} = £120}$

5. (i) $\Delta_3^5 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5!}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$. (ii) $\dbinom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = \dfrac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$

6. $\bar{\chi} = 650 \Rightarrow 15\cdot 650 = 9750 \Rightarrow$ το σύνολο των μισθών των 15 υπαλλήλων είναι £9750

Το νέο σύνολο των μισθών είναι: 9750 – 850 + 400 = £9300 $\Rightarrow$

Ο νέος μέσος μισθός $\bar{\psi}$ είναι: $\bar{\psi} = \dfrac{9300}{15} = £620$

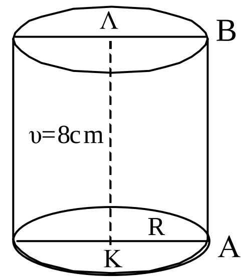
7. $E_{ολ} = 96\pi\ m^2$, $\upsilon = 8$cm, R=; , V = ;

$$E_{ολ} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 \Rightarrow \cancel{96}^{48}\cancel{\pi} = \cancel{2\pi}\cdot R\cdot 8 + \cancel{2\pi}\cdot R^2 \Rightarrow$$

$$R^2 + 8R - 48 = 0 \Rightarrow (R+12)(R-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = -12 \text{ απορρίπτεται} \quad \text{ή} \quad \boxed{R = 4\ m}$$

$$V = \pi R^2 \upsilon \Rightarrow V = \pi\cdot 4^2\cdot 8 \Rightarrow \boxed{V = 128\pi\ m^3}$$

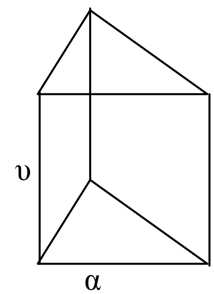


8. $\upsilon = 20\,cm$ $\Pi_\beta = 15\ cm \Rightarrow 3\cdot\alpha = 15 \Rightarrow \alpha = 5$ cm

$$\Rightarrow E_B = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow E_B = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow E_B = \frac{25\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

(i) $E_{παρ} = \Pi_B\cdot\upsilon \Rightarrow E_{παρ} = 15\cdot 20 \Rightarrow \boxed{E_{παρ} = 300\,cm^2}$

(ii) $V = E_B\cdot\upsilon \Rightarrow V = \dfrac{25\sqrt{3}}{\cancel{4}}\cdot\cancel{20}^{5} \Rightarrow \boxed{V = 125\sqrt{3}\ cm^3}$.



9. Α: Άνδρας , Γ: Γυναίκα 4Α, 3Γ, 3-μελής επιτροπή

i) $P(\text{όλο γυναίκες}) = \dfrac{1}{\binom{7}{3}} = \dfrac{1}{\frac{7!}{4!\cdot 3!}} = \dfrac{3!\cdot 4!}{7!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{7\cdot 6\cdot 5} = \dfrac{1}{35}$

ii) $P(2A\cap 1\Gamma) = \dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 3}{\frac{7!}{4!\cdot 3!}} = \dfrac{18}{35}$

iii) P(τουλάχιστον ένας άντρας) = 1 – P(κανένας Α) =1 – P(όλο Γ) = $1 - \dfrac{1}{35} = \dfrac{34}{35}$

10. Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ Πλήθος αναγραμματισμών: $M_9^{\varepsilon} = \dfrac{9!}{3!\cdot 2!} = 30240$

Να αρχίζει και να τελειώνει με Ε:

1	$\frac{7!}{2!}$	1
Γράμμα Ε		Γράμμα Ε

$= \dfrac{7!}{2!} = 2520$

$$P = \frac{\frac{7!}{2!}}{\frac{9!}{3\cdot 2!}} = \frac{7!\,3!\cdot\cancel{2!}}{9!\cdot\cancel{2!}} = \frac{1}{12}$$

11. $\psi = 3\chi^4 - 6\chi^2 + 5 \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = 12\chi^3 - 12\chi$

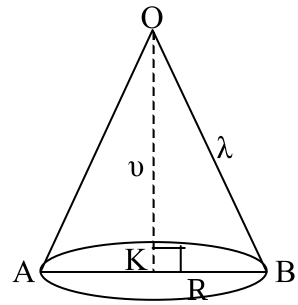
$$\left.\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\chi} &= 12\chi^3 - 12\chi \\ \frac{d\psi}{d\chi} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 12\chi^3 - 12\chi = 0 \Rightarrow 12\chi(\chi-1)(\chi+1) = 0 \Rightarrow \underline{\chi = 0 \text{ ή } \chi = 1 \text{ ή } \chi = -1}.$$

12. $\Gamma = 12\pi\ cm^2 \Rightarrow 2\pi \cdot R = 12\pi \Rightarrow \underline{R = 6\ cm}$.

$E_\kappa = 60\pi\ cm^2 \Rightarrow \pi \cdot R \cdot \lambda = 60 \cdot \pi \Rightarrow 6 \cdot \lambda = 60 \Rightarrow \underline{\lambda = 10\ cm}$.

$\upsilon^2 = \lambda^2 - R^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 64 \Rightarrow \underline{\upsilon = 8\ cm}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 \Rightarrow \underline{V = 96\pi\ cm^3}$$



13.

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο
Πώληση σε £	550	450	380	480	620	520

$$\overline{\chi} = \frac{550+450+380+480+620+520}{6} = \frac{3000}{6} = 500 \Rightarrow \boxed{\overline{\chi} = 500}$$

$$\sigma^2 = \frac{(550-500)^2 + (450-500)^2 + (380-500)^2 + (480-500)^2 + (620-500)^2 + (520-500)^2}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{34600}{6} = 5766,6 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5700,6} \Rightarrow \boxed{\sigma = 75,9}$$

14. εφχ=3σφχ , $0° \leq \chi \leq 180°$

$$\varepsilon\phi\chi = \frac{3}{\varepsilon\phi\chi} \Rightarrow \varepsilon\phi^2\chi = 3 \Rightarrow \varepsilon\phi\chi = \pm\sqrt{3}$$

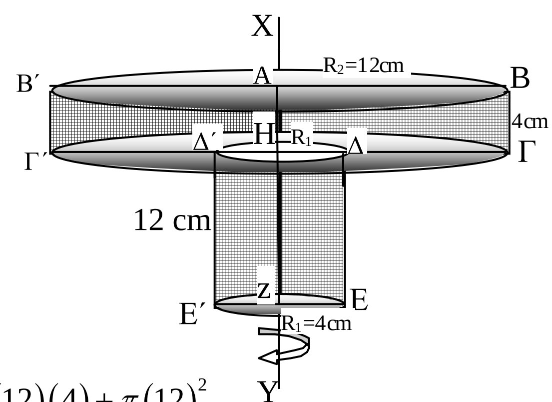
(i) $\varepsilon\phi\chi = +\sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi 60° \Rightarrow \chi = 180°\kappa + 60°,\ \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\chi = 60°}$ $(0° \leq \chi \leq 180°)$

(ii) $\varepsilon\phi\chi = -\sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi(-60°) \Rightarrow \chi = 180°\kappa - 60°,\ \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\chi = 120°}$

15. $V = V_{\kappa\upsilon\lambda 1} + V_{\kappa\upsilon\lambda 2}$, $V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi R^2 \upsilon$

$$V = \pi(\mathrm{Z}\mathrm{E})^2(\Delta\mathrm{E}) + \pi(\mathrm{AB})^2(\mathrm{B}\Gamma)$$

$$V = \pi(4)^2(8) + \pi(12)^2(4) = \boxed{V = 704\pi\ cm^3}$$



$$E_{o\lambda} = \pi(\mathrm{Z}\mathrm{E})^2 + 2\pi(\mathrm{Z}\mathrm{E})(\Delta\mathrm{E}) + \pi\left[(\mathrm{H}\Gamma)^2 - (\mathrm{H}\Delta)^2\right]$$
$$+ 2\pi(\mathrm{AB})(\mathrm{B}\Gamma) + \pi(\mathrm{AB})^2$$

$$E_{o\lambda} = \pi(4)^2 + 2\pi(4)(8) + \pi\left[(12)^2 - (4)^2\right] + 2\pi(12)(4) + \pi(12)^2$$

$$E_{o\lambda} = 16\pi + 64\pi + 128\pi + 96\pi + 144\pi \Rightarrow \boxed{E_{o\lambda} = 448\pi\ cm^2}$$

ΜΕΡΟΣ Β’

Να απαντήσετε σε 4 μόνο από τις 6 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. $4\eta\mu^2\chi - 12\sigma\upsilon\nu\chi + 3 = 0 \Rightarrow 4\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\chi\right) - 12\sigma\upsilon\nu\chi + 3 = 0 \Rightarrow \; 4 - 4\sigma\upsilon\nu^2\chi - 12\sigma\upsilon\nu\chi + 3 = 0$

$$\Rightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2\chi + 12\sigma\upsilon\nu\chi - 7 = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{-12 \pm \sqrt{144+112}}{8} = \frac{-12 \pm 16}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{7}{2} \end{array} \right.$$

(i) $\sigma\upsilon\nu\chi = -\dfrac{7}{2}$ απορρίπτεται

(ii) $\sigma\upsilon\nu\chi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \chi = 360°\kappa \pm 60°$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ $\quad -180° \le \chi \le +180° \Rightarrow$ $\chi = 60°$, $\quad \chi = -60°$

2. $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi$, $\quad A(4.-4)$

$A(4,-4) \Rightarrow \chi = 4,\ \psi = -4 \Rightarrow -4 = a\cdot 4^2 + \beta\cdot 4 \Rightarrow 4\alpha + \beta = -1 \quad (1)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\psi}{d\chi} = 2\alpha\chi + \beta \\ \Gamma\iota\alpha \quad \chi = 4 \;\Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 2\alpha\cdot 4 + \beta \Rightarrow 8\alpha + \beta = 0 \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4\alpha + \beta = -1 \\ 8\alpha + \beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = -2 \;\Rightarrow\; \psi = \frac{1}{4}\chi^2 - 2\chi \;\Rightarrow\; \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{1}{2}\chi - 2$$

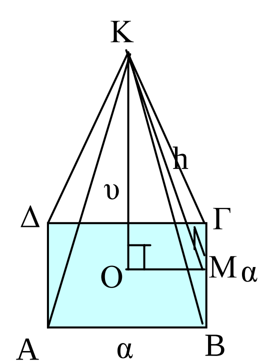
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{1}{2}\chi - 2 \\ \dfrac{d\psi}{d\chi} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\chi - 2 = 0 \Rightarrow \chi = 4$$

χ	$-\infty$	4	$-\infty$
$\dfrac{d\psi}{d\chi}$	$-$	0	$+$
ψ	$\searrow$	-4	$\nearrow$
		min(4,-4)	

3. $E_{\pi\alpha\rho} = 260\ cm^2$, $13\alpha = 10h$.

$$E_{\pi\alpha\rho} = \frac{1}{2}\cdot\Pi_\beta\cdot h \;\Rightarrow\; 260 = \frac{1}{2}\cdot 4\alpha\cdot\frac{13\alpha}{10} \;\Rightarrow\; 2600 = 26\alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 100 \;\Rightarrow\; \underline{\alpha = 10\,cm} \;\Rightarrow\; h = \frac{13\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}} \Rightarrow \underline{h = 13\ cm}$$



$$(\mathrm{KO})^2 = (\mathrm{KM})^2 - (\mathrm{OM})^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow \upsilon^2 = 144 \Rightarrow \boxed{\upsilon = 12\,cm}$$

$$V = \frac{1}{3}E_\beta\cdot\upsilon \Rightarrow V = \frac{1}{3}100\cdot 12 \Rightarrow \boxed{V = 400\ cm^3}$$

$$E_{o\lambda} = \mathrm{E}_{\pi\alpha\rho} + \mathrm{E}_\beta \Rightarrow E_{o\lambda} = 260 + 100 \Rightarrow \boxed{E_{o\lambda} = 360\ cm^2}$$

4. $K_0 = 20\,000$, $\varepsilon = 6\ \%$, $\nu = 2$ χρόνια.

$$K_\nu = \mathrm{K}_0\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^\nu \Rightarrow \mathrm{K}_2 = 20\,000(1,06)^2 \Rightarrow \mathrm{K}_2 = 20\,000 \cdot 1,1236 \Rightarrow \mathrm{K}_2 = £\,22\,472$$

Τόκος $T_2 = 22\,472 - 20\,000 \Rightarrow T_2 = £2\,472$

Απλός Τόκος $\mathrm{T} = \dfrac{\mathrm{KEX}}{100} \Rightarrow \mathrm{T} = \dfrac{20\,000 \cdot 7 \cdot 2}{100} \Rightarrow \mathrm{T} = £2\,800$

$T - T_2 = 2800 - 2472 = £328$

5.

2	2	2	2	2

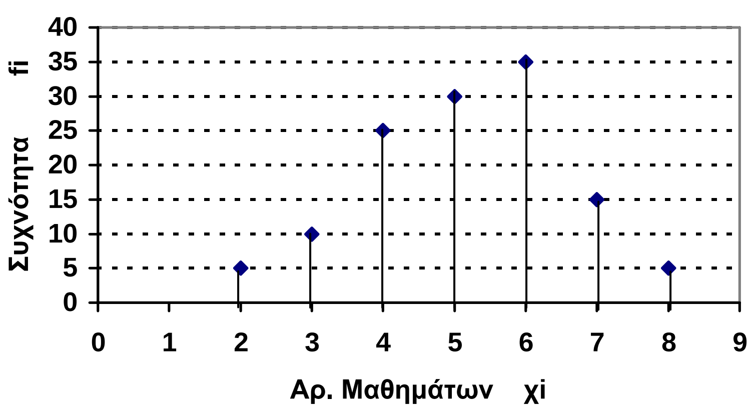
$=2^5=32$ ή $\delta_5^2 = 2^5 = 32$ 32 πενταψήφιοι

1	2^3	1
Ψηφίο 4		Ψηφίο 4

$=2^3=$8 πενταψήφιοι που αρχίζουν με 4 και τελειώνουν με 4

$$\mathrm{P} = \frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\mathrm{P} = \frac{1}{4}}$$

6.



Αρ. Μαθημάτων χ_i	Αρ. Τελειοφοίτων f_i
2	5
3	10
4	25
5	30
6	35
7	15
8	5

(ii) $\bar{\chi} = \dfrac{2\cdot5 + 3\cdot10 + 4\cdot25 + 5\cdot30 + 6\cdot35 + 7\cdot15 + 8\cdot5}{125} \Rightarrow \bar{\chi} = \dfrac{645}{125} \Rightarrow \boxed{\bar{\chi} = 5,16}$

(iii) ποσοστό $\dfrac{55}{125}\cdot 100 = \boxed{44\%}$

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2000 2001

ΕΝΙΑΙΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Λ.Ε.Μ και ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ 10 – ωρο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Σ2,Σ3 και 10-ωρο Ιούνιος 2001

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε τις 12. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu 3\chi d\chi$.

2. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lim_{\chi\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3\chi+\eta\mu\chi}$.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\psi=\chi^2+2$, τον άξονα των x και τις ευθείες χ=1 και χ=3.

4. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΕΝΙΑΙΟ». Πόσοι από αυτούς έχουν τα «Ι» συνεχόμενα;

5. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η γραφική παράσταση της $\psi=\alpha\chi^2+\frac{\beta}{\chi}$ να έχει ακρότατο στο σημείο (1,6) και να ορίσετε το είδος του ακρότατου.

6. Να βρείτε τον όρο που είναι ανεξάρτητος του χ στο ανάπτυγμα του $\left(\chi^2+\frac{3}{\chi}\right)^6$.

7. Δίνεται ο κύκλος $\chi^2+\psi^2-4\chi+6\psi-12=0$. Να βρείτε:
(i) Το μήκος της ακτίνας του και τις συντεταγμένες του κέντρου του.
(ii) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του (-1,1).

8. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου και $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B/A)=\frac{1}{6}$ και $P(A\cup B)=\frac{3}{8}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A\cap B)$, P(Β΄) και να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

9. Εισαγωγέας αγοράζει από το εξωτερικό εμπόρευμα προς £400, πληρώνει εισαγωγικό δασμό 55% πάνω στην τιμή αγοράς και έχει έξοδα £55 για μεταφορά και αποθήκευση. Ακολούθως προσθέτει το κέρδος του στο συνολικό κόστος του εμπορεύματος και αναγράφει την τιμή που προκύπτει πάνω στο εμπόρευμα ως τιμή πώλησης. Ο αγοραστής καλείται να πληρώσει επίσης ΦΠΑ προς 10% πάνω στην τιμή πώλησης. Αν ο αγοραστής πλήρωσε συνολικά £1069,20, να υπολογίσετε το κέρδος του εισαγωγέα ως ποσοστό του συνολικού γι' αυτόν κόστους.

10. Ο διπλανός πίνακας συχνοτήτων παρουσιάζει τους μισθούς των υπαλλήλων μιας εταιρείας.
Να υπολογίσετε:
(α) το μέσο μισθό των υπαλλήλων της εταιρείας και
(β) την τυπική απόκλιση των μισθών με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου.

Μισθός £	Αρ. Υπαλλήλων
1800	1
1300	3
800	9
600	10
300	17

11. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\chi = 3(\eta\mu\theta + 1)$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_3^{\frac{9}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{6\chi - \chi^2}}$

12. Να βρείτε τους τρεις πρώτους μη μηδενικούς όρους του αναπτύγματος της συνάρτησης $\psi = \ln\frac{1+2\chi}{(1-\chi)^2}$ σε σειρά Maclaurin και να δώσετε το διάστημα σύγκλισης της σειράς.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα αυτό να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{1}{10}} \ln\frac{1+2\chi}{(1-\chi)^2}d\chi$ με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων.

13. Να δείξετε ότι $\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi} - \tau o\xi\varepsilon\varphi\chi = \tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha$ όπου α = σταθερά και $\chi \neq \frac{1}{\alpha}$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $\psi = \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi}$ είναι ανεξάρτητη του α.

14. Να βρείτε στη μορφή $\psi = f(\chi)$ τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

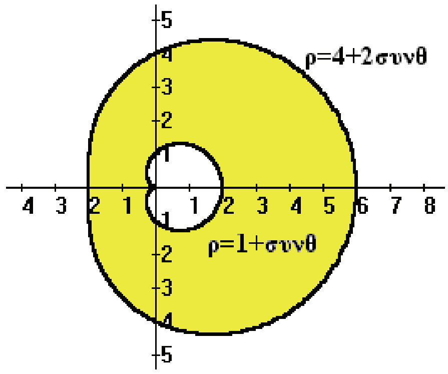
$$\chi\frac{d\psi}{d\chi} + 2\chi^2\psi + \psi = 0$$

15. Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της Τ(ατεμθ, βεφθ) συναντά τις ασύμπτωτές της στα σημεία Α και Β. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι το γινόμενο ΟΑ·ΟΒ είναι ανεξάρτητο του θ.

<u>Οι τρεις διαφορετικές ασκήσεις για το Ενιαίο Λύκειο (10 – ωρο) είναι στο Μέρος Α’</u>

5. Αν $f(\chi) = \ln - \frac{1}{\chi}$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει τουλάχιστο μια λύση στο διάστημα (1,2). Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton – Raphson να βρείτε μια δεύτερη προσέγγιση της λύσης με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων, παίρνοντας ως πρώτη προσέγγιση την τιμή χ_0 = 1,7.

11. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των καμπυλών $(\kappa_1): \rho = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$ και $(\kappa_2): \rho = 4 + 2\sigma\upsilon\nu\theta$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που είναι εντός της κ_2 και εκτός της κ_1.



15. Αν z είναι σημείο του μιγαδικού επιπέδου, να δείξετε ότι οι εξισώσεις $|z|=\frac{1}{2}$ και $|z-2|=3|z-1|$ είναι εξισώσεις κύκλων. Να βρείτε τη θέση που έχουν μεταξύ τους οι δύο κύκλοι.

Μέρος Β’

Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε τις 4. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \dfrac{\chi^2}{\chi^2-4}$

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της και τα διαστήματα μονοτονίας της.
(ii) Να βρείτε τα ακρότατά της και να τα χαρακτηρίσετε.
(iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

2. Ένα ντεπόζιτο νερού πρόκειται να κατασκευαστεί ώστε να έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο, να είναι ανοικτό στο άνω μέρος και να έχει χωρητικότητα 18 m^3. Αν το κόστος κατασκευής της βάσης είναι £40 / m^2 ενώ το κόστος για τις άλλες έδρες είναι £30 / m^2 να βρείτε τις διαστάσεις του ντεπόζιτου ώστε το κόστος να είναι το χαμηλότερο δυνατόν.

3. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}+4\psi = 8e^{-2\chi}$.

(i) Να βρείτε τη γενική λύση της.
(ii) Να βρείτε την ειδική λύση $\psi = f(x)$ για την οποία $\psi = 1$ και $\dfrac{d\psi}{d\chi} = -2$ όταν χ = 0.
(iii) Για τη λύση που βρέθηκε στο (ii) να βρείτε το άθροισμα $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$.

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $\psi^2 = 4\chi$ στο σημείο της $T(t^2, 2t)$, t>0, είναι η $\chi - t\psi + t^2 = 0$. Αν η εφαπτομένη αυτή συναντά τους άξονες Ox και Oy στα σημεία Β και Α αντίστοιχα και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι 4 τετ. μονάδες

(i) να δείξετε ότι t =2 και να δώσετε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.
(ii) να βρείτε την εξίσωση της δεύτερης εφαπτομένης της παραβολής από το Μ και να δώσετε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Σ της εφαπτομένης αυτής με την παραβολή. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Δ του ΤΣ είναι $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.
(iii) αν επιπλέον $\mathrm{P}(\rho^2, 2\rho)$ είναι τυχαίο σημείο πάνω στην παραβολή $\psi^2 = 4\chi$ και Κ το άλλο άκρο του ευθύγραμμου τμήματος ΚΡ που έχει το Δ ως μέσο, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο Κ καθώς το Ρ κινείται πάνω στη δοθείσα παραβολή.

5. (i) Να δείξετε ότι με το μετασχηματισμό $\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \Psi \end{pmatrix} = \mathrm{M}_1 \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}$ όπου $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, η καμπύλη A: $17\psi^2 + 32\chi\psi + 16\chi^2 - 64 = 0$ μετασχηματίζεται στην έλλειψη με εξίσωση

Ε: $\dfrac{\chi^2}{64} + \dfrac{\psi^2}{4} = 1$

(ii) Να επαληθεύσετε ότι με τον πίνακα M_1^{-1} η έλλειψη ***E*** μετασχηματίζεται στην καμπύλη ***A***.

(iii) Να βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού M_2 με τον οποίο οι κορυφές της έλλειψης *E* που βρίσκονται πάνω στο θετικό ημιάξονα των x και στο θετικό ημιάξονα των y απεικονίζονται στα σημεία (4,0) και (0,4) αντίστοιχα. Στη συνέχεια να δείξετε ότι με πίνακα μετασχηματισμού το M_2 η έλλειψη ***E*** μετασχηματίζεται σε κύκλο ***B***.

(iv) Να δώσετε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο μετασχηματίζεται ο κύκλος ***B*** με πίνακα μετασχηματισμού το M_2^{-1}.

6. Στο τετράεδρο ΑΒΓΔ οι ακμές ΑΒ = ΑΓ= ΑΔ = $2\sqrt{3}$ cm και οι έδρες ΑΒΓ, ΑΓΔ και ΑΒΔ βρίσκονται αντίστοιχα πάνω στα επίπεδα με εξισώσεις $\vec{r}\cdot\left(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right)=0$,

$\vec{r}\cdot\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)=6$, και $\vec{r}\cdot\left(\vec{i}-\vec{j}\right)=2$.

(i) Να δείξετε ότι σι συντεταγμένες της κορυφής Α είναι (3,1,2).

(ii) Να δείξετε ότι οι γωνιές των εδρών στην κορυφή Α είναι ορθές.

(iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η ακμή ΑΒ είτε σε καρτεσιανή μορφή είτε σε διανυσματική μορφή.

(iv) Να υπολογίσετε τον όγκο του τετραέδρου.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

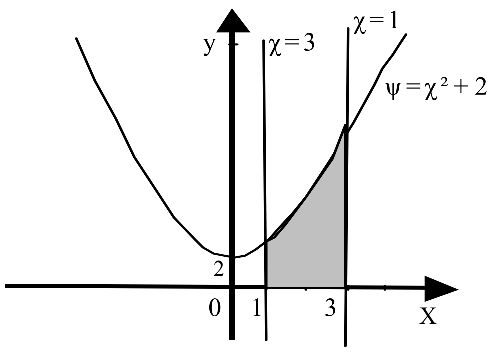
1. $\int \sigma v 3\chi d\chi = \frac{1}{3}\eta\mu 3\chi + c$

2. $L = \lim_{\chi\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3\chi+\eta\mu\chi} = \frac{1-1}{0+0} = \left(\frac{0}{0}\right)$ απροσδιόριστη μορφή

$$L = \lim_{\chi\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(3\chi+\eta\mu\chi\right)'} = \lim_{\chi\to 0}\frac{2e^{2x}-0}{3+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{2\cdot e^0}{3+\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{2\cdot 1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

3. $\int_1^3\left(\chi^2+2\right)d\chi = \left[\frac{\chi^3}{3}+2\chi\right]_1^3 =$

$$= \left(\frac{3^3}{3}+2\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}+2\cdot 1\right) = \frac{38}{3}$$



4. **"E, N, I, A, I, O"**

(i) Πλήθος αναγραμματισμών $M_\varepsilon = \frac{6!}{2!} = \frac{\cancel{1\cdot 2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{\cancel{1\cdot 2}} = 360$

(ii) Αναγραμματισμοί με «Ι» συνεχόμενα 5! = 120

5. $$\left.\begin{array}{l} \psi=\alpha\chi^2+\dfrac{\beta}{\chi} \\ (1,6)\Rightarrow \chi=1,\ \psi=6 \end{array}\right\}\Rightarrow 6=\alpha\cdot 1^2+\frac{\beta}{1}\Rightarrow \alpha+\beta=6$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi=\alpha\chi^2+\dfrac{\beta}{\chi}\Rightarrow\dfrac{d\psi}{d\chi}=2\alpha\chi-\dfrac{\beta}{\chi^2} \\ (1,6)\ \alpha\kappa\rho o\tau\alpha\tau o\Rightarrow \chi=1,\ \dfrac{d\psi}{d\chi}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 0=2\alpha\cdot 1-\frac{\beta}{1^2}\Rightarrow 2\alpha-\beta=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta=6 \\ 2\alpha-\beta=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=2,\ \ \beta=4}$$

$$\psi=2\chi^2+\frac{4}{\chi}\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}=4\chi-\frac{4}{\chi^2}\Rightarrow\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=4+\frac{8}{\chi^3}\Rightarrow\left.\frac{d^2\psi}{d\chi^2}\right|_{\chi=1}=12>0\Rightarrow \text{Τοπικό ελάχιστο}$$

6. $$\left(\chi^2+\frac{3}{\chi}\right)^6\Rightarrow T_{\kappa+1}=\binom{6}{\kappa}\cdot\left(\chi^2\right)^{6-\kappa}\cdot\left(\frac{3}{\chi}\right)^{\kappa}\Rightarrow T_{\kappa+1}=\binom{6}{\kappa}\cdot 3^k\cdot\chi^{12-3\kappa}=\mathrm{A}\cdot\chi^0\Rightarrow$$

$$12-3\kappa=0\Rightarrow\boxed{\kappa=4}\Rightarrow \mathrm{T}_5=\binom{6}{4}\cdot 3^4\Rightarrow \mathrm{T}_5=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 3^4\Rightarrow\boxed{T_5=1215}.$$

7. $\chi^2+\psi^2-4\chi+6\psi-12=0\Rightarrow \mathrm{g}=-2,\ \mathrm{f}=3,\ \mathrm{c}=-12$

(i) $R=\sqrt{g^2+f^2-c}\Rightarrow R=\sqrt{4+9+12}\Rightarrow R=5\ \ \mu.$ $\quad \mathrm{K}(-g,-f)\Rightarrow K(2,-3)$

(ii) $(-1,1)\Rightarrow \chi_1=-1,\ \psi_1=1$, $\chi_1\chi+\psi_1\psi+g(\chi+\chi_1)+f(\psi+\psi_1)+c=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\ -\chi+\psi-2(\chi-1)+3(\psi+1)-12=0\Rightarrow\boxed{-3\chi+4\psi-7=0}$ Εξίσωση εφαπτομένης.

8. $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\frac{1}{6}$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{3}{8},$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})\Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\Rightarrow\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{24}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\Rightarrow\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(\mathrm{B})-\frac{1}{24}\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}')=1-\mathrm{P}(\mathrm{B})\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{B}')=1-\frac{1}{6}\Rightarrow\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{B}')=\frac{5}{6}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{24}\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{24}\Rightarrow$$

Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

ή $\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{B})=\frac{1}{6}\Rightarrow$ Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

9.

100	110	$\chi = \dfrac{1069,20 \cdot 100}{110} = 972 \Rightarrow$ Τιμή πώλησης χωρίς ΦΠΑ £972
χ ;	1069,20	
100	155	$\chi = \dfrac{400 \cdot 155}{100} = £620, \quad 620 + 55 = £675, \quad 972 - 675 = £297$
400	χ ;	
675	297	$\chi = \dfrac{297 \cdot 100}{675} = 44\% \Rightarrow$ Κέρδος 44%
100	χ ;	

10.

Μισθός £ x_i	Αρ. Υπαλλήλων f_i	$x_i f_i$	$(\chi_i - \overline{\chi})^2$	$f_i \cdot (\chi_i - \overline{\chi})^2$
1800	1	1·1800=1800	$(1800-600)^2 = 1440000$	1·1440000=1440000
1300	3	3900	490000	1470000
800	9	7200	40000	360000
600	10	6000	0	0
300	17	5100	90000	1530000
	Σf_i=40	$\Sigma f_i x_I$= 24000		$\Sigma f_i \cdot (\chi_i - \overline{\chi})^2$=4800000

(α) $\overline{\chi} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{24000}{40} = 600$ β) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i (x_i - \overline{x})^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\dfrac{4800000}{40}} = \sqrt{120000} = 346,41$ **ή**

(α) $\overline{\chi} = \dfrac{1800 + 1300 \cdot 3 + 800 \cdot 9 + 600 \cdot 10 + 300 \cdot 17}{40} \Rightarrow \boxed{\overline{\chi} = 600}$

(β) $\sigma^2 = \dfrac{(1800-600)^2 + 3 \cdot (1300-600)^2 + 9 \cdot (800-600)^2 + 10 \cdot (600-600)^2 + 17 \cdot (300-600)^2}{40}$

$\Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{1200^2 + 3 \cdot 700^2 + 9 \cdot 200^2 + 0 + 17 \cdot (-300)^2}{40} = 120000 \Rightarrow \sigma = \sqrt{120000} \Rightarrow \boxed{\sigma = 346,41}$

11. $\chi = 3(\eta\mu\theta + 1) \Rightarrow d\chi = 3\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta$ Για χ = 3 ⇒ θ = 0 και $\chi = \frac{9}{2} \Rightarrow \chi = \dfrac{\pi}{6}$

$$\int_3^{\frac{9}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{6\chi - \chi^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta}{\sqrt{6 \cdot 3(\eta\mu\theta + 1) - 9(\eta\mu\theta + 1)^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cancel{3}\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta}{\cancel{3}\sqrt{\cancel{2\eta\mu\theta} + 2 - \eta\mu^2\theta - \cancel{2\eta\mu\theta} - 1}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}\, d\theta}{\cancel{\sqrt{1 - \eta\mu^2\theta}}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

12. $\psi = \ln \dfrac{1 + 2\chi}{(1-\chi)^2}$. Αν $\chi < 1 \Rightarrow \psi = \ln(1 + 2\chi) - 2\ln(1 - \chi) =$

$$\left[2\chi - \frac{(2\chi)^2}{2} + \frac{(2\chi)^3}{3} - \frac{(2\chi)^4}{4} + \frac{(2\chi)^5}{5} - \ldots\right] - \left[(-\chi) - \frac{(-\chi)^2}{2} + \frac{(-\chi)^3}{3} - \frac{(-\chi)^4}{4} + \frac{(-\chi)^5}{5} - \ldots\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \psi = 4\chi - \chi^2 + \frac{10}{3}\chi^3 - \dots$$

Διάστημα σύγκλισης: $\left.\begin{array}{l} \ln(1+2\chi) \Rightarrow -\frac{1}{2} < \chi \le \frac{1}{2} \quad (1) \\ \ln(1-\chi) \Rightarrow -1 \le \chi < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \chi \le \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \ln\frac{1+2\chi}{(1-\chi)^2}\, d\chi = \int_0^{\frac{1}{10}} \left(4\chi - \chi^2 + \frac{10\chi^3}{3}\right) d\chi = \int_0^{\frac{1}{10}} \left(\frac{4\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3} + \frac{10\chi^4}{12}\right) d\chi =$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{10}{12}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4 - 0 = \frac{2}{100} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1000} + \frac{10}{12}\cdot\frac{1}{10000} = 0{,}0201166$$

Αν $\chi > 1 \Rightarrow \psi = \ln(1+2\chi) - 2\ln(\chi - 1)$ όμως από τη σχέση (1) το ανάπτυγμα της ψ δεν συγκλίνει.

13. $\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi} - \tau o\xi\varepsilon\varphi\chi = \tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha\,, \quad \chi \ne \frac{1}{\alpha}$

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi} = \beta \Rightarrow \varepsilon\varphi\beta = \frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi}, \quad \tau o\xi\varepsilon\varphi\chi = \gamma \Rightarrow \varepsilon\varphi\gamma = \chi\,, \quad \tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha = \gamma \Rightarrow \varepsilon\varphi\gamma = \alpha$$

$$\varepsilon\varphi(\beta-\gamma) = \frac{\varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\gamma}{1+\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\gamma} = \frac{\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi} - \chi}{1 + \frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi}\cdot\chi} = \frac{\frac{\alpha+\chi-\chi+\alpha\chi^2}{\cancel{1-\alpha\chi}}}{\frac{1-\cancel{\alpha\chi}+\cancel{\alpha\chi}+\chi^2}{\cancel{1-\alpha\chi}}} = \frac{\alpha\cancel{(1+\chi^2)}}{\cancel{1+\chi^2}} = \alpha = \varepsilon\varphi\delta \Rightarrow$$

$$\beta - \gamma = \delta \Rightarrow \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi} - \tau o\xi\varepsilon\varphi\chi = \tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha \Rightarrow \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi} = \tau o\xi\varepsilon\varphi\chi + \tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha \quad (1)$$

$$\psi = \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha\chi} \overset{(1)}{\Rightarrow} \psi = \tau o\xi\varepsilon\varphi\chi + \tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = 0 + \frac{1}{1+\chi^2} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{1}{1+\chi^2} \Rightarrow$$

$\frac{d\psi}{d\chi}$ ανεξάρτητο του α

14. $\chi\frac{d\psi}{d\chi} + 2\chi^2\psi + \psi = 0 \Rightarrow \frac{d\psi}{\psi} = -\frac{(2\chi^2+1)}{\chi}\, d\chi \Rightarrow \int\frac{d\psi}{\psi} = -\int 2\chi\, d\chi - \int\frac{d\chi}{\chi} \Rightarrow$

$$\ln|\psi| = -\chi^2 - \ln|\chi| + \ln c \Rightarrow \ln|\psi| = -\chi^2 - \ln\frac{c}{|\chi|} \Rightarrow \psi = e^{-\chi^2}\cdot e^{\ln\frac{c}{\chi}} \Rightarrow \psi = \frac{c}{\chi}\cdot e^{-\chi^2}\,, \ \chi \ne 0$$

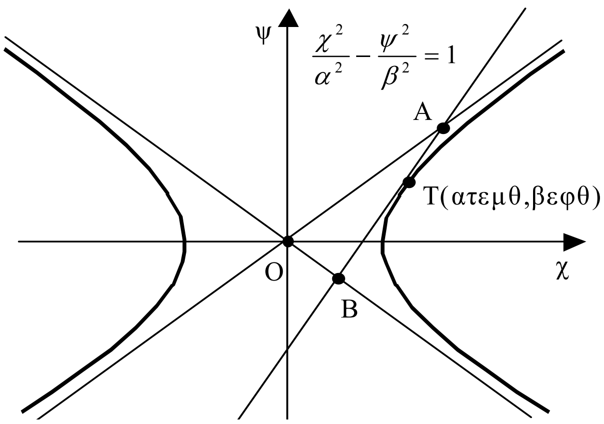
15. $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1\,, \ T(\alpha\tau\varepsilon\mu\theta, \beta\varepsilon\varphi\theta)$

Εξίσωση εφαπτομένης:

$\frac{\chi_1\chi}{\alpha^2} - \frac{\psi_1\psi}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{\tau\varepsilon\mu\theta\,\chi}{\alpha} - \frac{\varepsilon\varphi\theta\,\psi}{\beta} = 1$ Εξ. ασυμπτώτων: $\psi = \pm\frac{\beta}{\alpha}\chi$

$$\frac{\tau\varepsilon\mu\theta\,\chi_A}{\alpha} - \frac{\varepsilon\varphi\theta\,\psi_A}{\beta} = 1 \Rightarrow \frac{\tau\varepsilon\mu\theta\,\chi_A}{\alpha} - \frac{\varepsilon\varphi\theta\frac{\beta}{\alpha}\chi_A}{\beta} = 1 \Rightarrow$$

$$\tau\varepsilon\mu\theta\,\chi_A - \varepsilon\phi\theta\,\chi_A = \alpha \Rightarrow$$
$$\chi_A = \frac{\alpha}{\tau\varepsilon\mu\theta - \varepsilon\phi\theta} \Rightarrow$$
$$\psi_A = \frac{\beta}{\tau\varepsilon\mu\theta - \varepsilon\phi\theta} \Rightarrow$$
$$A\left(\frac{a}{\tau\varepsilon\mu\theta - \varepsilon\phi\theta}, \frac{\beta}{\tau\varepsilon\mu\theta - \varepsilon\phi\theta}\right)$$



$$\frac{\tau\varepsilon\mu\theta\,\chi_B}{\alpha} - \frac{\varepsilon\phi\theta\,\psi_B}{\beta} = 1 \Rightarrow$$
$$\frac{\tau\varepsilon\mu\theta\,\chi_A}{\alpha} - \frac{\varepsilon\phi\theta\left(-\frac{\beta}{\alpha}\chi\right)_A}{\beta} = 1 \Rightarrow \tau\varepsilon\mu\theta\,\chi_B + \varepsilon\phi\theta\,\chi_B = \alpha \Rightarrow$$
$$\chi_B = \frac{\alpha}{\tau\varepsilon\mu\theta + \varepsilon\phi\theta} \Rightarrow \psi_B = -\frac{\beta}{\tau\varepsilon\mu\theta + \varepsilon\phi\theta} \Rightarrow B\left(\frac{a}{\tau\varepsilon\mu\theta + \varepsilon\phi\theta}, -\frac{\beta}{\tau\varepsilon\mu\theta + \varepsilon\phi\theta}\right)$$

$$OA \cdot OB = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\tau\varepsilon\mu\theta - \varepsilon\phi\theta} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\tau\varepsilon\mu\theta + \varepsilon\phi\theta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\tau\varepsilon\mu^2\theta - \varepsilon\phi^2\theta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1} = \alpha^2 - \beta^2 \text{ ανεξάρτητο του } \theta.$$

<u>Οι τρεις διαφορετικές ασκήσεις για το Ενιαίο Λύκειο (10 – ωρο) είναι στο Μέρος Α’</u>

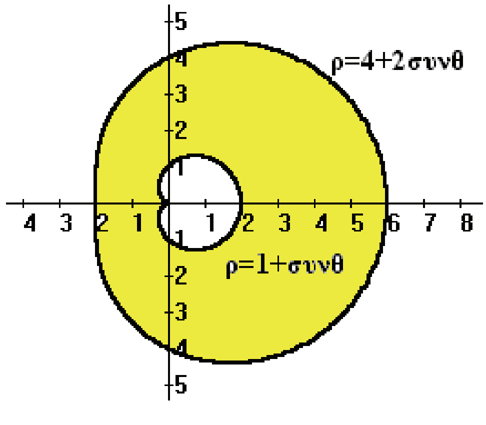
5. $f(\chi) = \ln - \frac{1}{\chi}$. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $(1,2)$

$f(1) = -1 < 0,\ f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} \simeq 0{,}19 > 0 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow$ Άρα υπάρχει λύση της εξίσωσης $f(\chi) = 0$ στο διάστημα $(1,2)$

$$f'(\chi) = \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2},\ \chi_0 = 1{,}7\ ,\quad \chi_1 = \chi_0 - \frac{f(\chi_0)}{f'(\chi_0)} \Rightarrow \chi_1 = \chi_0 - \frac{\ln\chi_0 - \frac{1}{\chi_0}}{\frac{1}{\chi_0} + \frac{1}{\chi_0^2}} \Rightarrow$$

$$\chi_1 = 1{,}7 - \frac{\ln 1{,}7 - \frac{1}{1{,}7}}{\frac{1}{1{,}7} + \frac{1}{(1{,}7)^2}} = 1{,}76$$

11. $(\kappa_1): \rho = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$, $(\kappa_2): \rho = 4 + 2\sigma\upsilon\nu\theta$.



$$E = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[(4 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 - (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)^2\right]d\theta$$
$$E = \int_o^{\pi}\left(15 + 14\sigma\upsilon\nu\theta + 3\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)d\theta$$
$$E = \int_o^{\pi}\left(15 + 14\sigma\upsilon\nu\theta + 3\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$E=\int_o^{\pi}\left(\frac{33}{2}+14\sigma\upsilon\nu\theta+\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu 2\theta\right)d\theta \Rightarrow E=\left[\frac{33\theta}{2}+14\eta\mu\theta+\frac{3}{4}\eta\mu 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$E=\left(\frac{33\pi}{2}+14\eta\mu\pi+\frac{3}{4}\eta\mu 2\pi\right)-0 \Rightarrow \boxed{E=\frac{33\pi}{2}}$$

15. Έστω $z=\chi+\psi i$,

$$\left.\begin{array}{l} |z|=\sqrt{\chi^2+\psi^2} \\ |z|=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \chi^2+\psi^2=\frac{1}{4} \text{ εξίσωση κύκλου με } K_1(0,0) \text{ και } R_1=\frac{1}{2}$$

$$|z-2|=3|z-1| \Rightarrow \sqrt{(\chi-2)^2+\psi^2}=3\sqrt{(\chi-1)^2+\psi^2} \Rightarrow$$

$$\chi^2-4\chi-4+\psi^2=9\left(\chi^2-2\chi+1+\psi^2\right) \Rightarrow 8\chi^2+8\psi^2-14\chi+5=0$$

$$\Rightarrow \chi^2+\psi^2-\frac{7}{4}\chi+\frac{5}{8}=0 \Rightarrow g=-\frac{7}{8},\ f=0,\ c=\frac{5}{8} \Rightarrow$$

$$K(-g,-f) \Rightarrow K\left(\frac{7}{8},0\right), \quad R=\sqrt{g^2+f^2-c} \Rightarrow R=\sqrt{\left(-\frac{7}{8}\right)^2+0^2-\frac{5}{8}} \Rightarrow R=\sqrt{\frac{49}{64}-\frac{5}{8}}$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{\frac{9}{64}} \Rightarrow R=\frac{3}{8}$$

Μέρος Β’

1. $\psi=\dfrac{\chi^2}{\chi^2-4}$, Πεδίο ορισμού $\chi\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Κατακόρυφος ασύμπτωτος : χ = 2, χ = –2 . Οριζόντια ασύμπτωτος : ψ =1

$$\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{2\chi\left(\chi^2-4\right)-2\chi\left(\chi^2\right)}{\left(\chi^2-4\right)^2} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}=\frac{-8\chi}{\left(\chi^2-4\right)^2}$$

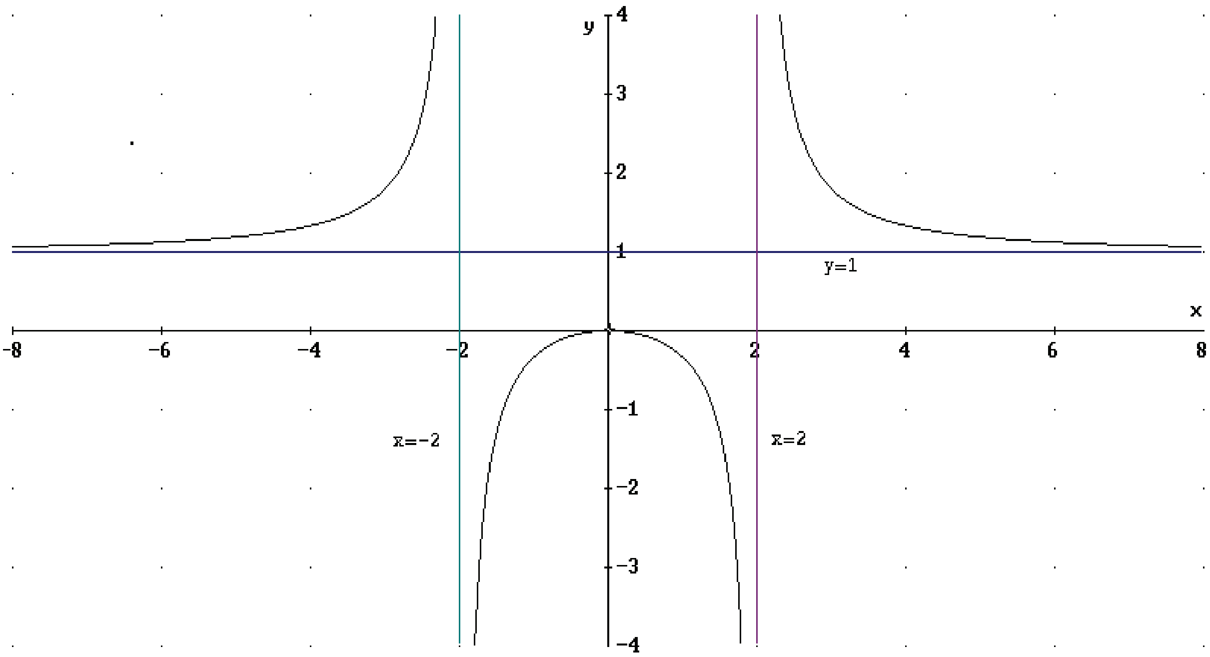
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\psi}{d\chi}=\dfrac{-8\chi}{\left(\chi^2-4\right)^2} \\ \dfrac{d\psi}{d\chi}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -8\chi=0 \Rightarrow \chi=0$$

χ	-∞		-2		0		2		+∞
$\frac{d\psi}{d\chi}$		+	‖	+	0	-	‖	-	
ψ		↗	‖	↗	0	↘	‖	↘	

Για $\chi\in(-\infty,2)\cup(2,0)$ γνησίως αύξουσα η ψ

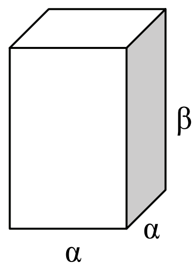
Για $\chi\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ γνησίως φθίνουσα η ψ

Ακρότατο: max (0,0)



2. $V = \alpha^2 \cdot \beta = 18m^2 \;\Rightarrow\; \beta = \dfrac{18}{\alpha^2}$

Κόστος = $40\alpha^2 + 120\alpha\beta \;=\; 40\alpha^2 + 120 \cdot \cancel{\alpha} \cdot \dfrac{18}{\alpha^{\cancel{2}}} \;=\; 40\alpha^2 + \dfrac{2160}{\alpha}$



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\mathrm{K}}{d\alpha} = 80\alpha - \dfrac{2160}{\alpha^2} \\ \dfrac{d\mathrm{K}}{d\alpha} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 80\alpha - \dfrac{2160}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow \alpha^3 = 27 \Rightarrow \alpha = 3$$

$\dfrac{d^2K}{da^2} = 80 + \dfrac{4320}{\alpha^3} \Rightarrow \left.\dfrac{d^2K}{da^2}\right|_{\alpha=3} > 0 \;\Rightarrow\;$ για α = 3 παρουσιάζει ελάχιστο

Άρα οι ζητούμενες διαστάσεις είναι 3 m, 3 m, 2 m.

3. $\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} + 4\psi = 8e^{-2\chi}$ (1)

(i) $m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2i \Rightarrow$ Συμπληρωματική συνάρτηση $\sigma(\chi) = \mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu 2\chi + \mathrm{B}\,\eta\mu 2\chi$

Υπό δοκιμή συνάρτηση : $\phi(\chi) = \delta e^{-2\chi} \;\Rightarrow\; \phi'(\chi) = -2\delta e^{-2\chi} \Rightarrow \; \phi''(\chi) = +4\delta e^{-2\chi}$

(1) $\Rightarrow\;\; +4\delta e^{-2\chi} + 4\delta e^{-2\chi} = 8e^{-2\chi} \Rightarrow$ δ=1 $\Rightarrow$ Μερικό ολοκλήρωμα: $\phi(\chi) = e^{-2\chi}$

Γενική Λύση: $\psi = \mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu 2\chi + \mathrm{B}\,\eta\mu 2\chi + e^{-2\chi}$ (2)

(ii) $\psi = 1$ όταν χ = 0

$\psi = \mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu 2\chi + \mathrm{B}\,\eta\mu 2\chi + e^{-2\chi} \;\Rightarrow 1 = \mathrm{A} + 1 \Rightarrow \mathrm{A} = 0$

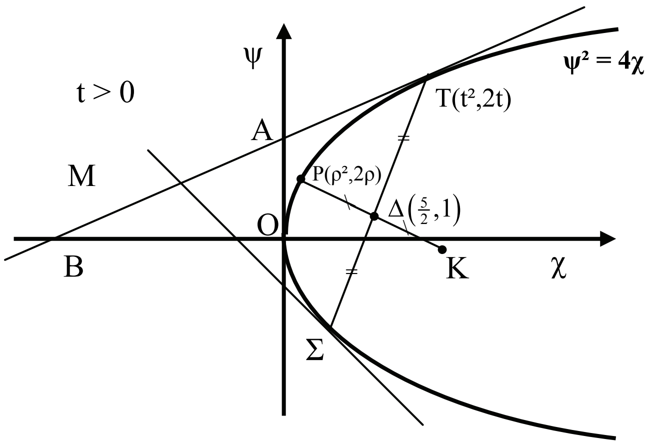
$\dfrac{d\psi}{d\chi} = -2\mathrm{A}\,\eta\mu 2\chi + 2\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu 2\chi - 2e^{-2\chi}$

$\dfrac{d\psi}{d\chi} = -2$ όταν χ = 0 $\Rightarrow$ -2 = 2Β – 2 $\Rightarrow$ Β = 0 . Άρα ειδική λύση : $\boxed{A = e^{-2\chi}}$

(iii) $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) = e^{-2\nu} = e^{-2} + e^{-4} + e^{-6} + e^{-8} + \cdots = \dfrac{e^{-2}}{1-e^{-2}} = \dfrac{1}{e^2 - 1}$

Γ.Π. $\alpha_1 = e^{-2}, \quad \lambda = e^{-2}, \quad \Sigma_\infty = \dfrac{\alpha_1}{1-\lambda}$

4. $\psi^2 = 4\chi$, $T(t^2, 2t)$, t>0



$2\psi \dfrac{d\psi}{d\chi} = 4 \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{2}{\psi} \Rightarrow$

$\left.\dfrac{d\psi}{d\chi}\right|_{\psi=2t} = \dfrac{2}{2t} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\phi} = \dfrac{1}{t}$

$\psi - \psi_1 = \lambda(\chi - \chi_1) \Rightarrow$

$\psi - 2t = \dfrac{1}{t}(\chi - t^2) \Rightarrow \boxed{\chi - t\psi + t^2 = 0}$

(i) $\chi - t\psi + t^2 = 0 \overset{\psi=0}{\Rightarrow} \chi_{\mathrm{B}} = -t^2 \Rightarrow B(-t^2, 0)$

$\chi - t\psi + t^2 = 0 \overset{\chi=0}{\Rightarrow} \psi_{\mathrm{A}} = t \Rightarrow A(0, t)$

$E_{(OAB)} = \dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OA| = \dfrac{1}{2}\cdot t\cdot t^2 = \dfrac{t^3}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{t = 2}$

Μ μέσο του ΑΒ $\Rightarrow \chi_{\mathrm{M}} = -\dfrac{t^2}{2} = -\dfrac{2^2}{2} = -2, \quad \psi_M = \dfrac{t}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{M(-2,1)}$

(ii) Έστω ψ = λχ + β που άγεται από το σημείο Μ .

$\left.\begin{array}{l} \psi = \lambda\chi + \beta \\ \mathrm{M}(-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\lambda - \beta = -1$

$\left.\begin{array}{l} \psi = \lambda\chi + \beta \\ \psi^2 = 4\chi \end{array}\right\} \overset{\Delta=0}{\Rightarrow} \psi = \lambda\cdot\dfrac{\psi^2}{4} + \beta \Rightarrow \lambda\cdot\psi^2 - 4\psi + 4\beta = 0 \overset{\Delta=0}{\Rightarrow} 16 - 16\lambda\beta = 0 \Rightarrow \lambda\beta = 1$

$\left.\begin{array}{l} 2\lambda - \beta = -1 \\ \lambda\beta = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda(2\lambda + 1) = 1 \Rightarrow 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{1}{2}, \ \lambda_2 = -1$

Για $\lambda = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \chi - 2\psi + 2 = 0$

Για $\lambda = -1 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow \boxed{\chi + \psi + 1 = 0}$ Εφαπτομένη από το Μ προς Σ.

$\Rightarrow -1\psi^2 - 4\psi + 4(-1) = 0 \Rightarrow (\psi + 2)^2 = 0 \Rightarrow \psi = -2, \ \chi = \chi = 1 \Rightarrow \boxed{\Sigma(1,-2)}$

$T(4,4), \ \Sigma(1,-2)$ Δ μέσο ΤΑ $\Rightarrow \chi_\Delta = \dfrac{5}{2}, \ \psi_\Delta = 1 \Rightarrow \boxed{\Delta\left(\dfrac{5}{2}, 1\right)}$

(iii) $\mathrm{P}(\rho^2, 2\rho)$, Δ μέσο ΚΡ $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \chi_\Delta = \dfrac{\chi_{\mathrm{P}} + \chi_{\mathrm{K}}}{2} \Rightarrow \dfrac{5}{2} = \dfrac{\rho^2 + \chi_{\mathrm{K}}}{2} \Rightarrow \chi_{\mathrm{K}} = 5 - \rho^2 \\ \psi_\Delta = \dfrac{\psi_{\mathrm{P}} + \psi_{\mathrm{K}}}{2} \Rightarrow 1 = \dfrac{2\rho + \psi_{\mathrm{K}}}{2} \Rightarrow \psi_{\mathrm{K}} = 2 - 2\rho \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{K}(5 - \rho^2, 2 - 2\rho)$

$$\chi = 5 - \rho^2$$

$$\psi = 2 - 2\rho \quad \Rightarrow \rho = \frac{2-\psi}{2} \Rightarrow \chi = 5 - \left(\frac{2-\psi}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{4\chi + \psi^2 - 4\psi - 16 = 0}$$

5. (i) $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_1| = 1 \Rightarrow M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \Psi \end{pmatrix} = \mathrm{M}_1 \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \mathrm{M}_1^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \Psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \Psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} + \Psi \\ -\mathrm{X} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\chi = \mathrm{X} + \Psi, \quad \psi = -\mathrm{X} \quad (1)$

A: $17\psi^2 + 32\chi\psi + 16\chi^2 - 64 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 17(-\mathrm{X})^2 + 32(\mathrm{X}+\Psi)\cdot(-\mathrm{X}) + 16(\mathrm{X}+\Psi)^2 - 64 = 0$

$\Leftrightarrow 17\mathrm{X}^2 - 32\mathrm{X}^2 - \cancel{32\mathrm{X}\Psi} + 16\mathrm{X}^2 + \cancel{32\mathrm{X}\Psi} + 16\Psi^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{X}^2 + 16\Psi^2 = 64 \Leftrightarrow$

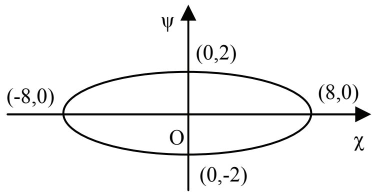
$\frac{\mathrm{X}^2}{64} + \frac{\Psi^2}{4} = 1 \to \frac{\chi^2}{64} + \frac{\psi^2}{4} = 1$ *καμπύλη **Ε***

(ii) $M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \Psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \chi = -\Psi \\ \psi = \mathrm{X} + \Psi \end{matrix} \quad (2)$

E: $\frac{\chi^2}{64} + \frac{\psi^2}{4} = 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{(-\Psi)^2}{64} + \frac{(\mathrm{X}+\Psi)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \Psi^2 + 16\left(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}\Psi + \Psi^2\right) = 64 \Leftrightarrow$

$17\Psi^2 + 32\mathrm{X}\Psi + 16\Psi^2 - 64 = 0 \to 17\psi^2 + 32\chi\psi + 16\chi^2 - 64 = 0$ *καμπύλη Α*

(iii) ***Ε***: $\frac{\chi^2}{64} + \frac{\psi^2}{4} = 1 \Rightarrow$ *α=8, β=2* $\Rightarrow$ *Κορυφές (8,0), (0,2)*



(8,0) $\overset{M_2}{\to}$ *(4,0)* $\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4 = 8\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ 0 = 8\gamma \Rightarrow \gamma = 0 \end{matrix}$

(0,2) $\overset{M_2}{\to}$ *(0,4)* $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = 2\beta \Rightarrow \beta = 0 \\ 4 = 2\delta \Rightarrow \delta = 2 \end{matrix}$

Άρα $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_2^{-1}| = 1 \Rightarrow M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \mathrm{M}_2^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \Psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \Psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \chi = 2\mathrm{X} \\ \psi = \frac{\Psi}{2} \end{matrix}$, E: $\frac{\chi^2}{64} + \frac{\psi^2}{4} = 1 \Rightarrow$

$\frac{(2\mathrm{X})^2}{64} + \frac{\left(\frac{\Psi}{2}\right)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{16} + \frac{\Psi^2}{16} = 1 \Rightarrow \mathrm{X}^2 + \Psi^2 = 16 \to \chi^2 + \psi^2 = 16$ *Κύκλος **Β***

(iv) $\begin{pmatrix} X \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} X = \frac{\chi}{2} \\ \Psi = 2\psi \end{matrix}$, $X^2 + \Psi^2 = 16 \Rightarrow \left(\frac{\chi}{2}\right)^2 + (2\psi)^2 = 16 \Rightarrow$

$\frac{\chi^2}{64} + \frac{\psi^2}{4} = 1$ καμπύλη **Ε**.

6. (ΑΒΓ): $\vec{r}\cdot(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) = 0 \to \chi + \psi - 2z = 0$, $\vec{\eta}_1 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

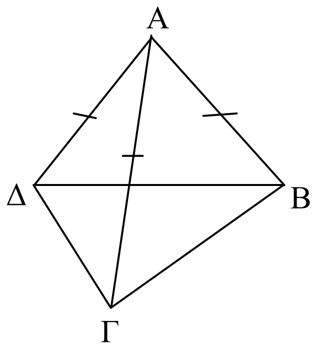
(ΑΓΔ): $\vec{r}\cdot(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 6 \to \chi + \psi + z = 6$, $\vec{\eta}_2 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

(ΑΒΔ): $\vec{r}\cdot(\vec{i} - \vec{j}) = 2 \to \chi - \psi = 2$, $\vec{\eta}_3 = \vec{i} - \vec{j}$

$\chi + \psi - 2z = 0 \quad (1)$

$\chi + \psi + z = 6 \quad (2)$

$\chi - \psi = 2 \quad (3)$



i) $\left.\begin{matrix} \chi + \psi - 2z = 0 \\ \chi + \psi + z = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3z = 6 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \chi + \psi = 4 \\ \chi - \psi = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\chi = 6 \Rightarrow \chi = 3 \Rightarrow \psi = 1$, $A(3,1,2)$

ii) Δίεδρες γωνιές στο σημείο Α

$\vec{\eta}_1\cdot\vec{\eta}_2 = (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})\cdot(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 1\cdot1 + 1\cdot1 + (-2)\cdot1 = 0 \Rightarrow \vec{\eta}_1 \perp \vec{\eta}_2 \Rightarrow (\mathrm{A,B,\Gamma}) \perp (\mathrm{A,\Gamma,\Delta})$

$\vec{\eta}_2\cdot\vec{\eta}_3 = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\cdot(\vec{i} - \vec{j}) = 1\cdot1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot0 = 0 \Rightarrow \vec{\eta}_2 \perp \vec{\eta}_3 \Rightarrow (\mathrm{A,\Gamma,\Delta}) \perp (\mathrm{A,B,\Delta})$

$\vec{\eta}_1\cdot\vec{\eta}_3 = (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})\cdot(\vec{i} - \vec{j}) = 1\cdot1 + 1\cdot(-1) + (-2)\cdot0 = 0 \Rightarrow \vec{\eta}_1 \perp \vec{\eta}_3 \Rightarrow (\mathrm{A,B,\Gamma}) \perp (\mathrm{A},B,\Delta)$

iii) Η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\eta}_2$ και περνά από το σημείο Α.

$A(3,1,2), \vec{\eta}_2 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{r} = (3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) + \lambda(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), \chi - 3 = \psi - 1 = z - 2$ (ΑΒ)

ή Η ευθεία ΑΒ είναι η ευθεία τομής των επιπέδων (Α,Β,Δ) και (Α,Β,Γ)

$$\left.\begin{matrix} (\mathrm{A,B,\Delta}): \chi - \psi = 2 \Rightarrow \chi = 2 + \psi \\ (\mathrm{A,B,\Gamma}): \underline{\chi + \psi - 2z = 0} \\ 2\chi - 2z = 2 \Rightarrow \chi = z + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \chi = \psi + 2 = z + 1 \quad (AB)$$

iv) $V = \frac{1}{3}E_{\mathrm{AB\Gamma}}\cdot\mathrm{A\Delta} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{AB\cdot A\Gamma}}{2}\cdot\mathrm{A\Delta} = \frac{1}{6}(2\sqrt{3})^3 = \boxed{4\sqrt{3}\ cm^3}$ $\quad (AB \perp A\Gamma)$

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2000 2001

ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ 6 – ωρο

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (6-ωρο) Ιούνιος 2001

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε τις 12. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο των $\frac{d\psi}{d\chi}$ πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $\psi = \sqrt{\chi} - \frac{1}{\chi}$ (ii) $\psi = 2e^{3\chi} + \sigma\upsilon\nu 5\chi$

2. Κάποιος αγόρασε μια τηλεόραση με έκπτωση 15% και πλήρωσε £272. Να βρείτε την τιμή πώλησης της τηλεόρασης πριν την έκπτωση.

3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-\chi+\ln(\chi-1)}{\chi^2-3\chi+2}$

4. Ο διπλανός πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των μελών που έχει η κάθε μια από τις 100 οικογένειες ενός χωριού. Αν η μέση τιμή της κατανομής είναι 4 μέλη να υπολογίσετε τις συχνότητες χ και ψ των οικογενειών με 2 και 4 μέλη αντίστοιχα.

Αριθμός μελών χ_i	Οικογένειες f_i
1	7
2	χ
3	20
4	ψ
5	18
6	10
7	5

5. Να υπολογίσετε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΒΑΚΑΣ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το γράμμα Α και τελειώνουν με γράμμα διαφορετικό του Α;

6. Η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \alpha\chi^3 + \beta\chi + 2$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο (-1,10)

(i) Να βρείτε τις τιμές των α και β. (ii) Να προσδιορίσετε το είδος του ακρότατου.

7. Αν $\psi = \tau o\xi\eta\mu\left(\frac{\chi}{3}\right)$ να δείξετε ότι ισχύει: $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} - \chi\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^3 = 0$

8. Να βρείτε στη μορφή $\psi = f(\chi)$ τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $\chi\frac{d\psi}{d\chi} = \frac{\psi}{\chi+1}$

9. Να δείξετε ότι: $\begin{vmatrix} \chi & 2 & 2 \\ 2 & \chi & 2 \\ 2 & 2 & \chi \end{vmatrix} = (\chi+4)(\chi-2)^2$

10. Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας το εμβαδόν ολικής επιφάνειας είναι $E_{o\lambda} = 12\alpha^2\ cm^2$ και οι παράπλευρες πλευρές της σχηματίζουν με τη βάση γωνία 60°. Να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

(i) το μήκος της πλευράς της βάσης της πυραμίδας

(ii) τον όγκο της πυραμίδας

(iii) το μήκος της παράπλευρης ακμής της πυραμίδας

11. Να λύσετε την εξίσωση: $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\chi + \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\chi\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$

12. Δίνονται σι κύκλοι: $(c_1): \chi^2 + \psi^2 - 16\psi + 32 = 0$, $(c_2): \chi^2 + \psi^2 - 18\chi + 2\psi + 32 = 0$

(i) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

(ii) Να δείξετε ότι οι δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε το σημείο επαφής τους.

(iii) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των δυο κύκλων στο σημείο επαφής τους.

13. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi = \eta\mu^2\theta,\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \sqrt{\chi}\cdot\sqrt{1-\chi}\, d\chi$

14. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & \lambda \end{pmatrix}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει $\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{I} = (0)$ όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2 x 2 και (0) ο μηδενικός πίνακας 2 x 2.

(i) Να υπολογίσετε την τιμή του λ.

(ii) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς χ και ψ αν ισχύει: $\mathrm{A}^{16}\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16^5 \\ -8^6 \end{pmatrix}$

(Μπορείτε να δώσετε τις απαντήσεις σας σε εκθετική μορφή).

15. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \ln\frac{1}{\chi}$, την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $M\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ και τον άξονα των Χ πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των Χ.

Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

ΜΕΡΟΣ Β’

Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε μόνο στις 4. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \frac{\chi - 1}{\chi^2}$.

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, το τοπικό ακρότατο, το σημείο καμπής, τις ασύμπτωτες και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

(ii) Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο Α(1 ,0) τέμνει ξανά την καμπύλη στο σημείο Β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

2. Να βρείτε την εξίσωση $\psi = f(\chi)$ της καμπύλης η οποία περνά από το σημείο Α(0,2) και ικανοποιεί την εξίσωση $(\chi+1)\frac{d\psi}{d\chi} = \chi\psi + 2,\quad \chi > -1$.

3. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου και $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{3}{5}$, $P(A\cup B)=\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: Να πραγματοποιηθούν και το Α και το Β.
Δ: Να πραγματοποιηθεί μόνο το Β.
Ε: Να πραγματοποιηθεί μόνο το ένα από τα Α και Β.
Ζ: Να μη πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β.
Η: Να πραγματοποιηθεί το Α δεδομένου ότι πραγματοποιήθηκε το Β.

4. Δίνεται η παραβολή $\psi^2=4\alpha\chi$, α>0 και τα σημεία $T\left(\alpha t^2,2\alpha t\right)$ και $P\left(\alpha\rho^2,2\alpha\rho\right)$.

(i) Να δείξετε ότι χορδή ΤΡ έχει εξίσωση $2\chi-\left(t+\rho\right)\psi+2\alpha t\rho=0$

(ii) Από την εστία Ε της παραβολής φέρνουμε ευθεία (ε) κάθετη στη χορδή ΤΡ, η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο Σ. Αν Μ είναι το μέσο της χορδής ΤΡ να δείξετε ότι: 2(ΣΜ)=(ΕΤ)+(ΕΡ).

5. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή χψ = 9. Φέρνουμε την εφαπτομένη (ε) της υπερβολής στο σημείο της $T\left(3t,\frac{3}{t}\right)$, και από την αρχή Ο των αξόνων φέρνουμε ευθεία (δ) που τέμνει κάθετα την (ε) στο σημείο Ρ. Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του σχήματος πάνω στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Ρ.

6. Ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ με υποτείνουσα ΑΒ σταθερού μήκους λ cm περιστρέφεται πλήρως γύρω από την κάθετη πλευρά ΟΒ. Να βρείτε, συναρτήσει του λ, το μέγιστο όγκο που μπορεί να έχει το παραγόμενο στερεό.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

1. (i) $\psi=\sqrt{\chi}-\frac{1}{\chi}\ \Rightarrow\ \frac{d\psi}{d\chi}=\frac{1}{2\sqrt{\chi}}+\frac{1}{\chi^2}$ (ii) $\psi=2e^{3\chi}+\sigma\upsilon\nu 5\chi\Rightarrow\ \frac{d\psi}{d\chi}=6e^{3\chi}-5\eta\mu 5\chi$

2. Έστω χ η τιμή πώλησης πριν την έκπτωση, $\frac{85}{100}\cdot\chi=272\Rightarrow\chi=\frac{272\cdot 100}{85}\Rightarrow\chi=320$

Άρα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης πριν την έκπτωση είναι £320

3. $L=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-\chi+\ln\left(\chi-1\right)}{\chi^2-3\chi+2}=\left(\frac{0}{0}\alpha\varpi\rho o\sigma\delta.\right)$. Κανόνα D' Hospital

$$L=\lim_{x\to 2}\frac{\left[2-\chi+\ln\left(\chi-1\right)\right]'}{\left(\chi^2-3\chi+2\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{-1+\frac{1}{\chi-1}}{2\chi-3}=\frac{-1+1}{4-3}=\frac{0}{1}=0$$

4. $7+\chi+20+\psi+18+10+5=10 \Rightarrow 60+\chi+\psi=100$

$\Rightarrow \boxed{\chi+\psi=40}$

$$\overline{\chi}=\frac{1\cdot 7+2\cdot\chi+3\cdot 20+4\cdot\psi+5\cdot 18+6\cdot 10+7\cdot 5}{100} \Rightarrow$$

$$4=\frac{252+2\chi+4\psi}{100} \Rightarrow \boxed{\chi+2\psi=74}$$

$$\left.\begin{array}{l}\chi+\psi=40\\ \chi+2\psi=74\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\chi=6,\quad \psi=34}$$

Αριθμός μελών χ_i	Οικογένειες f_i
1	7
2	χ
3	20
4	ψ
5	18
6	10
7	5

5. "Α, Β, Α, Κ, Α, Σ"

(α) Πλήθος αναγραμματισμός: $\mathrm{M}_6^{\varepsilon}=\frac{6!}{3!}=4\cdot 5\cdot 6=120$. <u>120 Αναγραμματισμοί</u>

(β) Αναγραμματισμοί που αρχίζουν από Α και τελειώνουν με γράμμα διαφορετικό του Α

γράμμα Α		$\frac{4!}{2!}$			Β ή Κ ή Σ
1					3

$= 3\cdot 4\cdot 3 =$ <u>36 τρόποι</u>

6. $f(\chi)=\alpha\chi^3+\beta\chi+2$, τοπικό ακρότατο (-1,10)

(i) $f(-1)=10 \Rightarrow \alpha(-1)^3+\beta(-1)+2=10 \Rightarrow \alpha+\beta=-8$

$f'(\chi)=3\alpha\chi^2+\beta$, $f'(-1)=0 \Rightarrow 3\alpha(-1)^2+\beta=0 \Rightarrow 3\alpha+\beta=0$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=-8\\ 3\alpha+\beta=0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=4,\quad \beta=-12$$

(ii) $$\psi=\alpha\chi^3+\beta\chi+2,\ \chi\in\mathbb{R} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{d\psi}{d\chi}=12\chi^2-12\\ \dfrac{d\psi}{d\chi}=0\end{array}\right\} \Rightarrow 12\chi^2-12=0 \Rightarrow \chi=1,\ \chi=-1$$

χ	-∞		-1		1		-∞
$\frac{d\psi}{d\chi}$		+	0	–	0	+	
ψ		↗	10	↘	-6	↗	
			max		min		

Στο σημείο $(-1,10)$ έχουμε <u>τοπικό μέγιστο</u>

7. $$\psi=\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{\chi}{3}\right) \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{\chi^2}{9}}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{1}{\sqrt{9-\chi^2}}}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=-\frac{1}{2}(-2\chi)\left(9-\chi^2\right)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=\frac{\chi}{\left(\sqrt{9-\chi^2}\right)^3}}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}-\chi\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)^3=\frac{\chi}{\left(\sqrt{9-\chi^2}\right)^3}-\chi\left(\frac{1}{\sqrt{9-\chi^2}}\right)^3=\cancel{\frac{\chi}{\left(\sqrt{9-\chi^2}\right)^3}}-\cancel{\frac{\chi}{\left(\sqrt{9-\chi^2}\right)^3}}=0$$

8. $\chi\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\psi}{\chi+1}\Rightarrow\frac{d\psi}{\psi}=\frac{d\chi}{\chi(\chi+1)}\Rightarrow\int\frac{d\psi}{\psi}=\int\frac{d\chi}{\chi(\chi+1)}\Rightarrow$

$$\int\frac{d\psi}{\psi}=\int\left(\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\chi+1}\right)d\chi\Rightarrow\ \ln|\psi|=\ln|\chi|-\ln|\chi+1|+\ln|c|\Rightarrow$$

$$\ln|\psi|=\ln\left|\frac{c\cdot\chi}{\chi+1}\right|\Rightarrow\psi=\frac{\mathrm{K}\cdot\chi}{\chi+1}$$

$$\frac{1}{\chi(\chi+1)}=\frac{A}{\chi}+\frac{\mathrm{B}}{\chi+1}\Rightarrow$$

$1=\mathrm{A}(\chi+1)+\mathrm{B}\chi$

$\chi=0\Rightarrow\mathrm{A}=1$

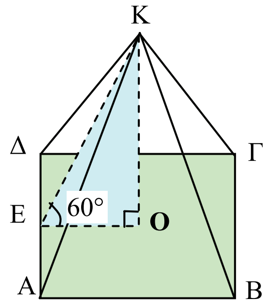
$\chi=-1\Rightarrow\mathrm{B}=-1$

9.

$$\begin{vmatrix}\chi&2&2\\2&\chi&2\\2&2&\chi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\chi+4&\chi+4&\chi+4\\2&\chi&2\\2&2&\chi\end{vmatrix}=(\chi+4)\begin{vmatrix}1&1&1\\2&\chi&2\\2&2&\chi\end{vmatrix}=(\chi+4)\begin{vmatrix}1&0&0\\2&\chi-2&0\\2&0&\chi-2\end{vmatrix}=$$

$$=(x+4)\begin{vmatrix}\chi-2&0\\0&\chi-2\end{vmatrix}=(\chi+4)(\chi-2)^2$$

10. $E_{o\lambda}=12\alpha^2\ cm^2$. Έστω $\mathrm{AB}=\chi\Rightarrow EO=\frac{\chi}{2}$.



Από $\overset{\Delta}{OKE},\left(\hat{\mathrm{O}}=90°\right)\Rightarrow\sigma\upsilon\nu60°=\frac{\frac{\chi}{2}}{\mathrm{EK}}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{EK})=\frac{\chi}{2}\Rightarrow\mathrm{EK}=\chi$

(i) $E_{o\lambda}=\mathrm{E_B}+\mathrm{E}_{\pi\alpha\rho}\Rightarrow12\alpha^2=\chi^2+\frac{1}{2}\cdot4\chi\cdot\chi\Rightarrow\boxed{\chi=2\alpha\,cm}$

(ii) $\overset{\Delta}{\mathrm{OKE}}:\eta\mu60°=\frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{EK}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\mathrm{OK}}{\chi}\Rightarrow\mathrm{OK}=\frac{\chi\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$

$$\upsilon=\mathrm{OK}\Rightarrow\upsilon=\frac{\cancel{2}a\sqrt{3}}{\cancel{2}}\Rightarrow\boxed{\upsilon=\alpha\sqrt{3}}\Rightarrow V_{\pi\upsilon\rho}=\frac{1}{3}\cdot\mathrm{E_B}\cdot\upsilon\Rightarrow V_{\pi\upsilon\rho}=\frac{1}{3}\cdot4a^2\cdot a\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{V=\frac{4\alpha^3\sqrt{3}}{3}cm^3}$$

(iii) Από

$$\overset{\Delta}{\mathrm{EKA}},\left(\hat{\mathrm{E}}=90°\right)\Rightarrow(\mathrm{AK})^2=(\mathrm{EK})^2+(\mathrm{EA})^2\Rightarrow(\mathrm{AK})^2=4\alpha^2+\alpha^2\Rightarrow\boxed{(\mathrm{AK})=\alpha\sqrt{5}\ cm}$$

11. $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\chi+\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\chi\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{2}$ (1)

Θέτω $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\chi=\alpha\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\alpha=\chi\quad0\le\alpha\le\pi$,

Θέτω $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\chi\sqrt{3}\right)=\beta\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\beta=\chi\sqrt{3}\ \ 0\le\beta\le\pi$

$$(1)\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$$

$$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu\beta\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\alpha=+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\beta}\Rightarrow$$

$$\chi=\sqrt{1-3\chi^2}\Rightarrow\chi^2=1-3\chi^2\Rightarrow\chi^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\chi=\pm\frac{1}{2}$$

Για $\chi = \frac{1}{2} \Rightarrow \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\frac{1}{2} + \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (δεκτή)

Για $\chi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{1}{2}\right) + \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2}$ (απορ.)

12. $(C): \chi^2 + \psi^2 + 2g\chi + 2f\psi + c = 0 \quad K(-g,-f), \quad R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

(i) $(c_1): \chi^2 + \psi^2 - 16\psi + 32 = 0 \Rightarrow g_1 = 0,\ f_1 = -8,\ c_1 = 32$

$\Rightarrow K_1(0,8),\ R_1 = \sqrt{64 - 32} \Rightarrow R_1 = 4\sqrt{2}$

$(c_2): \chi^2 + \psi^2 - 18\chi + 2\psi + 32 = 0 \Rightarrow g_2 = -9,\ f_2 = 1,\ c_2 = 32$

$\Rightarrow K_2(9,-1),\ R_2 = \sqrt{81 + 1 - 32} \Rightarrow R_1 = 5\sqrt{2}$

(ii) $\left.\begin{matrix}(K_1K_2) = \sqrt{(0+9)^2 + (-1-8)^2} = 9\sqrt{2} \\ R_1 + R_2 = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow (K_1K_2) = R_1 + R_2$ (εφάπτονται εξωτερικά).

Σημείο επαφής: $\left.\begin{matrix}\chi^2 + \psi^2 - 16\psi + 32 = 0 \\ \chi^2 + \psi^2 - 18\chi + 2\psi + 32 = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 18\chi - 18\psi = 0 \Rightarrow \chi = \psi$

$\left.\begin{matrix}\chi = \psi \\ \chi^2 + \psi^2 - 16\psi + 32 = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \psi^2 - 8\psi + 16 = 0 \Rightarrow (\psi - 4)^2 \Rightarrow \psi = 4,\ \chi = 4 \Rightarrow \Sigma.T.(4,4)$

(iii) $\lambda_{K_1K_2} = \frac{8+1}{-9} = -1,\ (\varepsilon) \perp (K_1K_2) \Rightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \Rightarrow$ εξ. εφαπτ. (ε): $\psi - 4 = \chi - 4 \Rightarrow \boldsymbol{\psi = \chi}$

13. $\chi = \eta\mu^2\theta, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow d\chi = 2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta, \quad \chi = 0 \Rightarrow \theta = 0, \quad \chi = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{\chi}\cdot\sqrt{1-\chi}\ d\chi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta\mu^2\theta}\cdot\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}\cdot 2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot 2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma\upsilon\nu 4\theta)\, d\theta = \left[\frac{\theta}{4} - \frac{\eta\mu 4\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

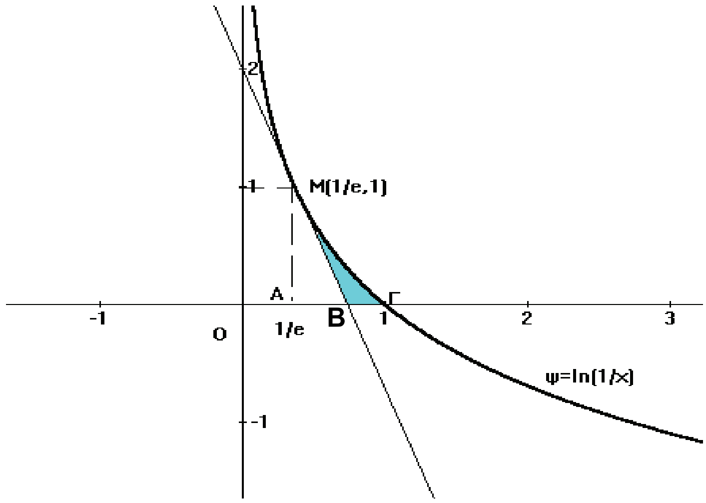
14. $A^2 + 2I = (0) \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & \lambda\end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & -1-\lambda\\ 3+3\lambda & -3+\lambda^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & -1-\lambda\\ 3+3\lambda & -1+\lambda^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}-1-\lambda = 0 \\ 3+3\lambda = 0 \\ -1+\lambda^2 = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

(ii) Από το $A^2 + 2I = (0) \Rightarrow A^2 = -2I \Rightarrow A^{16} = (A^2)^8 = (-2)^8\cdot I^8 \Rightarrow A^{16} = 2^8\cdot I$

$$A^{16}\begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16^5\\ -8^6\end{pmatrix} \Rightarrow 2^8\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16^5\\ -8^6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2^8\chi\\ 2^8\psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16^5\\ -8^6\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$2^8\chi = 16^5 \Rightarrow 2^8\chi = 2^{20} \Rightarrow \boxed{\chi = 2^{12}}, \qquad 2^8\psi = -8^6 \Rightarrow 2^8\psi = -2^{18} \Rightarrow \boxed{\psi = -2^{10}}$



15. $\psi = \ln\dfrac{1}{\chi} \Rightarrow \psi = \ln 1 - \ln\chi \Rightarrow$

$\psi = -\ln\chi \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = -\dfrac{1}{\chi} \Rightarrow$

$\left.\dfrac{d\psi}{d\chi}\right|_{\chi=\frac{1}{e}} = -e \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = -e$

$(\varepsilon): \ \psi - 1 = -e\left(\chi - \dfrac{1}{e}\right) \Rightarrow$

$\psi = -e\chi + 2$,

Τομή εφαπτομένης με τον χ - άξονα:

$\psi = 0 \Rightarrow \chi = \dfrac{2}{e} \Rightarrow B\left(\dfrac{2}{e}, 0\right)$

$V = \pi\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} (\ln\chi)^2\, d\chi - \dfrac{1}{3}\cdot(\mathrm{AM})^2\cdot(\mathrm{AB}) \Rightarrow$

$V = \pi\left[\chi\cdot\ln^2\chi - 2\chi\ln\chi + 2\chi\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \dfrac{1}{3}\pi\cdot 1\left(\dfrac{2}{e} - \dfrac{1}{e}\right) \Rightarrow$

$V = 2\pi - \pi\left(\dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{e} + \dfrac{2}{e}\right) - \dfrac{\pi}{3e} \Rightarrow$

$V = 2\pi - \dfrac{5\pi}{e} - \dfrac{\pi}{3e}$ κ.μ.

$I = \displaystyle\int \ln^2\chi\, d\chi = \chi\cdot\ln^2\chi - \int \chi\cdot 2\ln\chi\cdot\dfrac{1}{\chi}\, d\chi$

$= \chi\cdot\ln^2\chi - 2\displaystyle\int \ln\chi\, d\chi$

$= \chi\cdot\ln^2\chi - 2\left[\chi\ln\chi - \displaystyle\int \chi\cdot\dfrac{1}{\chi}\, d\chi\right]$

$= \chi\cdot\ln^2\chi - 2\chi\ln\chi + 2\chi$

ΜΕΡΟΣ Β'

1. (i) $\psi = \dfrac{\chi - 1}{\chi^2}$. π.ο. $\chi \in \mathbb{R} - \{0\}$, Τομή με χ – άξονα: ψ = 0 ⇒ χ = 1 ⇒ (1,0)

Ασύμπτωτες: Κατακόρυφη χ = 0 , Οριζόντια $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\chi - 1}{\chi^2} = 0 \Rightarrow \psi = 0$

Ακρότατα: $\dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{2 - \chi}{\chi^3}$, $\dfrac{d\psi}{d\chi} = 0 \Rightarrow 2 - \chi = 0 \Rightarrow \chi = 2$

Άρα $\max\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$

χ	−∞		0		2		∞
$\dfrac{d\psi}{d\chi}$		–	‖	+	0	–	
ψ		↘	‖	↗	$\frac{1}{4}$	↘	
					max		

Σημείο καμπής: $\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} = \dfrac{2\chi - 6}{\chi^4}$,

$\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} = 0 \Rightarrow 2\chi - 6 = 0 \Rightarrow \chi = 3$. Άρα Σ.Κ. $\left(3, \dfrac{2}{9}\right)$

χ	−∞		0		3		∞
$\dfrac{d\psi}{d\chi}$		–	‖	–	0	+	
ψ		∩	‖	∩	$\frac{2}{9}$	∪	
					Σ.Κ.		

(ii) $\lambda_\varepsilon = \left.\dfrac{d\psi}{d\psi}\right|_{\chi=1} = \dfrac{2 - 1}{1} = 1 \Rightarrow (\varepsilon): \boxed{\psi = \chi - 1}$.

Σημείο Β: $\left.\begin{aligned}\psi &= \chi - 1\\ \psi &= \frac{\chi-1}{\chi^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi - 1 = \frac{\chi-1}{\chi^2} \Rightarrow \chi = \pm 1 \Rightarrow \mathrm{B}(-1,-2)$

$$E = \frac{\beta\cdot\upsilon}{2} = \frac{(\mathrm{OA})\cdot|\psi_{\mathrm{B}}|}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{E_{(AOB)} = 1\ \tau.\mu.}$$

2. $(\chi+1)\dfrac{d\psi}{d\chi} = \chi\psi + 2, \qquad \chi > -1$

$$I(\chi) = e^{-\int \frac{\chi}{\chi+1}d\chi} = e^{-\int\left(1-\frac{1}{\chi+1}\right)d\chi} = e^{-\chi+\ln|\chi+1|} = e^{-\chi}\cdot(\chi+1)$$

$$\frac{d\psi}{d\chi} - \frac{\chi}{\chi+1}\cdot\psi = \frac{2}{\chi+1} \Rightarrow$$

$$(\chi+1)e^{-x}\cdot\frac{d\psi}{d\chi} - \frac{\chi}{\cancel{\chi+1}}\cdot\cancel{(\chi+1)}e^{-x}\cdot\psi = \frac{2}{\cancel{\chi+1}}\cdot\cancel{(\chi+1)}e^{-x} \Rightarrow (\chi+1)e^{-x}\cdot\psi = 2\int e^{-x}dx \Rightarrow$$

$(\chi+1)e^{-x}\cdot\psi = -2e^{-x} + c$. Για A(0,2) $\Rightarrow$ $2 = -2 + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow (\chi+1)e^{-x}\cdot\psi = -2e^{-x} + 4$

$$\Rightarrow \psi = \frac{-2e^{-x}+4}{(\chi+1)e^{-x}} \Rightarrow \psi = \frac{4e^{x}-2}{\chi+1}$$

3. $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{3}{4}$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \dfrac{3}{5}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \dfrac{9}{10}$

$$P(\Gamma) = P(A\cap B) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{9}{10} = \boxed{\frac{9}{20}}$$

$$\mathrm{P}(\Delta) = \mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \boxed{\frac{3}{20}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}) = \mathrm{P}\left[(\mathrm{A}-\mathrm{B}) + (\mathrm{B}-\mathrm{A})\right] = \mathrm{P}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$= \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - 2\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{18}{20} = \boxed{\frac{9}{20}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B}') = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})' = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = 1 - \frac{9}{10} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{H}) = \mathrm{P}\left(\mathrm{A}/\mathrm{B}\right) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{3}{5}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

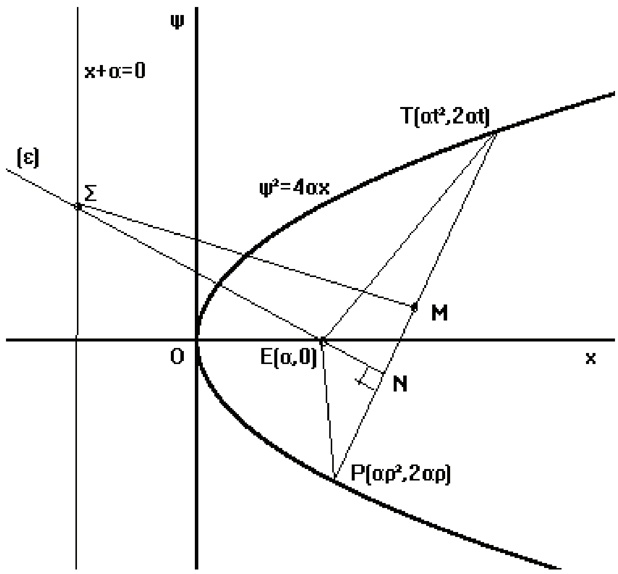
4. $\psi^2 = 4\alpha\chi$, α>0, $T\left(\alpha t^2, 2\alpha t\right)$ και $P\left(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho\right)$.

(i) ΤΡ : $\dfrac{\psi - 2\alpha t}{\chi - \alpha t^2} = \dfrac{2\alpha\rho - 2\alpha t}{\alpha\rho^2 - \alpha t^2} \Rightarrow \dfrac{\psi - 2\alpha t}{\chi - \alpha t^2} = \dfrac{2\alpha\cancel{(\rho - t)}}{\alpha\cancel{(\rho - t)}(\rho + t)}$

$$\Rightarrow (\psi - 2\alpha t)(\rho + t) = 2\left(\chi - \alpha t^2\right) \Rightarrow 2\chi - (t+\rho)\psi + 2\alpha t\rho = 0$$

(ii) Σημείο Σ: $\lambda_{\mathrm{E\Sigma}} = -\dfrac{\rho + t}{2} \Rightarrow$ (ΕΣ): $\psi = -\dfrac{\rho + t}{2}(\chi - \alpha)$

$$\left.\begin{aligned}\chi&=-\alpha\\ \psi&=-\frac{\rho+t}{2}(\chi-\alpha)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Sigma\big(-\alpha,\alpha(\rho+t)\big)$$



Μ μέσο ΤΡ: $\Rightarrow M\left(\frac{\alpha}{2}\left(\rho^2+t^2\right),\alpha(\rho+t)\right)$

$$(\Sigma\mathrm{M})=\sqrt{\left[\frac{\alpha}{2}\left(\rho^2+t^2\right)+\alpha^2\right]^2}=$$

$$=\frac{\alpha}{2}\left(\rho^2+t^2+2\right)$$

$$(TE)=\sqrt{\left(\alpha\rho^2-\alpha\right)^2+(2\alpha\rho)^2}$$

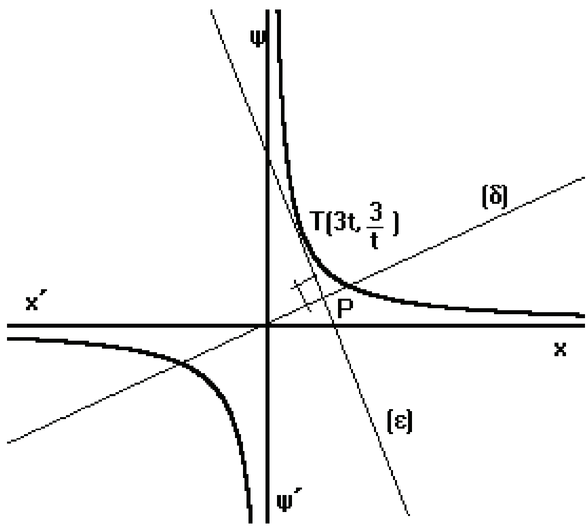
$$=\alpha\sqrt{\rho^4-2\rho^2+1+4\rho^2}\quad ,$$

$$=\alpha\sqrt{\left(\rho^2+1\right)^2}=\alpha\left(\rho^2+1\right)$$

$$(\mathrm{PE})=\alpha\left(t^2+1\right)$$

$$(TE)+(PE)=\alpha\left(\rho^2+1\right)+\alpha\left(t^2+1\right)=\alpha\left(\rho^2+t^2+2\right)=2(\Sigma\mathrm{M})$$

5. $\chi\psi=9\Rightarrow\psi+\chi\cdot\frac{d\psi}{d\chi}=0\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}=-\frac{\psi}{\chi}\Rightarrow$



$$\lambda_{\varepsilon\phi}=\left.\frac{d\psi}{d\chi}\right|_{\substack{\chi=3t\\ \psi=\frac{3}{t}}}=-\frac{\frac{3}{t}}{3t}=-\frac{1}{t^2}$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο Τ:

$$\psi-\frac{3}{t}=-\frac{1}{t^2}(\chi-3t)\Rightarrow t^2\psi-3t=-\chi+3t\Rightarrow$$

$\boxed{t^2\psi+\chi=6t}$ $\quad(\delta)\perp(\varepsilon)\Rightarrow\lambda_\delta=t^2$

Εξίσωση (δ): $\psi=t^2\chi$ (2)

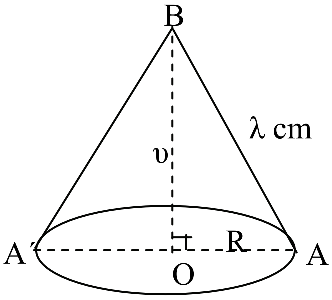
<u>Σημείο Ρ:</u>

$$\left.\begin{aligned}\psi&=t^2\chi\\ t^2\psi-3t&=-\chi+3t\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\psi&=t^2\chi\\ t^4\chi-3t&=-\chi+3t\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\psi&=t^2\chi\\ \chi&=\frac{6t}{t^4+1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\psi&=\frac{6t^3}{t^4+1}\\ \chi&=\frac{6t}{t^4+1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \mathrm{P}\left(\frac{6t}{t^4+1},\frac{6t^3}{t^4+1}\right)$$

<u>Γεωμετρικός τόπος του σημείου Ρ</u>

$$\left.\begin{aligned}\chi&=\frac{6t}{t^4+1}\\ \psi&=\frac{6t^3}{t^4+1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\frac{\psi}{\chi}=t^2\\ &\psi^2\left(t^4+1\right)^2=36t^6\end{aligned}\right\}\Rightarrow\psi^2\frac{\left(\psi^2+\chi^2\right)^2}{\chi^4}=36\frac{\psi^3}{\chi^3}\Rightarrow\boxed{\left(\psi^2+\chi^2\right)^2=36\chi\psi}$$

6. Έστω (ΟΒ) = $\chi \Rightarrow (OA)^2 = \lambda^2 - \chi^2$.



$$V(\chi) = \frac{1}{3}\pi(\lambda^2 - \chi^2)\cdot\chi \Rightarrow V(\chi) = \frac{1}{3}\pi(\lambda^2\chi - \chi^3)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{d\chi} &= \frac{1}{3}\pi(\lambda^2 - 3\chi^2) \\ \frac{dV}{d\chi} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda^2 - 3\chi^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \chi = \dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} \\ \chi = -\dfrac{\lambda}{\sqrt{3}} \quad (\alpha\pi o\rho.) \end{cases}$$

$$\frac{d^2V}{d\chi^2} = \frac{1}{3}\pi(-6\chi) \Rightarrow \frac{d^2V}{d\chi^2} = -2\pi\chi .$$ Για $\chi = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{d^2V}{d\chi^2} = -\frac{2\pi\lambda\sqrt{3}}{3} < 0$

Άρα ο όγκος V γίνεται μέγιστος. $V_{\max} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\lambda^3\sqrt{3}}{3} - \frac{\lambda^3\sqrt{3}}{9}\right) \Rightarrow \boxed{V_{\max} = \frac{2\pi\lambda^3\sqrt{3}}{27}}$

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2000 2001

ΕΝΙΑΙΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Ιούνιος 2001

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

Μέρος Α΄

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε τις 12. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το $\int\left(\chi+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\right)d\chi$

2. Η συνάρτηση $\psi=\chi^2+\beta\chi+\gamma$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο (2,-1). Να βρείτε τις τιμές των α και β.

3. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 4\alpha+\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 4\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\varepsilon\phi 3\alpha$.

4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\chi\to 0}\frac{e^{\chi}\eta\mu\chi-\chi}{\chi^2+2\chi^3}$.

5. Δίνεται ο κύκλος $\chi^2+\psi^2-2\chi-4\psi-4=0$
(α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
(β) Να βρείτε τη θέση του σημείου Α(2,-3) ως προς τον κύκλο.

6. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί μια τετραμελής επιτροπή από μια ομάδα 12 ατόμων αν οι δυο από αυτούς είναι αδέλφια και δεν μπορούν να είναι μαζί στην επιτροπή.

7. Στο ανάπτυγμα $\left(\chi^3+\frac{\alpha}{\chi}\right)^{10}$ ο συντελεστής του χ^{18} είναι 960. Να βρείτε την τιμή του α.

8. Να δείξετε ότι $2\,\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{1}{3}=\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{3}{4}$

9. Αν $\psi=e^{-\chi}\eta\mu 2\chi$ να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{d\chi^2}+2\frac{d\psi}{d\chi}+5\psi=0$.

10. Να βρείτε το $\int\chi^2\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi$

11. Να βρείτε στη μορφή $\psi=f(\chi)$ τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης
$\left(\chi^2-3\chi+2\right)\frac{d\psi}{d\chi}=(\chi+1)\psi$.

12. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi=\chi^2$ και την ευθεία $\psi=2\chi$ κάμνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

13. Να λύσετε την εξίσωση: 2συν2χ+12συνχ-5=0.

14. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης $\chi^2 + \psi^2 = 5$ στο σημείο (1,-2) αυτής.

15. Μια δεξαμενή έχει σχήμα κύβου ακμής 5m. Αν στη δεξαμενή ρίχνουμε νερό με ρυθμό $1m^3$/min , να βρείτε σε cm/min το ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει η επιφάνεια του νερού στη δεξαμενή.

Μέρος Β΄

Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε τις 4. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \dfrac{\chi+1}{\chi^2}$

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τα σημεία καμπής, τις ασύμπτωτες και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

(ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \dfrac{\chi+1}{\chi^2}$, τις ευθείες χ=1, χ=2 και τον άξονα των χ.

2. Να βρείτε στη μορφή $\psi = f(\chi)$ τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$\chi \dfrac{d\psi}{d\psi} - 2\psi = \ln \chi$.

3. (i) Αν $\chi = e^t + 3$, $\psi = 2 + \sigma\upsilon\nu t$ με $t \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$(\chi - 3)^3 \dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} + (\chi - 3)\dfrac{d\psi}{d\chi} + \psi - 2 = 0$.

(ii) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΑΡΑΘΥΡ0 υπάρχουν; Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το γράμμα Α και τελειώνουν με φωνήεν;

4. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi = 4\eta\mu\theta$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ να υπολογίσετε το

$\displaystyle\int_0^2 \frac{\chi^2 d\chi}{\sqrt{16-\chi^2}}$.

5. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\chi\, \sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu^2\chi = 2\,\sigma\upsilon\nu\chi$

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α(-1 ,2), Β(3,0) και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $2\chi + \psi = 7$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Μέρος Α΄

1. $\int\left(\chi+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\right)d\chi=\int\chi d\chi+\int\chi^{-\frac{1}{2}}d\chi=\frac{\chi^2}{2}+2\sqrt{\chi}+c$

2. $\psi=\chi^2+\beta\chi+\gamma \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi}=2\chi+\beta$

$$\left.\begin{array}{l}\psi=\chi^2+\beta\chi+\gamma\\ A(2,-1)\ \ \chi=2,\ \psi=-1\end{array}\right\}-1=2^2+\beta\cdot 2+\gamma\Rightarrow 2\beta+\gamma=-5\quad(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\psi}{d\chi}=2\chi+\beta\\ \frac{d\psi}{d\chi}=0\quad \gamma\iota\alpha\quad \chi=2\end{array}\right\}\Rightarrow 0=2\cdot 2+\beta\Rightarrow\boxed{\beta=-4}\overset{(1)}{\Rightarrow}\boxed{\gamma=3}$$

3. $\frac{\eta\mu 4\alpha+\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 4\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\frac{\cancel{2}\eta\mu 3\alpha\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu 3\alpha\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}=\varepsilon\varphi 3\alpha$.

4. $L=\lim_{\chi\to 0}\frac{e^{\chi}\eta\mu\chi-\chi}{\chi^2+2\chi^3}$ (απρ. της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$, κανόνας του L'Hospital)

$L=\lim_{\chi\to 0}\frac{\left(e^{\chi}\eta\mu\chi-\chi\right)'}{\left(\chi^2+2\chi^3\right)'}=\lim_{\chi\to 0}\frac{e^{\chi}\eta\mu\chi+e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi-1}{2\chi+6\chi^2}$ L (απρ. της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$, κανόνας του L'Hospital)

$=\lim_{\chi\to 0}\frac{\left(e^{\chi}\eta\mu\chi+e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi-1\right)'}{\left(2\chi+6\chi^2\right)'}=\lim_{\chi\to 0}\frac{\cancel{e^{\chi}\eta\mu\chi}+e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi+e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi-\cancel{e^{\chi}\eta\mu\chi}}{2+12\chi}=\lim_{\chi\to 0}\frac{2e^{\chi}\sigma\upsilon\nu\chi}{2+12\chi}=1$

5. $\chi^2+\psi^2-2\chi-4\psi-4=0 \Rightarrow g=-1, f=-2,\ c=-4$

(α) $K(-g,-f)\Rightarrow K(1,2)$.

$R=\sqrt{g^2+f^2-c}\Rightarrow R=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2-(-4)}\Rightarrow R=\sqrt{1+4+4}\Rightarrow R=3$.

(β) Α(2,-3), χ = 2, ψ = -3 . $2^2+(-3)^2-2\cdot 2-4(-3)-4=25>0$ άρα το σημείο (2,-3) βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

6. Υπάρχουν $\binom{2}{1}\cdot\binom{10}{3}$ τρόποι για να εκλεγεί η επιτροπή και να περιλαμβάνει το ένα από τα δύο αδέλφια και $\binom{10}{4}$ τρόποι για να εκλεγεί η επιτροπή και να μη περιλαμβάνει ούτε το ένα ούτε το άλλο από τα δύο αδέλφια.

Άρα υπάρχουν $\binom{2}{1}\cdot\binom{10}{3}+\binom{10}{4}=\frac{2\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=450$ τρόποι για να εκλεγεί η επιτροπή και να μην περιλαμβάνει και τα δύο αδέλφια μαζί.

Διαφορετικά

Υπάρχουν $\binom{12}{4}$=495 τρόποι για να εκλεγεί η επιτροπή χωρίς κανένα περιορισμό.

Υπάρχουν $\binom{10}{2}$=45 τρόποι για να εκλεγεί η επιτροπή και να συμμετέχουν σ' αυτή και τα δύο αδέλφια. Άρα 495 – 45 = 450 .

7. $\left(\chi^3+\frac{\alpha}{\chi}\right)^{10}$ $\qquad T_{\kappa+1}=\binom{10}{\kappa}\cdot\left(\chi^3\right)^{10-\kappa}\cdot\left(\frac{\alpha}{\chi}\right)\cdot\chi^{30-3\kappa-\kappa}\alpha^{\kappa}=960\chi^{18}\Rightarrow 30-4\kappa=18\Rightarrow\kappa=3$

Άρα $\binom{10}{3}\cdot a^3=960\Rightarrow$ 120·α³=960 ⇒ α³ = 8 ⇒ **α =2**

8. $2\,\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{1}{3}=\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{3}{4}$. Θέτω $\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{1}{3}=\alpha\Rightarrow$ εφα = $\frac{1}{3}$, $\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$$\varepsilon\phi2\alpha=\frac{3\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}.\text{Επειδή } 0<2\alpha<\pi\Rightarrow2\alpha=\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{3}{4}\Rightarrow2\,\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{1}{3}=\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{3}{4}$$

9. $\psi=e^{-\chi}\eta\mu2\chi\Rightarrow\underline{\frac{d\psi}{d\chi}=-e^{-\chi}\cdot\eta\mu2\chi+2e^{-\chi}\sigma\upsilon\nu2\chi}\Rightarrow\underline{\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=-3e^{-\chi}\eta\mu2\chi-4e^{-\chi}\sigma\upsilon\nu2\chi}$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}+2\frac{d\psi}{d\chi}+5\psi=\left(-3e^{-\chi}\eta\mu2\chi-4e^{-\chi}\sigma\upsilon\nu2\chi\right)+2\left(-e^{-\chi}\cdot\eta\mu2\chi+2e^{-\chi}\sigma\upsilon\nu2\chi\right)+5\cdot e^{-\chi}\eta\mu2\chi=0$$

.

10. $I=\int\chi^2\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=\int\chi^2\,d\left(\eta\mu\chi\right)=\chi^2\eta\mu\chi-\int\eta\mu\chi\,d\left(\chi^2\right)=\chi^2\eta\mu\chi-2\int\chi\,\eta\mu\chi\,d\chi$

$=\chi^2\eta\mu\chi-2\left[\int\chi\,d\left(-\sigma\upsilon\nu\chi\right)\right]=\chi^2\eta\mu\chi-2\left[-\chi\sigma\upsilon\nu\chi-\int-\sigma\upsilon\nu\chi\,d\left(\chi\right)\right]$

$=\chi^2\eta\mu\chi+2\chi\sigma\upsilon\nu\chi-2\int\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=\underline{\chi^2\eta\mu\chi+2\chi\sigma\upsilon\nu\chi-2\eta\mu\chi+C}$

11. $\left(\chi^2-3\chi+2\right)\frac{d\psi}{d\chi}=\left(\chi+1\right)\psi\Rightarrow$

$\frac{d\psi}{\psi}=\frac{\left(\chi+1\right)d\chi}{\chi^2-3\chi+2}\Rightarrow\int\frac{d\psi}{\psi}=\int\frac{\chi+1}{\left(\chi-1\right)\left(\chi-2\right)}d\chi$

$\Rightarrow\ln|\psi|=\int\frac{-2}{\chi-1}d\chi+\int\frac{3}{\chi-2}d\chi$

$\Rightarrow\ln|\psi|=-2\ln|\chi-1|+3\ln|\chi-2|+C\Rightarrow$

$\frac{\chi+1}{\left(\chi-1\right)\left(\chi-2\right)}=\frac{A}{\chi-1}+\frac{B}{\chi-2}$

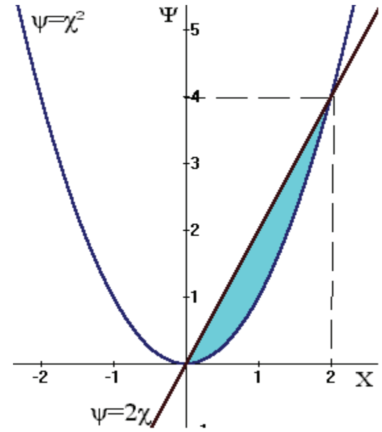
$\chi+1=A\left(\chi-2\right)+B\left(\chi-1\right)$

$\gamma\iota\alpha\;\chi=1\Rightarrow A=-2$

$\gamma\iota\alpha\;\chi=2\Rightarrow B=3$

$$\ln|\psi| = \ln C_1 \frac{|\chi-2|^3}{|\chi-1|^2} \Rightarrow |\psi| = C_1 \frac{|\chi-2|^3}{|\chi-1|^2} \Rightarrow \quad \psi = \kappa \frac{(\chi-2)^3}{(\chi-1)^2}$$

12. $\left.\begin{matrix} \psi = \chi^2 \\ \psi = 2\chi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \chi^2 = 2\chi \Rightarrow \chi(\chi-2) = 0 \Rightarrow \chi = 0, \quad \chi = 2$



$$V = \pi\int_0^2\left[(2\chi)^2 - (\chi^2)^2\right] d\chi \Rightarrow$$

$$V = \pi\int_0^2 (4\chi^2 - \chi^4)\, d\chi = \pi\left[\frac{4}{3}\chi^3 - \frac{1}{5}\chi^5\right]_0^2 \Rightarrow$$

$$V = \pi\left(\frac{4}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{5}\cdot 2^5\right) - 0 = \frac{64}{15}\pi \ \kappa\upsilon\beta.\ \mu o\nu.$$

13. 2συν2χ+12συνχ-5=0 $\Rightarrow 2(2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1) + 12\sigma\upsilon\nu\chi - 5 = 0 \Rightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2\chi + 12\sigma\upsilon\nu\chi - 7 = 0$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{-12 \pm \sqrt{144+112}}{8} = \frac{-12 \pm 16}{8} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \chi = 360°\kappa \pm 60° \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ -\dfrac{28}{8} & \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

14. $\chi^2 + \psi^2 = 5 \Rightarrow 2\chi + 2\psi\frac{d\psi}{d\chi} = 0 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = -\frac{\chi}{\psi}$. Στο (1,-2) $\Rightarrow \underline{\lambda_{\varepsilon\phi} = \frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{\lambda_{\kappa\alpha\theta} = -2}$

Εξίσωση εφαπτομένης: $\psi + 2 = \frac{1}{2}(\chi - 1) \Rightarrow \boxed{\chi - 2\psi - 5 = 0}$

Εξίσωση κάθετης: $\psi + 2 = -2(\chi - 1) \Rightarrow \boxed{2\chi + \psi = 0}$

15. $\frac{dV}{dt} = 1\ m^3/\min,\ V = 25h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 25\cdot\frac{dh}{dt} \Rightarrow 1 = 25\cdot\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{25} m/\min \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = 4cm/\min}$

<u>Μέρος Β΄</u>

1. $\psi = \frac{\chi+1}{\chi^2}$. <u>Πεδίο ορισμού</u> : $\chi \in \mathbb{R} - \{0\}$

<u>Σημεία τομής με άξονες</u>: ψ = 0 ⇒ χ = -1 ⇒ (-1,0)
<u>Κατακόρυφη ασύμπτωτη</u>: χ = 0.

Οριζόντια: $\lim_{x\to\infty}\psi = \lim_{x\to\infty}\frac{\chi+1}{\chi^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2}\right) = 0 \Rightarrow$ <u>Οριζόντια ασύμπτωτη</u>: ψ = 0

$$\psi=\frac{\chi+1}{\chi^2}\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\chi^2-2\chi(\chi+1)}{\chi^4}\Rightarrow$$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{-\chi^2-\chi}{\chi^4}\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{-\chi-2}{\chi^4}=0\Rightarrow$$

$$\chi=-2$$

χ	$-\infty$		-2		0		∞
$\frac{d\psi}{d\chi}$		–	0	+	||	–	
ψ		↘	$-\frac{1}{4}$	↗	||	↘	
			min				

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$.

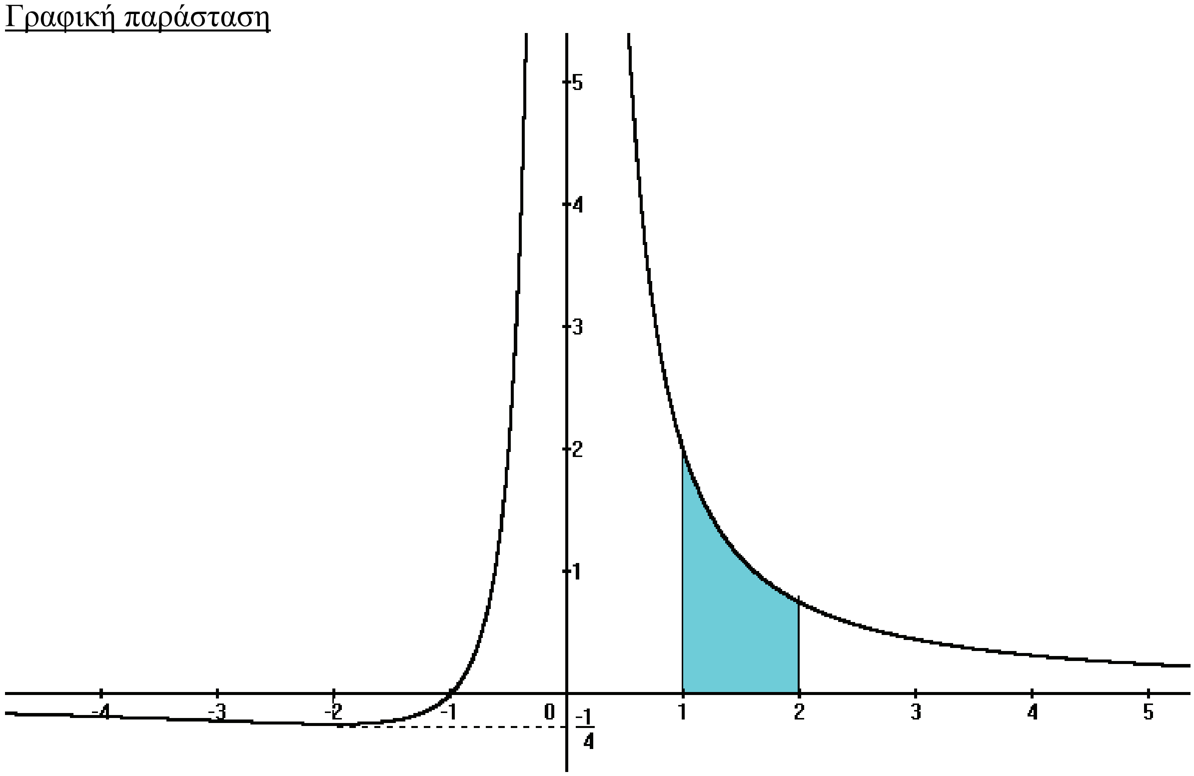
$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{d\chi^2}&=\frac{2\chi+6}{\chi^4}\\ \frac{d^2\psi}{d\chi^2}&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\chi=-3$$

χ	$-\infty$		-3		0		∞
$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}$		–	0	+	||	+	
ψ		∩	$\frac{2}{9}$	∪	||	∪	
			Σ.Κ.				

Για χ = -3 η $\frac{d^2\psi}{d\chi^2}$ αλλάζει πρόσημο, άρα

έχουμε σημείο καμπής Σ.Κ. $\left(-3,-\frac{2}{9}\right)$

<u>Γραφική παράσταση</u>



<u>Εμβαδόν</u> $E=\int_1^2\frac{\chi+1}{\chi^2}\,d\chi\ \Rightarrow\ E=\int_1^2\left(\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}\right)d\chi\Rightarrow E=\left[\ln|\chi|-\frac{1}{\chi}\right]_1^2\Rightarrow$

$$E=\ln 2-\frac{1}{2}-\ln 1+1\Rightarrow E=\frac{1}{2}+\ln 2$$

2. $\chi \frac{d\psi}{d\psi} - 2\psi = \ln\chi \Rightarrow \frac{d\psi}{d\psi} - \frac{2}{\chi}\psi = \frac{1}{\chi}\ln\chi \Rightarrow$

Παράγοντας ολοκλήρωσης $I = e^{\int -\frac{2}{\chi}d\chi} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \chi^{-2} = \frac{1}{\chi^2}$

$$\frac{1}{\chi^2}\cdot\frac{d\psi}{d\psi} - \frac{2}{\chi^3}\cdot\psi = \frac{1}{\chi^3}\cdot\ln\chi \Rightarrow \frac{1}{\chi^2}\cdot\psi = \int \frac{1}{\chi^3}\cdot\ln\chi\, d\chi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\chi^2}\cdot\psi = \int \ln\chi\, d\left(\frac{\chi^{-2}}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\chi^2}\cdot\psi = -\frac{\chi^{-2}}{2}\ln\chi - \int -\frac{\chi^{-2}}{2}\, d(\ln\chi) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\chi^2}\cdot\psi = -\frac{1}{2\chi^2}\ln\chi + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\chi^2}\cdot\frac{1}{\chi}d\chi \Rightarrow \frac{1}{\chi^2}\cdot\psi = -\frac{1}{2\chi^2}\ln\chi + \frac{1}{2}\int \chi^{-3}\, d\chi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\chi^2}\cdot\psi = -\frac{1}{2\chi^2}\ln\chi + \frac{1}{2}\cdot\frac{\chi^{-2}}{-2} + C \Rightarrow \frac{1}{\chi^2}\cdot\psi = -\frac{1}{2\chi^2}\ln\chi - \frac{1}{4\chi^2} + C \Rightarrow \boxed{\psi = -\frac{1}{2}\ln\chi - \frac{1}{4} + C\chi^2}$$

3. (i) $\chi = e^t + 3$, $\psi = 2 + \sigma\upsilon\nu t$ με $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d\chi}{dt} = e^t,\ \frac{d\psi}{d\chi} = -\eta\mu t \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\chi}{dt}} = \frac{-\eta\mu t}{e^t} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = -e^{-t}\eta\mu t$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)}{\frac{d\chi}{dt}} \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(-e^{-t}\eta\mu t\right)}{e^t} \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{e^{-t}\eta\mu t - e^{-t}\sigma\upsilon\nu t}{e^t} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = e^{-2t}\left(\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t\right)$$

$$(\chi-3)^3\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + (\chi-3)\frac{d\psi}{d\chi} + \psi - 2 = e^{2t}\left[e^{-2t}\left(\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t\right)\right] + e^t\left(-e^{-t}\eta\mu t\right) + 2 + \sigma\upsilon\nu t =$$

$$= \eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t = 0.$$

(ii) “Π, Α, Ρ, Α, Θ, Υ, Ρ, 0”

(α) $\frac{8!}{2!\cdot 2!} = 10080$ (β) $3\cdot\frac{6!}{2!} = 1080$ αρχίζουν με το γράμμα Α και τελειώνουν με φωνήεν;

4. $\chi = 4\eta\mu\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow d\chi = 4\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta$. Για χ = 0 ⇒ θ =0. Για χ = 2 ⇒ $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\int_0^2 \frac{\chi^2 d\chi}{\sqrt{16-\chi^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{16\eta\mu^2\theta\cdot 4\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta}{\sqrt{16-16\eta\mu^2\theta}} = 16\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\theta\cdot \cancel{4\sigma\upsilon\nu\theta}\, d\theta}{\cancel{4\sigma\upsilon\nu\theta}} = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\sigma\upsilon\nu 2\theta\right)d\theta =$$

$$8\left[\theta - \frac{1}{2}\eta\mu 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 8\left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\eta\mu 2\frac{\pi}{6}\right] - 8\left[0 - \frac{1}{2}\eta\mu 0\right] = 8\left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

5. $\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu^2\chi = 2\,\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi\left(\eta\mu\chi + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\chi - 2\right) = 0 \Rightarrow$

(i) $\sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Rightarrow \chi = 360°\kappa + 90°, \qquad \kappa \in \mathbb{Z}$

(ii) $\eta\mu\chi + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\chi - 2 = 0 \Rightarrow \eta\mu\chi + \dfrac{\eta\mu 60°}{\sigma\upsilon\nu 60°}\sigma\upsilon\nu\chi - 2 = 0 \Rightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 60°\eta\mu\chi + \eta\mu 60°\,\sigma\upsilon\nu\chi = 2\sigma\upsilon\nu 60° \Rightarrow \eta\mu\left(\chi + 60°\right) = 2\cdot\dfrac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\left(\chi + 60°\right) = 1 \Rightarrow$

$\eta\mu\left(\chi + 60°\right) = \eta\mu 90^0 \Rightarrow \chi + 60^0 = 360^0\kappa + 90^0 \Rightarrow \chi = 360^0\kappa + 30^0, \qquad \kappa \in \mathbb{Z}$

6. Έστω ότι η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $\chi^2 + \psi^2 + 2g\chi + 2f\psi + c = 0$

$K\left(-g,-f\right), \quad R = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

Το κέντρο $K\left(-g,-f\right)$ ανήκει στην ευθεία $2\chi + \psi = 7 \Rightarrow 2\left(-g\right) + \left(-f\right) = 7 \Rightarrow$

$2g + f = -7$ (1)

Τα σημεία Α(-1 ,2), Β(3,0) ανήκουν στον κύκλο $\Rightarrow$

$1 + 4 - 2g + 4f + c = 0 \Rightarrow -2g + 4f + c = -5$ (2)

$9 + 0 + 6g + 0 + c = 0 \Rightarrow 6g + c = -9$ (3)

(1) ^(2)^(3) $\Rightarrow \begin{cases} 2g + f = -7 \\ -2g + 4f + c = -5 \\ 6g + c = -9 \end{cases} \Rightarrow g = -2, \quad f = -3, \quad c = 3 \Rightarrow \boxed{\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 6\psi + 3 = 0}$

ή 2ος τρόπος

Το κέντρο του κύκλου ανήκει στην ευθεία $2\chi + \psi = 7$ και στην μεσοκάθετο ευθεία του τμήματος ΑΒ όπου Α(-1,2) και Β(3,0).

$\lambda_{AB} = \dfrac{\psi_B - \psi_A}{\chi_B - \chi_A} \Rightarrow \lambda_{AB} = \dfrac{0-2}{3+1} \Rightarrow \lambda_{AB} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \lambda_\kappa = 2$

Μ μέσο ΑΒ $\Rightarrow \chi_M = \dfrac{-1+3}{2} = 1, \quad \psi_M = \dfrac{2+0}{2} = 1 \Rightarrow M(1,1)$

Εξ. μεσοκαθέτου ΑΒ: $\psi - \psi_M = \lambda_\kappa\left(\chi - \chi_M\right) \Rightarrow \psi - 1 = 2\left(\chi - 1\right) \Rightarrow 2\chi - \psi = 1$

$2\chi + \cancel{\psi} = 7$

$2\chi - \cancel{\psi} = 1$

$4\chi = 8 \Rightarrow \chi = 2 \Rightarrow \psi = 3 \Rightarrow K\left(2,3\right)$

$R = \left(KA\right) = \sqrt{\left(2-\left(-1\right)\right)^2 + \left(3-1\right)^2}$

$R = \sqrt{9+1} \Rightarrow R = \sqrt{10}$

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι:

$\left(\chi - 2\right)^2 + \left(\psi - 3\right)^2 = 10 \Rightarrow \quad \boxed{\chi^2 + \psi^2 - 4\chi - 6\psi + 3 = 0}$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4** Ιούλιος 2001

Χρόνος : 3 ώρες

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = (\chi - \alpha)e^{-\chi}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.Να υπολογίσετε την τιμή του α, ώστε να ισχύει η σχέση $\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2} = (\chi + 1)e^{-\chi}$

2. Έμπορος εισάγει αυτοκίνητα και τα πωλεί με κέρδος 20% πάνω στην τιμή κόστους τους. Ένας καταναλωτής αγοράζει ένα αυτοκίνητο πληρώνοντας επιπλέον 10% Φ.Π.Α. επί της αναγραφόμενης τιμής πώλησης. Αν ο καταναλωτής αγόρασε το αυτοκίνητο προς £2112 να βρείτε την τιμή στην οποία αγόρασε ο έμπορος το αυτοκίνητο.

3. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $(\chi^2 - 9)\dfrac{d\psi}{d\chi} = \psi$.

4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $\psi = 2\chi$ και εφάπτεται του άξονα των y στο σημείο (0,3).

5. Να δείξετε ότι $2\ \tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{1}{3} + \tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$.

6. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 9 διαφορετικά δώρα σε τέσσερα παιδιά αν θα δώσουμε πρώτα στο πιο μικρό παιδί 3 δώρα και στα άλλα 3 παιδιά από 2 δώρα στο καθένα. (Μπορείτε να αφήσετε την απάντησή σας σε παραγοντική μορφή).

7. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\int_e^x \ln t \, dt}{x - e}$

8. Δίνεται ο πίνακας $A(\chi) = \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ \ln\chi & \chi \end{pmatrix}, \quad \chi \in \mathbb{R}^+$.

α) Να δείξετε ότι $A(\chi)\cdot A(\psi) = A(\chi\psi)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A^3(\chi) = I$, όπου I ο μοναδιαίος 2x2 πίνακας.

γ) Να βρείτε την τιμή του λ, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, για την οποία ισχύει: $A(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = A(\lambda)\cdot A\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$

9. Δίνεται η παραβολή $\psi = \chi^2$ και τα σημεία της Α(-1, 1) και Β(2, 4). Να βρείτε το σημείο Γ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της χορδής ΑΒ και της παραβολής ισούται με τα $\dfrac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 1 - \dfrac{\chi}{\chi^2 + \alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(\chi)$ έχει ακρότατα τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τότε δεν έχει ακρότατα.

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \dfrac{\chi - 2}{\chi + 1}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τις εξισώσεις των ασύμπτωτων και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Σε ξεχωριστό σύστημα αξόνων να κάνετε τη γραφική παράσταση της καμπύλης με εξίσωση $\psi = \left|\dfrac{\chi - 2}{\chi + 1}\right|$.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από την καμπύλη $\psi = \left|\dfrac{\chi - 2}{\chi + 1}\right|$, την οριζόντια ασύμπτωτη της και την ευθεία χ=1.

2. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $\chi^2 \dfrac{d\psi}{d\chi} + 2\psi^2 = 3\chi\psi, \quad \chi > 0$. Να δείξετε ότι με την αντικατάσταση $\psi = \dfrac{1}{z}$ (z συνάρτηση του χ) η εξίσωση μετασχηματίζεται στη $\chi^2 \dfrac{dz}{d\chi} + 3\chi z = 2$. Στη συνέχεια να βρείτε, στη μορφή $\psi = f(x)$, την ειδική λύση της εξίσωσης $\chi^2 \dfrac{d\psi}{d\chi} + 2\psi^2 = 3\chi\psi$ για την οποία είναι ψ =1 όταν χ=1.

3. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\alpha\chi$ και το σημείο της $P(\alpha t^2, 2\alpha t)$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$

(α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Ρ έχει εξίσωση
$\chi - t\psi + \alpha t^2 = 0$

(β) Η εφαπτομένη της παραβολής τέμνει τον άξονα των γ στο σημείο Τ. Να δείξετε ότι ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Ρ, Τ και την αρχή Ο των αξόνων έχει κέντρο το σημείο $K\left(\dfrac{\alpha t^2}{2} + \alpha, \dfrac{\alpha t}{2}\right)$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Κ, καθώς το t μεταβάλλεται.

4. Οι έδρες ενός πράσινου ζαριού φέρουν ενδείξεις τους αριθμούς 1,1,1,2,2,3 και οι έδρες ενός κόκκινου ζαριού, τους αριθμούς 1,2,2,3,3,3.

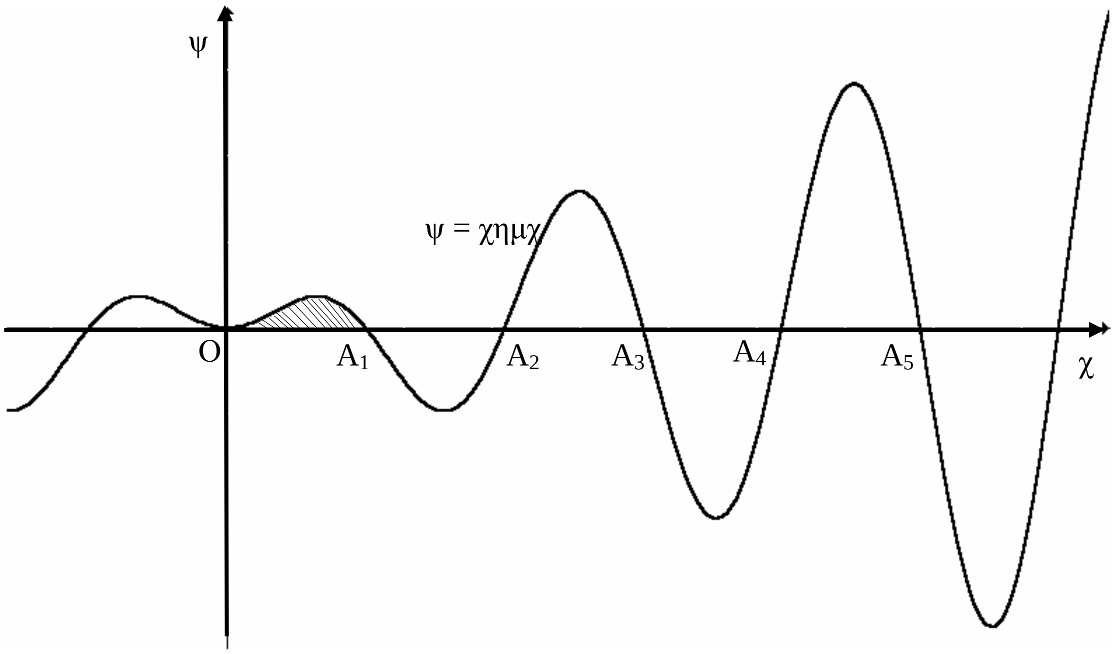
(α) Ρίχνουμε ταυτόχρονα τα δύο ζάρια.

(i) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα ενδείξεων μεγαλύτερο από το 4

(ii) Να δείξετε ότι η πιθανότητα να φέρουμε την ίδια ένδειξη και στα δύο ζάρια είναι $\dfrac{10}{36}$

(β) Ρίχνουμε τα ζάρια ταυτόχρονα και επαναλαμβάνουμε μέχρι να φέρουμε την ιδια ένδειξη και στα δύο ζάρια. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να το επιτύχουμε για πρώτη φορά στο τρίτο ρίξιμο.

5.



Στο πιο πάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με εξίσωση $\psi = \chi\eta\mu\chi$. Η γραφική παράσταση τέμνει τον ημιάξονα Οx στα σημεία Ο, A_1, A_2, A_3, … .

Το γραμμοσκιασμένο χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη και το τμήμα OA_1 του άξονα των χ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των χ. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α’

1. $\psi = (\chi-\alpha)e^{-\chi} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = e^{-\chi} - (\chi-\alpha)e^{-\chi} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = e^{-\chi}(1-\chi+\alpha)$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = -e^{-\chi}(1-\chi+\alpha) - e^{-\chi} \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = e^{-\chi}(\chi-\alpha-2) \quad (1)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = (\chi+1)e^{-\chi} \overset{(1)}{\Rightarrow} e^{-\chi}(\chi-\alpha-2) = (\chi+1)e^{-\chi} \overset{(e^{-\chi}\neq 0)}{\Rightarrow} \chi-\alpha-2 = \chi+1 \Rightarrow \boxed{\alpha=-3}$$

2. *Κόστος* *Τιμή πώλησης* *Τιμή πώλησης+ΦΠΑ*

Κόστος	Τιμή πώλησης	Τιμή πώλησης+ΦΠΑ
100	120	132
χ;		2112

$\chi = \dfrac{2112 \cdot 100}{132} = 1600 \Rightarrow$ *Ο έμπορος αγόρασε το αυτοκίνητο £1600.*

3. $(\chi^2-9)\dfrac{d\psi}{d\chi} = \psi \Rightarrow \displaystyle\int \frac{d\psi}{\psi} = \int \frac{d\chi}{\chi^2-9} \Rightarrow \ln|\psi| = \int \frac{d\chi}{(\chi-3)(\chi+3)} \Rightarrow$

$$\ln|\psi| = \frac{1}{6}\int\frac{d\chi}{\chi-3} - \frac{1}{6}\int\frac{d\chi}{\chi+3} \Rightarrow \ln|\psi| = \frac{1}{6}\ln|\chi-3| - \frac{1}{6}\ln|\chi+3| + \ln c_1 \Rightarrow$$

$$|\psi| = \left|c_2 \cdot \frac{\chi-3}{\chi+3}\right|^{\frac{1}{6}} \Rightarrow \boxed{\psi = \kappa \cdot \sqrt[6]{\frac{\chi-3}{\chi+3}}}$$

4. ***α΄ τρόπος***

Έστω ότι η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου έχει εξίσωση:

(c): $\chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0$, $K(-g,-f)$, $K \in (\varepsilon): \psi = 2\chi \Rightarrow \underline{f=2g}$ *(1)*

Ο κύκλος εφάπτεται του άξονα ψψ΄ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \chi^2+\psi^2+2g\chi+2f\psi+c=0 \\ \chi=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi^2+2f\psi+c=0 \overset{\Delta=0}{\Rightarrow} 4f^2-4c=0 \Rightarrow \underline{f^2=c} \quad (2)$$

Το σημείο (0,3) ανήκει στον κύκλο (c) $\Rightarrow$ $0+9+0+6f+c=0 \Rightarrow \underline{9+6f+c=0}$ *(3)*

$$\left.\begin{array}{l} f=2g \\ 9+6f+c=0 \\ f^2=c \end{array}\right\} \Rightarrow 9+6f+f^2=0 \Rightarrow (f+3)^2=0 \Rightarrow \underline{f=-3} \Rightarrow \underline{g=-\frac{3}{2}} \Rightarrow \underline{c=9}$$

$$\Rightarrow (c): \boxed{\chi^2+\psi^2-3\chi-6\psi+9=0}$$

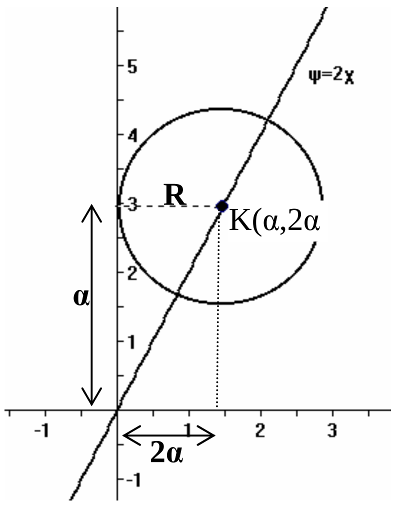
β' τρόπος

(ε) : $\psi = 2\chi$

$$\mathrm{K} \in (\varepsilon) \Rightarrow \mathrm{K}(\alpha, 2\alpha). \Rightarrow 2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{K}\left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

$$R = \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\chi - \frac{3}{2}\right)^2 + (\psi-3)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$(c): \boxed{\chi^2+\psi^2-3\chi-6\psi+9=0}$$



5.

$$\begin{array}{ll} \tau o\xi \varepsilon\phi \frac{1}{3} = \alpha \Leftrightarrow \varepsilon\phi\alpha = \frac{1}{3}, & 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \\ \tau o\xi \varepsilon\phi \frac{1}{7} = \beta \Leftrightarrow \varepsilon\phi\beta = \frac{1}{7}, & 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \end{array} . \quad \begin{array}{l} 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \\ \hline 0 < 2\alpha + \beta < \frac{3\pi}{4} \end{array}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon\phi(2\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\phi 2\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi 2\alpha\, \varepsilon\phi\beta} = \frac{\frac{2\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{2\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{7}} = 1 \Rightarrow \varepsilon\phi(2\alpha+\beta) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\phi\left(2\alpha+\beta\right)=1 \\ 0<2\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\alpha+\beta=\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\ \tau o\xi\varepsilon\phi\frac{1}{3}+\tau o\xi\varepsilon\phi\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

6. $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=\dfrac{9!}{6!\cdot 3!}\cdot\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 1=\dfrac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}=7560$

7. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\int_e^x \ln t\ dt}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{t\ln t-1|_e^\chi}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\chi\ln\chi-\chi-\cancel{e}+\cancel{e}}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\chi\ln\chi-\chi}{x-e}$

$=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e-e}{e-e}$ *(Απροσδ.* $\dfrac{0}{0}$*)*$=\ \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\chi+1-1}{x-e}=\ln e=1$

8. *(α)* $\mathrm{A}(\chi)\cdot\mathrm{A}(\psi)=\begin{pmatrix}\chi & 0\\ \ln x & \chi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\psi & 0\\ \ln\psi & \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi\psi & 0\\ \chi\psi\ln\chi+\chi\psi\ln\psi & \chi\psi\end{pmatrix}=A(\chi\psi)$

(β) $\mathrm{A}^2(\chi)=\mathrm{A}(\chi)\cdot\mathrm{A}(\chi)\overset{(\alpha)}{=}\mathrm{A}(\chi\cdot\chi)=\mathrm{A}(\chi^2)=\chi^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ \ln\chi^2 & 1\end{pmatrix}$

$\mathrm{A}^3(\chi)=\mathrm{A}^2(\chi)\cdot\mathrm{A}(\chi)=\mathrm{A}(\chi^2)\cdot\mathrm{A}(\chi)=\mathrm{A}(\chi^2\cdot\chi)=\mathrm{A}(\chi^3)=\begin{pmatrix}\chi^3 & 0\\ \ln\chi^3 & \chi^3\end{pmatrix}$

$\mathrm{A}^3(\chi)=\mathrm{I}\Rightarrow\begin{pmatrix}\chi^3 & 0\\ \ln\chi^3 & \chi^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\chi^3=1\ \kappa\alpha\iota\ \chi^3\ln\chi^3=0\ \Rightarrow\chi=1$

(γ) $\mathrm{A}(\lambda^2-2\lambda+1)=\mathrm{A}(\lambda)\cdot\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\overset{(\alpha)\wedge(\beta)}{\Rightarrow}\mathrm{A}(\lambda-1)^2=\mathrm{A}\left(\cancel{\chi}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\chi}}\right)=A(1)\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}(\lambda-1)^2 & 0\\ \ln(\lambda-1)^2 & (\lambda-1)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \ln 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}(\lambda-1)^2 & 0\\ (\lambda-1)^2\ln(\lambda-1)^2 & (\lambda-1)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$(\lambda-1)^2=1$ *και* $(\lambda-1)^2\ln(\lambda-1)^2=0\ \Rightarrow\lambda^2-2\lambda=0\Rightarrow\underline{\lambda=2}$ *ή* $\lambda=0$ *απορρ.*

9. $\mathrm{A}(-1,1)\qquad B(2,4)\qquad\Rightarrow$

$\lambda_{\mathrm{AB}}=\dfrac{4-1}{2+1}=1\qquad$ *(εφ) // AB* $\quad\Rightarrow$

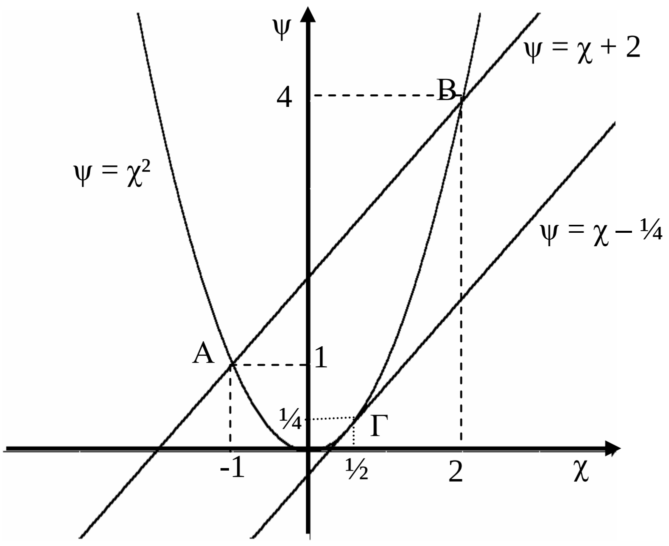
$\lambda_{\varepsilon\phi}=\lambda_{\mathrm{AB}}\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\phi}=1\quad$ *(1)*

$\psi=\chi^2\Rightarrow\dfrac{d\psi}{d\chi}=2\chi\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$2\chi=1\Rightarrow\chi=\dfrac{1}{2},\ \psi=\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow\ \Gamma\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$

Εξίσωση ΑΒ:

$\psi-1=1(\chi+1)\Rightarrow\qquad\psi=\chi+2$



$$E=\int_{-1}^{2}\left(\chi+2-\chi^2\right)d\chi=\left[\frac{\chi^2}{2}+2\chi-\frac{\chi^3}{3}\right]_{-1}^{2}\Rightarrow\quad \mathrm{E}=\frac{9}{2}\ \ \tau.\mu.$$

$$\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-1&1&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{4}&1\\ 2&4&1\end{vmatrix}\right|=\frac{27}{8}\ \tau.\mu.\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{E}}{\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{27}{8}}=\frac{4}{3}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{E}=\frac{4}{3}\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)$$

10. $f\left(\chi\right)=1-\dfrac{\chi}{\chi^2+\alpha}\Rightarrow\dfrac{df}{d\chi}=\dfrac{\chi^2-a}{\left(\chi^2+\alpha\right)^2}$

Αν η συνάρτηση $f\left(\chi\right)$ *έχει ακρότατα τότε* $\dfrac{df}{d\chi}$ *= 0 για κάποιες τιμές του α, δηλ.* $\chi^2-\alpha=0$ *έχει λύσεις στο* $\mathbb{R}$ *, άρα α > 0.*

α > 0 $\Rightarrow$ *ο παρονομαστής της συνάρτησης* $f\left(\chi\right)$ *δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.*

Αν η $f\left(\chi\right)$ *έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες, τότε η εξίσωση* $\chi^2+\alpha=0$ *έχει λύσεις στο* $\mathbb{R}$ *, δηλαδή α < 0. Στην περίπτωση αυτή όμως ο αριθμητής της* $\dfrac{df}{d\chi}$ *δεν μηδενίζεται και η* $f\left(\chi\right)$ *δεν έχει ακρότατα.*

Αν α = 0, τότε η $f\left(\chi\right)=1-\dfrac{1}{\chi}$ *έχει ασύμπτωτη την ευθεία χ = 0 και η* $\dfrac{df}{d\chi}=\dfrac{1}{\chi^2}\neq 0$ *, άρα δεν έχει ακρότατα.*

ΜΕΡΟΣ Β’

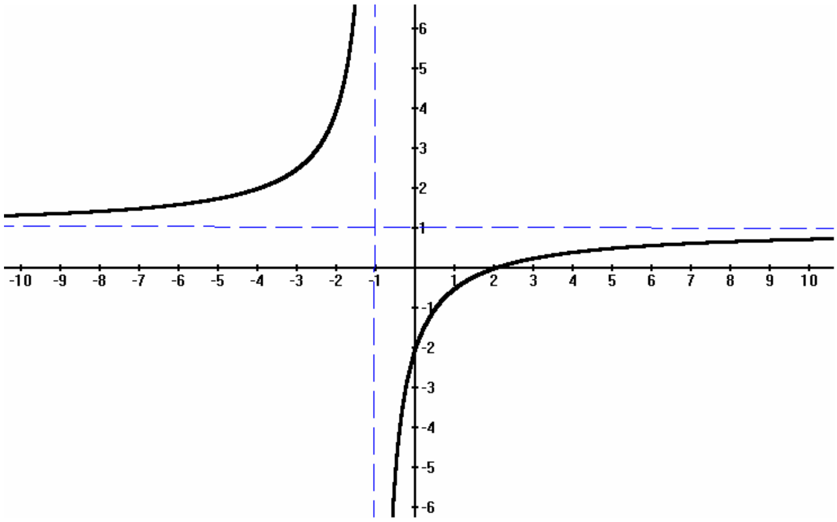
1. *(α)* $\psi=\dfrac{\chi-2}{\chi+1}$, $\chi\in\mathbb{R}-\{-1\}$ *πεδίο ορισμού.*

Τομές με άξονες: Για χ = 0 ⇒ ψ = -2 ⇒ (0,-2). Για ψ=0 ⇒ χ=2 ⇒ (2,0)

Κατακόρυφος ασύμπτωτος: χ=–1, Οριζόντια ασύμπτωτος: ψ=1

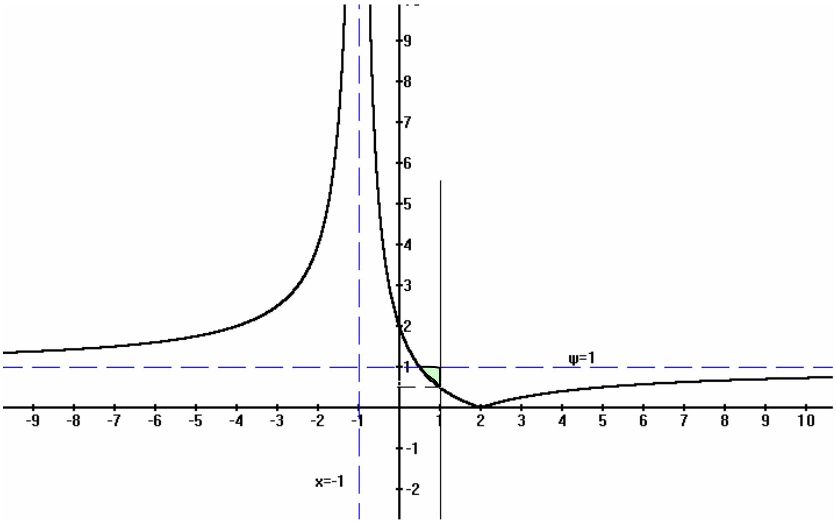
$$\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\left(\chi+1\right)-\left(\chi-2\right)}{\left(\chi+1\right)^2}=\frac{3}{\left(\chi+1\right)^2}>0\Rightarrow\frac{d\psi}{d\chi}>0\quad\forall\chi\in\mathbb{R}-\{-1\}$$

χ	$-\infty$	-1		∞
$\dfrac{d\psi}{d\chi}$	+	//	+	
ψ	↗	//	↗	



$\psi=\dfrac{\chi-2}{\chi+1}$,

$\chi\in\mathbb{R}-\{-1\}$



$$\psi = \left|\frac{\chi-2}{\chi+1}\right|$$
$$\chi \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\psi = \frac{\chi-2}{\chi+1},\ \psi=1 \Rightarrow$$
$$1 = \frac{\chi-2}{\chi+1} \Rightarrow \chi = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{E} = \int_{1/2}^{1}\left(1+\frac{\chi-2}{\chi+1}\right)d\chi \Rightarrow$$
$$\mathrm{E} = \int_{1/2}^{1}\left(1+\frac{\chi+1-3}{\chi+1}\right)d\chi$$

$$\Rightarrow \mathrm{E} = \int_{1/2}^{1}\left(2-\frac{3}{\chi+1}\right)d\chi \Rightarrow \mathrm{E} = 2\chi - 2\ln|\chi+1|\Big]_{1/2}^{1} \Rightarrow \mathrm{E} = 1+3\ln\frac{3}{4}$$

2. $\chi^2\dfrac{d\psi}{d\chi} + 2\psi^2 = 3\chi\psi,\quad \chi>0.\qquad \psi = \dfrac{1}{z} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{d\psi}{dz}\cdot\dfrac{dz}{d\chi} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = -\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{dz}{d\chi}$

$$\chi^2\left(-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{d\chi}\right) + 2\cdot\frac{1}{z^2} = 3\chi\cdot\frac{1}{z} \Rightarrow \chi^2\frac{dz}{d\chi} + 3\chi z = 2 \Rightarrow \frac{dz}{d\chi} + \frac{3}{\chi}\cdot z = \frac{2}{\chi^2}\ \ (1)$$

$$\mathrm{I} = e^{\int\frac{3}{x}dx} = e^{3\ln\chi} = e^{\ln\chi^3} = \chi^3 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \chi^3\frac{dz}{d\chi} + \chi^{\cancel{3}2}\frac{3}{\cancel{\chi}}\cdot z = \chi^{\cancel{3}}\frac{2}{\cancel{\chi^2}} \Rightarrow \frac{d}{d\chi}\left(\chi^3 z\right) = 2\chi \Rightarrow$$

$$\chi^3 z = \int 2\chi d\chi \Rightarrow \chi^3 z = \chi^2 + c \Rightarrow \frac{\chi^3}{\chi^2+c} = \frac{1}{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{\chi^3}{\chi^2+c}\quad \textit{γενική λύση}$$

Για $\chi=1,\ \psi=1 \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{1+c} \Rightarrow c=0 \Rightarrow \boxed{\psi=\chi}$ *ειδική λύση*

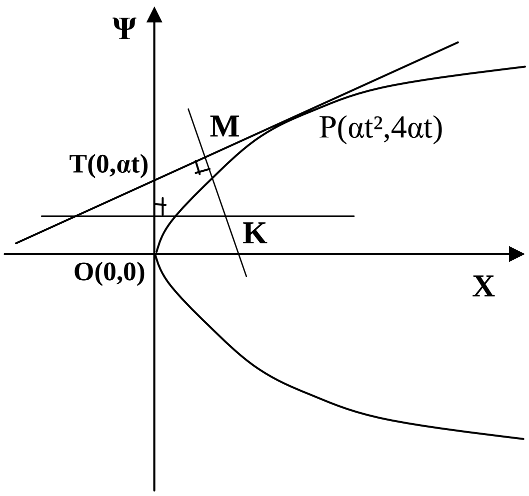
3. *(α)* $\psi^2 = 4a\chi \Rightarrow 2\psi\dfrac{d\psi}{d\chi} = 4\alpha \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = \dfrac{2\alpha}{\psi} \Rightarrow$

$\lambda_{\varepsilon\phi} = \dfrac{2\alpha}{2\alpha t} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\phi} = \dfrac{1}{t},\ P(\alpha t^2, 2\alpha t),$

Εξ. εφαπτομένης: $\psi - 2\alpha t = \dfrac{1}{t}\left(\chi - \alpha t^2\right)$

$\Rightarrow\ \chi - t\psi + \alpha t^2 = 0$

(β) Για $\chi=0 \Rightarrow \psi=\alpha t \Rightarrow T(0,\alpha t)$



<u>*$1^{ος}$ τρόπος*</u>

Το κέντρο Κ θα είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των ΟΤ και ΤΡ.

Η μεσοκάθετος ευθεία της ΟΤ είναι $\psi = \dfrac{\alpha t}{2}$

Μ μέσο ΤΡ $\Rightarrow \ \mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha t^2}{2}, \dfrac{3\alpha t}{2}\right)$. $\qquad \lambda_{\varepsilon\phi} = \dfrac{1}{t},\ MK \perp \varepsilon\phi \ \Rightarrow \ \lambda_{\mathrm{MK}} = -t$

Εξίσωση ευθείας ΜΚ:

$\psi - \dfrac{3\alpha t}{2} = -t\left(\chi - \dfrac{\alpha t^2}{2}\right), \quad \psi = \dfrac{\alpha t}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{at}{2} - \dfrac{3\alpha t}{2} = -t\left(\chi - \dfrac{\alpha t^2}{2}\right) \Rightarrow \chi = \dfrac{\alpha t^2}{2} + \alpha \ \Rightarrow$

$K\left(\dfrac{at^2}{2} + a, \dfrac{at}{2}\right)$

<u>$2^{ος}$ τρόπος</u>

$\chi^2 + \psi^2 + 2g\chi + 2f\psi + c = 0$

Ο κύκλος περνά από το σημείο Ο(0,0) $\Rightarrow c = 0$

Ο κύκλος περνά από το σημείο Τ(0,at) $\Rightarrow 0^2+\alpha^2t^2+0+2f\cdot\alpha t+0=0 \Rightarrow f = -\dfrac{at}{2}$

Ο κύκλος περνά από το σημείο $P(\alpha t^2, 2\alpha t) \Rightarrow \alpha^2 t^4 + 4\alpha^2 t^2 + 2\alpha t^2 g + 2\cdot\left(-\dfrac{\alpha t}{2}\right)\cdot 2\alpha t = 0$

$\Rightarrow g = \dfrac{-\alpha^2 t^4 - 2\alpha^2 t^2}{2\alpha t^2} \Rightarrow g = \dfrac{-\alpha t^2\left(\alpha t^2 + 2\alpha\right)}{2\alpha t^2} \Rightarrow g = -\left(\dfrac{\alpha t^2}{2} + \alpha\right) \Rightarrow K\left(\dfrac{at^2}{2} + a, \dfrac{at}{2}\right)$

(γ) $K\left(\dfrac{at^2}{2} + a, \dfrac{at}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \chi = \dfrac{at^2}{2} + a \\ \psi = \dfrac{at}{2} \Rightarrow \psi^2 = \dfrac{a^2t^2}{4} \Rightarrow t^2 = \dfrac{4\psi^2}{\alpha^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \chi = \dfrac{1}{2}\cdot\cancel{\alpha}\cdot\dfrac{4\psi^2}{\alpha^{\cancel{2}}} + \alpha \Rightarrow \boxed{\psi^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\alpha\cdot(\chi - \alpha)}$$

4. *Πράσινο ζάρι: 1,1,1,2,2,3*
Κόκκινο ζάρι: 1,2,2,3,3,3

(α) (i) P(άθροισμα > 4) = $\mathrm{P}(\Pi_2 \cap K_3) + \mathrm{P}(\Pi_3 \cap K_2) + \mathrm{P}(\Pi_3 \cap K_3)$

$= \dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{6} = \dfrac{11}{36}$

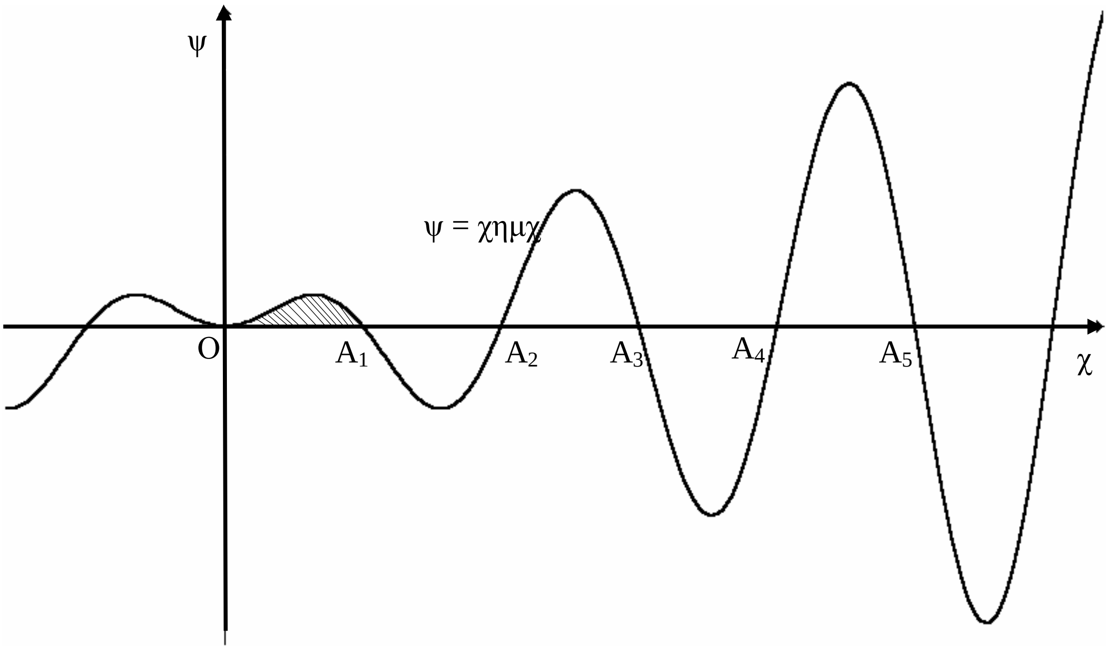
Α: «τά ζάρια φέρνουν την ίδια ένδειξη»

$P(A) = \mathrm{P}(\Pi_1 \cap K_1) + \mathrm{P}(\Pi_2 \cap K_2) + \mathrm{P}(\Pi_3 \cap K_3) = \dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{6} = \dfrac{10}{36}$

(β) Ε: Επιτυχία

$P(E' \cap E' \cap E) = \left[1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})\right]\cdot\left[1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})\right]\cdot\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \dfrac{26}{36}\cdot\dfrac{26}{36}\cdot\dfrac{10}{36} = \dfrac{845}{5832}$

5.



$\chi\eta\mu\chi = 0 \Rightarrow \chi = 0$ ή $\eta\mu\chi = 0 \Rightarrow \chi = \kappa\pi \Rightarrow$ στο A_1 $\chi = \pi \Rightarrow A_1(\pi, 0)$

$$V_{OX} = \pi\int_0^\pi \chi^2\eta\mu^2\chi\, d\chi = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \chi^2\left(1-\sigma\upsilon\nu 2\chi\right)d\chi = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\chi^2-\chi^2\sigma\upsilon\nu 2\chi\right)d\chi$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \chi^2 d\chi - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \chi^2\sigma\upsilon\nu 2\chi d\chi = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\chi^3}{3}\right]_0^\pi - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \chi^2 d\left(\frac{1}{2}\eta\mu 2\chi\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi^3 - 0 - \frac{\pi}{2}\left[\chi^2\frac{1}{2}\eta\mu 2\chi\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{2}\eta\mu 2\chi^2 d\left(\chi^2\right)\right]$$

$$= \frac{\pi^4}{6} - \left[\frac{\pi}{2}\left(\cdot\pi^2\cdot\frac{1}{2}\cancel{\eta\mu 2\pi}^{\,0} - 0\right) - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1}{\cancel{2}}\eta\mu 2\chi\cdot\cancel{2}\chi\, d\chi\right]$$

$$= \frac{\pi^4}{6} + \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \chi\cdot\eta\mu 2\chi\, d\chi = \frac{\pi^4}{6} + \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \chi\cdot d\left(-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{6} + \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\cdot\chi\cdot\sigma\upsilon\nu 2\chi\Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi\cdot d\chi\right]$$

$$= \frac{\pi^4}{6} - \left[\frac{\pi}{4}\cdot\chi\cdot\sigma\upsilon\nu 2\chi\right]_0^\pi + \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu 2\chi\cdot d\chi$$

$$= \frac{\pi^4}{6} - \left(\frac{\pi}{4}\cdot\pi\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu 2\pi}^{\,1} - 0\right) + \left[\frac{\pi}{8}\cdot\eta\mu 2\chi\right]_0^\pi = \frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{8}\left(\cancel{\eta\mu 2\pi}^{\,0} - \cancel{\eta\mu 0}^{\,0}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^2}{4}\right)\ \kappa.\mu.$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 8** Ιούλιος 2001

Χρόνος : 3 ώρες

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις του μέρους Α βαθμολογείται μι 5 μονάδες και κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του μέρους Β βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΜΕΡ0Σ_Α΄

1. Η καμπύλη με εξίσωση $\psi = e^{\alpha\chi} + \chi + \beta$ έχει ακρότατο το σημεία Α(0,3). Να βρείτε τα α και β.

2. Να βρείτε τον όρο τον ανεξάρτητο του χ στο ανάπτυγμα του $\left(2\chi + \frac{1}{\chi}\right)^8$

3. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τα ημερήσια έξοδα σε σεντ των μαθητών του τμήματος $Α_1$ ενός Γυμνασίου.

Έξοδα σε σεντ	45	50	52	62	70	85
Αριθμός μαθητών	2	5	4	1	2	6

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ημερήσιων εξόδων.

4. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις $\psi = \eta\mu\chi$, $\psi = \sigma\upsilon\nu\chi$ $\chi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και τον ημιάξονα Οy, στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

5. Μεταξύ 10 μαθητών οι τέσσερις έχουν το ίδιο ανάστημα και ο υπόλοιποι διαφορετικό. Να βρείτε: (α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δυο μαθητές με το ίδιο ανάστημα. (β) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Ε: *«να επιλέξουμε δύο μαθητές που να έχουν διαφορετικό ανάστημα»*.

6. Να λύσετε την εξίσωση: $\tau o\xi\,\eta\mu\left(\chi - \frac{1}{2}\right) + \tau o\xi\,\eta\mu\left(\chi + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

7. Να δείξετε ότι: $\Delta = \begin{vmatrix} \chi+\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \chi+\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \chi+\gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \chi+\delta \end{vmatrix} = \chi^3\left(\chi+\alpha+\beta+\gamma+\delta\right)$

8. Δίνεται το επίπεδο (Π): 2 χ – ψ + 2 z + 4 = 0 και το σημείο Ρ (3, 2, -1). Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου (Σ) που είναι παράλληλο προς τω επίπεδο (Π) κα απέχει εξίσου από το (Π) και το Ρ.

9. Η πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ έχει βάση τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 4α και κορυφή Κ. Η ακμή ΚΑ είναι κάθετη στη βάση ΑΒΓΔ και ισούται με 3α. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας συναρτήσει του α.

10. Δίνεται ο μετασχηματισμός φ που ορίζεται από τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και οι ευθείες

(ε_1): $2\chi + \psi = 3$ και (ε_2): $\chi - 2\psi = -1$.

(α) Να βρείτε τις εικόνες των ευθειών (ε_1) και (ε_2) μέσω του μετασχηματισμού φ.

(β) Να δείξετε ότι η γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ισούται με 90° και να εξετάσετε κατά πόσο ο μετασχηματισμός φ διατηρεί τη γωνία των δύο ευθειών αναλλοίωτη.

(γ) Να βρείτε τις ευθείες του επιπέδου που παραμένουν αναλλοίωτες μέσω του μετασχηματισμού φ.

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = 2\chi + 1 + \dfrac{2}{\chi + 1}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα ακρότατα κα τις ασύμπτωτες της καμπύλης και στη συνέχεια να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να δείξετε ότι τα ακρότατα και το σημείο τομής των ασύμπτωτων της καμπύλης είναι συνευθειακά.

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και την ευθεία ψ = 4 .

2. Δίνεται η παραβολή και $\psi^2 = \chi$ και ο κύκλος $\chi^2 + \psi^2 = \alpha^4 + \alpha^2$, $\alpha \neq 0$. Έστω Ρ σημείο τομής των δύο καμπυλών. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Ρ τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Α και η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Ρ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β.

(α) Αν Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία κινείται το Μ, καθώς το α μεταβάλλεται. στο $R - \{0\}$

(β) Να δείξετε ότι η γωνία ΑΡΒ είναι αμβλεία.

3. Η κορυφή ορθού κυκλικού κώνου είναι το σημεία Ρ (4, 0, 2) και ο άξονας του κώνου έχει εξίσωση (ε): $\dfrac{\chi - 2}{2} = 1 - \psi = \dfrac{z}{2}$. Αν το σημείο Α(9,1,2) ανήκει στην περιφέρεια της βάσης του κώνου, να βρείτε:

(α) Τη διανυσματική εξίσωση της γενέτειρας ΑΡ του κώνου.

(β) Την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου της βάσης του κώνου.

(γ) Τις συντεταγμένες του κέντρου Κ της βάσης του κώνου.

(δ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου.

4. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $\dfrac{d\psi}{dx} = e^{-\psi} + \chi^{-1}, \quad \chi > 0 \qquad (1)$.

(α) Να δείξετε ότι η αντικατάσταση $\psi = \ln u$, όπου u συνάρτηση του χ, μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση (1) στη διαφορική εξίσωση $\chi \dfrac{du}{d\chi} = u + \chi$.

(β) Στη συνέχεια να βρείτε την ειδική λύση της (1) στη μορφή $\psi = f(\chi)$, για την οποία είναι ψ = 1 όταν χ = 1.

5. Για κάθε τιμή του m = 2,3,4, … , θεωρήστε τα σημεία α_n του διαστήματος [1 , 2] που ορίζονται από τη σχέση $\alpha_n = 2^{\frac{n}{m}}$, $n = 0,1, \ldots, m$. Έστω Δ_n το μήκος του διαστήματος $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, $n = 0,1, \ldots, m-1$.

(α) Να δείξετε ότι $\Delta_n = 2^{\frac{n}{m}}\left(2^{\frac{1}{m}} - 1\right)$, n = 0, 1, … , m – 1.

(β) Αν $f(\chi) = \chi^2$, να υπολογίσετε. την τιμή του αθροίσματος $A_m = \sum_{n=0}^{m=1} f(\alpha_n)\Delta_n$.

(γ) Να δείξετε ότι $\lim_{n\to+\infty} A_m = \int_1^2 f(\chi)d\chi$, όπου $f(\chi) = \chi^2$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡ0Σ_Α΄

1.
$$\left.\begin{array}{l}\psi = e^{\alpha\chi} + \chi + \beta \\ A(0,3), \quad \chi = 0, \ \psi = 3\end{array}\right\} \Rightarrow 3 = e^0 + 0 + \beta \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\psi}{d\chi} = \alpha e^{\alpha\chi} + 1 \\ \dfrac{d\psi}{d\chi} = 0, \ \chi = 0\end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \alpha e^0 + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

2. $$\mathrm{T}_{\kappa+1} = \binom{8}{\kappa}(2\chi)^{8-\kappa}\cdot\left(\frac{1}{\chi}\right)^{\kappa} = \binom{8}{\kappa}\cdot 2^{8-\kappa}\cdot\chi^{8-2\kappa} = \mathrm{A}\cdot\chi^0 \Rightarrow 8 - 2\kappa = 0 \Rightarrow \underline{\kappa = 4}$$

$$\mathrm{T}_5 = \mathrm{T}_{4+1} = \binom{8}{4}\cdot 2^4 = \frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot 2^4 = 1120 \Rightarrow \boxed{\mathrm{T}_5 = 1120}$$

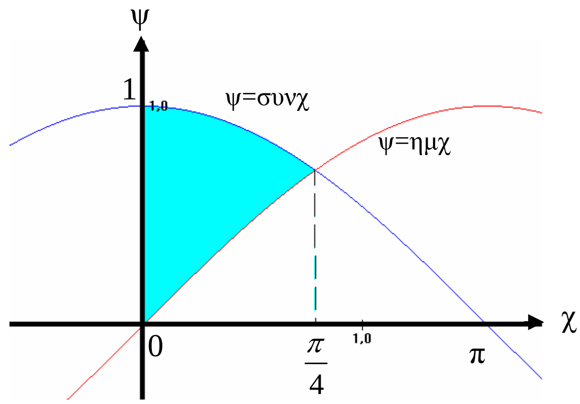
3.

χ_i	f_i	$\chi_i f_i$	$(\chi_i - \bar{\chi})^2$	$f_i(\chi_i - \bar{\chi})^2$
45	2	2·45 = 90	(45-63)² = 324	2·324 = 648
50	5	5·50 = 250	(50-63)² = 169	5·250 = 845
52	4	4·52 = 208	(52-63)² = 121	4·208 = 484
62	1	1·62 = 62	(62-63)² = 1	1·62 = 1
70	2	2·70 = 140	(70-63)² = 49	2·140 = 98
85	6	6·85 = 510	(85-63)² = 484	6·510 = 2904
	Σf_i=20	$\Sigma\chi_i f_i$ = 1260		$\Sigma f_i(\chi_i - \bar{\chi})^2 = 4980$

$$\overline{\chi}=\frac{\Sigma f_i\chi_i}{\nu}\Rightarrow\overline{\chi}=\frac{1260}{20}\Rightarrow\boxed{\overline{\chi}=63}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma f_i\left(\chi_i-\overline{\chi}\right)^2}{\nu}}\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{4980}{20}}\Rightarrow\sigma=\sqrt{249}\Rightarrow\boxed{\sigma=15,78}$$

4. ημχ = συνχ $\Rightarrow$ εφχ=1 $\Rightarrow$ χ = κπ+$\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ χ = $\frac{\pi}{4}$



$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi-\eta\mu^2\chi\right)dx\Rightarrow$$

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu2\chi\,dx\Rightarrow V=\pi\left[\frac{\eta\mu2\chi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\Rightarrow$$

$$V=\frac{\pi}{2}\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}-\eta\mu0\right)\Rightarrow\boxed{V=\frac{\pi}{2}\,\kappa.\mu}.$$

5. 10 μαθητές → 4 ίδιο → 6 διαφορετικό

(α) $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\cdot2!}=\frac{3\cdot4}{2}=6$ → 6 τρόποι

(β) $\mathrm{N}(\Omega)=\binom{10}{2}=\frac{10!}{8!\cdot2!}=45$, P(E) = 1 – P(E΄) = 1 – $\frac{6}{45}=\frac{39}{45}=\frac{13}{15}$

ή $\mathrm{N}(\mathrm{E})=\binom{4}{1}\binom{6}{1}+\binom{6}{2}\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{E})=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}+\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}\Rightarrow\mathrm{P}(\mathrm{E})=\frac{13}{15}$

6. $\tau o\xi\,\eta\mu\left(\chi-\frac{1}{2}\right)+\tau o\xi\,\eta\mu\left(\chi+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

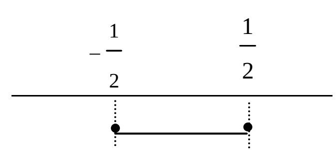
$\tau o\xi\eta\mu\left(\chi-\frac{1}{2}\right)=\alpha\Leftrightarrow\eta\mu\alpha=\chi-\frac{1}{2},\quad-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\quad-1\le\chi-\frac{1}{2}\le1\Rightarrow-\frac{1}{2}\le\chi\le\frac{3}{2}$

$\tau o\xi\eta\mu\left(\chi+\frac{1}{2}\right)=\beta\Leftrightarrow\eta\mu\beta=\chi+\frac{1}{2},\quad-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2},\quad-1\le\chi+\frac{1}{2}\le1\Rightarrow-\frac{3}{2}\le\chi\le\frac{1}{2}$

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta\Rightarrow\eta\mu\alpha=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\Rightarrow\eta\mu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta\Rightarrow$

$\chi-\frac{1}{2}=\sqrt{1-\left(\chi+\frac{1}{2}\right)^2}\Rightarrow\left(\chi-\frac{1}{2}\right)^2=1-\left(\chi+\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow$

$\chi^2-\cancel{\chi}+\frac{1}{4}=1-\chi^2-\cancel{\chi}-\frac{1}{4}\Rightarrow2\chi^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\chi^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\chi=\pm\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2}\le\chi\le\frac{1}{2}$

$$\tau o\xi\eta\mu 0+\tau o\xi\eta\mu\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\chi=+\frac{1}{2}} \text{ Δεκτή}$$

$$\tau o\xi\eta\mu\left(-\frac{1}{2}\right)+\tau o\xi\eta\mu 0=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \chi=-\frac{1}{2} \text{ Απορρίπτεται}$$

7. $$\Delta=\begin{vmatrix}\chi+\alpha & \beta & \gamma & \delta\\ \alpha & \chi+\beta & \gamma & \delta\\ \alpha & \beta & \chi+\gamma & \delta\\ \alpha & \beta & \gamma & \chi+\delta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\chi+\alpha+\beta+\gamma+\delta & \beta & \gamma & \delta\\ \chi+\alpha+\beta+\gamma+\delta & \chi+\beta & \gamma & \delta\\ \chi+\alpha+\beta+\gamma+\delta & \beta & \chi+\gamma & \delta\\ \chi+\alpha+\beta+\gamma+\delta & \beta & \gamma & \chi+\delta\end{vmatrix}=$$

$$=(\chi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)\begin{vmatrix}1 & \beta & \gamma & \delta\\ 1 & \chi+\beta & \gamma & \delta\\ 1 & \beta & \chi+\gamma & \delta\\ 1 & \beta & \gamma & \chi+\delta\end{vmatrix}=(\chi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)\begin{vmatrix}1 & \beta & \gamma & \delta\\ 0 & \chi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \chi & 0\\ 0 & 0 & 0 & \chi\end{vmatrix}=$$

$$=\chi^3\cdot(\chi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

8. <u>*1^ος^ τρόπος*</u>

$$(\mathrm{PB})=d=\frac{|2\cdot 3-2-2+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2$$

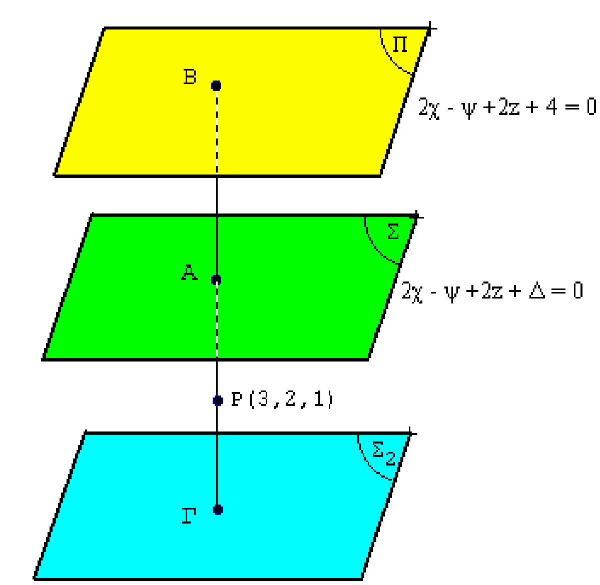
$$(\mathrm{PA})=1 \Rightarrow (\mathrm{PA})=\frac{|2\cdot 3-2-2+\Delta|}{3} \Rightarrow$$

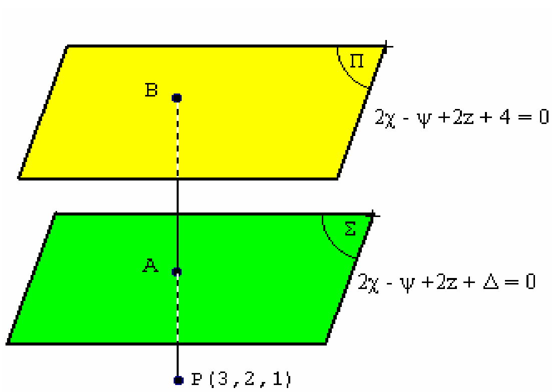
$$1=\frac{|2+\Delta|}{3} \Rightarrow 2+\Delta=\pm 3 \Rightarrow \Delta=1 \text{ ή } \Delta=-5$$

$\Delta = 1 \Rightarrow$ (Σ_1): $2\chi-\psi+2z+1=0$

$\Delta = -5 \Rightarrow$ (Σ_2): $2\chi-\psi+2z-5=0$

Απορρίπτεται διότι ΓΒ = 3





<u>*2^ος^ τρόπος*</u>

(Π): $2\chi-\psi+2z+4=0$, P(3,2,1)

Εξίσωση της ευθείας PB

$$(\Pi)\perp\vec{\eta}(2,-1,2) \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{PB}}\,//\,\vec{\eta}(2,-1,2) \Rightarrow \mathrm{PB}:$$

$$\frac{\chi-3}{2}=\frac{\psi-2}{-1}=\frac{z+1}{2}=\lambda \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{B}\left(2\lambda+3,-\lambda+2,2\lambda-1\right) \\ \mathrm{B}\in\left(\Pi\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot\left(2\lambda+3\right)-\left(-\lambda+2\right)+2\left(2\lambda-1\right)+4=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \Rightarrow$$

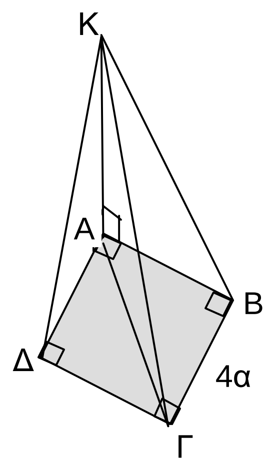
$$\mathrm{B}\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3},-\frac{7}{3}\right)$$

Α μέσο ΡΒ, Α(χ,ψ,z) $\Rightarrow \dfrac{3+\frac{5}{3}}{2}=\chi \Rightarrow \chi=\dfrac{7}{3},\quad \dfrac{2+\frac{8}{3}}{2}=\psi \Rightarrow \psi=\dfrac{7}{3},\quad \dfrac{-1-\frac{7}{3}}{2}=z \Rightarrow z=-\dfrac{5}{3}$

$$\Rightarrow \mathrm{A}\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3},-\frac{5}{3}\right)$$

$$\Sigma: 2\chi-\psi+2z+\Delta=0 \overset{\mathrm{A}\in\Sigma}{\Rightarrow} 2\cdot\frac{7}{3}-\frac{7}{3}+2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+\Delta=0 \Rightarrow \Delta=1 \Rightarrow \boxed{\Sigma:\ \ 2\chi-\psi+2z+1=0}$$

9. ΚΑ= 3α , ΑΒ = 4α



$$\mathrm{E}_{o\lambda}=(\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{K}}\Delta)+(\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{K}}\mathrm{B})+(\mathrm{K}\overset{\Delta}{\mathrm{B}}\Gamma)+(\mathrm{K}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma)+\left(\mathrm{AB}\Gamma\Delta\right)$$

$\mathrm{K}\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\Delta$ Ορθογώνιο τρίγωνο $\Rightarrow (\mathrm{K}\Delta)^2 = (\mathrm{KA})^2 + (\mathrm{A}\Delta)^2 \Rightarrow$
$(\mathrm{K}\Delta)^2 = (3\alpha)^2 + (4\alpha)^2 \Rightarrow \mathrm{K}\Delta = 5\alpha$

$\mathrm{K}\overset{\Delta}{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ Ορθογώνιο τρίγωνο $\Rightarrow (\mathrm{KB})^2 = (\mathrm{KA})^2 + (\mathrm{AB})^2 \Rightarrow$
$(\mathrm{KB})^2 = (3\alpha)^2 + (4\alpha)^2 \Rightarrow \mathrm{KB} = 5\alpha$

$$\mathrm{K}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma: \left.\begin{array}{l} AK\perp\left(\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta\right) \\ \mathrm{A}\Delta\perp\Delta\Gamma \end{array}\right\} \overset{\Theta.\mathrm{T.K.}}{\Rightarrow} \mathrm{K}\Delta\perp\Delta\Gamma \Rightarrow \mathrm{K}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma \text{ ορθογώνιο τρίγωνο}$$

$$\mathrm{K}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{B}: \left.\begin{array}{l} AK\perp\left(\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta\right) \\ \mathrm{A}B\perp B\Gamma \end{array}\right\} \overset{\Theta.\mathrm{T.K.}}{\Rightarrow} \mathrm{K}B\perp B\Gamma \Rightarrow \mathrm{K}\overset{\Delta}{B}\Gamma \text{ ορθογώνιο τρίγωνο}$$

$\mathrm{K}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma = \mathrm{K}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{B}$. $(\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{K}}\Delta)=\dfrac{4\alpha\cdot3\alpha}{2}=6\alpha^2$, $(\mathrm{K}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma)=\dfrac{5\alpha\cdot4\alpha}{2}=10\alpha^2$, $(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = 16\alpha^2$

$$\mathrm{E}_{o\lambda}=2\cdot(\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{K}}\Delta)+2\cdot(\mathrm{K}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma)+\left(\mathrm{AB}\Gamma\Delta\right) \Rightarrow \mathrm{E}_{o\lambda} = 2\cdot6\alpha^2 + 2\cdot10\alpha^2 + 16\alpha^2 \Rightarrow \quad \mathrm{E}_{o\lambda} = 48\alpha^2$$

$$V=\frac{1}{3}\mathrm{E}_{\beta}\cdot\upsilon \Rightarrow V=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot16a^2\cdot\cancel{3}a \Rightarrow \boxed{V=16a^3}$$

10. (α) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l}\left(\varepsilon_1\right): 2\chi+3\psi=3 \\ \left(\varepsilon_2\right): \chi-2\psi=-1\end{array}, \quad \begin{pmatrix}\chi'\\ \psi'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\chi'\\ \psi'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\chi'\\ \psi'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi'\\ -\chi'+\psi'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\chi=\chi'\\ \psi=-\chi'+\psi'\end{matrix},\quad \begin{matrix}(\varepsilon'_1): 2\chi'-\chi'+\psi'=3 & \Rightarrow & \boxed{\chi'+\psi'=3}\\ (\varepsilon'_2): \chi'+2\chi'-2\psi'=-1 & \Rightarrow & \boxed{3\chi'-2\psi'=-1}\end{matrix}$$

(β)

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\lambda_1=-2\\ \lambda_2=\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1\Rightarrow(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)\Rightarrow\hat{\theta}=90^\circ\\ \left.\begin{matrix}\lambda'_1=-1\\ \lambda'_2=-\dfrac{3}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lambda'_1\cdot\lambda'_2=-\dfrac{3}{2}\neq-1\Rightarrow\hat{\theta}'\neq 90^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

η γωνία των δύο ευθειών **<u>δεν</u>** παραμένει αναλλοίωτη

(γ)

$$\left.\begin{matrix}(\varepsilon):\psi=\lambda\chi+\beta,\\ (\varepsilon'):-\chi'+\psi'=\lambda\chi'+\beta\Rightarrow\psi'=(\lambda+1)\chi'+\beta\end{matrix}\right\}$$

(ε): <u>αναλλοίωτη</u> $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda=\lambda+1\Rightarrow 0\cdot\lambda=1\Rightarrow(\varepsilon)//\psi\psi'\\ \beta=\beta\quad\Rightarrow 0\cdot\beta=0\Rightarrow\beta\in\Re\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{\chi=\kappa},\quad\kappa\in\mathbb{R}$$

ή

$$\alpha\nu\quad(\varepsilon):\alpha\chi+\beta\psi+\gamma=0\Rightarrow\quad(\varepsilon'):\alpha\chi'+\beta(-\chi'+\psi')+\gamma=0\Rightarrow$$

$$(\varepsilon'):\chi'(\alpha-\beta)+\beta\psi'+\gamma=0$$

(ε), (ε') ταυτίζονται $\Rightarrow\ \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}=\dfrac{\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\gamma}\Rightarrow\alpha=\alpha-\beta\Rightarrow\beta=0\Rightarrow(\varepsilon):\alpha\chi+\gamma=0\Rightarrow$

$$(\varepsilon):\alpha\chi=-\gamma\overset{\alpha\neq0}{\Rightarrow}\chi=-\frac{\gamma}{\alpha}\Rightarrow\quad\boxed{\chi=\kappa},\quad\kappa\in\mathbb{R}$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

1. (α) $\psi=2\chi+1+\dfrac{2}{\chi+1}\quad\Rightarrow\quad\chi\in\mathbb{R}-\{-1\}$ (Πεδίο ορισμού)

<u>Τομές με άξονες</u>

$\chi=0\Rightarrow\psi=3\ \Rightarrow\ (0,3)$

$\psi=0\Rightarrow\ (2\chi+1)(\chi+1)=0\Rightarrow\ 2\chi^2+2\chi+\chi+1+2=0\Rightarrow\ 2\chi^2+3\chi+3=0$, $(\Delta<0)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η καμπύλη δεν τέμνει τον άξονα των τετμημένων.

$$\frac{dy}{dx}=2-\frac{2}{(x+1)^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2\chi(\chi+2)}{(\chi+1)^2}.\qquad\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\chi=0,\quad\chi=-2$$

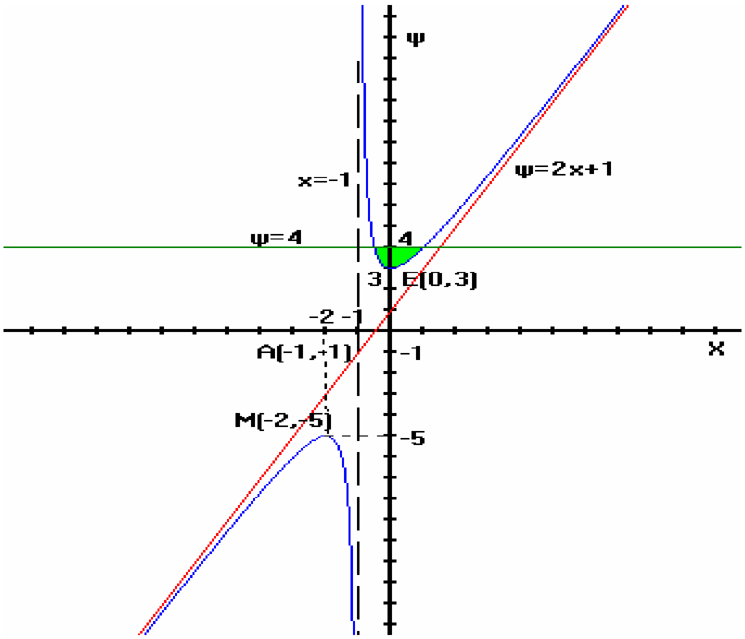
χ	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$		+	0	–	0	+	
ψ		↗	-5	↘	3	↗	

$\chi=0\Rightarrow\psi=3\quad\Rightarrow\quad$ min (0 , 3)

$\chi=-2\Rightarrow\ \psi=-5\Rightarrow\quad$ man (-2 , -5)

<u>Ασύμπτωτες</u> Πλάγια ασύμπτωτος: $\psi = 2\chi + 1$ Κατακόρυφος ασύμπτωτος: $\chi = -1$

$$2\chi + 1 + \frac{2}{\chi+1} = 4 \Rightarrow 2\chi^2 - \chi - 1 = 0 \Rightarrow \chi_1 = 1 \text{ ή } \chi_2 = -\frac{1}{2}$$



(β) Ε(0,3), Μ(-2-5), Α(-1,-1)
Εξίσωση ευθείας ΕΜ

$$\frac{\psi - 3}{\chi} = \frac{3-(-5)}{0-(-2)} \Rightarrow \psi - 3 = 4\chi \ (\varepsilon)$$

Το σημείο Α ανήκει στην ευθεία (ε) διότι $-1 - 3 = 4\cdot(-1) \Rightarrow$ τα σημεία Ε, Μ, Α είναι συνευθειακά.

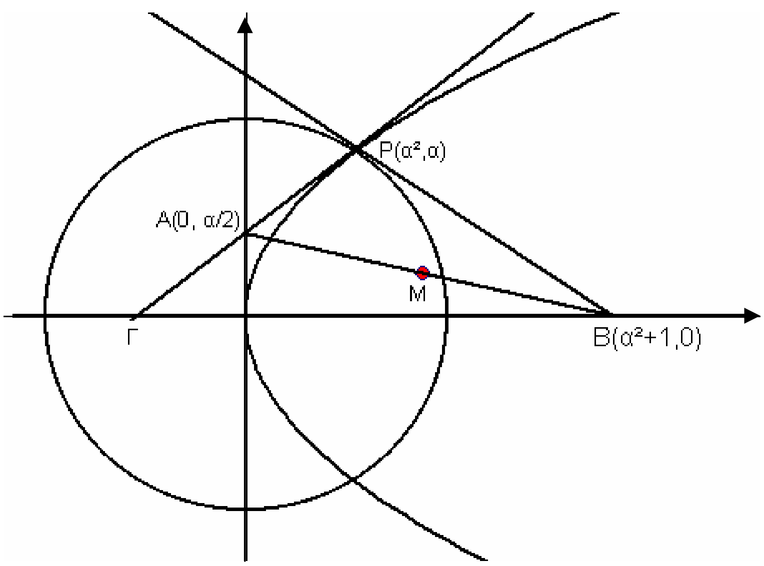
(γ) $$E = \int\left(4 - 2\chi - 1 - \frac{2}{\chi+1}\right)dx \Rightarrow$$

$$E = \left[3\chi - \chi^2 - 2\ln|\chi+1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$E = 3 - 1 - 2\ln 2 - \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{4} - 2\ln\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \left(\frac{15}{4} - 4\ln 2\right) \ \tau.\mu}.$$

2.



(α) $\psi^2 = \chi, \quad \chi^2 + \psi^2 = \alpha^4 + \alpha^2$

$\Rightarrow \chi^2 + \chi - \alpha^4 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow$

$$\chi_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\left(-\alpha^4 - \alpha^2\right)}}{2}$$

$$\chi_{1,2} = \frac{-1 \pm \left(2\alpha^2 + 1\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\chi_1 = \alpha^2 \Rightarrow \psi^2 = \alpha^2 \Rightarrow \psi_1 = \pm\alpha$$

$$\chi_2 = -1 - \alpha^2 \Rightarrow \psi_2 = -1 - \alpha^2 < 0$$

Επιλέγεται το Ρ στο 1^{ον} τεταρτημόριο $\Rightarrow$ Ρ (α², α)

<u>εφ. παραβολής</u>

$$2\psi\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\psi} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\phi} = \frac{1}{2\alpha}$$

$$P(\alpha^2, \alpha) \Rightarrow \psi - \alpha = \frac{1}{2\alpha}\left(\chi - \alpha^2\right) \Rightarrow \underline{\chi - 2\alpha\psi + \alpha^2 = 0}$$

εφ. κύκλου: $\chi\chi_1 + \psi\psi_1 = \alpha^4 + \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2\chi + \alpha\psi = \alpha^4 + \alpha^2 \Rightarrow \underline{\alpha\chi + \psi = \alpha^3 + \alpha}$

$$A: \left.\begin{array}{l} \chi - 2\alpha\psi + \alpha^2 = 0 \\ \chi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow A\left(0, \frac{\alpha}{2}\right)$$

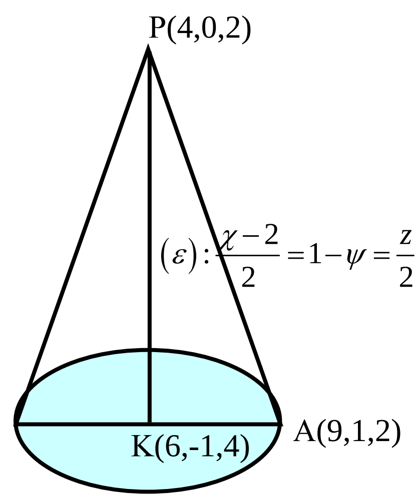
B: $\left.\begin{array}{l}\alpha\chi+\psi=\alpha^3+\alpha\\ \psi=0\end{array}\right\}\Rightarrow \chi=\alpha^2+1\Rightarrow \mathrm{B}\left(\alpha^2+1,0\right)$

M: $\left.\begin{array}{l}\chi=\dfrac{\alpha^2+1}{2}\\ \psi=\dfrac{\alpha}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}2\chi=\alpha^2+1\\ \alpha=4\psi\end{array}\Rightarrow \boxed{2\chi=16\psi^2+1}$

(β) $\varepsilon\phi\widehat{\mathrm{APB}}=\dfrac{\lambda_{\mathrm{PB}}-\lambda_{\mathrm{PA}}}{1+\lambda_{\mathrm{PB}}\cdot\lambda_{\mathrm{PA}}}\Rightarrow \varepsilon\phi\widehat{\mathrm{APB}}=\dfrac{-\alpha-\dfrac{1}{2\alpha}}{1-\dfrac{1}{2}}\Rightarrow \varepsilon\phi\widehat{\mathrm{APB}}=\dfrac{-2\alpha^2-1}{\alpha}\Rightarrow \varepsilon\phi\widehat{\mathrm{APB}}<0\Rightarrow$

$\widehat{\mathrm{APB}}$ αμβλεία γωνία

3. $(\varepsilon):\dfrac{\chi-2}{2}=1-\psi=\dfrac{z}{2}\Rightarrow \dfrac{\chi-2}{2}=\dfrac{\psi-1}{-1}=\dfrac{z-0}{2}$



(α) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}(-5,-1,0)\Rightarrow \vec{r}=4\vec{i}+2\vec{k}+\lambda\left(-5\vec{i}-\vec{j}\right)$

(β) $(\Pi)\perp(\varepsilon)\Rightarrow \vec{\eta}\perp(\varepsilon)\qquad 2\chi-\psi+2z+\Delta=0$

A(9,1,2) $\Rightarrow$ 21 + Δ = 0 $\Rightarrow \boxed{(\Pi):2\chi-\psi+2z-21=0}$

(γ) K : $\dfrac{\chi-2}{2}=\dfrac{\psi-1}{-1}=\dfrac{z-0}{2}=\lambda\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\chi=2\lambda+2\\ \psi=-\lambda+1\\ z=2\lambda\end{array}\right.\overset{\mathrm{K}\in(\Pi)}{\Rightarrow}$

$2\cdot(2\lambda+2)-(-\lambda+1)+4\lambda-21=0\Rightarrow \lambda=2\Rightarrow \boxed{\mathrm{K}(6,-1,4)}$

(δ) $\mathrm{E}_{o\lambda}=\pi R\lambda+\pi R^2$, $R=(KA)=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$, $\lambda=(\mathrm{PA})=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

$\Rightarrow \mathrm{E}_{o\lambda}=\left(\pi\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}+\pi\sqrt{17}^2\right)\Rightarrow \boxed{\mathrm{E}_{o\lambda}=\pi\left(\sqrt{442}+17\right)\quad \tau.\mu.}$

4. (α) $\psi=\ln u\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{du}{dx}\Rightarrow \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{du}{dx}=e^{-\ln u}+\dfrac{1}{\chi}\Rightarrow \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{\chi}\Rightarrow \boxed{\chi\cdot\dfrac{du}{dx}=\chi+u}\Rightarrow$

$\dfrac{du}{d\chi}-\dfrac{1}{\chi}\cdot u=1$ (1) $I=e^{-\int\frac{1}{\chi}d\chi}=e^{-\ln\chi}=\dfrac{1}{\chi}$

$(1)\Rightarrow \dfrac{1}{\chi}\cdot\dfrac{du}{d\chi}-\dfrac{1}{\chi^2}\cdot u=\dfrac{1}{\chi}\Rightarrow \dfrac{d}{d\chi}\left(u\cdot\dfrac{1}{\chi}\right)=\dfrac{1}{\chi}\Rightarrow \dfrac{u}{\chi}=\int\dfrac{1}{\chi}d\chi\Rightarrow \dfrac{u}{\chi}=\ln|\chi|+\ln c\Rightarrow$

$u=\chi\cdot\left[\ln\left(c\cdot|x|\right)\right]$

$$\left.\begin{array}{l} u=\chi\cdot\left[\ln\left(c\cdot|x|\right)\right] \\ \psi=\ln u \Rightarrow u=e^{\psi} \end{array}\right\} \Rightarrow e^{\psi}=\chi\cdot\left[\ln\left(c\cdot|x|\right)\right] \Rightarrow \psi=\ln\left[\chi\cdot\ln\left(c\cdot|\chi|\right)\right] \text{ Γενική λύση}$$

(β) $$\left.\begin{array}{l} \chi=1 \\ \psi=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=\ln\left[1\cdot\ln\left(c\cdot|1|\right)\right] \Rightarrow 1=\ln\left(\ln c\right) \Rightarrow \ln c=e \Rightarrow c=e^{e} \Rightarrow \boxed{\psi=\ln\left[\chi\cdot\ln\left(e^{e}\cdot|\chi|\right)\right]}$$

5. (α) $\Delta_{\eta}=\alpha_{n+1}-\alpha_{n}=2^{\frac{n+1}{m}}-2^{\frac{n}{m}}=2^{\frac{n}{m}}\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$

(β) $$A_m=\sum_{n=0}^{m-1} f\left(a_n\right)\cdot\Delta_n=\sum_{n=0}^{m-1} f\left(2^{\frac{n}{m}}\right)\cdot 2^{\frac{n}{m}}\cdot\left(2^{\frac{1}{m}}-1\right)=\left(2^{\frac{1}{m}}-1\right)\underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} f\left(2^{\frac{3}{m}}\right)^{n}}_{\substack{\Gamma.\Pi\rho o o \delta o \varsigma \\ \lambda=2,\ \alpha_1=1}}=\left(2^{\frac{1}{m}}-1\right)\cdot\left(\frac{\lambda^{m}-1}{\lambda-1}\right)$$

$$\mathrm{A}_n=\left(2^{\frac{1}{m}}-1\right)\cdot\left(\frac{\left(2^{\frac{3}{m}}\right)^{m}-1}{2^{\frac{3}{m}}-1}\right)=\frac{\left(2^{\frac{1}{m}}-1\right)\cdot\left(2^{3}-1\right)}{\left(2^{\frac{1}{m}}\right)^{3}-1^{3}}=\frac{\cancel{\left(2^{\frac{1}{m}}-1\right)}\cdot 7}{\cancel{\left(2^{\frac{1}{m}}-1\right)}\cdot\left(2^{\frac{2}{m}}+2^{\frac{1}{m}}+1\right)}=\frac{7}{2^{\frac{2}{m}}+2^{\frac{1}{m}}+1}$$

(γ) $$\lim_{m\to\infty} A_m=\lim_{m\to\infty}\frac{7}{2^{\frac{2}{m}}+2^{\frac{1}{m}}+1}=\frac{7}{1+1+1}=\frac{7}{3}$$

$$\int_1^2 f\left(\chi\right)d\chi=\int_1^2 \chi^2 d\chi=\left.\frac{\chi^3}{3}\right|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3} \quad \Rightarrow \lim_{m\to\infty} A_m=\int_1^2 f\left(\chi\right)d\chi$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Τ.Ε.Ι. ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

Από τα 6 ζητήματα να λύσετε τα 4.

Ζήτημα 1ο.

α) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $3\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu 2\chi - 1 = 0$ (Μονάδες 8)

β) Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να δείξετε ότι:

$\eta\mu 70° \sigma\upsilon\nu 55° - \eta\mu 55° \sigma\upsilon\nu 70° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (Μονάδες 8)

γ) (i) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu\omega - \eta\mu 2\omega + \eta\mu 3\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 3\omega} = \varepsilon\phi 2\omega$

(ii) Αν $\dfrac{\eta\mu\omega - \eta\mu 2\omega + \eta\mu 3\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 3\omega} = 2$ και $0° < \omega < 90°$

χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να δείξετε ότι $\varepsilon\phi\omega = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (Μονάδες 9)

Ζήτημα 2ο.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{1+\eta\mu 2\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta}{1+\eta\mu 2\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta} = \varepsilon\phi\theta$ (Μονάδες 6)

β) (i) Να δείξετε ότι: $\eta\mu\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\eta\mu\theta$

(ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(2\chi - \dfrac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(2\chi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\chi$, αν $0 \le \chi \le 2\pi$

(Μονάδες 10)

γ) Αν εφα = 3 και $\eta\mu(\alpha+\theta) = 2\eta\mu(\alpha-\theta)$ να δείξετε ότι εφθ = 1. Αν επιπλέον

$\theta = 3\chi + 60°$ να βρείτε τις τιμές του χ που βρίσκονται στο διάστημα [0°,180°]. (Μονάδες 9)

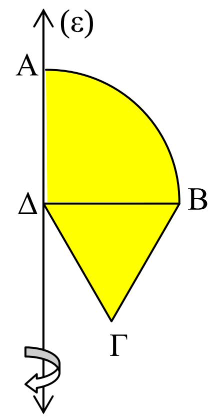
Ζήτημα 3ο.

α) Ορθό τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 6cm και 8cm.
Αν το ύψος του πρίσματος είναι ίσο με την υποτείνουσα της βάσης του να υπολογίσετε:
(i) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του.
(ii) τον όγκο του. (Μονάδες 8)

β) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο $V = \dfrac{500}{3} cm^3$ και το ύψος της είναι το μισό της ακμής της βάσης της.
(i) Να δείξετε ότι η ακμή της βάσης της είναι 10 cm.
(ii) Να βρείτε το παράπλευρο ύψος της και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.της.
(Μονάδες 8)

γ) Σφαίρα με εμβαδόν επιφάνειας Ε = 144π cm^2 είναι εγγεγραμμένη σε κύλινδρο (η σφαιρική επιφάνεια εφάπτεται των βάσεων και της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου)
Να υπολογίσετε: (i) την ακτίνα της σφαίρας.
(ii) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου
(iii)τον όγκο του χώρου που βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο και έξω από την σφαίρα.
(Μονάδες 9)

Ζήτημα 4ο.



α) Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΔ είναι τεταρτοκύκλιο και το ΒΓΔ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2α cm. Η σκιασμένη επιφάνεια περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που περνά από τα σημεία Α και Δ.
Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται. (Μονάδες 15)

β) Η ακτίνα R και η γενέτειρα λ ορθού κυκλικού κώνου ικανοποιούν τη σχέση: $\frac{1}{R}+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\alpha}$ (α: σταθερά). Αν η γενέτειρα και η ακτίνα της βάσης του κώνου σχηματίζουν γωνία 30° να δείξετε ότι: $\frac{V}{E}=\frac{\alpha}{6}$, όπου V ο όγκος του κώνου και Ε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του. (Μονάδες 10)

Ζήτημα 5ο.

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$I_1=\int_0^1\left(3\chi^2+3\sqrt{\chi}+1\right)d\chi$ και $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\eta\mu 2\chi\, d\chi$ (Μονάδες 8)

β) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi=\chi^2-2\chi+3$.
(i) Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, το τοπικό ακρότατό της και να κάνετε τη γραφική της παράστασή της.
(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των χ. (Μονάδες 8)

γ) Δίνεται συνάρτηση $\psi=\chi-1+\frac{4}{\chi+1}$, $\chi\neq-1$. Να βρείτε:
(i) την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της.
(ii) τα τοπικά ακρότατα και να τα χαρακτηρίσετε (μέγιστο / ελάχιστο) (Μονάδες 9)

Ζήτημα 6ο.

α) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi=\chi^3-\alpha\chi+2$ και Α το σημείο τομής της με τον άξονα Oy
(i) Αν η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο Α έχει κλίση λ = 1 να δείξετε ότι α = - 1.
(ii) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλη ς στο σημείο Α. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $I=\int\left(2\eta\mu^2\chi+\varepsilon\phi^2 2\chi\right)d\chi$. (Μονάδες 8)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $\psi=\chi\,\eta\mu 2\chi$. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγό της και στη συνέχεια να δείξετε ότι: $\chi\dfrac{d^2\psi}{d\chi^2}-2\dfrac{d\psi}{d\chi}+4\chi\psi+2\eta\mu 2\chi=0$ (Μονάδες 9)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο.

α) $3\eta\mu\chi-\sigma\upsilon\nu 2\chi-1=0 \Rightarrow 3\eta\mu\chi-\left(1-2\eta\mu^2\chi\right)-1=0 \Rightarrow 2\eta\mu^2\chi+3\eta\mu\chi-2=0 \Rightarrow$

$$\eta\mu\chi=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 5}{4}=\begin{cases}-2 \ \alpha\pi o\rho. \\ \dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \eta\mu\chi=\frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\chi=\eta\mu 30° \Rightarrow$$

$\chi=360°\kappa+30°$ ή $\chi=360°\kappa+150°$ $\quad \kappa\in\mathbb{Z}$

β) $\eta\mu 70°\sigma\upsilon\nu 55°-\eta\mu 55°\sigma\upsilon\nu 70°=\eta\mu\left(70°-55°\right)=\eta\mu 15°=\eta\mu\left(45°-30°\right)=$

$$=\eta\mu 45°\sigma\upsilon\nu 30°-\eta\mu 30°\sigma\upsilon\nu 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

γ) (i) $$\frac{\eta\mu\omega-\eta\mu 2\omega+\eta\mu 3\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu 2\omega+\sigma\upsilon\nu 3\omega}=\frac{\left(\eta\mu\omega+\eta\mu 3\omega\right)-\eta\mu 2\omega}{\left(\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu 3\omega\right)-\sigma\upsilon\nu 2\omega}=\frac{2\,\eta\mu 2\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega-\eta\mu 2\omega}{2\,\sigma\upsilon\nu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu 2\omega}$$

$$=\frac{\eta\mu 2\omega\cancel{\left(2\sigma\upsilon\nu\omega-1\right)}}{\sigma\upsilon\nu 2\omega\cancel{\left(2\sigma\upsilon\nu 2\omega-1\right)}}=\varepsilon\phi 2\omega$$

(ii) $0° < \omega < 90° \Rightarrow \varepsilon\phi\omega > 0$

$$\frac{\eta\mu\omega-\eta\mu 2\omega+\eta\mu 3\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega-\sigma\upsilon\nu 2\omega+\sigma\upsilon\nu 3\omega}=2 \overset{(i)}{\Rightarrow} \varepsilon\phi 2\omega=2 \Rightarrow \frac{2\varepsilon\phi\omega}{1-\varepsilon\phi^2\omega}=2 \Rightarrow$$

$$\varepsilon\phi^2\omega+\varepsilon\phi\omega-1=0 \Rightarrow \varepsilon\phi\omega=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \varepsilon\phi\omega=\begin{cases}\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \ \left(\alpha\pi o\rho.\ \alpha\phi o\upsilon\ \varepsilon\phi\omega>\omega\right) \\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\phi\omega=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Ζήτημα 2ο.

$$\frac{1+\eta\mu 2\theta-\sigma\upsilon\nu 2\theta}{1+\eta\mu 2\theta+\sigma\upsilon\nu 2\theta}=\frac{\cancel{1}+2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta-\cancel{1}+2\eta\mu^2\theta}{\cancel{1}+2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta+2\sigma\upsilon\nu^2\theta-\cancel{1}}=\frac{\cancel{2}\eta\mu\theta\cancel{\left(\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta\right)}}{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu\theta\cancel{\left(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta\right)}}=\varepsilon\phi\theta$$

β) (i) $\eta\mu\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2\eta\mu\frac{\theta-\cancel{\frac{\pi}{4}}+\theta+\cancel{\frac{\pi}{4}}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\cancel{\theta}-\frac{\pi}{4}-\cancel{\theta}-\frac{\pi}{4}}{2}=$

$=2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\cancel{2}\eta\mu\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}\,\eta\mu\theta$

(ii) $\eta\mu\left(2\chi-\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(2\chi+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\chi$, αν $0\le\chi\le 2\pi$

$\overset{(i)}{\Rightarrow}\ \cancel{\sqrt{2}}\,\eta\mu 2\chi=\cancel{\sqrt{2}}\,\sigma\upsilon\nu\chi\Rightarrow 2\eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi-\sigma\upsilon\nu\chi=0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\chi\left(2\eta\mu\chi-1\right)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\chi=0\Rightarrow\chi=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\\ 2\eta\mu\chi-1=0\Rightarrow\eta\mu\chi=\frac{1}{2}\Rightarrow\chi=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\quad\chi=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\qquad\kappa\in\mathbb{Z}$$

Στο διάστημα $0\le\chi\le 2\pi$, $\chi=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}$

γ) εφα = 3 και $\eta\mu(\alpha+\theta)=2\eta\mu(\alpha-\theta)\Rightarrow$

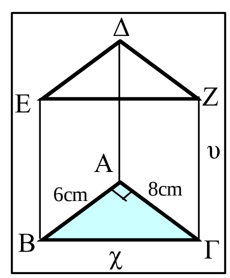
$\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\alpha=2\left(\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\alpha\right)\Rightarrow 3\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\alpha=\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow$

$3\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\Rightarrow 3\varepsilon\phi\theta=\varepsilon\phi\alpha\ \Rightarrow 3\varepsilon\phi\theta=3\Rightarrow\ \varepsilon\phi\theta=1$

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon\phi\theta=1\\ \theta=3\chi+60°\end{matrix}\right\}\Rightarrow\varepsilon\phi\left(3\chi+60°\right)=1\Rightarrow 3\chi+60°=180°\kappa+45°\Rightarrow\chi=60°\kappa-5°$$

$\chi=60°\kappa-5°$, $\chi\in\left[0°,180°\right]\ \Rightarrow\ \chi=55°,\ 115°,\ 175°.$

<u>Ζήτημα 3ο.</u>

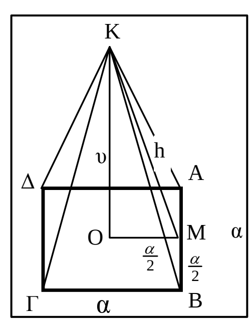


α) $\left(\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}\right)$: $\chi^2=6^2+8^2\Rightarrow\chi^2=36+64\Rightarrow\chi^2=100\Rightarrow\chi=10$ cm.

Ισχύει $\upsilon=\chi\Rightarrow\ \upsilon=10$ cm.

(i) $E_\pi=\Pi_{\mathrm{B}}\cdot\upsilon\ \Rightarrow\ E_\pi=\left(6+8+10\right)\cdot 10\Rightarrow\boxed{E_\pi=240\ cm^2}$

(ii) $V=E_B\cdot\upsilon\Rightarrow V=\frac{6\cdot 8}{2}\cdot 10\ \Rightarrow\ \boxed{V=240\ cm^3}$.



β) $V=\frac{500}{3}cm^3$, $\upsilon=\frac{\alpha}{2}$

(i) $E_B=\alpha^2$, $V=\frac{1}{3}E_B\cdot\upsilon\Rightarrow\ \frac{500}{\cancel{3}}=\frac{1}{\cancel{3}}\alpha^2\cdot\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\alpha^3=100\Rightarrow\boxed{\alpha=10cm}$

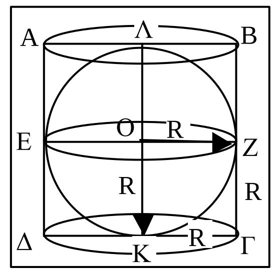
(ii) $\upsilon=\frac{\alpha}{2}\ \Rightarrow$ υ = 5 cm. $\left(\overset{\Delta}{KOM}\right)$: $\left(KM\right)^2=\left(KO\right)^2+\left(OM\right)^2\ \Rightarrow$

$$h^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow h^2 = 50 \Rightarrow \boxed{h = 5\sqrt{2}\ cm}$$

$$E_{o\lambda} = \mathrm{E_B} + \mathrm{E_\Pi} \Rightarrow \mathrm{E}_{o\lambda} = \alpha^2 + \frac{1}{2}\Pi_\mathrm{B} \cdot h \Rightarrow \mathrm{E}_{o\lambda} = 10^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{E}_{o\lambda} = \left(100 + 100\sqrt{2}\right)\ cm^2}$$

γ) (i) $\mathrm{E}_{\sigma\varphi} = 144\pi\ \mathrm{cm}^2$, $E_{\sigma\phi} = 4\pi R^2 \Rightarrow 144\cancel{\pi} = 4\cancel{\pi}R^2 \Rightarrow \boxed{R = 6\ cm}$



(ii) $\upsilon_\kappa = 2R \Rightarrow \upsilon_\kappa = 12\ cm$

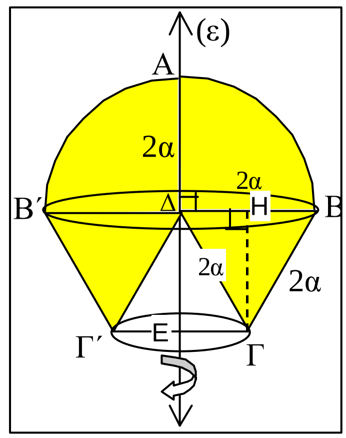
$$E_{\mathrm{O}\lambda} = 2\pi R^2 + 2\pi R\upsilon \Rightarrow E_{\mathrm{O}\lambda} = 2\pi \cdot 6^2 + 2\pi \cdot 6 \cdot 12 \Rightarrow \boxed{E_{\mathrm{O}\lambda} = 216\pi\ cm^2}$$

$$(iii)\ V = V_{\kappa\upsilon\lambda} - V_{\sigma\phi} \Rightarrow V = \pi R^2\upsilon - \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow$$

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 - \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \Rightarrow \boxed{V = 144\pi\ cm^3}$$

Ζήτημα 4ο.

α) $(\Delta\mathrm{B}) = (\mathrm{B}\Gamma) = (\Delta\Gamma) = 2\alpha$, $(\mathrm{E}\Gamma) = (\Delta\mathrm{H}) = \alpha$



$(\mathrm{E}\Delta) = \alpha\sqrt{3}$ (ύψος ισοπλεύρου τριγώνου)

$(\mathrm{A}\Delta) = (\Delta\mathrm{B}) = 2\alpha$ (ακτίνες κύκλου)

$$E_{o\lambda} = \mathrm{E}_{\eta\mu\iota\sigma\phi} + \mathrm{E}_{\kappa\,\kappa o\lambda.\kappa\omega\nu o\upsilon} + \mathrm{E}_{\kappa\,\kappa\omega\nu o\upsilon}$$

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot (\Delta\mathrm{B})^2 + \pi(\Delta\mathrm{B} + \mathrm{E}\Gamma) \cdot (\mathrm{B}\Gamma) + \pi(\mathrm{E}\Gamma) \cdot (\Delta\Gamma)$$

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot (2\alpha)^2 + \pi(2\alpha + \alpha) \cdot (2\alpha) + \pi(\alpha) \cdot (2\alpha)$$

$$E_{o\lambda} = 8\pi\alpha^2 + 6\pi\alpha^2 + 2\pi\alpha^2 \Rightarrow \boxed{E_{o\lambda} = 16\pi\alpha^2}$$

$$V = V_{\eta\mu\iota\sigma\phi} + V_{\kappa.\kappa\omega\nu o\upsilon} - V_{\kappa\omega\nu o\upsilon} \Rightarrow$$

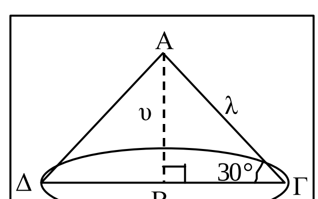
$$V = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi(\Delta\mathrm{B})^3 + \frac{1}{3}\pi(\mathrm{E}\Delta)\left[(\Delta\mathrm{B})^2 + (\Delta\mathrm{B})(\mathrm{E}\Gamma) + (\mathrm{E}\Gamma)^2\right] - \frac{1}{3}\pi(\mathrm{E}\Gamma)^2(\mathrm{E}\Delta)$$

$$V = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi(2\alpha)^3 + \frac{1}{3}\pi\left(\alpha\sqrt{3}\right)\left[(2\alpha)^2 + (2\alpha)(\alpha) + (\alpha)^2\right] - \frac{1}{3}\pi(\alpha)^2 \cdot \alpha\sqrt{3}$$

$$V = \frac{16}{3}\pi\alpha^3 + \frac{\pi\alpha\sqrt{3}}{3}\left(4\alpha^2 + 2\alpha^2 + \alpha^2\right) - \frac{\pi\alpha^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = \frac{16\pi\alpha^3}{3} + \frac{7\pi\alpha^3\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi\alpha^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$V = \frac{16\pi\alpha^3 + 6\pi\alpha^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{2\pi\alpha^3\left(8 + 3\sqrt{3}\right)}{3}\ cm^3}$$

β) $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\alpha} \Rightarrow \dfrac{R + \lambda}{R\lambda} = \dfrac{1}{\alpha} \Rightarrow R + \lambda = \dfrac{R\lambda}{\alpha}$



$\left(\overset{\Delta}{AB\Gamma}\right): \quad \eta\mu 30° = \dfrac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow \upsilon = \dfrac{\lambda}{2}$

$$\frac{V}{E} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{\pi} R^{\cancel{2}}\upsilon}{\cancel{\pi}\cancel{R}(R+\lambda)} = \frac{\frac{1}{3}\cancel{R}\frac{\cancel{\lambda}}{2}}{\frac{\cancel{R\lambda}}{\alpha}} = \frac{\alpha}{6}$$

Ζήτημα 5ο.

α) $I_1 = \int_0^1 \left(3\chi^2 + 3\sqrt{\chi} + 1\right) d\chi = \int_0^1 \left(3\chi^2 + 3\chi^{\frac{1}{2}} + 1\right) d\chi = = \left[\chi^3 + 2\chi^{\frac{3}{2}} + \chi\right]_0^1 =$ 1+2+1 = 4

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta\mu 2\chi \; d\chi = \left[-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\chi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\cdot\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 0\right) = -\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

β) $\psi = \chi^2 - 2\chi - 3$. Πεδίο ορισμού: $\chi \in \mathbb{R}$

(i) Τομές με άξονες: $\chi = 0 \Rightarrow \psi = 3 \Rightarrow (0,-3)$

$\psi = 0 \Rightarrow \chi^2 - 2\chi - 3 = 0 \Rightarrow (\chi-3)\cdot(\chi+1) = 0 \Rightarrow \chi = 3$ ή $\chi = -1 \Rightarrow (3,0)\,,\ (-1,0)$

$$\psi = \chi^2 - 2\chi - 3 \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = 2\chi - 2 = 2(\chi - 1)$$

χ	$-\infty$	1	∞
$\frac{d\psi}{d\chi}$	–	0	+
ψ	↘	-4	↗

min(1,-4)

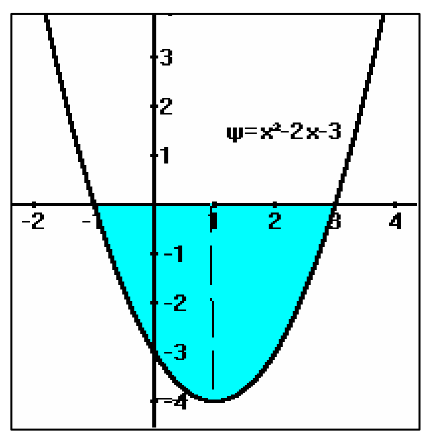
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\psi}{d\chi} = 2(\chi - 1) \\ \dfrac{d\psi}{d\chi} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi = 1,\ \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Τοπικό ελάχιστο } (1,-4)$$

$$E = -\int_{-1}^{3} \psi dx = \int_{3}^{-1} \left(\chi^2 - 2\chi - 3\right) dx = \left[\frac{\chi^3}{3} - \chi^2 - 3\chi\right]_3^{-1}$$

$$E = \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1)\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3\cdot 3\right)$$

$$E = \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(\cancel{9} - \cancel{9} - 9\right) \Rightarrow E = \frac{5}{3} + 9 \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{32}{3}\tau.\mu.}$$



γ) $\psi = \chi - 1 + \dfrac{4}{\chi + 1}, \qquad \chi \neq -1. \quad \psi = (\chi - 1) + 4(\chi - 1)^{-1}$

(i) $\frac{d\psi}{d\chi} = 1 - 4(\chi+1)^{-2} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\chi} = 1 - \frac{4}{(\chi+1)^2} \Rightarrow$, $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = 8(\chi+1)^{-3} \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{8}{(\chi+1)^3}$

(ii) $\frac{d\psi}{d\chi} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{4}{(\chi+1)^2} = 0 \Rightarrow (\chi+1)^2 = 4 \Rightarrow \chi + 1 = \pm 2 \Rightarrow \chi = 1$ ή $\chi = -3$

Για χ = 1 ⇒ $\left.\frac{d^2\psi}{d\chi^2}\right|_{\chi=1} = 1 > 0 \Rightarrow$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (1,2)

Για χ=-3⇒$\left.\frac{d^2\psi}{d\chi^2}\right|_{\chi=-3} = -1 < 0 \Rightarrow$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο (-3,-6)

Ζήτημα 6ο.

α) $\psi = \chi^3 - \alpha\chi + 2$ και Α το σημείο τομής της με τον άξονα Οψ ⇒ Α(0,ψ)

$$(i)\ \left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{d\chi} = 3\chi^2 - \alpha \\ &\left.\frac{d\psi}{d\chi}\right|_{\chi=0} = \lambda = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0^2 - \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

(ii) $\psi = \chi^3 + \chi + 2$, σημείο Α: χ=0 ⇒ ψ = 2 ⇒ Α(0,2)

$\lambda_{\varepsilon\varphi}=1 \Rightarrow \lambda_{\kappa}=-1 \Rightarrow \psi - 2 = -1(\chi - 0) \Rightarrow \boxed{\chi + \psi = 2}$

β) $I = \int \left(2\eta\mu^2\chi + \varepsilon\phi^2 2\chi\right) d\chi = \int \left(\left(1 - \sigma\upsilon\nu 2\chi\right) + \left(\tau\varepsilon\mu^2 2\chi - 1\right)\right) d\chi$

$= \int \left(\tau\varepsilon\mu^2 2\chi - \sigma\upsilon\nu 2\chi\right) d\chi = \frac{1}{2}\varepsilon\phi 2\chi - \frac{1}{2}\eta\mu 2\chi + C$

γ) $\psi = \chi\,\eta\mu 2\chi \Rightarrow \boxed{\frac{d\psi}{d\chi} = \eta\mu 2\chi + 2\chi\,\sigma\upsilon\nu 2\chi} \Rightarrow \frac{d^2\psi}{d\chi^2} = 2\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu 2\chi - 4\chi\eta\mu 2\chi$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = 4\sigma\upsilon\nu 2\chi - 4\chi\eta\mu 2\chi}$

$\chi\frac{d^2\psi}{d\chi^2} - 2\frac{d\psi}{d\chi} + 4\chi\psi + 2\eta\mu 2\chi =$

$= \chi\left(4\sigma\upsilon\nu 2\chi - 4\chi\eta\mu 2\chi\right) - 2\left(\eta\mu 2\chi + 2\chi\,\sigma\upsilon\nu 2\chi\right) + 4\chi\left(\chi\,\eta\mu 2\chi\right) + 2\eta\mu 2\chi =$

$= \cancel{4\chi\sigma\upsilon\nu 2\chi} - \cancel{4\chi^2\eta\mu 2\chi} - \cancel{2\eta\mu 2\chi} - \cancel{4\chi\sigma\upsilon\nu 2\chi} + \cancel{4\chi^2\eta\mu 2\chi} + \cancel{2\eta\mu 2\chi} = 0$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** (για απόφοιτους Τεχνικών Σχολών) Ιούλιος 2001

Χρόνος : 3 ώρες

<u>ΜΕΡΟΣ Α΄</u>

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $\psi = 3\chi e^{4\chi}$.

2. Να βρείτε τον όρο που είναι ανεξάρτητος του χ στο ανάπτυγμα του $\left(\chi^3 - \dfrac{2}{\chi^2}\right)^{10}$.

3. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\chi)}{\eta\mu 2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi + 1}$.

4. Δίνεται ο κύκλός με εξίσωση: $\chi^2 + \psi^2 - 4\chi + 6\psi - 12 = 0$.

(α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(β) Να βρείτε την εξίσωση άλλου κύκλου που έχει το ίδιο κέντρο και διπλάσια ακτίνα..

5. Να βρείτε πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης «ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ» υπάρχουν.
Πόσοι από αυτούς αρχίζουν και τελειώνουν με φωνήεν;
(Μπορείτε να αφήσετε τις απαντήσεις σας σε παραγοντική μορφή).

6. Αν $\chi = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $\psi = \sigma\upsilon\nu 2\theta$ όπου $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + \frac{d\psi}{d\chi} - 4\chi = 4$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \sigma\upsilon\nu(35^0 + \chi)\sigma\upsilon\nu(35^0 - \chi) + \sigma\upsilon\nu(55^0 - \chi)\sigma\upsilon\nu(55^0 + \chi)$

(α) Να δείξετέ ότι $f(\chi) = \sigma\upsilon\nu 2\chi$

(β) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $f(\chi) = \eta\mu\chi$.

8. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $\chi(1+\chi)\dfrac{d\psi}{d\chi} = 2\psi$.

9. Να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $4\chi^2 + 8\chi\psi + 13\psi^2 = 36$ στο σημείο της (3,0).

10. Να βρείτε την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\chi^2\dfrac{d\psi}{d\chi} - \chi\psi = 1$ για την οποία είναι $\psi = 2$ όταν **χ** = 1.

ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \dfrac{2\chi}{\chi^2+1}$.

(α) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τις εξισώσεις των ασυμπτώτων και τα ακρότατα της συνάρτησης, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = \dfrac{2\chi}{\chi^2+1}$ και την ευθεία $\psi = \chi$ για $\chi \geq 0$.

2. Δίνεται η καμπύλη $\psi = \alpha\chi^2, \ \ \alpha > 0$.

(α) Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των χ και την ευθεία χ=2 έχει εμβαδόν 8 τ.μ. Να δείξετε ότι α=3.

(β) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των ψ.

3. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : \chi^2+\psi^2-4\chi-6\psi+9=0$ και $C_2 : \chi^2+\psi^2+4\chi-12\psi+31=0$.

(α) Να δείξετε ότι εφάπτονται εξωτερικά.

(β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο τη διάκεντρο των δύο αυτών κύκλων.

4. Θέλουμε να κατασκευάσουμε κύλινδρο που να έχει όγκο 54π cm^3. Να βρείτε την ακτίνα και το ύψος του ώστε να έχει ελάχιστη ολική επιφάνεια.

5. (α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \chi e^{2\chi}\, d\chi$.

(β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi = \sigma\upsilon\nu\theta, \ \ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int \frac{d\chi}{\chi^2\sqrt{1-\chi^2}}$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $\psi = 3\chi e^{4\chi} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi} = 3e^{4x}+3\chi\cdot 4e^{4x} \Rightarrow \boxed{\dfrac{d\psi}{d\chi} = 3e^{4x}+12\chi e^{4x}}$

2. $\left(\chi^3-\dfrac{2}{\chi^2}\right)^{10}$, $\mathrm{T}_{\kappa+1} = \dbinom{10}{\kappa}\left(\chi^3\right)^{10-\kappa}\left(-\dfrac{2}{\chi^2}\right)^{\kappa} = \dbinom{10}{\kappa}\chi^{30-3\kappa}\cdot(-2)^{\kappa}\cdot\chi^{-2\kappa} = \dbinom{10}{\kappa}\cdot(-2)^{\kappa}\cdot\chi^{30-5\kappa} \Rightarrow$

$30-5\kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 6$, $\quad T_7 = \dbinom{10}{6}(-2)^6 \Rightarrow T_7 = 64\cdot\dbinom{10}{6} \Rightarrow \boxed{T_7 = 13440}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\chi)}{\eta\mu 2\chi-\sigma\upsilon\nu\chi+1}$ (απροσδιοριστία $\dfrac{0}{0}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\chi)}{\eta\mu 2\chi-\sigma\upsilon\nu\chi+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\ln(1-\chi)\right]'}{\left[\eta\mu 2\chi-\sigma\upsilon\nu\chi+1\right]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1-\chi}}{2\sigma\upsilon\nu 2\chi+\eta\mu\chi}=\frac{-1}{2+0}=-\frac{1}{2}$$

4. $\chi^2+\psi^2-4\chi+6\psi-12=0$, $g=-2$, $f=3$, $c=-12$. $K(-g,-f)$, $R=\sqrt{g^2+f^2-c}$

(α) $K(2,-3)$, $R=\sqrt{(-2)^2+3^2-(-12)}\Rightarrow R=\sqrt{4+9+12}\Rightarrow R=5$

(β) $K(2,-3)$, $R'=2{\cdot}5\Rightarrow R'=10\Rightarrow(\chi-2)^2+(\psi+3)^2=10^2\Rightarrow$

$\chi^2+\psi^2-4\chi+6\psi-87=0$

5. “Π, Α, Ρ, Α, Σ, Τ, Α, Σ, Η”

(i) $M_9^{\varepsilon}=\dfrac{9!}{2!{\cdot}3!}=30240$

(ii)
$$\left.\begin{array}{l}\text{Α} \ldots \text{Α} \ \to\ M_7^{\varepsilon}=\dfrac{7!}{2!}\\ \text{Α} \ldots \text{Η} \ \to\ M_7^{\varepsilon}=\dfrac{7!}{2!}\\ \text{Η} \ldots \text{Α} \ \to\ M_7^{\varepsilon}=\dfrac{7!}{2!{\cdot}2!}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{7!}{2!}+\frac{7!}{2!{\cdot}2!}+\frac{7!}{2!{\cdot}2!}=7!=5040$$

6. $\chi=\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow\dfrac{d\chi}{d\theta}=-\eta\mu\theta$, $\psi=\sigma\upsilon\nu 2\theta\Rightarrow\dfrac{d\psi}{d\theta}=-2\eta\mu 2\theta$, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=\frac{\frac{d\psi}{d\theta}}{\frac{d\chi}{d\theta}}=\frac{-2\eta\mu 2\theta}{-\eta\mu\theta}=\frac{4\,\cancel{\eta\mu\theta}\,\sigma\upsilon\nu\theta}{\cancel{\eta\mu\theta}}=4\sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right)\cdot\frac{d\theta}{d\chi}=\frac{d}{d\theta}(4\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\frac{1}{-\eta\mu\theta}=\left(-4\,\cancel{\eta\mu\theta}\right)\cdot\frac{1}{-\cancel{\eta\mu\theta}}=4$$

$$\frac{d^2\psi}{d\chi^2}+\frac{d\psi}{d\chi}-4\chi=4+\cancel{4\sigma\upsilon\nu\theta}-\cancel{4\sigma\upsilon\nu\theta}=4$$

7. $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu(35^0+\chi)\sigma\upsilon\nu(35^0-\chi)+\sigma\upsilon\nu(55^0-\chi)\sigma\upsilon\nu(55^0+\chi)$

(α) $f(\chi)=\sigma\upsilon\nu(35^0+\chi)\sigma\upsilon\nu(35^0-\chi)+\sigma\upsilon\nu(55^0-\chi)\sigma\upsilon\nu(55^0+\chi)=$

$=\dfrac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 70^0+\sigma\upsilon\nu 2\chi\right]+\dfrac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 110^0+\sigma\upsilon\nu 2\chi\right]=\dfrac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 70^0+\sigma\upsilon\nu(180^0-70^0)+2\sigma\upsilon\nu 2\chi\right]$

$\dfrac{1}{2}\left[\cancel{\sigma\upsilon\nu 70^0}-\cancel{\sigma\upsilon\nu 70^0}+2\sigma\upsilon\nu 2\chi\right]=\sigma\upsilon\nu 2\chi$

(β) $f(\chi)=\eta\mu\chi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\chi=\eta\mu\chi \Rightarrow \sigma\upsilon\chi 2\chi=\sigma\upsilon\nu\left(90^0-\chi\right) \Rightarrow$

(i) $2\chi=360°\kappa+90°-\chi \Rightarrow 3\chi=360°\kappa+90° \Rightarrow \chi=120°\kappa+30°, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

(ii) $2\chi=360°\kappa-90°+\chi \Rightarrow \chi=360°\kappa-90°, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

8. $\chi(1+\chi)\dfrac{d\psi}{d\chi}=2\psi \Rightarrow \displaystyle\int\frac{d\psi}{\psi}=\int\frac{2}{\chi(\chi+1)}d\chi \Rightarrow$

$\displaystyle\int\frac{d\psi}{\psi}=\int\left(\frac{2}{\chi}-\frac{2}{\chi+1}\right)d\chi \Rightarrow \ln|\psi|=2\ln|\chi|-2\ln|\chi+1|+\ln|\mathrm{K}|$

$\Rightarrow \ln|\psi|=\ln\mathrm{K}\left(\dfrac{\chi}{\chi+1}\right)^2 \Rightarrow \psi=C\left(\dfrac{\chi}{\chi+1}\right)^2$

$\dfrac{2}{\chi(\chi+1)}\equiv\dfrac{A}{\chi}+\dfrac{\mathrm{B}}{\chi+1}$

$2\equiv\mathrm{A}(\chi+1)+\mathrm{B}\chi$

$\chi=0\Rightarrow\mathrm{A}=2$

$\chi=-1\Rightarrow\mathrm{B}=-2$

9. $4\chi^2+8\chi\psi+13\psi^2=36 \Rightarrow 8\chi+8\psi+8\chi\dfrac{d\psi}{d\chi}+26\psi\dfrac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi}=\dfrac{-8\chi-8\psi}{8\chi+26\psi}$

$(3,0) \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\phi}=\left.\dfrac{d\psi}{d\chi}\right|_{\substack{\chi=3\\ \psi=0}}=\dfrac{-24}{24}=-1 \Rightarrow$ **$\underline{\lambda_{\varepsilon\varphi}=-1}$**

10. $\chi^2\dfrac{d\psi}{d\chi}-\chi\psi=1 \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi}-\dfrac{1}{\chi}\cdot\psi=\dfrac{1}{\chi^2} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{\chi}\cdot\dfrac{d\psi}{d\chi}-\dfrac{1}{\chi^2}\cdot\psi=\dfrac{1}{\chi^3} \Rightarrow d\left(\dfrac{1}{\chi}\cdot\psi\right)=\dfrac{1}{\chi^3}\,d\chi \Rightarrow \displaystyle\int d\left(\frac{1}{\chi}\cdot\psi\right)=\int\frac{1}{\chi^3}\,d\chi \Rightarrow$

$\dfrac{1}{\chi}\cdot\psi=\displaystyle\int\chi^{-3}\,d\chi \Rightarrow \frac{1}{\chi}\cdot\psi=\frac{\chi^{-2}}{-2}+C \Rightarrow \frac{1}{\chi}\cdot\psi=-\frac{1}{2\chi^2}+C \Rightarrow \boxed{\psi=-\frac{1}{2\chi}+C\chi},$

χ=1, ψ=2 $\Rightarrow 2=-\dfrac{1}{2\cdot1}+C\cdot1 \Rightarrow C=\dfrac{5}{2} \Rightarrow \boxed{\psi=-\dfrac{1}{2\chi}+\dfrac{5}{2}\chi}$

$I(\chi)=e^{\int-\frac{1}{x}dx}$

$=e^{-\ln x}=\dfrac{1}{\chi}$

<u>ΜΕΡΟΣ Β'</u>

1. (α) $\psi=\dfrac{2\chi}{\chi^2+1}$ Πεδίο ορισμού: $\chi\in\mathbb{R}$, Τομές με τους άξονες: χ = 0 $\Rightarrow$ ψ = 0 $\Rightarrow$ (0,0)

Ασύμπτωτες: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi=0 \Rightarrow$ οριζόντια ασύμπτωτη ψ = 0,

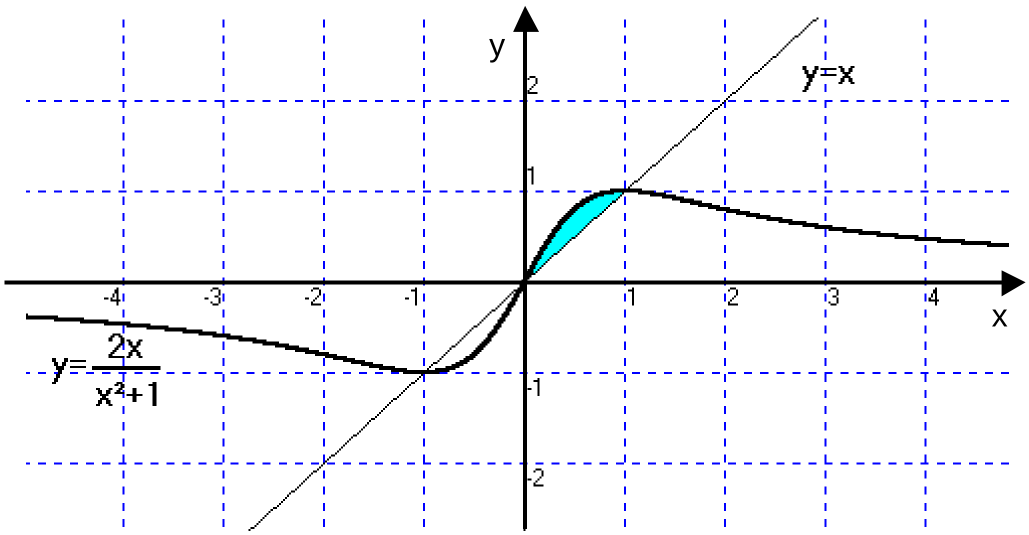
Δεν υπάρχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\dfrac{d\psi}{d\chi}=\dfrac{2\left(\chi^2+1\right)-2\chi\cdot2\chi}{\left(\chi^2+1\right)^2} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi}=\dfrac{2-2\chi^2}{\left(\chi^2+1\right)^2} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{d\chi}=\dfrac{2(1-\chi)(1+\chi)}{\left(\chi^2+1\right)^2}$

$$\frac{d\psi}{d\chi}=0 \Rightarrow \frac{2(1-\chi)(1+\chi)}{(\chi^2+1)^2}=0 \Rightarrow$$

$$2(1-\chi)(1+\chi)=0 \Rightarrow \chi=1,\quad \chi=-1$$

χ	$-\infty$		-1		+1		$+\infty$
$\frac{d\psi}{d\chi}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
ψ		↘	-1	↗	1	↘	
			min(-1,-1)		max(1,1)		



(β) $\left.\begin{array}{l}\psi=\dfrac{2\chi}{\chi^2+1}\\ \psi=\chi\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{2\chi}{\chi^2+1}=\chi \Rightarrow \chi^3+\chi=2\chi \Rightarrow \chi^3-\chi=0 \Rightarrow \chi(\chi-1)(\chi+1)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\chi=1\\ \chi=0\\ \chi=-1\end{array}\right.$

$\chi \geq 0 \Rightarrow$ χ =-1 απορρίπτεται

$$E=\int_0^1\left(\frac{2\chi}{\chi^2+1}-\chi\right)dx=\left[\ln(\chi^2+1)-\frac{\chi^2}{2}\right]_0^1=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)-(\ln 1-0)=\boxed{\ln 2-\frac{1}{2}}$$

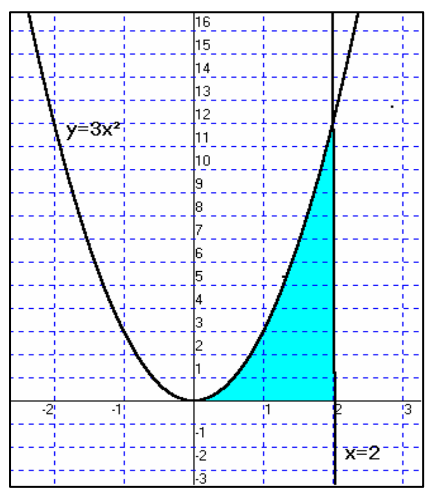
2. (α) $\psi=\alpha\chi^2,\ \alpha>0$.

$$E=\int_0^2 \alpha\chi^2 dx \Rightarrow 8=\left[\frac{\alpha\chi^3}{3}\right]_0^2 \Rightarrow 8=\frac{\alpha\cdot 8}{3} \Rightarrow \alpha=3 \Rightarrow \psi=3\chi^2$$

(β) Για χ =2 ⇒ ψ =12

$$V=\pi\int_0^{12}\left(2^2-\frac{\psi}{3}\right)d\psi \Rightarrow \text{V}=\pi\left[4\psi-\frac{\psi^2}{6}\right]_0^{12} \Rightarrow$$

$$\text{V}=\pi\left(48-\frac{144}{6}\right) \Rightarrow V=\pi(48-24) \Rightarrow V=24\pi \ \kappa.\mu.$$



3. (α) $C_1: \chi^2+\psi^2-4\chi-6\psi+9=0$,

$$g_1=-2,\ f_1=-3,\ c_1=9 \Rightarrow K_1(2,3),\quad R_1=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2-9} \Rightarrow R_1=2$$

$C_2 : \chi^2 + \psi^2 + 4\chi - 12\psi + 31 = 0$

$g_2 = 2,\ f_2 = -6,\ c_1 = 31 \Rightarrow K_2(-2,6), \quad R_2 = \sqrt{2^2 + (-6)^2 - 31} \Rightarrow R_2 = 3$

$|K_1K_2| = \sqrt{(2+2)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\Rightarrow |K_1K_2| = R_1 + R_2 = 5 \Rightarrow$ Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(β) $R = \dfrac{K_1K_2}{2} \Rightarrow R = \dfrac{5}{2}, \quad \chi_K = \dfrac{\chi_{K_1} + \chi_{K_2}}{2} = \dfrac{2-2}{2} = 0$ και $\psi_K = \dfrac{\psi_{K_1} + \psi_{K_2}}{2} = \dfrac{3+6}{2} = \dfrac{9}{2}$

$\Rightarrow \left(0, \dfrac{9}{2}\right) \Rightarrow (\chi - 0)^2 + \left(\psi - \dfrac{9}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\chi^2 + \psi^2 - 9\psi + 14 = 0}$

4. $V = 54\pi\ cm^3 \Rightarrow \pi R^2 \upsilon = 54\pi \Rightarrow \upsilon = \dfrac{54}{R^2}$

$E = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 \Rightarrow E = 2\pi R \dfrac{54}{R^2} + 2\pi R^2 \Rightarrow E = \dfrac{108\pi}{R} + 2\pi R^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dE}{dR} = -\dfrac{108\pi}{R^2} + 4\pi R \\ \dfrac{dE}{dR} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\dfrac{108\pi}{R^2} + 4\pi R = 0 \Rightarrow \dfrac{108}{R^2} = 4R \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3cm$$

R	3
$\frac{dE}{dR}$	− 0 +
E	↘ min ↗

Άρα για R = 3 cm ο κύλινδρος παρουσιάζει ελάχιστη ολική επιφάνεια και $\upsilon = \dfrac{54}{R^2} = \dfrac{54}{3^2} = 6cm$

5. (α) $\int \chi e^{2\chi}\, d\chi = \int \chi d\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right) = \dfrac{1}{2}\chi e^{2x} - \int \dfrac{1}{2}e^{2x} d\chi = \dfrac{1}{2}\chi e^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C$.

(β) $\chi = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow d\chi = -\eta\mu\theta\, d\theta, \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

$$\int \frac{d\chi}{\chi^2\sqrt{1-\chi^2}} = \int \frac{-\eta\mu\theta\, d\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta)^2\sqrt{1-(\sigma\upsilon\nu\theta)^2}} = \int \frac{-\cancel{\eta\mu\theta}\, d\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \cancel{\eta\mu\theta}} = \int -\frac{d\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = -\int \tau\varepsilon\mu^2\theta\, d\theta =$$

$$= -\varepsilon\phi\theta + C = -\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + C = -\frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi} + C.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy , ***www.cms.org.cy***

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΤΑΚΤΙΚΑ ΜΕΛΗ

(ειδικότητα Μαθηματικών **μόνο**)

Ημερομηνία αίτησης: .... 20.......

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως **τακτικό** μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από τα καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____
(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία:

ΕΠΩΝΥΜΟ: ……………………………………….
ΟΝΟΜΑ: …………………………………………..
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ: ……………………………………
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ: ……………19………..
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: ……………… Α.Κ.Α: ………………………….

ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*

B.S. ☐ ΕΤΟΣ: …………… ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ………......……..............………………
M.S. ☐ ΕΤΟΣ: …………… ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ……………………...........……..……
Ph.D. ☐ ΕΤΟΣ: …………… ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ……………………..........……………..
Άλλο : ………………………....……………………………………………..............………………

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ

Αριθμός και οδός : …………...……………………………………….
Πόλη: …………………………………….. Τ.Τ: …………………
Χωριό: …………………………………….
Τηλέφωνα: ..………………. / ..………………./ ..………………

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ

Ιδιότητα - Βαθμός : ……………………………………....…………….............………………..
Σχολείο –Ίδρυμα -Υπηρεσία : ………………………...……………...............………………..
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα: …..............… Ιδιωτικό Τομέα: …...........…..

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ………..............……………………………..……………………….

Αριθμός αποδ: …………………………… Εγγραφή: £2 / 4 Ευρώ
Ημερομηνία αποδ: ……………………….. Ετήσια Συνδρομή: £10 / 20 Ευρώ

***Να επισυνάπτουν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας**

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy , ***www.cms.org.cy***

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΕΚΤΑΚΤΑ ΜΕΛΗ

(ειδικότητα **εκτός** Μαθηματικών ή για Φοιτητές)

Ημερομηνία αίτησης: .... 20.......

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως **έκτακτο** μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από τα καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____
(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία:

ΕΠΩΝΥΜΟ: ……………………………………….
ΟΝΟΜΑ: …………………………………………..
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ: ……………………………………
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ: ……………19………..
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: ……………… Α.Κ.Α: ………………………….

ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*

B.S. ☐ ΕΤΟΣ: ………….. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ……….....…….............………………
M.S. ☐ ΕΤΟΣ: ………….. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: …………………….............……..……
Ph.D. ☐ ΕΤΟΣ: ………….. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ……………….............……………..
Άλλο : ………………………......……………………………………………..............………………

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ

Αριθμός και οδός : …………...……………………………………….
Πόλη: …………………………………….. Τ.Τ: …………………
Χωριό: …………………………………….
Τηλέφωνα: ..………………. / ..………………../ ..……………….

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ

Ιδιότητα - Βαθμός : ……………………………………......…………….............……………..
Σχολείο –Ίδρυμα -Υπηρεσία : …………………………....…………….............………………..
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα: ….............… Ιδιωτικό Τομέα: …............…...

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ………..............……………………………..……………………….

Αριθμός αποδ: …………………………… Εγγραφή: £2 / 4 Ευρώ
Ημερομηνία αποδ: ……………………….. Ετήσια Συνδρομή: £10 / 20 Ευρώ

***Να επισυνάπτουν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας**