ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΤΕΥΧΟΣ Κ΄ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2003

<u>ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ</u>

20 Χρόνια Προσφοράς
και Δημιουργίας
στη Μαθηματική Επιστήμη
και Παιδεία της Κύπρου

1983 - 2003

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΤΕΥΧΟΣ Κ΄

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2003

<u>Επιμέλεια Έκδοσης</u>

Γρηγόρης Μακρίδης - Ανδρέας Φιλίππου – Νικόλας Γιασουμή

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η 20η έκδοση της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας περιέχει όλους τους διαγωνισμούς που οργάνωσε η ΚΥ.Μ.Ε. κατά τη σχολική χρονιά 2002-2003, τους διεθνείς διαγωνισμούς, όλες τις ενιαίες και απολυτήριες εξετάσεις, τις εισαγωγικές εξετάσεις για τα ανώτερα και ανώτατα εκπαιδευτικά ιδρύματα, ανακοινώσεις συνάδελφων Μαθηματικών και θέματα από εκδηλώσεις και συνέδρια.

Στόχος της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας είναι η καλύτερη ενημέρωση για θέματα Μαθηματικής Παιδείας τόσο των μαθητών όσο και των συνάδελφων Μαθηματικών. Θέλουμε να πιστεύουμε ότι με αυτή την έκδοση επιτυγχάνουμε σε ένα μεγάλο βαθμό το σκοπό αυτό ο οποίος συμπληρώνεται με τα διάφορα σεμινάρια, συνέδρια και το καλοκαιρινό μαθηματικό σχολείο που η ΚΥ.Μ.Ε. οργανώνει κάθε χρόνο.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία ενθαρρύνει συναδέλφους να στέλνουν εργασίες τους οι οποίες θα είναι χρήσιμες για εκπαιδευτικούς και μαθητές οι οποίες ανάλογα με το γενικό όγκο του περιεχομένου της έκδοσης, αλλά και το θέμα της εργασίας, δημοσιεύονται σε έκδοση του Μαθηματικού Βήματος.

Ευχαριστώ όλους τους συναδέλφους οι οποίοι βοηθούν στην προώθηση του Μαθηματικού Βήματος στα σχολεία και τους μαθητές και ειδικότερα όσους βοήθησαν στην έκδοση του τεύχους αυτού.

Δρ Γρηγόρης Μακρίδης

Πρόεδρος
Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Δεκέμβριος 2003

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

κ. ΠΕΥΚΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑΔΗ

στην εκδήλωση για τη συμπλήρωση είκοσι χρόνων από την ίδρυση της

Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Νοέμβριος 2003

Με μεγάλη χαρά αποδέχθηκα την ευγενική πρόσκληση της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας, να χαιρετίσω την εκδήλωση αυτή, που οργανώνει με την ευκαιρία της συμπλήρωσης είκοσι χρόνων από την ίδρυσή της.

Το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού καταβάλλει συνεχείς προσπάθειες για τη βελτίωση του εκπαιδευτικού έργου και τη γενικότερη αναβάθμιση της Κυπριακής Εκπαίδευσης. Το Υπουργείο μου, οι λειτουργοί του αλλά κι εγώ προσωπικά, μέσα στα πλαίσια αυτών των προσπαθειών, ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για την καλλιέργεια, τον εκσυγχρονισμό και την προώθηση της Μαθηματικής Παιδείας στον τόπο μας.

Τα Μαθηματικά, εκτός από την πρακτική βοήθεια που μας προσφέρουν στην αντιμετώπιση και επίλυση των προβλημάτων της καθημερινής ζωής, συμβάλλουν αποτελεσματικά στη γενικότερη πνευματική καλλιέργεια και στην ολοκλήρωση της προσωπικότητας του ανθρώπου. Ενεργοποιούν και οξύνουν τις γνωστικές λειτουργίες, όπως την αντίληψη, την προσοχή, τη μνήμη και τη φαντασία.

Συντελούν στην ανάπτυξη της παρατηρητικότητας, βοηθούν στην άσκηση της αυτοσυγκέντρωσης, ενισχύουν και αναπτύσσουν την έλλογη και συνειδητή βούληση. Συμβάλλουν, επίσης, στην αισθητική καλλιέργεια των παιδιών μας, ώστε να αντιλαμβάνονται και να χαίρονται το ωραίο, την αρμονία και την τελειότητα, όπου τα συναντούν. Η γεωμετρική αναλογία, λέγει ο Πλάτωνας, αποτελεί την αδιάσπαστη αρμονία, που συνέχει σε ενιαία κοινότητα τον ουρανό, τη γη, τους θεούς και τους ανθρώπους.

Θέλω, επίσης, να υπογραμμίσω ότι τα Μαθηματικά είναι η βάση του επιστημονικού ορθολογισμού και ο άξονας πολλών θεωριών στις Φυσικές Επιστήμες. Έχουν πολλές φορές καθορίσει το δρόμο και το περιεχόμενο της φιλοσοφικής σκέψης, διέλυσαν μύθους, δόγματα και δοξασίες, έδωσαν την πρώτη ύλη για οικονομικές και πολιτικές θεωρίες, δημιούργησαν τη λογική και επηρέασαν σημαντικά τη Μουσική, τη Ζωγραφική και την Αρχιτεκτονική.

Θα ήταν βέβαια κοινός τόπος να υπενθυμίσω ότι εμείς οι Έλληνες έχουμε μια ιδιαίτερη σχέση με την επιστήμη των Μαθηματικών, γιατί αυτή καλλιεργήθηκε συστηματικά από τους αρχαίους προγόνους μας και σημάδεψε καθοριστικά τον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό, ως αναπόσπαστο μέρος του. Οι Έλληνες ήταν οι πρώτοι που καταπιάστηκαν με τη θεωρητική μελέτη της λογικής και την ανάλυση της ορθής σκέψης, ενώ είναι καλά γνωστό ότι κανένας άλλος μαθηματικός προηγουμένως δεν ασχολήθηκε με αφηρημένες έννοιες ή με την ιδέα της μαθηματικής απόδειξης.

Θέλω με την ευκαιρία αυτή να εκφράσω την ευαρέσκεια μου, γιατί η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, με την πραγματικά πλούσια και πολύπλευρη δράση της, αποτελεί πολύτιμο συνεργάτη του Υπουργείου μας, για την αναβάθμιση και διάδοση της Μαθηματικής Παιδείας στον τόπο μας. Τα επιστημονικά συνέδρια, τα καλοκαιρινά μαθηματικά σχολεία, οι μαθηματικοί διαγωνισμοί, η συμμετοχή στις Βαλκανιάδες και διεθνείς Ολυμπιάδες, οι εκδόσεις και η γενικότερη δράση της, συμβάλλουν ουσιαστικά στην ανάπτυξη της Μαθηματικής Επιστήμης στον τόπο μας.

Συγχαίρω γι' αυτό την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία και όλους εκείνους τους Μαθηματικούς, που για είκοσι τώρα χρόνια προσφέρουν αφιλοκερδώς τις υπηρεσίες τους, για την επίτευξη των στόχων της Εταιρείας. Θέλω, επίσης, να τους διαβεβαιώσω ότι και στο μέλλον προσβλέπουμε σε μια στενή και παραγωγική συνεργασία μαζί τους, για το καλό των παιδιών μας, για το καλό της Παιδείας μας.

Χαιρετισμός του Δρα Πέτρου Μ. Καρεκλά

Γενικού Διευθυντή του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού

στην Τελετή Βράβευσης των μαθητών που διακρίθηκαν σε

Διαγωνισμούς Μαθηματικών που διεξήγαγε η

Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία ΚΥ.Μ.Ε

κατά τη σχολική χρονιά 2002-2003

Μάιος 2003

Είμαι ιδιαίτερα ευτυχής γιατί μου δίνεται σήμερα η ευκαιρία να χαιρετίσω την τελετή βράβευσης των μαθητών που διακρίθηκαν σε διαγωνισμούς Μαθηματικών που διεξήγαγε η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία κατά τη σχολική χρονιά 2002-2003.

Είναι πραγματικά πολύ μεγάλη η ικανοποίηση και η περηφάνια που νιώθουμε, όλοι εμείς που ασχολούμαστε με τα εκπαιδευτικά δρώμενα του τόπου μας, όταν μαθητές μας συμμετέχουν και διακρίνονται σε επαρχιακούς, Παγκύπριους ή ακόμη και σε διεθνείς διαγωνισμούς.

Η συμβολή της Μαθηματικής Επιστήμης στην ανάπτυξη της Παγκόσμιας διανόησης από τα πανάρχαια χρόνια είναι αδιαμφισβήτητη, όπως αδιαμφισβήτητη είναι σήμερα η συμβολή της μαθηματικής σκέψης στην πρόοδο και ανάπτυξη των σύγχρονων θετικών Επιστημών και της Τεχνολογίας.

Με τις αναλύσεις, τι λύσεις, τις διερευνήσεις και τις επαληθεύσεις τους, τα Μαθηματικά ε(ναι μια διαδικασία που ανοίγει στους νέους πολυποίκιλους δρόμους και τρόπους και τους δίνει δυνατότητα για νέες προοπτικές που θα τους οδηγήσουν στην αλήθεια. Έτσι τα Μαθηματικά εμβαθύνουν και ανυψώνουν την πνευματικότητα τόσο των διδασκόντων όσο και των διδασκομένων,

Παράλληλα στη μαθηματική επιστήμη πρυτανεύει άγρυπνος, ακούραστος και αμείλικτος οδηγός και ελεγκτής ο ορθός λόγος με την αυστηρή νομοτέλεια των αρχών της ανθρώπινης λογικής, που συγκρατώντας τις εξάρσεις και ρυθμίζοντας την υπερβατική πορεία της με την αριστοτελική έννοια του μέτρου, οδηγεί τον άνθρωπο με σταθερά και θετικά βήματα προς τη γνώση, τη δεξιότητα και την πρόοδο.

Έτσι, με το σύνθετο ρόλο τους μέσα στην Εκπαίδευση, την Επιστήμη και τη Ζωή γενικά, τα Μαθηματικά αναπτύσσουν την πνευματικότητα, εντείνουν τις πνευματικές ανησυχίες και ενισχύουν τις φιλοσοφικές τάσεις και αναζητήσεις συγχρόνως όμως προάγουν τον ορθολογισμό, τον θετικισμό και το τεχνοκρατικό πνεύμα.

Και μέσα στην πολιτιστική πορεία της ανθρωπότητας τα Μαθηματικά συνέβαλαν και συμβάλλουν πάρα πολύ στην ανάπτυξη των διαφόρων κλάδων της Φιλοσοφίας, πολλών από τις Καλές Τέχνες και των πλείστων από τις Επιστήμες. Με τον τρόπο αυτό συμβάλλουν στη βελτίωση των μέσων παραγωγής και των υλικών όρων της ζωής του ανθρώπου, στην άνοδο του βιοτικού επιπέδου, καθώς και στην ανύψωση της πνευματικής και αισθητικής ποιότητας της ζωής μας.

Όλοι αυτοί οι λόγοι καθιστούν τη μελέτη των Μαθηματικών απαραίτητο στοιχείο του εκπαιδευτικού συστήματος και το μάθημα πρωτεύον σε όλες τις χώρες του κόσμου.

Στην Κύπρο, πολιτική του Υπουργείου Παιδείας είναι να δίνει σε όλους τους μαθητές τις απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες ως υποδομή τόσο για την καθημερινή ζωή όσο και για ανώτερες σπουδές σε Πανεπιστήμια.

Εκφράζω τα θερμά μου συγχαρητήρια στην Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, γιατί με την πλούσια δράση της συμβάλλει στο συνεχή εκσυγχρονισμό του μαθήματος των Μαθηματικών.

Η καθιέρωση, από μέρους της, του θεσμού της βράβευσης των μαθητών που διακρίνοντας αποτελεί άλλη μια ένδειξη του αδιάπτωτου ενδιαφέροντος της για την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης και επιστήμης στον τόπο μας.

Συγχαίρω επίσης τους μαθητές μας που βραβεύονται στη σεμνή αυτή τελετή και που είναι οι μαθητές μας που διακρίθηκαν στον Παγκύπριο Διαγωνισμό Μαθηματικών για τις Β' και Γ' τάξεις Λυκείων «Ζήνων», στον Επαρχιακό Διαγωνισμό για τις Β΄ και Γ στάξεις τάξεις Λυκείων Επαρχίας Λευκωσίας «Ιάκωβος Πατάτσος» καθώς και στις Εθνικές Ομάδες που θα λάβουν μέρος στους διεθνείς διαγωνισμούς JBMO, BMO και IMO.

Χαιρετισμός κ. Ανδρέα Σκοτεινού

Διευθυντή Μέσης Εκπαίδευσης

του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού

στην έναρξη των εργασιών του Καλοκαιρινού Μαθηματικού Σχολείου

που οργανώνει η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία

Ιούνιος 2003

Με πολλή χαρά χαιρετίζω σήμερα το 13ο Καλοκαιρινό Μαθηματικό Σχολείο, που οργανώνει η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, δίνοντας σε τόσους πολλούς μαθητές την ευκαιρία να ασχοληθούν για τις επόμενες πέντε μέρες με τα Μαθηματικά. Το να μιλήσω ενώπιον σας για τη σημασία των Μαθηματικών θα ήταν από μέρους μου μια κοινότοπη αναφορά σε ήδη γνωστά, σε σας, θέματα. Επιτρέψετε μου, όμως, να επαναλάβω την αρχαία ρήση «αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί», η οποία τονίζει τη σύνδεση των Μαθηματικών με τη Δημιουργία του Κόσμου, που αποτελεί αρχιτεκτονικό έργο του πάνσοφου Γεωμετρία Νου. Είμαι σίγουρος ότι εσείς, ζώντας σ' αυτό το ειδυλλιακό περιβάλλον, συναισθάνεστε ακόμα πιο καταλυτική τη δύναμη του πάνσοφου αυτού Νου.

Η συμμετοχή σας στα μαθήματα αυτά, του καλοκαιρινού σχολείου θα σας δώσει την ευκαιρία να αναπτύξετε και να ενδυναμώσετε την κριτική σας σκέψη και πειθαρχία, και θα σας προσφέρει τις δυνατότητες για καλύτερη διαχείριση των σχολικών σας ενασχολήσεων καθώς και των μελετών σας και άλλων ακαδημαϊκών σας προβλημάτων, αργότερα. Επίσης η συμμετοχή αυτή θα ενισχύσει τις προοπτικές σας για αποτελεσματική παρουσία σε διαγωνισμούς και άλλες δραστηριότητες ευγενούς άμιλλας. Επιπλέον, η αλληλογνωριμία και η ανάπτυξη φιλικών, μεταξύ σας, σχέσεων θα σας βοηθήσουν μελλοντικά στην ευκολότερη προσαρμογή σας στον συνεχώς μεταβαλλόμενο κόσμο μας.

Με τη διοργάνωση του Καλοκαιρινού Μαθηματικού Σχολείου η Κυπριακή

Μαθηματική Εταιρεία συμβάλλει στην προώθηση της μαθηματικής σκέψης και στην αναβάθμιση της μαθηματικής παιδείας. Ενισχύει ουσιαστικά τις προσπάθειες του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού για προώθηση και εκσυγχρονισμό των Μαθηματικών σ' όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Γι' αυτό και ενθαρρύνουμε κάθε ανάλογη προσπάθεια.

Τελειώνοντας, θέλω να συγχαρώ θερμά τους διοργανωτές του Καλοκαιρινού Μαθηματικού Σχολείου και να τους ευχηθώ να συνεχίσουν την προσφορά τους, Σε σας, τους μικρούς μαθηματικούς, εύχομαι να έχετε μια καλή διαμονή στον Αγρό, παραγωγική και ωφέλιμη, από όποια οπτική γωνιά και αν την κοιτάξει κανείς. Είμαι σίγουρος ότι αυτή την εμπειρία θα την κουβαλάτε μαζί σας για πολλά χρόνια.

Α. Σκοτεινός, Διευθυντής Μέσης Εκπαίδευσης Υ.Π.Π.

Χαιρετισμός του Κ. Παναγιώτη Μάτση

Πρώτου Λειτουργού Εκπαίδευσης (ΠΛΕ)

του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού

στην Τελετή Έναρξης της Β΄ Σειράς του

13^{ου} Καλοκαιρινού Μαθηματικού Σχολείου

Ιούνιος 2003

Με την ευκαιρία της έναρξης των εργασιών του 13^{ου} Καλοκαιρινού Μαθηματικού Σχολείου θα ήθελα να σας απευθύνω, εκ μέρους του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού, θερμό και εγκάρδιο χαιρετισμό.

Ο σημερινός περίπλοκος κόσμος, ο κόσμος της τρίτης χιλιετηρίδας, με την έκρηξη της γνώσης και της τεχνολογίας απαιτεί καλύτερη επαφή και γνωριμία με την παγκόσμια γλώσσα, τα μαθηματικά. Η κατάκτηση, όμως, αυτού του αγαθού εξακολουθεί να είναι προνόμιο των ολίγων.

Δραστηριότητες σαν τη σημερινή ενισχύουν την προσπάθεια του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού για βελτίωση της μαθηματικής αγωγής στα σχολεία μας, με γενικότερες ευμενείς επιπτώσεις στην πρόοδο του τόπου. Είναι γι' αυτό που αγκαλιάζουμε τέτοιες δραστηριότητες και εκφράζουμε θερμά συγχαρητήρια προς την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία που τις διοργανώνει.

Με ιδιαίτερη χαρά καλωσορίζω και συγχαίρω όλα τα παιδιά που ανταποκρίθηκαν στην πρόσκληση αυτή, παρά τις προκλήσεις των καλοκαιρινών διακοπών.

Όπως όλοι μας γνωρίζουμε, από τα πανάρχαια χρόνια τα μαθηματικά αποτελούσαν το βασικό άξονα της Ελληνικής και Κλασικής μας παιδείας.

Η συμμετοχή σας στα σεμινάρια αυτά θα σας δώσει τις δυνατότητες τις δυνατότητες να αναπτύξετε και να ενδυναμώσετε την κριτική σας σκέψη και πειθαρχία, και θα σας προσφέρει αυτοπεποίθηση που τόσο απαραίτητη είναι για τους πολίτες της Ενωμένης Ευρώπης. Η αλληλογνωριμία μεταξύ σας, η ξεκούραση και η διασκέδαση, θα σας δώσει παράλληλα την ευκαιρία να αναπτύξετε φιλικές σχέσεις που θα βοηθήσουν μελλοντικά στην ευκολότερη προσαρμογή σας στο συνεχώς διαφοροποιούμενο περιβάλλον.

Τέλος η ενασχόληση σας με υγιείς δραστηριότητες σαν κι' αυτή θα σας θωρακίσουν από τους κινδύνους και τις σειρήνες της σύγχρονης καταναλωτικής κοινωνίας.

Είμαι βέβαιος πως το ειδυλλιακό τοπίο του Αγρού θα σας βοηθήσει να εργαστείτε παραγωγικά και ευχάριστα ώστε να αποκτήσετε τα κατάλληλα εφόδια για την περαιτέρω ανέλιξη σας τόσο μορφωτικά, όσο και επαγγελματικά.

Τελειώνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω και να συγχαρώ τόσο τους καθηγητές που θα διδάξουν όσο και όσους με οποιοδήποτε τρόπο συμβάλλουν στην πραγματοποίηση του Καλοκαιρινού Μαθηματικού Σχολείου.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

«20 ΧΡΟΝΙΑ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ»

1983-2003

Το 2003 αποτελεί σταθμό για την Κυπριακή Μαθηματική Εταιρείας αφού συμπληρώνει 20 χρόνια ύπαρξης αλλά ταυτόχρονα ολοκληρώνει ένα μεγάλο σχέδιο νέων δημιουργιών που άρχισε και ολοκληρώθηκε την τελευταία πενταετία.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία θέλησε να γιορτάσει το εικοσάχρονά της χαρίζοντας γνώση προς όλους του μαθητές της Κύπρου, έτσι στις 6 Νοεμβρίου σε ειδική τελετή που έγινε στο Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού χαρίζει μέσω του Υπουργού Παιδείας και Πολιτισμού όλη τη σειρά της έκδοσης «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ» από το 1984-2002 στις βιβλιοθήκες όλων των σχολείων Μέσης και Τεχνικής Εκπαίδευσης της Κύπρου.

Για τον εορτασμό οργανώθηκε ειδικό Συμπόσιο με θέμα «Τα Μαθηματικά και το Μέλλον – Το Μέλλον των Μαθηματικών» το οποίο πραγματοποιήθηκε στις 22 Νοεμβρίου 2003. Στο Συμπόσιο αυτό εκπροσωπήθηκαν Μαθηματικές Εταιρείες από χώρες που υπάρχει για αρκετά χρόνια μια φιλική συνεργασία σε θέματα Μαθηματικών. Συγκεκριμένα παρευρέθηκαν πρόεδροι των Μαθηματικών Εταιρειών της Ελλάδας, Βουλγαρίας, Ρουμανίας, Αλβανίας και Σερβίας-Μαυροβουνίου. Το συμπέρασμα του Συμποσίου θα μπορούσε να το περιγράψει κανείς με μόνο μία ερώτηση της οποίας η απάντηση είναι εμφανείς, «Θα μπορούσε να υπάρξει μέλλον της ανθρωπότητας αν από αύριο σταματήσει ο κόσμος να ασχολείται με τα Μαθηματικά;»


Συμπόσιο: «Τα Μαθητικά και τον Μέλλον – Το Μέλλον των Μαθηματικών»
Προσκεκλημένοι: Πρόεδροι Μαθηματικών Εταιρειών Ελλάδας, Βουλγαρίας, Ρουμανίας, Αλβανίας, Σερβίας-Μαυροβουνίου

Ο εορτασμός των εικοσάχρονων ολοκληρώθηκε το βράδυ της 22ης Νοεμβρίου με τελετή και δείπνο στο ξενοδοχείο Χίλτον στη Λευκωσία. Την τελετή τίμησε με την παρουσία του ο Υπουργός Παιδείας και Πολιτισμού κος Πεύκιος Γεωργιάδης, οι πρόεδροι των Μαθηματικών Εταιρειών Βαλκανικών χωρών, Διευθυντές τμημάτων και αξιωματούχοι του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού, πρώην πρόεδροι και μέλη των διοικητικών συμβουλίων της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας από το 1983 έως σήμερα, εκπρόσωποι πανεπιστημίου Κύπρου και κολεγίων και πολλοί φίλοι και μέλη της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας.

- Το πρόγραμμα περιελάμβανε εκτός από τους χαιρετισμούς, ειδικό Αφηγηματικό δρώμενο με φωτεινές διαφάνειες "Οι διάλογοι του Σωκράτη", ειδικό φιλμάκι για τα 20χρονα, δόθηκε ειδική έκδοση λεύκωμα που περιείχε όλους του μαθητές που διακρίθηκαν σε μαθηματικούς διαγωνισμούς καθώς και τα μέλη των Διοικητικών Συμβουλίων της ΚΥ.Μ.Ε. . Το φιλμάκι δόθηκες δωρεάν σε όλους του παρευρισκόμενους σε ειδική έκδοση ψηφιακού δίσκου. Σημαντικό να αναφερθεί ότι δόθηκε αναμνηστικό μετάλλιο σε όλους τους μαθηματικούς που υπηρέτησαν στα εκάστοτε Διοικητικά Συμβούλια της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας.

Γρηγόρης Μακρίδης
Νυν Πρόεδρος ΚΥΜΕ

Πεύκιος Γεωργιάδης
Υπουργός Παιδείας και Πολιτισμού

Παναγιώτης Μιχαήλ
Πρώην Πρόεδρος ΚΥΜΕ

Γλαύκος Αντωνιάδης
Πρώην Πρόεδρος ΚΥΜΕ

Κώστας Χαραλαμπίδης
Σκηνοθέτης Τελετής

Φωτεινές διαφάνειες
"Οι διάλογοι του Σωκράτη»

Βράβευση Τρύφωνα Πνευματικού

Βράβευση Αντρέα Σκοτεινού

Βράβευσης Σάββα Ιωαννίδη

Βράβευση Πέτρου Πέτρου


Βράβευση Παναγιώτη Μάτση


Βράβευση Γρηγόρη Γιάγκου


Βράβευση Δανάης Κασπαρή


Βράβευση Αντρέα Σχοινή


Βράβευση Τάνιας Παναγιώτου


Βράβευση Κλαίλιας Σκοτεινού


Βράβευση Αθανάσιου Γαγάτση


Βράβευση Αντρέα Σαββίδη

Βράβευση Παναγιώτη Μιχαήλ

Βράβευση Γλαύκου Αντωνιάδη

Βράβευση Αντρέα Αντωνίου

Βράβευση Νίκου Ηλία

Βράβευση Αντρέα Αθανασίου

Τιμητικό δώρο από τον Πρόεδρο της Βουλγαρικής Μαθηματικής Εταιρείας καθηγητή Stefan Dodunecov

ΤΕΛΕΤΗ ΒΡΑΒΕΥΣΗΣ
4ης ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑΣ

Α. Φιλίππου, ΚΥ.Μ.Ε. Συντονιστής της 4ης Κυπριακής Μαθηματικής Ολυμπιάδας

Μαθητές οι οποίοι πήραν μετάλλιο περιμένουν την βράβευση τους

Κ. Χρήστου, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Χ. Παπαχριστοδούλου, ΚΥ.Μ.Ε.

Σ. Αντωνίου, Γραμματέας ΚΥ.Μ.Ε.
Μ. Αντωνιάδης, Πρόεδρος Σ.ΜΑ.Κ.

Χορηγοί της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας εντός του 2003

Κυπριακά Διυλιστήρια Πετρελαίου
Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού για την Α' Λυκείου

Γλαύκος Αντωνιάδης
Βραβείο για μαθητές που διαπρέπουν ή ανήκουν στην ομάδα για BMO / IMO

Μαρία Ακύλα Χριστοδουλίδου
Αθλοθέτης Επαρχιακού Διαγωνισμού Λεμεσού

✞Χαράλαμπος Μορφάκης
Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού ΖΗΝΩΝ

Κανίκλης Αντρέας
Αθλοθέτης Επαρχιακού Λευκωσίας

ΚΕΟ
Αθλοθέτης Διαγωνισμού Γ' Γυμνασίου

Τράπεζα Κύπρου
Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού Μαθηματικών

Κλαίλια Σουρμελή-Σκοτεινού
Βραβείο στο μαθητή με την πιο ψηλή βαθμολογία στην IMO.

Τράπεζα Κύπρου (παράρτημα Πάφου), Μονή Κύκκου
Αθλοθέτηση Επαρχιακού Διαγωνισμού Πάφου

Α.ΤΗ.Κ. (ΧΡΥΣΟΣ ΧΟΡΗΓΟΣ)
Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα
Καλοκαιρινό Μαθηματικό Σχολείο
Συνέδρια

Ευχαριστούμε!

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy , ***www.cms.org.cy***

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΠΑΡΧΙΑΚΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΑΞΕΙΣ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
14 Δεκεμβρίου 2002

ΕΠΑΡΧΙΑ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ

Βραβεία

1ον Βραβείο Τελεβάντου Ιουλία του Αναστάσιου, Γ΄ Λυκ. Αποστόλου Βαρνάβα
2ον Βραβείο Τσουδερού Αθηνά του Παναγιώτη, Γ΄ Λυκ. Παλουριώτισσας
3ον Βραβείο Χατζηδημητρίου Λένος του Κώστα, Γ΄ Λυκ. Αποστόλου Βαρνάβα

Έπαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

Γεωργίου Παναγιώτης του Γεωργίου, Γ΄ Λυκ. Αποστόλου Βαρνάβα
Μαουράο Μιχάλης του Joseph, Β΄ Λυκ. Παγκύπριο Γυμνάσιο
Χρίστου Φωτεινή του Χρίστου, Γ΄ Λυκ. Αρχ. Μακ. Γ’
Καρκατζούνης Στράτος-Χρήστος του Στυλιανού, Γ΄ Λυκ. Αρχ. Μακ. Γ’
Πίπης Μενέλαος του Ανδρέα, Γ΄ Λυκ. Αγ. Γεωργίου Λακατάμειας
Κέντας Γιώργος του Ανδρέα, Γ΄ Παγκύπριο Γυμνάσιο
Ποφαίδης Κωνσταντίνος του Ζήνωνα, Γ΄ Λυκ. Αρχ. Μακ. Γ’
Θεμιστοκλέους Έλενα του Σωτήρη, Γ΄ Λυκ. Αρχ. Μακ. Γ’

Εύφημη Μνεία στους:

Σκίτσας Μιχάλης του Χριστόδουλο, Γ΄ Παγκύπριο Γυμνάσιο
Διονυσιού Στέφανη του Κωνσταντίνου, Γ΄ Λυκ. Αποστόλου Βαρνάβα
Γιασουμή Άννα του Κώστα, Β΄ Λυκ. Εθνομάρτυρα Κυπριανού
Ανδρέου Ανδρέας του Δημητρίου, Γ΄ Λυκ. Αποστόλου Βαρνάβα
Γαγάτσης Αναστάσιος του Αθανασίου, Γ΄ Λυκ. Αποστόλου Βαρνάβα

ΕΠΑΡΧΙΑ ΛΕΜΕΣΟΥ

Βραβεία

1ο Βραβείο: Μουρούζη Θεοδόση του Χριστόδουλο, Τάξη Γ΄, Λύκειο Πολεμιδιών
2ο Βραβείο: Βασιλείου Πέτρο του Γρηγόρη, Τάξη Γ΄, Λύκειο Πολεμιδιών
3° Βραβείο εξίσου στους:
Μαληκίδη Βασίλη του Γεωργίου, Τάξη Β΄, Λανίτειο Λύκειο Α΄
Χρίστου Μιχάλη του Μανώλη, Τάξη Γ΄, Λύκειο Απ.Πέτρου και Παύλου

Έπαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

Αριστείδου Πέτρος του Χριστάκη, Τάξη Γ΄, Λύκειο Αγ.Σπυρίδωνα
Καλλής Γιώργος του Αντρέα, Τάξη Γ΄, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου
Τρύφωνος Χριστιάνα του Γεωργίου, Τάξη Β΄, Λανίτειο Λύκειο Α΄
Λάμπρου Κλεοπάτρα του Κύπρου, Τάξη Β΄, Λύκειο Λινόπετρας

Εύφημη Μνεία στους:

Χριστοφή Μιχάλης του Πάμπου, Τάξη Β΄. Λύκειο Πολεμιδιών
Θεοδωρίδη Μαρία του Θεόδωρου, Τάξη Γ΄, Λύκειο Πολεμιδιών
Φοινίκεττος Γιάννης του Νικολάου, Τάξη, Λανίτειο Λύκειο Α΄
Μαύρος Μάριος του Χαράλαμπου, Τάξη Γ΄, Λύκειο Απ.Πέτρου και Παύλου
Θεμιστοκλέους Πόλυς του Ανδρέα, Τάξη Γ΄, Λανίτειο Λύκειο Α΄

ΕΠΑΡΧΙΕΣ ΛΑΡΝΑΚΑΣ ΚΑΙ ΑΜΜΟΧΩΣΤΟΥ

Βραβεία

1ο Βραβείο: Χατζηγιάννης Μιχαήλ – Ιάσων Ηλία, Τάξη Γ΄, Παγκύπριο Λύκειο
2ο Βραβείο : Μασούρας Βελισσάριος Θεοχάρη, Τάξη Γ΄, Λύκειο Αγίου Γεωργίου
3ο Βραβείο: Καρίτεβλη Μελίνα Ανδρέα, Τάξη Γ΄, Λύκειο Βεργίνας

Έπαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

Γεωργίου Παναγιώτης Σωτήρη, Τάξη Γ΄, Λύκειο Αγίου Γεωργίου
Χατζημιχαήλ Ευθύμιος Ανδρέα, Τάξη Γ΄, Λύκειο Αγίου Γεωργίου
Καλογέρης Ανδρέας Λάκη, Τάξη Γ΄, Λύκειο Αγίου Γεωργίου
Λουκά Στυλιανός Γιαννάκη, Τάξη Β΄, Λύκειο Βεργίνας

Εύφημη Μνεία στους:

Ευλαβής Χριστόφορος Ανδρέα, Τάξη Γ΄, Λύκειο Αγίου Γεωργίου Λάρνακας
Χατζηττοφής Κωνσταντίνος Σωτήρη, Τάξη Γ΄, Λύκειο Αγίου Γεωργίου Λάρνακας
Ζωσιμάς Ζωσιμάς Κωνσταντίνου, Τάξη Β΄, Λύκειο Αγίου Γεωργίου Λάρνακας
Μάγου Χριστίνα Νικόλα, Τάξη Γ΄, Λύκειο Παραλιμνίου

ΕΠΑΡΧΙΑ ΠΑΦΟΥ

Βραβεία

1ο (Εξίσου) - Ζαμπυρίνης Σοφοκλής Παντελή, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Κύκκου Πάφου.
- Ζαχαρία Χρίστος Σίμου, Γ΄ Τάξη Λύκειο, Κύκκου Πάφου.
2ο Δημητρίου Δημήτρης Χριστάκη, Β΄ Τάξη ,Λύκειο Αρχ Μακαρίου Γ΄ Πάφου.
3ο Λάμπρου Πάυλος Χριστοδούλου, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Αρχ Μακαρίου Γ΄ Πάφου.

Έπαινος κατά σειράν επιτυχίας στους:

Θεοφάνους Ζαχαρίας Αγαθοκλή, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Αγ Νεοφύτου Πάφου.
Γεωργίου Αλέξανδρος Ανδρέα, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Αγ Νεοφύτου Πάφου.
Κασιουλή Μαρία Γεωργίου, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Αγ Νεοφύτου Πάφου.
Παύλου Στάθης Αρέστη, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Πολεμίου.

Εύφημη Μνεία στους:

Ζαμπυρίνης Κώστας Κενδέα, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Αγ Νεοφύτου Πάφου.
Πολυκάρπου Άρτεμης Λαυρέντη, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Αγ Νεοφύτου Πάφου.
Ιωαννίδη Σωκράτης Χριστοδούλου, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Αρχ Μακαρίου Γ΄ Πάφου.
Αγγελή Μηνάς Τάκη, Γ΄ Τάξη, Λύκειο Πολεμίου.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy , ***www.cms.org.cy***

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003

Φεβρουάριος 2003

1ο & 2ο Βραβείο απονέμεται εξίσου στους:

- Μιχαηλίδου Μαρία Γεωργίου — Λύκειο Παλαιομετόχου
- Κουγιάλη Μαρίνα Ανδρέου — Λύκειο Πολεμιδιών Λεμεσός

3ο Βραβείο απονέμεται εξίσου στους:

- Χατζησάββα Νικόλα Σωτήρη — Λύκειο Αγίου Αντωνίου, Λεμεσός
- Χριστοδούλου Σταύρος Χριστάκη — Λύκειο Πολεμιδιών Λεμεσός

Έπαινος απονέμεται κατά σειρά επιτυχίας στους:

- Παπαντωνίου Κωνσταντίνος Κυριάκου — Λύκειο Εθνάρχη Μακαρίου, Πάφος
- Κυριάκου Άντρη Κυριάκου — Λύκειο Πολεμιδιών Λεμεσός
- Αρσένης Απόστολος Νίκου — Λύκειο Εθνάρχη Μακαρίου, Πάφος
- Μαυρομμάτης Ανδρέας Πέτρου — Λύκειο Αγίου Νεοφύτου , Πάφος
- Δημητρίου Ηλίας Δημητρίου — Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ΄, Λευκωσία

Εύφημη μνεία για τους ακόλουθους μαθητές:

- Βενιζέλος Δημήτρης Κώστα, — Λύκειο Εθνάρχη Μακαρίου, Πάφος
- Βρυωνίδου Ελένη Χριστάκη — Λύκειο Αγίας Φυλάξεως, Λεμεσός
- Θεμιστοκλέους Ξένια Παναγιώτη — Λύκειο Αγίου Νεοφύτου, Πάφος
- Φανίδου Δόμνα Χαράλαμπου — Λύκειο Εθνάρχη Μακαρίου, Πάφος
- Σπανούδη Κωνσταντίνα Κλεόβουλου — Λύκειο Απόστολου Βαρνάβα, Λευκωσία
- Σιαλής Κυριάκος Χαράλαμπου — Λύκειο Πολεμιδιών Λεμεσός
- Αβραάμ Μαρίνα Αβραάμ — Λύκειο Αγίου Ιωάννη, Λεμεσός

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy, ***www.cms.org.cy***

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ «ΖΗΝΩΝ» 2003

Μάρτιος 2003

1ο Βραβείο στον:

Ζαμπυρίνη Σοφοκλή του Παντελή (Λύκειο Κύκκου Πάφου)

Το 2ο και 3ο Βραβείο απονέμονται εξίσου στους:

Μοουράο Μιχάλη του Joseph Manuel (Παγκύπριο Γυμνάσιο Λευκωσίας)
Μασούρας Βελισάριος του Θεοχάρη (Λύκειο Αγίου Γεωργίου Λάρνακας)

ΕΠΑΙΝΟΣ ΑΠΟΝΕΜΕΤΑΙ ΚΑΤΑ ΣΕΙΡΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΣΤΟΥΣ:

Τσουδερού Αθηνά του Παναγιώτη (Λύκειο Παλλουριώτισσας-Λευκωσία)
Κρύφτης Αχιλλέας του Γεωργίου (Λύκειο Ακρόπολης - Λευκωσία)
Χρίστου Μιχάλης του Μανώλη (Λύκειο Πέτρου και Παύλου - Λεμεσός)
Χριστοφή Μιχάλης του Χαραλάμπους (Λύκειο Πολεμιδιών - Λεμεσός)
Ζωσιμάς Ζωσιμάς του Κωνσταντίνου (Λύκειο Αγίου Γεωργίου Λάρνακας)
Παύλου Στάθης του Αρέστη (Γυμνάσιο – Λύκειο Πολεμίου - Πάφος)
Μουρούζης Θεοδόσης του Χριστόδουλου (Λύκειο Πολεμιδιών - Λεμεσός)
Αριστείδου Πέτρος του Χριστάκη (Λύκειο Αγίου Σπυρίδωνα - Λεμεσός)
Μαύρος Μάριος του Χαραλάμπους (Λύκειο Πέτρου και Παύλου-Λεμεσός)

ΠΡΟΚΡΙΘΗΚΑΝ ΟΙ ΠΙΟ ΚΑΤΩ ΣΤΡΑΤΙΩΤΕΣ:

Ζαχαρίας Κυριάκος του Σίμου
Ματσίκαρης Κυριάκος του Γεωργίου
Στυλιανού Ματθαίος του Αντρέα
Βαρνάβα Χαράλαμπος του Βαρνάβα

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy, ***www.cms.org.cy***

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΓΙΑ ΤΗ Γ΄ ΤΑΞΗ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ 2003

Φεβρουάριος 2003

1ο ΒΡΑΒΕΙΟ στον:

Ιωαννίδη Γιάννη Κώστα (Λανίτειο Γυμνάσιο Λεμεσού)

2ο ΒΡΑΒΕΙΟ στην:

Σολέα Αναστασία Λεωνίδα (Τσίρειο Γυμνάσιο Λεμεσού)

3ο ΒΡΑΒΕΙΟ εξίσου στους:

Ρωσσίδη Μιχάλη Γιώργου (Ευρυβιάδειο Γυμνάσιο Λάρνακας)

Χαραλάμπους Μαρία Χαράλαμπου (Γυμν. Απ. Ανδρέα Έμπας)

ΕΠΑΙΝΟΣ ΑΠΟΝΕΜΕΤΑΙ ΚΑΤΑ ΣΕΙΡΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΣΤΟΥΣ:

Κωνσταντίνου Σκεύη Κώστα (Γυμνάσιο ΠολεμιδιώνΛεμεσού)

Δημητρίου Στέλλα Γιώργου (Λανίτειο Γυμνάσιο Λεμεσού)

Δράκου Νάνσια Γιώργου (Γυμνάσιο Λατσιών)

Μαληκκίδου Δέσπω Χρίστου (Γυμν. Αρχ. Μακαρίου Λευκωσία)

Πέτρου Νικόλας Παναγιώτη (Γυμνάσιο Ξυλοτύμπου)

ΕΥΦΗΜΗ ΜΝΕΙΑ ΚΑΤΑ ΣΕΙΡΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΣΤΟΥΣ:

Δημητροπούλου Αλεξάνδρα Ευστάθιου (Περιφ. Γυμν. Κιτίου)

Βασιλείου Χριστίνα Λούκα (Ευρυβιάδειο Γυμνάσιο Λάρνακας)

Γεωργίου Κυριάκος Σάββα (Λανίτειο Γυμνάσιο Λεμεσού)

Ζεβεδαίου Έλενα Κώστα (Λανίτειο Γυμνάσιο Λεμεσού)

Καραγιάννη Μαρία Γεώργιου (Γυμνάσιο Παραλιμνίου)

Μιχαήλ Μιχάλης Αντώνη (Γυμνάσιο Αραδίππου) .

Σιηττή Παρασκευή Κώστα (Γυμνάσιο Πλατύ)

Στυλιανίδης Θεόδωρος Ιωάννη (Γυμν. Αγ. Παρασκευής Γεροσκήπου)

$44^{η}$ Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

Τόκιο – Ιαπωνία

Ιούλιος 2003

1. Ζαμπυρίνης Σοφοκλής, Λύκειο Κύκκου Πάφου
2. Ζαχαρίας Κυριάκος, Εθνοφρουρός (Έπαινος)
3. Στυλιανού Ματθαίος, Εθνοφρουρός
4. Χρίστου Μιχάλης, Λύκειο Πέτρου και Παύλου, Λεμεσός
5. Κρύφτης Αχιλλέας, Λύκειο Ακρόπολης, Λευκωσία
6. Ματσικάρης Κυριάκος, Εθνοφρουρός

Συνοδοί Καθηγητές: Ανδρέας Φιλίππου, Θεόκλητος Παραγιού

$20^{η}$ Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Τίρανα – Αλβανία

Μάιος 2003

1. Ζαμπυρίνης Σοφοκλής, Λύκειο Κύκκου Πάφου (Χάλκινο Μεγαλείο)
2. Μασούρας Βελισσάριος, Λύκειο Αγίου Γεωργίου, Λάρνακα
3. Μουρούζης Θεοδόσης , Λύκειο Πολεμιδιών, Λεμεσός
4. Κρύφτης Αχιλλέας, Λύκειο Ακρόπολης, Λευκωσία (Έπαινος)
5. Αριστείδου Πέτρος, Λύκειο Πέτρου και Παύλου, Λεμεσός
6. Χρίστου Μιχάλης, Λύκειο Πέτρου και Παύλου, Λεμεσός (Έπαινος)

Συνοδοί Καθηγητές: Ανδρέας Φιλίππου, Θεόκλητος Παραγιού

$7^{η}$ Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (κάτω των 15 ½)

Τουρκία

Ιούνιος 2003

1. Κουγιάλη Μαρίνα, Λύκειο Πολεμιδιών Λεμεσός
2. Ιωαννίδης Γιάννης, Λανίτειο Γυμνάσιο, Λεμεσός
3. Σολέα Αναστασία, Τσίρειο Γυμνάσιο, Λεμεσός
4. Δράκου Νάσια, Γυμνάσιο Λατσιών
5. Ρωσσίδης Μιχάλης, Ευρυβιάδειο Γυμνάσιο, Λάρνακα
6. Φανίδου Δόμνα, Λύκειο Εθνάρχη Μακαρίου, Πάφος

Συνοδοί Καθηγητές: Λιασίδης Ευθύβουλος, Σαββίδης Αντρέας,

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ</u>

Σάββας Ιωαννίδης
Μαθηματικός

<u>Άσκηση 1.</u> Έστω σημείο Μ στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι:

$\frac{1}{2}$(ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ)<ΜΑ+ΜΒ+ΜΓ< ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ.

<u>Άσκηση 2.</u> Αν α,β,γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι:

(i) $1 \le \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} < 2$

(ii) αν $\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma} \in \mathbb{N}$

Τότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισόπλευρο.

<u>Άσκηση 3.</u> Δίδεται το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Να δείξετε ότι:

min(υ_α ' υ_β , υ_γ) ≤ R+ρ ≤ max(υ_α ' υ_β , υ_γ), όπου R και ρ είναι οι ακτίνες του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου αντίστοιχα και υ_α ' υ_β , υ_γ τα ύψη του τριγώνου.

<u>Άσκηση 4.</u> Να δείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει:

υ_α ' υ_β , υ_γ ≤ 4R+ρ.

<u>Άσκηση 5.</u> Να δείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει οι ανισότητες:

$$1 < \frac{\eta\mu \mathrm{A} + \eta\mu \mathrm{B} + \eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu \mathrm{B} + \sigma\upsilon\nu \Gamma} < 2.$$

<u>Άσκηση 6.</u> Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι ανισότητες:

$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma \ge 9\rho$

$\rho_\alpha + \rho_\beta + \rho_\gamma \ge 9\rho$ όπου υ_α ' υ_β , υ_γ τα ύψη του τριγώνου, ρ_α, ρ_β, ρ_γ, οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

<u>Άσκηση 7.</u> Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις:

(i) $\eta\mu\dfrac{\mathrm{A}}{2} \le \dfrac{\alpha}{2\sqrt{\beta\cdot\gamma}}$

(ii) $\eta\mu\dfrac{\mathrm{A}}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{\mathrm{B}}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{\Gamma}{2} \le \dfrac{1}{8}$

(iii) $R \ge 2\rho$

(iv) $\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} + \sigma\upsilon\nu \mathrm{B} + \sigma\upsilon\nu \Gamma \le \dfrac{3}{2}$

(v) $\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}\cdot\sigma\upsilon\nu \Gamma \le \dfrac{1}{8}$

(vi) $\eta\mu \mathrm{A} + \eta\mu \mathrm{B} + \eta\mu \Gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

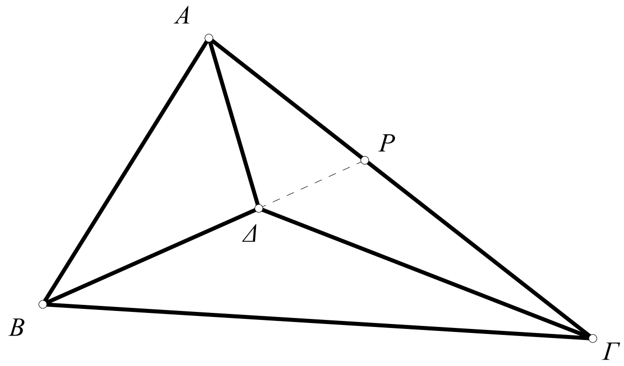
<u>Άσκηση 8.</u> Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύουν οι σχέσεις:

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \ge 4\mathrm{E}\sqrt{3}$

(όπου α, β, γ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και Ε το εμβαδό του).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Άσκηση 1.



(i) Προσθέτουμε κατά μέλη τις προφανείς ανισότητες που ισχύουν στα τρίγωνα ΑΒΜ, ΒΓΜ και ΓΛΜ.

$$\begin{array}{l} AB<MA+MB \\ B\Gamma< MB+M\Gamma \quad + \\ \Gamma A< M\Gamma+MA \\ \hline \end{array}$$

$$AB+B\Gamma+\Gamma A< 2MA+2MB+2M\Gamma \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(AB+B\Gamma+\Gamma A)<MA+MB+M\Gamma$$

(ii) Προεκτείνουμε τη ΒΜ και συμβολίζουμε με Ρ το σημείο τομής της με τη πλευρά ΑΓ.

Τότε $BM+M\Gamma< BM+MP+P\Gamma= BP+P\Gamma< BA+AP+P\Gamma= BA+A\Gamma$

Έτσι
$$\begin{array}{l} BM+ M\Gamma< BA+A\Gamma \\ M\Gamma+MA< B\Gamma+BA \quad + \\ MA+MB< A\Gamma+B\Gamma \\ \hline \end{array}$$

$$2MA+2MB+2M\Gamma<2AB+2B\Gamma+2\Gamma A \quad\Rightarrow\quad MA+MB+M\Gamma< AB+B\Gamma+\Gamma A$$

Άσκηση 2.

(i) Το πρώτο σκέλος ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ με $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha > 0$.

Έχουμε $1\leq \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

$\Leftrightarrow \alpha^2-2\beta\gamma+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\geq 0 \qquad \alpha\lambda\eta\theta\acute{\varepsilon}\varsigma$

Για το δεύτερο σκέλος χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα

$$\left.\begin{array}{l}|\alpha-\beta|<\gamma\\ |\beta-\gamma|<\alpha\\ |\gamma-\alpha|<\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2<\gamma^2\\ \beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2<\alpha^2\\ \gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2<\beta^2\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha\Rightarrow$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}<2$$

(ii) Αν $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\in\mathbb{N}$ τότε θα έχουμε υποχρεωτικά

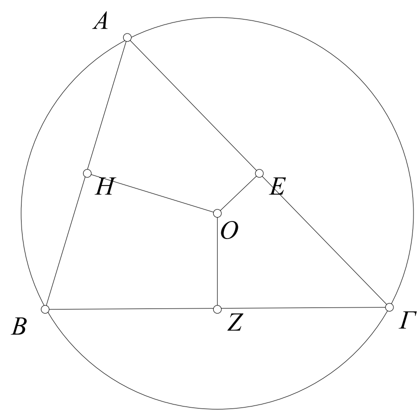
$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}=1\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

$$\Rightarrow(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma$$

$\Rightarrow$ το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 3.



Συμβολίζουμε με Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου, περί το τρίγωνο, κύκλου.

ΟΜ $\perp$ ΒΓ

ΟΝ $\perp$ ΑΓ

ΟΡ $\perp$ ΑΒ

Τα τετράπλευρα ΟΡΒΜ, ΟΜΓΝ και ΟΝΑΡ είναι εγγράψιμα σε κύκλο.
($P_1=M_1=N_1=P_2=M_2=N_2=90^\circ$). Χρησιμοποιούμε το α΄ θεώρημα του Πτολεμαίου στα τετράπλευρα αυτά και έχουμε:

$$\mathrm{OM}\cdot\mathrm{BP}+\mathrm{OP}\cdot\mathrm{BM}=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{PM}$$

$$\mathrm{ON}\cdot\mathrm{M\Gamma}+\mathrm{OM}\cdot\mathrm{N\Gamma}=\mathrm{O\Gamma}\cdot\mathrm{MN}$$

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{AN}+\mathrm{ON}\cdot\mathrm{AP}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{PN}$$

$$\mathrm{OM}\cdot\frac{\gamma}{2}+\mathrm{OP}\cdot\frac{\alpha}{2}=R\cdot\frac{\beta}{2}\quad(1)$$

ή
$$\mathrm{ON}\cdot\frac{\alpha}{2}+\mathrm{OM}\cdot\frac{\beta}{2}=R\cdot\frac{\gamma}{2}\quad(2)$$

$$\mathrm{OP}\cdot\frac{\beta}{2}+\mathrm{ON}\cdot\frac{\gamma}{2}=R\cdot\frac{\alpha}{2}\quad(3)$$

Έχουμε ακόμη:

$E_{(OB\Gamma)}+E_{(OA\Gamma)}+E_{(AB\Gamma)}=E_{(AB\Gamma)}\Rightarrow \mathrm{OM}\cdot\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ON}\cdot\frac{\beta}{2}+\mathrm{OP}\cdot\frac{\gamma}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\rho$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), (2), (3) και (4) και λαμβάνουμε:

$$(\mathrm{OM}+\mathrm{ON}+\mathrm{OP})\cdot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=(R+\rho)\cdot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{OM}+\mathrm{ON}+\mathrm{OP}=R+\rho$$

(Η απόδειξη αυτής της σχέσης γίνεται και τριγωνομετρικά)

Τώρα παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\mathrm{OM}}{\upsilon_\alpha}+\frac{\mathrm{ON}}{\upsilon_\beta}+\frac{\mathrm{OP}}{\upsilon_\gamma}=\frac{\mathrm{E}_{(\mathrm{OB\Gamma})}}{\mathrm{E}_{(\mathrm{AB\Gamma})}}+\frac{\mathrm{E}_{(\mathrm{OA\Gamma})}}{\mathrm{E}_{(\mathrm{AB\Gamma})}}+\frac{\mathrm{E}_{(\mathrm{OAB})}}{\mathrm{E}_{(\mathrm{AB\Gamma})}}=\frac{\mathrm{E}_{(\mathrm{OB\Gamma})}+\mathrm{E}_{(\mathrm{OA\Gamma})}+\mathrm{E}_{(\mathrm{OAB})}}{\mathrm{E}_{(\mathrm{AB\Gamma})}}=\frac{\mathrm{E}_{(\mathrm{AB\Gamma})}}{\mathrm{E}_{(\mathrm{AB\Gamma})}}=1$$

(Ο λόγος των υψών ισούται με το λόγο των εμβαδών, διότι τα τρίγωνα έχουν κοινή βάση).

Αλλά, $\dfrac{\mathrm{OM}+\mathrm{ON}+\mathrm{OP}}{\max(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)}\le\dfrac{\mathrm{OM}}{\upsilon_\alpha}+\dfrac{\mathrm{ON}}{\upsilon_\beta}+\dfrac{\mathrm{OP}}{\upsilon_\gamma}\le\dfrac{\mathrm{OM}+\mathrm{ON}+\mathrm{OP}}{\min(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)}$

$$\Leftrightarrow \frac{R+\rho}{\max(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)}\le\frac{\mathrm{OM}}{\upsilon_\alpha}+\frac{\mathrm{ON}}{\upsilon_\beta}+\frac{\mathrm{OP}}{\upsilon_\gamma}\le\frac{R+\rho}{\min(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)}$$

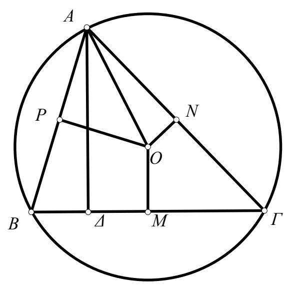
$$\Leftrightarrow \frac{R+\rho}{\max(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)}\le 1\le\frac{R+\rho}{\min(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)}\Leftrightarrow\frac{\max(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)}{R+\rho}\ge 1\ge\frac{\min(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)}{R+\rho}$$

$$\Leftrightarrow \max(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)\ge R+\rho\ge\min(\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma)$$

Άσκηση 4.

Συμβολίζουμε με O το κέντρο του περιγεγραμμένου, περί το τρίγωνο, κύκλου. Έχουμε $\mathrm{A\Delta}\perp\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{A\Delta}=\upsilon_\alpha$.

Τότε $\mathrm{A\Delta}\le\mathrm{AM}\le R+\mathrm{OM}$ θα ισχύουν λοιπόν κυκλικά.



$$\left.\begin{array}{l}\upsilon_\alpha\le R+\mathrm{OM}\\ \upsilon_\beta\le R+\mathrm{ON}\\ \upsilon_\gamma\le R+\mathrm{OP}\end{array}\right\}\Rightarrow\upsilon_\alpha+\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma\le 3R+\mathrm{OM}+\mathrm{ON}+\mathrm{OP}=4R+\rho$$

$$(\mathrm{OM}+\mathrm{ON}+\mathrm{OP}=R+\rho)$$

Άσκηση 5.

Φέρουμε τα ύψη του τριγώνου. Το ορθόκεντρο H βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου (οξυγώνιο).

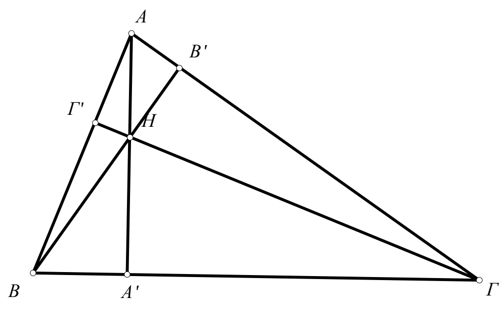
Έχουμε

$$\frac{\mathrm{AB}'}{\mathrm{AH}}=\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}'\widehat{\mathrm{A}\Gamma}=\eta\mu\Gamma\Rightarrow$$

$$\mathrm{AH}=\frac{\mathrm{AB}'}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\mathrm{AB}\cdot\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}}{\eta\mu\Gamma}=2R\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$$

Τότε οι, προς απόδειξη, ανισότητες γράφονται:

$$1<\frac{2R\eta\mu\mathrm{A}+2R\eta\mu\mathrm{B}+2R\eta\mu\Gamma}{2R\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+2R\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+2R\sigma\upsilon\nu\Gamma}<2$$



$$\Leftrightarrow 1 < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\mathrm{HA}+\mathrm{HB}+\mathrm{H\Gamma}} < 2$$

Ισχύει όμως $\left.\begin{array}{l}\mathrm{HA} < \mathrm{AA}' < \beta \\ \mathrm{HB} < \mathrm{BB}' < \gamma \\ \mathrm{H\Gamma} < \Gamma\Gamma' < \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{HA}+\mathrm{HB}+\mathrm{H\Gamma} < \alpha+\beta+\gamma \quad (1)$

και $\left.\begin{array}{l}\alpha < \mathrm{HB}+\mathrm{H\Gamma} \\ \beta < \mathrm{HA}+\mathrm{H\Gamma} \\ \gamma < \mathrm{HA}+\mathrm{HB}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma < 2(\mathrm{HA}+\mathrm{HB}+\mathrm{H\Gamma}) \quad (2)$

οι σχέσεις (1) και (2) μας οδηγούν $1 < \dfrac{\eta\mu \mathrm{A}+\eta\mu \mathrm{B}+\eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}+\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}+\sigma\upsilon\nu \Gamma} < 2$

Άσκηση 6.

Για τους θετικούς αριθμούς x, ψ, ω ισχύει:

$$\frac{x+\psi+\omega}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}} \quad \text{(Αριθμητικός μέσος} \geq \text{Αρμονικού μέσου)}$$

Έχουμε και τις γνωστές σχέσεις:

$\dfrac{1}{\upsilon_\alpha}+\dfrac{1}{\upsilon_\beta}+\dfrac{1}{\upsilon_\gamma} = \dfrac{1}{\rho_\alpha}+\dfrac{1}{\rho_\beta}+\dfrac{1}{\rho_\gamma} = \dfrac{1}{\rho}$ έτσι $\upsilon_\alpha+\upsilon_\beta+\upsilon_\gamma \geq \dfrac{9}{\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}} = 9\rho$

και $\rho_\alpha+\rho_\beta+\rho_\gamma \geq \dfrac{9}{\frac{1}{\upsilon_\alpha}+\frac{1}{\upsilon_\beta}+\frac{1}{\upsilon_\gamma}} = 9\rho$

Άσκηση 7.

(i) $\eta\mu\dfrac{\mathrm{A}}{2} \leq \dfrac{\alpha}{2\sqrt{\beta\gamma}} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}} \leq \dfrac{\alpha}{2\sqrt{\beta\gamma}} \Leftrightarrow 2\sqrt{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \leq \alpha \Leftrightarrow$

$4(\tau-\beta)(\tau-\gamma) \leq \alpha^2 \Leftrightarrow 4(\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2})(\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}) \leq \alpha^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-(\beta-\gamma)^2 \leq \alpha^2 \Leftrightarrow -(\beta-\gamma)^2 \leq 0$ αληθές.

(ii) Από την απόδειξη της (i) έχουμε κυκλικά:

$$\left.\begin{array}{l}\eta\mu\dfrac{\mathrm{A}}{2} \leq \dfrac{\alpha}{2\sqrt{\beta\gamma}} \\ \eta\mu\dfrac{\mathrm{B}}{2} \leq \dfrac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} \\ \eta\mu\dfrac{\Gamma}{2} \leq \dfrac{\gamma}{2\sqrt{\alpha\beta}}\end{array}\right\} \Rightarrow \eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\cdot\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \leq \frac{\alpha\beta\gamma}{8\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2}}$$

$$\Rightarrow \eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\cdot\eta\mu\frac{\mathrm{B}}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

(iii) Γνωρίζουμε ότι ρ=4R$\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow \rho \le 4R\cdot\frac{1}{8} \Rightarrow \rho \le \frac{R}{2} \Rightarrow R \ge 2\rho$

(iv) συνA+συνB+συνΓ=1+4$\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \le 1+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

(v) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο τότε:
(Γεωμετρικός Μέσος $\le$ Αριθμητικού Μέσου)

$$\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma} \le \frac{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma}{3} \le \frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma \le \frac{1}{8}$$

Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο τότε το συνημίτονο της ορθής γωνίας στο ορθογώνιο τρίγωνο θα είναι ίσο με 0 το δε συνημίτονο της αμβλείας γωνίας στο αμβλυγώνιο τρίγωνο θα είναι αρνητικό.

Άρα $\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma \le 0 < \frac{1}{8}$.

(vi) Α' τρόπος:
Για γωνίες $0 < x_1, x_2, ..., x_\nu < \pi$ ισχύει η ανισότητα του Cauchy

$$\eta\mu x_1+\eta\mu x_2+...+\eta\mu x_\nu \le \nu\cdot\eta\mu\frac{x_1+x_2+...x_\nu}{\nu}$$

$$\Rightarrow \eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma \le 3\eta\mu\frac{A+B+\Gamma}{3}=3\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Β' τρόπος:

Έχουμε $\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2A}{2}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2B}{2}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\Gamma}{2}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 2A+\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma) = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-1-4\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma)=$$

$$2+2\sigma\upsilon\nu A\cdot\sigma\upsilon\nu B\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma \le 2+2\cdot\frac{1}{8}=\frac{9}{4}$$

Αλλά $(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)^2 \le 3(\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma) \le \frac{27}{4}$

Άρα $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

<u>Άσκηση 8.</u>

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma \ge 0$$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 \ge 0$ αληθές.

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma \ge 4E\sqrt{3} \Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma \ge 4\sqrt{3}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}\Leftrightarrow\frac{1}{2R\eta\mu\mathrm{A}}+\frac{1}{2R\eta\mu\mathrm{B}}+\frac{1}{2R\eta\mu\Gamma}\geq\frac{\sqrt{3}}{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu\mathrm{A}}+\frac{1}{\eta\mu\mathrm{B}}+\frac{1}{\eta\mu\Gamma}\geq 2\sqrt{3}$$

Αλλά Αριθμητικός Μέσος $\geq$ Αρμονικού Μέσου

Έτσι $\dfrac{\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu\mathrm{B}+\eta\mu\Gamma}{3}\geq\dfrac{3}{\frac{1}{\eta\mu\mathrm{A}}+\frac{1}{\eta\mu\mathrm{B}}+\frac{1}{\eta\mu\Gamma}}$

$$\Rightarrow (\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu\mathrm{B}+\eta\mu\Gamma)\cdot(\frac{1}{\eta\mu\mathrm{A}}+\frac{1}{\eta\mu\mathrm{B}}+\frac{1}{\eta\mu\Gamma})\geq 9$$

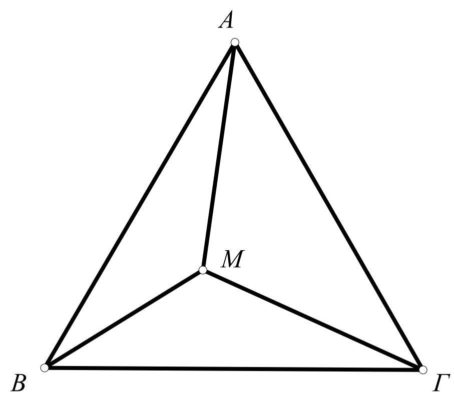
$$\Rightarrow \frac{1}{\eta\mu\mathrm{A}}+\frac{1}{\eta\mu\mathrm{B}}+\frac{1}{\eta\mu\Gamma}\geq\frac{9}{\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu\mathrm{B}+\eta\mu\Gamma}\geq\frac{9}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma\geq 4\mathrm{E}\sqrt{3}$$

<u>Άσκηση 9.</u>

Συμβολίζουμε ΑΜ=x, ΒΜ=ψ, ΓΜ=z,

$\mathrm{B}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma=\theta, \mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma=\phi, \mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{B}=\sigma$



Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu\phi+\sigma\upsilon\nu\sigma\geq\frac{3}{2}\qquad(1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+\phi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\phi}{2}+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\sigma}{2}-1+\frac{3}{2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu\frac{\sigma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\phi}{2}+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sigma\upsilon\nu\frac{\sigma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\phi}{2}+4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\sigma}{2}+1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\sigma}{2}-4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\sigma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\phi}{2}+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta-\phi}{2}+\eta\mu^2\frac{\theta-\phi}{2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sigma\upsilon\nu\frac{\sigma}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\theta-\phi}{2})^2+\eta\mu^2\frac{\theta-\phi}{2}\geq 0\quad\text{αληθές.}$$

Από το νόμο των συνημιτόνων, στα τρίγωνα ΜΒΓ, ΜΓΑ και ΜΑΒ, έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\mathrm{BM}^2+\Gamma\mathrm{M}^2-\mathrm{B}\Gamma^2}{2\cdot\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M}\Gamma}=\frac{\psi^2+z^2-1}{2\psi z},$$

$$\sigma\upsilon\nu\phi=\frac{x^2+z^2-1}{2xz},\quad \sigma\upsilon\nu\sigma=\frac{x^2+\psi^2-1}{2x\psi}$$

Αντικαθιστούμε τα συνημίτονα στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\frac{\psi^2+z^2-1}{2\psi z}+\frac{x^2+z^2-1}{2xz}+\frac{x^2+\psi^2-1}{2x\psi}\geq-\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x(\psi^2+z^2-1)+\psi(x^2+z^2-1)+z(x^2+\psi^2-1)+3x\psi z\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\psi^2+xz^2+\psi x^2+\psi z^2+zx^2+z\psi^2+3x\psi z-(x+\psi+z)\geq 0$$

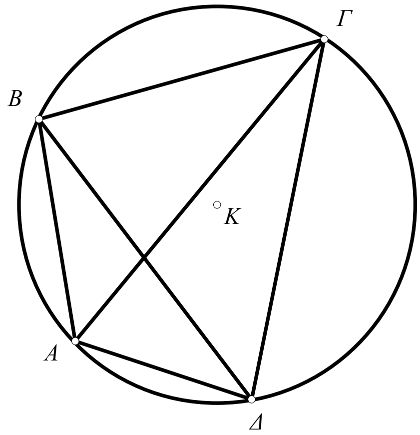
$\Leftrightarrow (x+\psi+z)\cdot(x\psi+xz+\psi z)-(x+\psi+z)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x+\psi+z)\cdot(x\psi+xz+\psi z-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow x\psi+xz+\psi z\geq 1 \Rightarrow \mathrm{MA}\cdot\mathrm{MB}+\mathrm{MA}\cdot\mathrm{M\Gamma}+\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M\Gamma}\geq 1$

<u>Άσκηση 10.</u>

(K,1) R=1



$\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma=\mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma=x, \Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta=\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta=\psi,$

$\Delta\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=\Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{A}=z, \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}=\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{B}=u$

Στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ, ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουμε:

ΑΒ+ΒΓ>ΑΓ
ΑΔ+ΔΓ>ΑΓ
ΑΒ+ΑΔ>ΒΔ +
ΒΓ+ΔΓ>ΒΔ

2(ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ)>2(ΑΓ+ΒΔ)

$\Rightarrow$ ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ-ΑΓ-ΑΔ>0

Για το δεύτερο σκέλος της ανισότητας εργαζόμαστε ως εξής:
Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΓΒ, με R=1 και έχουμε ΑΒ=2ημu, ΒΓ=2ημx, ΓΔ=2ημψ, ΔΑ=2ημz, ΑΓ=2ημ(ψ+z) και ΒΔ=2ημ(x+ψ).
Έτσι η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται:
2(ημx+ημψ+ημz+ημu-ημ(x+ψ)-ημ(ψ+z))<2

ή ημx+ημψ+ημz+ημu-ημ(x+ψ)-ημ(ψ+z)<1

Είναι όμως ημu=ημ(π-u)=ημ(x+ψ+z) και ημ(x+z)<1

Είναι λοιπόν αρκετό να αποδείξουμε ότι:

ημx+ημψ+ημz+ ημ(x+ψ+z)<ημ(x+ψ)+ ημ(ψ+z)+ ημ(x+z)

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\frac{x+\psi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x-\psi}{2}+2\eta\mu\frac{x+\psi+2z}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+\psi}{2}-$$

$$2\eta\mu\frac{x+\psi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+\psi}{2}-2\eta\mu\frac{x+\psi+2z}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x-\psi}{2}<0$$

$$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu\frac{x-\psi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{x+\psi}{2})\cdot(\eta\mu\frac{x+\psi+2z}{2}-\eta\mu\frac{x+\psi}{2})>0$$

$$\Leftrightarrow 2^2\cdot\eta\mu\frac{x}{2}\cdot\eta\mu\frac{\psi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{x+\psi+z}{2}\cdot\eta\mu\frac{z}{2}>0$$

$\Leftrightarrow \eta\mu\frac{x}{2}\cdot\eta\mu\frac{\psi}{2}\cdot\eta\mu\frac{u}{2}\cdot\eta\mu\frac{z}{2}>0$ (προφανές: όλοι οι παράγοντες θετικοί).

ΑΠΟΓΕΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΓΕΙΩΣΕΙΣ ΕΠΑΝΔΡΩΜΕΝΩΝ ΔΙΑΣΤΗΜΟΠΛΟΙΩΝ

Ιωάννης Φάκας

Μαθηματικός

1903-2003: 100 χρόνια Κωνσταντίνου Τσιολκόφσκυ

Το τέλος του 2003 έχουν συμπληρωθεί 100 χρόνια από τη δημοσίευση της περίφημης πραγματείας του **Κωνσταντίνου Τσιολκόφσκυ** σχετικά με τον τρόπο που βρήκε για την εκτόξευση των διαστημοπλοίων. Η μέθοδος του Τσιολκόφσκυ στηρίχθηκε στην αρχή ***της δράσης και της αντίδρασης***, την οποία θα εξηγήσουμε σε λίγο αφού πρώτα μιλήσουμε για τις 3 Κοσμικές Ταχύτητες.

ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΚΟΣΜΙΚΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ

Πρώτη Κοσμική Ταχύτητα

Πρώτη Κοσμική Ταχύτητα, είναι η ταχύτητα που πρέπει να έχει ένα σώμα σε κάποιο ύψος για να διατηρείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη.

Σε οποιοδήποτε ύψος, οιονδήποτε σώμα αν κινείται με ταχύτητα μικρότερη της αντίστοιχης πρώτης κοσμικής ταχύτητας, θα πέσει επί της Γης, δίδω μερικά παραδείγματα:

Ύψος τροχιάς Km	**Κυκλ. Ταχύτης km/sec**
200	7,79
500	7,63
1.000	7,36
1.500	7,13
10.000	4,94
35.900	3,07
380.000 (σελήνη)	1,02

Σε κάποιο ύψος επί παραδείγματι στα 10,000 km, ένα σώμα που κινείται με αυτή την ταχύτητα στο συγκεκριμένο ύψος αρχίσει να επιταχύνεται τότε το σώμα εξακολουθεί να κινείται γύρω από τη Γη, αλλά όχι πλέον σε κυκλική τροχιά. Η τροχιά του μετατρέπεται σε **ελλειπτική**. Μπορούμε να πούμε ότι η τροχιά του αμβλύνεται και όσο πιο μεγάλη είναι η ταχύτητα τόσο η εκκεντρότητα της έλλειψης μεγαλώνει.

Δευτέρα Κοσμική Ταχύτητα 11,2 km/sec

Ταχύτητα διαφυγής είναι η ταχύτητα που πρέπει να έχει ένα σώμα σε κάποιο ύψος για να φύγει εκ της Γης. Αυτή την ταχύτητα που είναι διαφορετική σε κάθε ύψος που ευρίσκεται το σώμα την ονομάζουμε Δευτέρα Κοσμική Ταχύτητα. Αναφέρω μερικά παραδείγματα.

Ταχύτητες διαφυγής εις διάφορα ύψη από της Γης

Ύψος 0 km	V = 11,180 Km / sec
200 >>	11,009 >>
400 >>	10,846 >>
600 >>	10,688 >>
800 >>	10,538 >>
1000 >>	10,395 >>

Όταν τώρα η ταχύτητα, του εκ της Γης εκτοξευμένου σώματος αυξηθεί περισσότερο της ταχύτητας των 11,2 km/sec, τότε η τροχιά μετατρέπεται σε **υπερβολική**. Αλλά και στις δύο αυτές περιπτώσεις ο τεχνητός δορυφόρος μετατρέπεται σε τεχνητό πλανήτη και ευρίσκεται υπό την επήρεια κατευθείαν πλέον, του ίδιου του αρχηγού του ηλιακού μας συστήματος, δηλαδή του Ήλιου μας.

Τρίτη Κοσμική Ταχύτητα 16,6 km/sec

Αν αυξήσουμε ακόμη περισσότερο την ταχύτητα του σώματος που ξεκινά από την γη και φθάσει την τιμή τουλάχιστον των 16,6 km/sec, τότε σε αυτή την περίπτωση το σώμα που εκτοξεύομε, αποκτά γαλαξιακή προοπτική, δηλαδή το σώμα φεύγει από το ηλιακό μας σύστημα και κατευθύνεται σε άλλους Ήλιους, μέσα όμως στον δικό μας Γαλαξία.

Τέταρτη Κοσμική Ταχύτητα

Η Τέταρτη Κοσμική Ταχύτητα δεν έχει ακόμη αντιμετωπισθεί από τους αστρονόμους. Αυτή την στιγμή φέρνω στο μυαλό μου τον φιλόλογο καθηγητή μου

Γ. Μουρούζη, που μας έλεγε για την Ιερατική Σχολή, "Αγαπητοί μου, οι μαθητές της Ιερατικής Σχολής είναι τόσο πρόθυμοι και μελετηροί που μπαίνω στον πειρασμό και τους διδάσκω Ιστορία μέχρι ψεύδους, διδάσκοντας και πράγματα που δεν έγιναν". Έτσι και εγώ σας λέω, ότι θα έρθει εποχή μετά από χιλιάδες χρόνια που θα αναγκαστούμε να μιλούμε και για την $4^{η}$ Κοσμική Ταχύτητα που είναι εκείνη που πρέπει να έχει ο τεχνητός πλέον **"ήλιος"** για να φύγει από τον Γαλαξία μας.

Μαύρες Τρύπες

Αυτό όμως, αν τελικά αποδειχθεί ότι μέσα στο κέντρο του Γαλαξία μας ανακαλυφθεί μαύρη τρύπα, τότε αυτή η $4^{η}$ Κοσμική Ταχύτητα θα είναι άπιαστη. Δηλαδή, όσο μεγάλη ταχύτητα και να μπορέσουμε να δώσουμε σε ένα σώμα, δεν θα μπορεί να εγκαταλείψει τον Γαλαξία. Για να μιλήσουμε απλά και «προσγειωμένα», μαύρη τρύπα είναι ένα σώμα, ένας Ήλιος, ένα άστρο που έχει τόση πυκνότητα που δεν επιτρέπει σε κανένα σώμα όσο μικρό και ταχύ και να είναι έστω και φωτόνιο, να απομακρυνθεί από αυτό.

Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα διαφυγής είναι πιο μεγάλη από την ταχύτητα του φωτός, που είναι C= 300000 km/sec. Έτσι τα φωτόνια που φεύγουν από αυτό ταξιδεύουν και ευρίσκονται γύρω του, ή πίπτουν ξανά σε αυτό.

Η τελευταία μόδα τώρα είναι να ψάχνουμε και να ερευνούμε την πιθανότητα μήπως στο κέντρο κάθε Γαλαξία υπάρχει μία μαύρη τρύπα, η οποία και κρατά όλα τα άστρα του πλησίον του. Έτσι και εμείς αν αποδειχθεί ότι στο κέντρο και του δικού μας Γαλαξία υπάρχει μαύρη τρύπα, τότε δεν μπορούμε να τον εγκαταλείψουμε όση ταχύτητα και να αποκτήσουμε.

Ο δικός μας Ήλιος μπορεί να γίνει μαύρη τρύπα;

Για να κλείσω το θέμα των κοσμικών ταχυτήτων επιτρέψετε μου να σας δώσω εξηγήσεις για το τι θα συμβεί σε μας, αν ο Ήλιος μας σμικρυνθεί και γίνει μαύρη τρύπα, ή ακόμη αν σμικρυνθεί τόσο πολύ μέχρι εξαφανίσεως. Καταρχήν σας καθησυχάζω ότι ο δικός μας Ήλιος δεν έχει εκείνη τη μάζα που έπρεπε να έχει για να είχε την αναγκαία υποδομή για να μετατραπεί σε μαύρη τρύπα. Ένα άστρο έχει την υποδομή να γίνει μαύρη τρύπα αν η διάμετρος του είναι τουλάχιστον τριπλάσια του δικού μας ήλιου. Αν όμως υποθέσουμε ότι με την ύλη που περιέχει μέσα του σμικρυνθεί τόσο πολύ και γίνει η διάμετρος του, ίση με 6 km, χωρίς να ελαττωθεί η ύλη του, τότε θα βρεθούμε μπροστά σε μία μαύρη τρύπα, με αποτέλεσμα η ταχύτητα διαφυγής να ξεπερνά την ταχύτητα του φωτός και να μην επιτρέπει ούτε στα φωτόνια να τον εγκαταλείψουν. Αν αυτό συμβεί βράδυ δεν θα το αντιληφθούμε παρά μόνο την επομένη, που δεν θα δούμε τον Ήλιο να ανατέλλει. Εμείς όμως θα εξακολουθούμε να κινούμαστε γύρω από τον Ήλιο μας που θα είναι Μαύρη Τρύπα. Στο σημείο αυτό, πρέπει να σας πω ότι το μόνο που αφήνει να φύγει από πάνω της, η μαύρη τρύπα, είναι η βαρύτητα που έχει και πρέπει επίσης να σας αποκαλύψω ότι, η βαρύτητα κινείται και αυτή με την ταχύτητα του φωτός και όχι με άπειρη ταχύτητα όπως πιστεύαμε τον προηγούμενο αιώνα.

Προχωρώντας παραπέρα αν υποθέσουμε προς στιγμή ότι ο Ήλιος μας εξαφανιστεί με κάποιο τρόπο από τη θέση του, εμείς θα εξακολουθούμε να περιστρεφόμαστε γύρω από αυτόν για ακόμη 8 λεπτά, ευρισκόμενοι υπό την επήρεια των βαρυτικών κυμάτων που ευρίσκονταν καθοδόν τη στιγμή της εξαφάνισης του. Θα απελευθερωθούμε μετά από 8 λεπτά αν αυτό σημαίνει απελευθέρωση. Θα έλεγα πιο ορθά, θα χαθούμε.

ΠΩΣ ΑΠΟΚΤΟΥΝΤΑΙ ΑΥΤΕΣ ΟΙ ΚΟΣΜΙΚΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ

Η αρχή της δράσης και αντίδρασης και η τεχνική των πυραύλων

Αφού σας κατατόπισα για τις ταχύτητες που πρέπει να δώσουμε στα διαστημόπλοια μας για να μπορέσουν να φύγουν από τη Γη και να πάνε σε άλλα ουράνια σώματα, έρχομαι τώρα να σας δώσω εξηγήσεις πως οι επιστήμονες εργάζονται για να δώσουν αυτές τις ταχύτητες και προς τα πού κατευθύνουν σε κάθε περίπτωση τα διαστημόπλοια τους.

Τα αεροπλάνα χρησιμοποιούν έλικες για την προώθηση τους και πτερύγια για να αλλάζουν διεύθυνση και να κινούνται σταθερά. Αυτό δεν μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στα διαστημόπλοια, διότι πολύ γρήγορα η ατμόσφαιρα αραιώνει και στη συνέχεια δεν υπάρχει καθόλου ατμόσφαιρα. Η χρήση ελίκων και πτερυγίων προϋποθέτει ύπαρξη ατμόσφαιρας.

Έτσι οι επιστήμονες προκειμένου να δώσουν κίνηση στα διαστημόπλοια τους αναγκάστηκαν να στηριχτούν στην αρχή ***της δράσης και της αντίδρασης***, που είναι μία αρχή που εργάζεται μέσα στο ίδιο το σώμα, χωρίς να χρειάζεται εξωτερική βοήθεια.

Αυτή η αρχή απλά λέει ότι σε οποιαδήποτε δράση υπάρχει και η αντίστοιχη αντίδραση. Στο κάτω μέρος των πυραύλων γίνεται μεγάλη καύση και απελευθερώνονται αέρια τα οποία και οδηγούνται προς τα κάτω, αυτή είναι η δράση. Αμέσως το διαστημόπλοιο κινείται εξ αντιδράσεως προς τα πάνω.

Με την ίδια αρχή εργάζονται και τα «πιστόλια» τα ατομικά κάθε αστροναύτη. Αν φέρουμε στο μυαλό μας αστροναύτες που βγαίνουν από το διαστημόπλοιο τους και κάνουν τους περίφημους **«περιπάτους»** στο διάστημα, θα θυμηθούμε ότι κρατούσαν από ένα «πιστόλι». Όταν θέλουν να κινηθούν προς μία διεύθυνση εκτοξεύουν με το πιστόλι τους αέρια προς την αντίθετη ακριβώς διεύθυνση.

Σε αυτή την αρχή στηρίχθηκαν οι επιστήμονες και άρχισαν να στέλλουν τους τεχνητούς δορυφόρους. Βέβαια στην αρχή ***της δράσης και της αντίδρασης*** στηρίζεται και η προώθηση των αεροπλάνων και των πλοίων, με τους έλικες που έχουν ως στήριγμα την ατμόσφαιρα και το νερό αντίστοιχα. Οι πύραυλοι όμως, χρησιμοποιούν ως υπέδαφος τα ίδια τα εκτοξευμένα αέρια.

Κωνσταντίνος Tsiolkovsky. Συμπλήρωση 100 χρόνων από τη δημοσίευση της πραγματείας του περί πυραύλων, το 1903

Ο Κωνσταντίνος Τσιολκόφσκυ είναι ο πρόδρομος της Αστροναυτικής Επιστήμης. Διορισμένος καθηγητής των Μαθηματικών, στη μικρή πόλη Καλούγκα στα βάθη της Ρωσικής επαρχίας, νότια της Μόσχας στις όχθες του ποταμού Όκα. Δίδασκε σαν απλός καθηγητής στο Γυμνάσιο μέχρι την αφυπηρέτηση του χωρίς να πάρει οποιαδήποτε προαγωγή.

Ταπεινός έζησε και ταπεινός αναχώρησε για την άλλη ζωή το 1935. Έμεινε αφανής και ξεχασμένος μέχρι τις 4 Οκτωβρίου 1957, που εκτοξεύθηκε για πρώτη φορά δορυφόρος από τη Γη ο Σπούτνικ.

Όλος ο κόσμος τότε θυμήθηκε τον ταπεινό Τσιολκόφσκυ που δημοσίευσε ήδη από το 1903 την εργασία του με τίτλο **"Η εξερεύνηση των κοσμικών χώρων με μηχανές κινούμενες εξ αντιδράσεως"**. Σε αυτή του την εργασία είχε εξηγήσει τον τρόπο εκτόξευσης των πυραύλων με την αρχή της δράσης και της αντίδρασης, την οποία ασπάστηκαν και χρησιμοποίησαν οι σημερινοί επιστήμονες.

Το 1933 στας δυσμάς του βίου του έγραψε: «Ασχολούμαι από μιας 40ετίας με τους κινητήρας εξ αντιδράσεως και εθεωρούσα ότι μία εκδρομή εις τον πλανήτην Άρην δεν θα ήτο δυνατόν να πραγματοποιηθεί προ της παρόδου πολλών αιώνων. Η τεχνική όμως πρόοδος σήμερα καλπάζει. Αι προθεσμίαι συμπτύσσονται. Πιστεύω ότι πολλοί της σημερινής γενεάς θα ζήσουν διά να παραστούν μάρτυρες των ταξιδίων πέραν της ατμόσφαιρας της Γης. Εις τας αρχάς θα πραγματοποιηθούν πτήσεις εις την στρατόσφαιραν. Θα επακολουθήσουν πτήσεις μέχρι της τροχιάς της Σελήνης. Τέλος και πέραν της Σελήνης, προς τους πλανήτας του ηλιακού μας συστήματος. Θα νικήσωμεν!»

Έτσι ο Τσιολκόφσκυ δυο χρόνια προτού πεθάνει προφήτεψε και τα σημερινά ταξίδια προς τον Άρη.

ΠΩΣ ΦΕΥΓΟΥΜΕ ΑΠΟ ΤΗ ΓΗ

Τοποθέτηση δορυφόρου επί τροχιάς

Κοιτάζοντας τον ακίνητο Ήλιο να κινείται καθημερινά, εξ΄ ανατολών προς δυσμάς γύρω μας, γύρω από τη Γη, μπορούμε να συμπεράνουμε και από μόνοι μας ότι η Γη είναι που περιστρέφεται περί τον εαυτό της εκ δυσμών προς ανατολάς.

Έτσι και οι επιστήμονες όταν εκτοξεύουν τους δορυφόρους εργάζονται με τον εξής τρόπο: Εκτοξεύουν στην αρχή τον δορυφόρο προς τα άνω κατακόρυφα και όταν φθάσει στα 70km ύψος επί παραδείγματι, του δίδουν μία κίνηση εκ δυσμών προς ανατολάς και εξακολουθώντας να ανεβαίνει, δηλαδή να απομακρύνονται από τη Γη. Μόλις πάρει το ύψος που επιθυμούν 500km π.χ. τότε τον θέτουν στην τροχιά του.

Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι για να εκμεταλλευόμαστε και την ταχύτητα περιστροφής της Γης περί τον εαυτό της που είναι 0,5km/sec.

Εκείνο που κάνουμε στην πραγματικότητα είναι παρόμοιο με αυτό που κάνουν οι σκυταλοδρόμοι που ξεκινούν νωρίτερα για να πάρουν τη σκυτάλη εν κινήσει.

Όσον αφορά τις ταχύτητες, τα έχουμε πει. Ανάλογα με το ύψος έχουμε και την αναγκαία κοσμική ταχύτητα που πρέπει να δώσουμε στον δορυφόρο για να διατηρείται στην τροχιά του.

Από τη Γη στον Άρη

Σε περίπτωση που επιθυμούμε να ταξιδέψουμε προς τον Άρη ή άλλο πλανήτη του ηλιακού μας συστήματος, τότε η εκτόξευση γίνεται ακριβώς κατά τον ίδιο τρόπο, διότι ο τεχνητός πλανήτης γίνεται καταρχήν τεχνητός δορυφόρος και στη συνέχεια οι επιστήμονες τον εκτοξεύουν προς τη διεύθυνση της κίνησης της Γης περί τον Ήλιο, διότι πρέπει να γίνει πλανήτης, δηλαδή να περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο. Διευρύνοντας συνεχώς την τροχιά του με αύξηση της ταχύτητας του τον καθοδηγούμε στην συνάντηση της τροχιάς του πλανήτη που επιθυμούμε να επισκεφθούμε.

Από τη Γη στη Σελήνη

Η εκτόξευση επανδρωμένου διαστημοπλοίου στη Σελήνη αποτελεί εξαίρετο κοσμοϊστορικό γεγονός, που συνέβη το Σάββατο 19 Ιουλίου 1969. Φέρνοντας στη μνήμη μας και τον Ιούλιο Βερν, ο οποίος με τα προφητικά του μυθιστορήματα προείδε τα γεγονότα αυτά, έρχομαι να σας αναφέρω πως γίνεται ένα ταξίδι στη Σελήνη.

Η εκτόξευση γίνεται κατακόρυφα, όπως συμβαίνει και με την εκτόξευση δορυφόρων. Στη συνέχεια τίθεται το διαστημόπλοιο σε τροχιά γύρω από τη Γη δίδοντας σε αυτό την πρώτη κοσμική ταχύτητα. Στη συνέχεια οι επιστήμονες αρχίζουν να αυξάνουν την ταχύτητα του με αποτέλεσμα, η κυκλική τροχιά να γίνεται ελλειπτική και το διαστημόπλοιο να περιστρέφεται γύρω από Γη και ταυτόχρονα να απομακρύνεται. Σε κατάλληλη στιγμή και θέση δίδεται μεγαλύτερη ταχύτητα και το διαστημόπλοιο φεύγει από τη Γη και προχωρά προς το σημείο που θα συναντήσει τη Σελήνη. Σημειωτέον ότι η Σελήνη τη στιγμή της εκτόξευσης του διαστημοπλοίου, ήταν σε άλλη θέση και υπάρχει συγχρονισμός την κατάλληλη στιγμή το διαστημόπλοιο να ευρίσκεται εκεί που θα έχει έρθει και η Σελήνη. Η ταχύτητα αρχίζει να επιβραδύνεται μέχρις ότου γίνει ίση με την πρώτη κοσμική ταχύτητα της Σελήνης πλέον, που είναι ίση με το 1/7 της αντίστοιχης γήινης, διότι αυτή εξαρτάται από τη μάζα κάθε ουράνιου σώματος.

Το διαστημόπλοιο είναι συγχρονισμένο να φθάσει μερικά λεπτά αργότερα στην τροχιά της Σελήνης και η Σελήνη προπορευόμενη, συλλαμβάνει το διαστημόπλοιο και αυτό περιφέρεται γύρω από τη Σελήνη, ελαττώνοντας συνεχώς ταχύτητα.

Όταν το διαστημόπλοιο σταθεροποιηθεί σε τροχιά γύρω από τη Σελήνη τότε αποσπάται από αυτό, η σεληνάκατος η οποία προσεδαφίζεται επί της Σελήνης κατακόρυφα με τον τρίποδα προς τα κάτω, έτοιμο προς εκτόξευση. Για την επιστροφή εφαρμόζουμε τα ίδια ακριβώς αλλά με αντίστροφη σειρά.

Είναι πράγματι ιστορικό το γεγονός ότι άνθρωπος κατάφερε να πάει σε άλλο ουράνιο σώμα και να περπατήσει σε αυτό, να πάρει πετρώματα, να κάνει μετρήσεις και να επιστρέψει ξανά σε εμάς.

Όμως μη φανταστείτε ότι κατορθώσαμε και κάτι το σπουδαίο. Όπως εύστοχα είπε και ο αείμνηστος αστρονόμος καθηγητής μου στο Πανεπιστήμιο Αθηνών Δημήτρης Κωτσάκης, **"έχουμε πάει στο πιο κοντινό ουράνιο σώμα που απέχει από εμάς 400000km, απόσταση που το φως τη διανύει σε 1.1sec. Πότε θα πάμε εκεί που το φως έχει καλύψει ήδη δισεκατομμύρια έτη φωτός";**

Με αυτές τις σκέψεις θέλω να κλείσω την ομιλία μου αφού σας πληροφορήσω ότι ο **Ώλντριν** μόλις προσεδάφισε τη σεληνάκατο του στη Σελήνη στην οποία βρισκόταν με τον **Άρμστρογκ** στις 10:40μ.μ. στις 19/07/1969, άνοιξε το μικρόφωνο και είπε προς όλους μας στη Γη: **"Σας μιλά ο χειριστής της σεληνακάτου. Θα ήθελα να ζητήσω από κάθε άνθρωπο που με ακούει, όποιος κι αν είναι κι όπου κι αν βρίσκεται, να σταματήσει μια στιγμή και να αναλογιστεί τα γεγονότα των τελευταίων ωρών και να ευχαριστήσει το Θεό, καθένας με το δικό του τρόπο".**

Αυτά μας τα είπε αφού πρώτα έβγαλε από το σακίδιο του ένα μικρό μπουκάλι κρασί, ένα δισκοπότηρο και μερικές όστιες (δηλαδή θεία κοινωνία των καθολικών) και αφού τα τοποθέτησε σε ένα μικρό τραπεζάκι.

Μετά τη μονόλεπτο σιγή, τη μονόλεπτο προσευχή του ιδίου και της ανθρωπότητας κοινώνησε ψιθυρίζοντας το χωρίο του Ευαγγελιστή Ιωάννη: **"Εγώ ειμί η άμπελος, υμείς τα κλήματα, ο μένων εν εμοί καγώ εν αυτώ, ούτος φέρει καρπόν πολύν, ότι χωρίς εμού ου δύνασθε ποιείν ουδέν".**

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΠΡΟΥ

ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2004

Επιμέλεια: Ιωάννης Φάκας

ΛΕΥΚΩΣΙΑ – ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2003

ΕΚΛΕΙΨΕΙΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2004

Το έτος 2004 υπάρχουν 4 εκλείψεις, 2 του Ηλίου και 2 της Σελήνης.

1. Μερική Έκλειψη Ηλίου, 19 Απριλίου 2004. Αόρατη από την Κύπρο.

Στοιχεία της Έκλειψης:

Η έκλειψη θα αρχίσει στις 13ω 30λ και θα τελειώσει στις 17ω 39λ. (Θα είναι ορατή από μία περιοχή που περιλαμβάνει μέρη της Ανταρκτικής, του Νότιου Ατλαντικού και της Νότιας Αφρικής).

2. Ολική Έκλειψη Σελήνης 4 – 5 Μαΐου 2004. Ορατή από την Κύπρο.

Στοιχεία Έκλειψης:

Είσοδος της Σελήνης στην παρασκιά της Γης στις 04/05/2004 στις 19ω 50,8λ

Είσοδος της Σελήνης στη σκιά στις 20ω 48.2λ

Έναρξη Ολικής Έκλειψης στις 21ω 52,0λ

Μέσον Έκλειψης στις 22ω 30,1λ

Τέλος Ολικής Έκλειψης στις 23ω 8,3λ

Έξοδος της Σελήνης εκ της σκιάς στις 05/05/2004 στις 00ω 12,1λ

Έξοδος εκ της παρασκιάς στις 01ω 09λ 5δ

Την νύκτα της έκλειψης η σελήνη θα ανατείλει στις 18ω και 19λ, και θα δύσει στις 5ω και 3λ. Το μέγεθος της έκλειψης είναι 1.309.

3. Μερική Έκλειψη Ηλίου 14, Οκτωβρίου 2004. Αόρατη από την Κύπρο.

Στοιχεία της Έκλειψης:

Η Έκλειψη αρχίζει στις 2ω 54.5λ και τελειώνει στις 7ω και 4.2λ. Θα είναι ορατή από μία περιοχή που εκτείνεται από τον Βόρειο Πόλο, την Άπω Ανατολή και τον Ειρηνικό Ωκεανό.

Μέγεθος της έκλειψης 0,929.

4. Ολική Έκλειψη Σελήνης 28 Οκτωβρίου 2004. Ορατή από την Κύπρο.

Στοιχεία Έκλειψης:

Είσοδος της Σελήνης στην παρασκιά στις 2ω 5,5λ

Είσοδος της Σελήνης στην σκιά στις 3ω 14,3λ

Αρχή της Ολικής Έκλειψης στις 4ω 23,4λ

Μέσον της Έκλειψης στις 5ω 4,0λ

Τέλος Ολικής Έκλειψης στις 5ω 44,6λ

Έξοδος Σελήνης εκ της σκιάς στις 6ω και 53λ.

Έξοδος Σελήνης εκ της παρασκιάς στις 8ω και 3λ.

Τη νύκτα της έκλειψης η Σελήνη θα ανατείλει στις 17ω και 06λ και θα δύσει στις 7ω και 13λ.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

ΕΠΟΧΕΣ ΤΟΥ ΕΤΟΥΣ

1. Ο Ήλιος ευρίσκεται στο περίγειο στις 4 Ιανουαρίου στις 20ω. Αρχή του έτους.
2. Ο Ήλιος ευρίσκεται στο απόγειο στις 5 Ιουλίου και ώρα 13ω. Μέσον του έτους.
3. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Κριόν την 20ην Μαρτίου εις τις 08ω 49λ. Αρχή του Έαρος.
4. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Καρκίνο την 21ην Ιουνίου εις τις 02ω 57λ. Αρχή του Θέρους.

5. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Ζυγόν στις 22 Σεπτεμβρίου εις τις 18ω 30λ. Αρχή του Φθινοπώρου.

6. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Αιγόκερω την 21ην Δεκεμβρίου εις τις 14ω 42λ. Αρχή του Χειμώνα.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

Φάσεις της Σελήνης για το έτος 2004

Νέα Σελήνη		Πρώτον Τέταρτον		Πανσέληνος		Τελ. Τέταρτον	
ημ ω λ		ημ ω λ		ημ ω λ		ημ ω λ	
				Ιαν	07 17 40	Ιαν.	15 06 46
Ιαν.	21 23 05	Ιαν.	29 08 03	Φεβ	06 10 47	Φεβ	13 15 40
Φεβ.	20 11 18	Φεβ	28 05 24	Μαρ	07 01 14	Μαρ	13 23 01
Μαρ.	21 00 41	Μαρ.	29 01 48	Απρ	05 13 03	Απρ	12 05 46
Απρ.	19 15 21	Απρ.	27 19 32	Μάης	04 22 33	Μάης	11 13 04
Μάης	19 06 52	Μάης	27 09 57	Ιούν	03 06 20	Ιούνης	09 22 02
Ιούνης	17 22 27	Ιούνης	25 21 08	Ιούλ	02 13 09	Ιούλης	09 09 34
Ιούλης	17 13 24	Ιούλης	25 05 37	Ιούλ	31 20 05	Αύγου	08 00 01
Αύγου	16 03 24	Αύγου	23 12 12	Αύγου	30 04 22	Σεπτ	06 17 11
Σεπτ	14 16 29	Σεπτ	21 17 54	Σεπτ	28 15 09	Οκτ	06 12 12
Οκτ	14 04 48	Οκτ	20 23 59	Οκτ	28 05 07	Νιόβ	05 07 53
Νιόβ	12 16 27	Νιο	19 07 50	Νιο	26 22 07	Δεκ	05 02 53
Δεκ	12 03 29	Δεκ	18 18 40	Δεκ	26 17 06		

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

ΔΙΑΒΑΣΗ ΤΗΣ ΑΦΡΟΔΙΤΗΣ ΠΡΟ ΤΟΥ ΗΛΙΟΥ

Την 8η Ιουνίου 2004 θα συμβεί διάβαση της Αφροδίτης προ του ηλιακού δίσκου, η οποία θα είναι ορατή από την Κύπρο.

Οι χρόνοι των διαφόρων φάσεων είναι οι ακόλουθοι:

α) Εξωτερική επαφή Εισόδου	7ω 19λ 36δ
β) Εσωτερική επαφή Εισόδου	7ω 38λ 52δ
γ) Εσωτερική επαφή Εξόδου	13ω 04λ 10δ
δ) Εξωτερική Επαφή Εξόδου	13ω 23λ 12δ

Την ημέρα της διάβασης της Αφροδίτης ο Ήλιος θα ανατείλει στις 4ω 32λ.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2002-2003

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΧΡΟΝΟΣ : 2 ώρες και 30 λεπτά ΙΟΥΝΙΟΣ 2003

ΜΕΡΟΣ Α΄. *Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε **μόνο** στις 12. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.*

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 4x^3 dx$.

2. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου $\chi^2 + y^2 - 4\chi + 2y + 1 = 0$.

3. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω τρία διαφορετικά γράμματα από τη λέξη ΟΛΥΜΠΙΑ και να τα βάλω σε σειρά.

4. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής της συνάρτησης $y = \chi^3 - 3\chi^2 + 6$.

5. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου δίνονται οι πιθανότητες $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A')=\frac{2}{3}$ και $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$.

Να βρείτε τις πιθανότητες: (α) $P(A)$ (β) $P(A\cup B)$

6. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης ψ=τοξεφ(χ² +1).

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις χ=ημ2t και ψ = συν3t στο σημείο για το οποίο $t = \frac{\pi}{6}$.

8. Ένα Γυμνάσιο έχει τμήματα με διαφορετικούς αριθμούς μαθητών, όπως φαίνεται στον πίνακα:

χ (αριθμός μαθητών)	25	26	27	28	29	30
f (αριθμός τμημάτων που έχουν αυτό τον αριθμό μαθητών)	8	2	3	4	6	1

Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο και την τυπική απόκλιση της κατανομής δίνοντας την απάντηση με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

9. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα Oy του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη y=lnx, τον άξονα Oy και τις ευθείες y=1 και y=2.

10. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int x^2 e^{3x} dx$

11. Δίνεται η καμπύλη $y = e^{-x}$ και σημείο Ρ πάνω σ'αυτή με τετμημένη α, όπου α>0. Έστω Α η προβολή του Ρ πάνω στον άξονα Οχ και Β η προβολή του σημείου Ρ πάνω στον άξονα Oy. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ΟΑΡΒ γίνεται ακρότατο και να προσδιορίσετε το είδος του ακρότατου.

12. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ και το σημείο της Ρ(1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$). (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε που βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα. (β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Ρ. (γ) Αν Α είναι το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη στο Ρ συναντά τον άξονα των χ, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΡ.

13. Δίνεται η ορίζουσα f(x) = $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+\sigma\upsilon\nu x & x^2+\sqrt{3} \\ 1 & x+\eta\mu x & x^2+1 \end{vmatrix}$. Να δείξετε ότι - 2 < f(χ) < 2 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

14. Αν f(x)= $\frac{1}{x(x+1)}$ και f΄(x) είναι η παραγωγός της. (α) Να βρείτε τα αθροίσματα $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\kappa)$ και $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f'(\kappa)$. (β) Να αποδείξετε ότι οι σειρές $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f(\kappa)$ και $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f'(\kappa)$ συγκλίνουν και ότι $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f(\kappa)$ + $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f'(\kappa)$ = 0.

15. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής και να δείξετε ότι, με βάση τον ορισμό αυτό, η καρτεσιανή εξίσωση της παραβολής με εστία Ε(α,0) και διευθετούσα χ =-α είναι η ψ^2=4αχ.

ΜΕΡΟΣ Β' *Να απαντήσετε σε **4 μόνο** από τις 6 ερωτήσεις. Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.*

1. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\frac{x^2}{x-1}$. (α) Να βρείτε το πεδίον ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία είναι φθίνουσα, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης. (β) Να κάμετε τη γραφική παράσταση της y=f(x). (γ) Στους ίδιους άξονες να κάμετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=|f(x)|.

2. (α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό χ = 4ημθ, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{2}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2}\,dx$. (β) Δίνονται ο κύκλος $\chi^2 + y^2 = 16$ και η υπερβολή xy = $4\sqrt{3}$. Να βρείτε τα σημεία τομής τους και να σχεδιάσετε τις δύο καμπύλες σε κοινό σύστημα αξόνων. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των δύο καμπύλων και βρίσκεται στο τεταρτημόριο που αντιστοιχεί στους δύο θετικούς ημιάξονες.

3. (α) Να αποδείξετε ότι $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 = \frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$.

(β) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\kappa x}{x^2}$, κ≥1.

(γ) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\sum_{\kappa=1}^{10}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\kappa x}{x^2}$

4. Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν τρεις μηχανές που παράγουν ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Το 50% της παραγωγής προέρχεται από τη μηχανή Α, το 30% από τη μηχανή Β και το 20% από τη μηχανή Γ. Το 10% των λαμπτήρων που παράγονται από την μηχανή Α είναι ελαττωματικό, όπως είναι και το 20% από τη μηχανή Β και το 5% από τη μηχανή Γ. (α) Αν πάρω ένα λαμπτήρα στην τύχη από την παραγωγή του εργοστασίου, ποια η πιθανότητα να είναι ελαττωματικός; (β) Αν ένας λαμπτήρας που επιλέγηκε τυχαία είναι ελαττωματικός ποια η πιθανότητα να προέρχεται από τη μηχανή Α;

5. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ και $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(α) Να αποδείξετε ότι $A^2 = 3A - 2\cdot I$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι: $A^3=7A-6\cdot I$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\left(A^2\right)^{-1} = \frac{3}{2}A^{-1} - \frac{1}{2}I$.

(A^{-1} είναι ο αντίστροφος του Α και Ι είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2Χ2).

6. Η κάθετος της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, α>β, στο σημείο Ρ(ασυνθ, βημθ) τέμνει τον άξονα των χ στο Α. Η κάθετος στον άξονα των χ από το Α συναντά την ΟΡ στο Β. (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο Ρ είναι η $\alpha x\eta\mu\theta - \beta y\sigma\upsilon\nu\theta = \left(a^2-\beta^2\right)\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$.

(β) Να βρείτε το Γ.Τ. του σημείου Β.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

1. $\int_0^1 4x^3dx = x^4\Big|_0^1 = 1^4 - 0^4 = 1.$

2. $\chi^2 + y^2 - 4\chi + 2y + 1 = 0 \Rightarrow$ g=-2, f=1, c=1, K(-g,-f) $\Rightarrow$ **K(2,-1)** ,

$R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \;\Rightarrow\; R = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 - 1} \Rightarrow$ **R=2**

3. $\Delta_3^7 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = 210$

4. $y = \chi^3 - 3\chi^2 + 6 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 3\cdot 2x = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6(x-1)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow 6(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

χ	$-\infty$ 1 $+\infty$
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	- 0 +

$\chi=1 \Rightarrow \psi = 1^3 - 3\cdot1^2 + 6 \Rightarrow$ **<u>Σημείο καμπής (1,4)</u>**

5. (α) $P(A') = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 1 - P(A) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow P(A) = 1 - \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ **P(A) =** $\dfrac{1}{3}$

(β) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} \Rightarrow$

$\boxed{\mathbf{P(A\cup B)} = \dfrac{5}{6}}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x^2+1)'}{1 + (1+x^2)^2} \Rightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{2 + 2x^2 + x^4}}$

7. $\chi = \eta\mu 2t \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = 2\sigma\upsilon\nu 2t$, $\quad\psi = \sigma\upsilon\nu 3t \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = -3\eta\mu 3t$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = (-3\eta\mu 3t)\cdot\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu 2t} \Rightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3\eta\mu 3t}{2\sigma\upsilon\nu 2t}}$

$$\lambda_{\varepsilon\phi} = \dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\dfrac{3\eta\mu 3\frac{\pi}{6}}{2\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{6}} = -\dfrac{3\eta\mu\frac{\pi}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} = -\dfrac{3\cdot 1}{2\cdot\frac{1}{2}} = -3 \Rightarrow \boxed{\lambda_{\varepsilon\phi} = -3}$$

$$t=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \chi=\eta\mu\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \psi=\sigma\upsilon\nu\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$$

$$\psi-\psi_1=\lambda(\chi-\chi_1) \Rightarrow \psi-0=-3\left(\chi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \psi=-3\chi+\frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{6\chi+2\psi-3\sqrt{3}=0}$$

8.

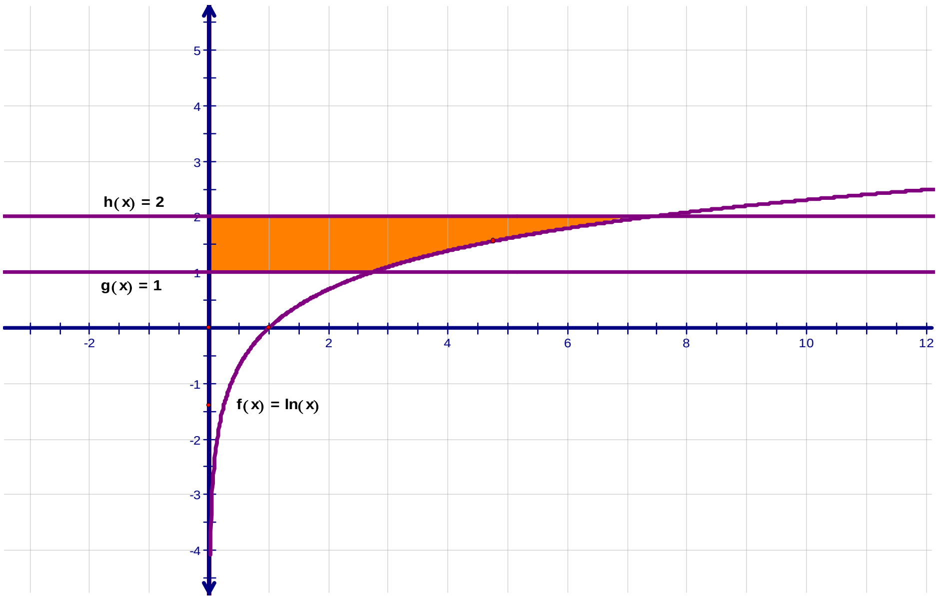
χ (αριθμός μαθητών)	25	26	27	28	29	30
f (αριθμός τμημάτων που έχουν αυτό τον αριθμό μαθητών)	8	2	3	4	6	1

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(\bar{\chi}-\chi_i)^2$	$f_i \cdot (\bar{\chi}-\chi_i)^2$
25	8	25·8=200	$(27-25)^2=4$	8·4=32
26	3	78	$(27-26)^2=1$	3
27	3	81	$(27-27)^2=0$	0
28	4	112	$(27-28)^2=1$	4
29	6	174	$(27-29)^2=4$	24
30	1	30	$(27-30)^2=9$	9
	$\Sigma f_i = 25$	$\Sigma x_i \cdot f_i = 675$		$\Sigma f_i \cdot (\bar{\chi}-\chi_i)^2 = 72$

$$\bar{x}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow \bar{x}=\frac{675}{25} \Rightarrow \boxed{\bar{x}=27}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \left(\overline{x} - x_i\right)^2}{\sum f_i} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{72}{25} \Rightarrow \sigma^2 = 2{,}88 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2{,}88} \Rightarrow \boxed{\sigma = 1{,}697}$$

9.



$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y$$

$$V = \pi \int_1^2 x^2 dy \Rightarrow V = \pi \int_1^2 \left(e^y\right)^2 dy \Rightarrow V = \pi \int_1^2 e^{2y} dy \Rightarrow V = \frac{1}{2}\pi e^{2y} \Big|_1^2 \Rightarrow$$

$$V = \frac{\pi}{2}\left(e^4 - e^2\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi e^2}{2}\left(e^2 - 1\right)}$$

10. $I = \int x^2 e^{3x} dx \Rightarrow I = \int x^2 d\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) \Rightarrow I = x^2 \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} d\left(x^2\right) \Rightarrow$

$$I = x^2 \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x} dx \Rightarrow I = x^2 \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int x d\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) \Rightarrow$$

$$I = x^2 \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int x d\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) \Rightarrow I = x^2 \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left[x \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} dx\right]$$

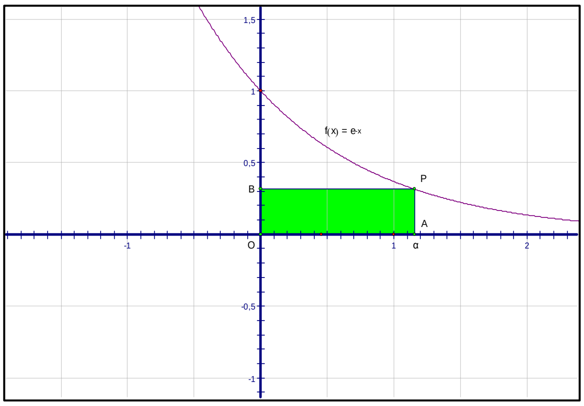
$$\Rightarrow I = x^2 \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{2}{9}x e^{3x} + \frac{2}{3}\int e^{3x} dx \Rightarrow I = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}x e^{3x} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + c \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}x e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c}$$

11. $E=\alpha\cdot e^{-\alpha}\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dE}{d\alpha}=e^{-a}\left(1-a\right)\\&\frac{dE}{d\alpha}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{a=1},\ a>0$$

α	0	1	+∞
$\frac{dE}{da}$	+	0	-
E	↗		↘



Για **α = 1** έχουμε μέγιστο εμβαδόν

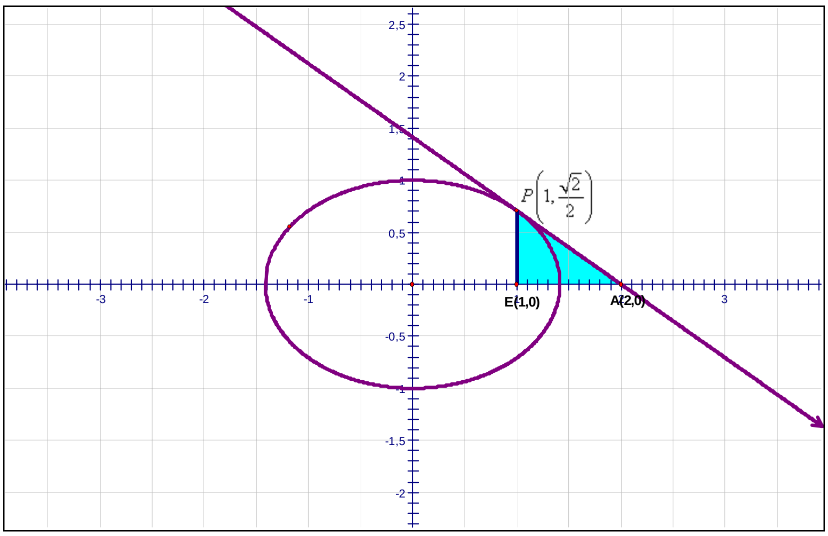
12. (α) $\frac{x^2}{2}+y^2=1\Rightarrow\alpha^2=2,\ \beta^2=1\ \Rightarrow\ \gamma^2=\alpha^2-\beta^2\ \Rightarrow\gamma^2=2-1\Rightarrow\ \gamma^2=1\Rightarrow\boldsymbol{\gamma=1}$

E(γ,0) $\Rightarrow$ **E(1,0)**

(β) $\frac{2x}{2}+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}\ \Rightarrow\ \lambda_{\varepsilon\phi}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}}}=-\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\psi-\psi_1=\lambda\left(\chi-\chi_1\right)\Rightarrow\psi-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\chi-1)\Rightarrow\ 2\psi-\sqrt{2}=-\sqrt{2}\chi-\sqrt{2}\ \Rightarrow$$

$$\boxed{\sqrt{2}\chi+2\psi-2\sqrt{2}=0}\Rightarrow\ 2\chi+2\sqrt{2}\psi-4=0\ \Rightarrow\ \boxed{\chi+\sqrt{2}\psi-2=0}$$



(γ) $E_{AEP}=\frac{1}{2}(AE)(PE)\ \Rightarrow\ E_{AEP}=\frac{1}{2}(1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow\boxed{E_{AEP}=\frac{\sqrt{2}}{4}}$

13. f(x) = $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+\sigma\upsilon\nu x & x^2+\sqrt{3} \\ 1 & x+\eta\mu x & x^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & \sigma\upsilon\nu x & \sqrt{3} \\ 0 & \eta\mu x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu x & \sqrt{3} \\ \eta\mu x & 1 \end{vmatrix} = \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\eta\mu\chi$

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\eta\mu\chi \Rightarrow f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \varepsilon\phi 60^0\,\eta\mu\chi$$

$$\Rightarrow f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{\eta\mu 60^\circ}{\sigma\upsilon\nu 60^\circ}\eta\mu\chi \Rightarrow f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu 60^\circ - \eta\mu 60^\circ\,\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu 60^\circ} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+60^\circ)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = 2\,\sigma\upsilon\nu(x+60^\circ)$$

Ισχύει $-1 \le \sigma\upsilon\nu(x+60^\circ) \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sigma\upsilon\nu(x+60^\circ) \le 2 \Rightarrow$

$\boxed{-2 \le f(x) \le 2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

14. (α) f(x)= $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{\chi} + \dfrac{B}{1+\chi} = \dfrac{A(1+\chi)+B\chi}{\chi(1+\chi)} \Rightarrow$

$1 \equiv A(1+\chi) + B\chi$, $\chi=0 \Rightarrow A=1$, $\chi=-1 \Rightarrow 1=B(-1) \Rightarrow B=-1$. Άρα

f(x) = $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow \boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(1+x)^2}}$ ή $\boxed{f'(x) = -\dfrac{2x+1}{x^2(1+x)^2}}$

$$a_\kappa = \frac{1}{\kappa(1+\kappa)} = \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{1+\kappa}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\kappa(1+\kappa)} == \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{1+\kappa}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cancel{\ldots} + \left(\cancel{\frac{1}{\nu-1}} - \cancel{\frac{1}{\nu}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\nu}} - \frac{1}{\nu+1}\right) = \boxed{1 - \frac{1}{1+\nu}}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} f'(\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{2\kappa+1}{\kappa^2(1+\kappa)^2} = \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(-\frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{(1+\kappa)^2}\right) =$$

$$\left(-\frac{1}{1^2} + \cancel{\frac{1}{2^2}}\right) + \left(-\cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{3^2}}\right) + \cancel{\ldots} + \left(-\cancel{\frac{1}{(\nu-1)^2}} + \cancel{\frac{1}{\nu^2}}\right) + \left(-\cancel{\frac{1}{\nu^2}} + \frac{1}{1+\nu^2}\right) =$$

$$\boxed{-1 + \frac{1}{(1+\nu)^2}}$$

(β) $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f(\kappa) = \lim_{\nu\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+\nu}\right)=1$, $\quad \sum_{\kappa=1}^{\infty} f'(\kappa) = \lim_{\nu\to\infty}\left(-1+\frac{1}{(1+\nu)^2}\right)=-1$

$\sum_{\kappa=1}^{\infty} f(\kappa) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} f'(\kappa) = 1 + (-1) = 0$

15. **Ορισμός:** Παραβολή είναι ο Γεωμετρικός τόπος σημείου του επιπέδου το οποίο κινείται έτσι ώστε οι αποστάσεις του από σταθερό σημείο Ε και σταθερή ευθεία δ του επιπέδου να είναι ίσες. Το σημείο Ε(α,0) ονομάζει εστία και η ευθεία δ: χ- α = 0 ονομάζεται διευθετούσα.

Έστω Τ(χ,ψ) τυχαίο σημείο της παραβολής τότε ΤΕ = $\sqrt{(\chi-\alpha)^2+(\psi-0)^2}$ και η απόσταση του Τ από την ευθεία δ: χ – α =0 είναι $T\Delta = |x+a|$. Άρα

$\sqrt{(\chi-\alpha)^2+\psi^2} = |x+a| \Rightarrow (\chi-\alpha)^2+\psi^2 = (x+a)^2 \Rightarrow$

$\cancel{x^2} - 2ax + \cancel{a^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2ax + \cancel{a^2} \Rightarrow \boxed{y^2 = 4ax}$

ΜΕΡΟΣ Β'

1. Πεδίο ορισμού: $\mathbb{R}-\{1\}$

Τομή με άξονα: χχ΄ ⇒ ψ=0 ⇒ χ=0 → (0,0)

Τομή με άξονα: ψψ΄ ⇒ χ=0 ⇒ ψ=0 → (0,0)

$f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow$ χ = 0 , χ = 2

χ	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$	+	0	–		–	0	+	
y	↗	max (0,0)	↘		↘	min (2,4)	↗	

Για χ=0 ⇒ ψ=0 ⇒ (0,0) Τοπικό μέγιστο. Για χ=2 ⇒ ψ=4 ⇒ (2,4) Τοπικό ελάχιστο.

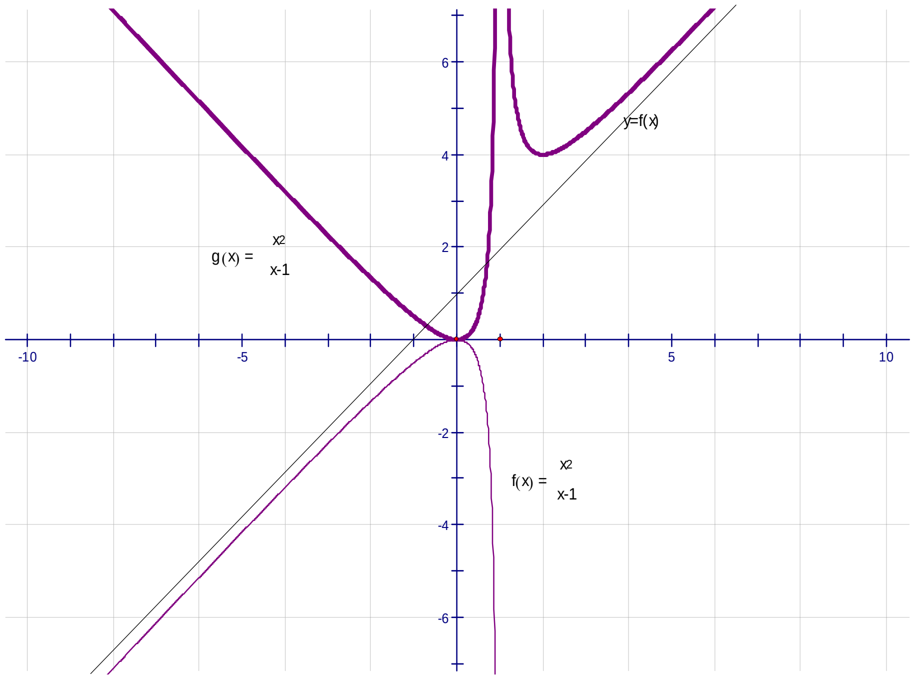
<u>Κατακόρυφες ασύμπτωτες</u>:

$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1} = \frac{1^2}{1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, $\quad \lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1} = \frac{1^2}{1-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow$

χ=1 κατακ. ασύμπτωτος**.**

<u>Οριζόντιες ασύμπτωτες</u>: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$. Άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες.

<u>Πλάγια ασύμπτωτη</u>: f(x) = $\frac{x^2}{x-1}$ =χ+1+$\frac{1}{x-1}$ ⇒ πλάγια ασύμπτωτη **ψ = χ + 1**



2. (α) χ = 4ημθ $\Rightarrow$ dx = 4 συνθ dθ. Για χ=2 $\Rightarrow$ 4 ημθ =2 $\Rightarrow$ ημθ = ½ $\Rightarrow$ θ = $\frac{\pi}{6}$,

Για χ= $2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ 4 ημθ = $2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ ημθ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ θ = $\frac{\pi}{3}$

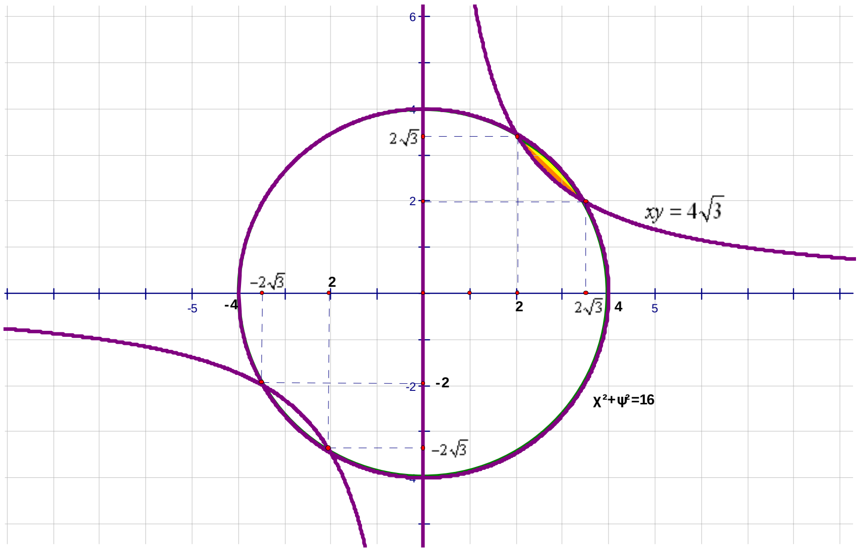
Άρα $\int_{2}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\eta\mu^2\theta}\cdot 4\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta = 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\eta\mu^2\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta =$

$16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu^2\theta\, d\theta = 16\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2} d\theta = 8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\sigma\upsilon\nu 2\theta)\, d\theta = 8\left(\theta+\frac{1}{2}\eta\mu 2\theta\right)_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$

$8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\eta\mu 2\frac{\pi}{3}\right) - 8\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\eta\mu 2\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 8\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$8\frac{\pi}{3} + \cancel{2\sqrt{3}} - 8\frac{\pi}{6} - \cancel{2\sqrt{3}} = 8\frac{\pi}{3} - 4\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

(β)



$y = \dfrac{4\sqrt{3}}{x} \Rightarrow y^2 = \dfrac{48}{x^2}$. $\chi^2 + y^2 = 16 \Rightarrow x^2 + \dfrac{48}{x^2} = 16 \Rightarrow x^4 - 16x^2 + 48 = 0$

Θέτω $\chi^2=\omega$ $\Rightarrow \omega^2 - 16\omega + 48 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \dfrac{16 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{16 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \omega_1 = 12 \\ \omega_2 = 4 \end{array} \right. \Rightarrow$

$\chi_{1,2} = \pm 2$, $\chi_{3,4} = \pm 2\sqrt{3}$

Άρα τα σημεία τομής: $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$, $\left(-2, -2\sqrt{3}\right)$, $\left(2\sqrt{3}, 2\right)$, $\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$

$$E = \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{16 - x^2} - \frac{4\sqrt{3}}{x} \right) dx = \int_2^{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{16 - x^2} \right) dx - \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{4\sqrt{3}}{x} dx = \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3} \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3} \ln x \Big|_2^{2\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}\left(\ln 2\sqrt{3} - \ln 2\right) = \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3} \ln \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3} \ln 3.$$

Άρα $\boxed{E = \dfrac{4\pi}{3} - 2\sqrt{3}\ln 3}$

3. (α) $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2=\frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$. Ισχύει: $(\kappa+1)^3=\kappa^3+3\kappa^2+3\kappa+1$

Γιά $\kappa=1 \Rightarrow \cancel{2^3} = 1^3 + 3\cdot1^2 + 3\cdot1 + 1$

Γιά $\kappa=2 \Rightarrow \cancel{3^3} = \cancel{2^3} + 3\cdot2^2 + 3\cdot2 + 1$

Γιά $\kappa=3 \Rightarrow \cancel{4^3} = \cancel{3^3} + 3\cdot3^2 + 3\cdot3 + 1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad +$

Γιά $\kappa=\nu-1 \Rightarrow \cancel{\nu^3} = \cancel{(\nu-1)^3} + 3\cdot(\nu-1)^2 + 3\cdot(\nu-1) + 1$

Γιά $\kappa=\nu \Rightarrow (\nu+1)^3 = \cancel{\nu^3} + 3\cdot\nu^2 + 3\cdot\nu + 1$

$(\nu+1)^3 = 1+3(1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + \nu) \Rightarrow$

$$(\nu+1)^3 = 1 + 3\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 + 3\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu \Rightarrow 3\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 = (\nu+1)^3 - 3\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu - 1 \Rightarrow$$

$$3\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 = (\nu+1)\left[(\nu+1)^2-\frac{3\nu}{2}-1\right] \Rightarrow 3\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2=(\nu+1)\left[\frac{2\nu^2+4\nu+2-3\nu-2}{2}\right] \Rightarrow$$

$$3\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2=(\nu+1)\left[\frac{2\nu^2+\nu}{2}\right] \Rightarrow 3\cdot\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}}$$

(β) $L=\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\kappa x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ (απροσδιόριστη μορφή) → Κανόνα L'Hospital

$$L=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\kappa x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0}\frac{\kappa\eta\mu\kappa x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$ (απρ. μορφή) → Κανόνα L'Hospital

$$L = \lim_{x\to0}\frac{(\kappa\eta\mu\kappa x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to0}\frac{\kappa^2\sigma\upsilon\nu\kappa x}{2} = \frac{\kappa^2\sigma\upsilon\nu0}{2}=\frac{\kappa^2\cdot1}{2}=\frac{\kappa^2}{2}.$$ Άρα $\boxed{L=\frac{\kappa^2}{2}}$

(γ) $\lim_{x\to0}\sum_{\kappa=1}^{10}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\kappa x}{x^2} = \sum_{\kappa=1}^{10}\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\kappa x}{x^2} = \sum_{\kappa=1}^{10}\frac{\kappa^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{\kappa=1}^{10}\kappa^2 =$

$$\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}\right|_{\nu=10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{10(10+1)(2\cdot10+1)}{6} = \frac{10\cdot11\cdot21}{12} = \frac{385}{2}.$$

Άρα $\boxed{\lim_{x\to0}\sum_{\kappa=1}^{10}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\kappa x}{x^2}=\frac{385}{2}}$

4. (α) Θέτουμε τα ενδεχόμενα

Α: Ο λαμπτήρας προέρχεται από τη μηχανή Α. $\Rightarrow P(A)=\dfrac{5}{10}$

Β: Ο λαμπτήρας προέρχεται από τη μηχανή Β. $\Rightarrow P(B)=\dfrac{3}{10}$

Γ: Ο λαμπτήρας προέρχεται από τη μηχανή Γ. $\Rightarrow P(\Gamma)=\dfrac{2}{10}$

Ε: Ο λαμπτήρας είναι ελαττωματικός .

Άρα $P(E/A)=\dfrac{1}{10}$, $P(E/B)=\dfrac{2}{10}$, $P(E/\Gamma)=\dfrac{1}{20}$

$$P(E)=P\left[(E\cap A)\cup(E\cap B)\cup(E\cap\Gamma)\right] = P(E\cap A)+P(E\cap B)+P(E\cap\Gamma) =$$

$$P(E/A)\cdot P(A)+P(E/B)\cdot P(B)+P(E/\Gamma)\cdot P(\Gamma) = \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{\cancel{20}^{10}}\cdot\frac{\cancel{2}}{10}$$

$= \dfrac{12}{100}$. Άρα $\boxed{P(E)=\dfrac{12}{100}}$

(β) $P(A/E)=\dfrac{P(A\cap E)}{P(E)}=\dfrac{P(E/A)\cdot P(A)}{P(E)}=\dfrac{\dfrac{1}{\cancel{10}}\cdot\dfrac{5}{\cancel{10}}}{\dfrac{12}{\cancel{100}}}=\dfrac{5}{12}$. Άρα $\boxed{P(A/E)=\dfrac{5}{12}}$

5. (α) $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}$

$3A-2I=3\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\3&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\boxed{A^2=3A-2I}$

(β) $A^3=A^2\cdot A=(3A-2I)\cdot A=3A^2-2I\cdot A=3(3A-2I)-2\cdot(I\cdot A)=$
$9A-6I-2A=7A-6I$

(γ) $A^2\cdot\left(\dfrac{3}{2}A^{-1}-\dfrac{1}{2}I\right)=A^2\cdot\dfrac{3}{2}A^{-1}-A^2\cdot\dfrac{1}{2}I=\dfrac{3}{2}(A\cdot A)\cdot A^{-1}-\dfrac{1}{2}\cdot A^2\cdot I=$

$\dfrac{3}{2}\cdot A\cdot(A\cdot A^{-1})-\dfrac{1}{2}\cdot A^2=\dfrac{3}{2}\cdot A\cdot I-\dfrac{1}{2}\cdot(3A-2I)=\dfrac{3}{2}\cdot A-\cancel{\dfrac{3}{2}A}+I = I$

Δηλ. $A^2\cdot\left(\dfrac{3}{2}A^{-1}-\dfrac{1}{2}I\right)=I \Rightarrow \boxed{\left(A^2\right)^{-1}=\dfrac{3}{2}A^{-1}-\dfrac{1}{2}I}$

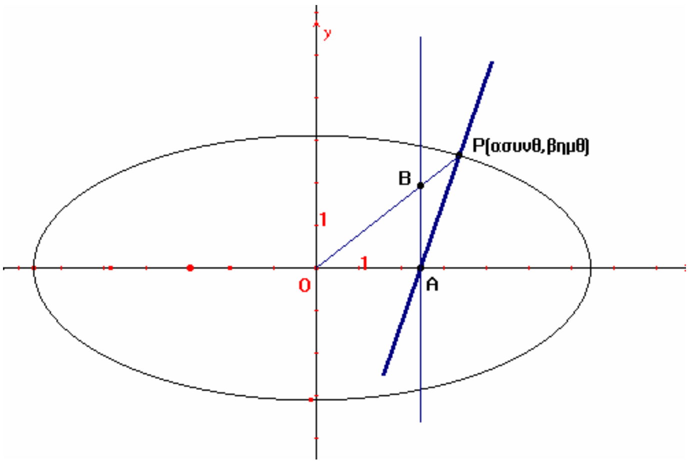
ή $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^2\right)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{3}{2}A^{-1} - \frac{1}{2}I = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Από $(1) \wedge (2) \Rightarrow \boxed{\left(A^2\right)^{-1} = \frac{3}{2}A^{-1} - \frac{1}{2}I}$

6.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a} + \frac{2y}{\beta^2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x\beta^2}{a^2 y} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\phi} = -\frac{\cancel{\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\beta^{\cancel{2}}}{\alpha^{\cancel{2}}\cdot\cancel{\beta}\cdot\eta\mu\theta} \Rightarrow$$

$$\lambda_{\varepsilon\phi} = -\frac{\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\cdot\eta\mu\theta} \Rightarrow \lambda_{\kappa\alpha\theta} = \frac{\alpha\cdot\eta\mu\theta}{\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow y - y_1 = \lambda\left(x - x_1\right) \Rightarrow$$

$$y - \beta\,\eta\mu\theta = \frac{\alpha\,\eta\mu\theta}{\beta\,\sigma\upsilon\nu\theta}\left(x - \alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta\right) \Rightarrow$$

$$\beta\,\sigma\upsilon\nu\theta\, y - \beta^2\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha\,\eta\mu\theta\, x - \alpha^2\,\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha\,\eta\mu\theta\, x - \beta\,\sigma\upsilon\nu\theta\, y = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta}$$

(β) <u>Σημείο Α</u>: $y_A = 0$

$$\alpha\,\eta\mu\theta\, x - \beta\,\sigma\upsilon\nu\theta\cdot 0 = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \alpha\,\cancel{\eta\mu\theta}\, x = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\cancel{\eta\mu\theta}\,\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow$$

$$x_A = \frac{\left(a^2-\beta^2\right)\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha} \Rightarrow A\left(\frac{\left(a^2-\beta^2\right)\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha},0\right)$$

<u>Εξίσωση της ευθείας ΟΒ:</u> $\frac{y-0}{x-0} = \frac{\beta\eta\mu\theta-0}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta-0} \Rightarrow y = \frac{\beta\eta\mu\theta}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta}x$

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\beta\eta\mu\theta}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta}x \\ x &= \frac{\left(a^2-\beta^2\right)\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha}\end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \frac{\beta\eta\mu\theta}{\alpha\,\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}}\frac{\left(a^2-\beta^2\right)\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\alpha} \Rightarrow y_{\mathrm{B}} = \frac{\beta\left(a^2-\beta^2\right)\eta\mu\theta}{\alpha^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{\left(a^2-\beta^2\right)\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha},\frac{\beta\left(a^2-\beta^2\right)\eta\mu\theta}{\alpha^2}\right)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\left(a^2-\beta^2\right)\sigma\upsilon\nu\theta}{a} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{ax}{a^2-\beta^2} \\ y &= \frac{\beta\left(a^2-\beta^2\right)\eta\mu\theta}{a^2} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{a^2y}{\beta\left(a^2-\beta^2\right)}\end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{ax}{a^2-\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2y}{\beta\left(a^2-\beta^2\right)}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$\boxed{\frac{a^2x^2}{\left(a^2-\beta^2\right)^2} + \frac{a^4y^2}{\beta^2\left(a^2-\beta^2\right)^2} = 1}$ Γεωμετρικός τόπος σημείου Β.

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΝΙΑΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2002-2003

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ : 2 ώρες και 30 λεπτά **ΙΟΥΝΙΟΣ 2003**

ΜΕΡΟΣ Α΄. *Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε* ***μόνο*** *στις 12. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.*

1. Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι 9. Από αυτούς οι πέντε είναι: 4, 6, 3, 4, 2. Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς αν ο ένας είναι τριπλάσιος από τον άλλο.

2. Η τιμή πώλησης ενός ψυγείου είναι £805 και σ' αυτή συμπεριλαμβάνεται και το 15% του Φ.Π.Α. Ποια θα ήταν η τιμή πώλησης του ψυγείου αν σ' αυτή δεν συμπεριλαμβανόταν ο Φ.Π.Α.;

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A=\frac{12!}{3!\cdot 10!}+\frac{7!}{5!\cdot 2!}$

4. Ορθό πρίσμα έχει ύψος 15 cm και βάση τετράγωνο πλευράς 3 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.

5. ΄Ενας ΄Αγγλος τουρίστας έφερε μαζί του στην Κύπρο 600 στερλίνες σε χαρτονομίσματα και τις μετέτρεψε σε λίρες Κύπρου. Πόσες λίρες Κύπρου πήρε αν η συναλλαγή έγινε σύμφωνα με την ισοτιμία της στερλίνας σε κυπριακές λίρες που φαίνεται στον πίνακα:

Ισοτιμία Στερλίνας σε Κυπριακές λίρες			
	Αγορά	Πώληση	Ανά
Στερλίνα	0,750	0,780	1

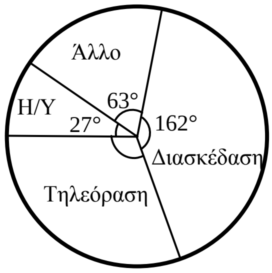
6. Να βρείτε πόσους τριψήφιους αριθμούς μικρότερους του 450 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 5, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου. Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί;

7. Αν τα Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου και $P(A)=\frac{1}{3}$,

$P(B΄)=\frac{3}{5}$ και $P(A\cup B)=\frac{8}{15}$, να βρείτε τα: (α) $P(B)$ (β) $P(A\cap B)$ (γ) $P(A-B)$

8. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ. Πόσοι από αυτούς έχουν όλα τα φωνήεντα συνεχόμενα;

9. Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνονται τα αποτελέσματα έρευνας που έγινε σε δείγμα 80 μαθητών ενός σχολείου, ως προς το τι προτιμούν να κάνουν στον ελεύθερό τους χρόνο. Να βρείτε: (α) Πόσοι μαθητές προτιμούν να διασκεδάζουν; (β) Πόσοι μαθητές προτιμούν να ασχολούνται με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή (Η/Υ); (γ) Τι ποσοστό (%) του δείγματος αποτελούν οι μαθητές οι οποίοι προτιμούν να βλέπουν τηλεόραση;



10. Μια κάλπη περιέχει 20 μπαλάκια αριθμημένα από 1 έως 20. Επιλέγουμε τυχαία ένα μπαλάκι. Ποια η πιθανότητα να φέρει ένδειξη μεγαλύτερη του 12 και πολλαπλάσιο του 3;

11. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 40α cm και παράπλευρο ύψος 13α cm. Να βρείτε: (α) Το ύψος της πυραμίδας. (β) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας. (γ) Τον όγκο της πυραμίδας.

12. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι 294π cm2 και το ύψος του είναι τριπλάσιο της ακτίνας της βάσης του. Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου.

13. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 άτομα γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι, αν τρία από αυτά θα πρέπει να καθίσουν σε συνεχόμενες θέσεις.

14. Τέσσερα κρουαζιερόπλοια, Α, Β, Γ, Δ, ξεκινούν την ίδια μέρα από το λιμάνι της Λεμεσού. Οι κρουαζιέρες του πλοίου Α είναι τριήμερες, του Β πενθήμερες, του Γ εξαήμερες και του Δ δεκαήμερες. Να βρείτε σε πόσες μέρες τα τέσσερα πλοία θα ξανασυναντηθούν για πρώτη φορά στο λιμάνι της Λεμεσού και πόσες κρουαζιέρες θα έχει κάνει στο διάστημα αυτό το καθένα τους.

15. Ορθός κυκλικός κώνος έχει ύψος 6 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 80π cm2. Να βρείτε την ακτίνα της βάσης και τον όγκο του κώνου.

ΜΕΡΟΣ Β΄. *Να απαντήσετε σε 4* ***μόνο*** *από τις 6 ερωτήσεις.* Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Σε δείγμα 100 οικογενειών καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών τους, όπως φαίνεται στον πίνακα:

αριθμός παιδιών (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
αριθμός οικογενειών (f_i)	1	8	34	26	15	10	6

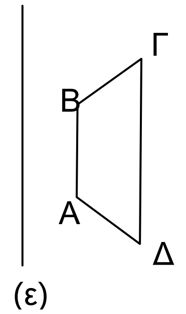
Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$, τη διάμεσο xδ, την επικρατούσα τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής.

2. Μια βιομηχανία αρωμάτων συσκευάζει ένα συγκεκριμένο τύπο αρώματος σε γυάλινα δοχεία σχήματος κυλίνδρου με ύψος 6 cm και περιφέρεια βάσης 4π cm. Η

βιομηχανία σκοπεύει να εισαγάγει νέα συσκευασία, σε δοχεία σχήματος σφαίρας με ακτίνα 3 cm. Αν θεωρήσουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις τα δοχεία θα είναι εντελώς γεμάτα με το άρωμα, να υπολογίσετε: (α) Την επιπλέον ποσότητα αρώματος που θα χρειαστεί για να γεμίσει το δοχείο της νέας συσκευασίας. (β) Πόσο τοις εκατόν (%) θα είναι η αύξηση της ποσότητας στη νέα συσκευασία, σε σχέση με τη σημερινή.

3. Κάποιος αγόρασε ένα διαμέρισμα και αφού ξόδεψε £5000 για επιδιορθώσεις το πώλησε £44000, κερδίζοντας έτσι 30% πάνω στην τιμή αγοράς. Να βρείτε: (α) Την τιμή αγοράς του διαμερίσματος. (β) Πόσα θα έπρεπε να πωλήσει το διαμέρισμα για να έχει κέρδος 30% πάνω στο συνολικό του κόστος.

4. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ισοσκελές με βάσεις ΑΒ=6 cm και ΓΔ=14 cm. Το ΑΒΓΔ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από ευθεία (ε) η οποία είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και απέχει 2 cm από την ΑΒ και 5 cm από τη ΓΔ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



5. Ρίχνουμε ένα ζάρι δυο φορές. Ποια η πιθανότητα των ενδεχομένων:

   Α : "άθροισμα ενδείξεων 7".

   Β : "άνισες ενδείξεις".

   Γ : "η πρώτη ένδειξη άρτια και η δεύτερη ένδειξη μικρότερη του 4".

   Δ : "γινόμενο ενδείξεων πολλαπλάσιο του 5".

6. Τριάντα δύο μαθητές της Α΄ τάξης, 40 μαθητές της Β΄ τάξης και 24 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου θα χωριστούν σε ομοιόμορφες ομάδες για να προσφέρουν εθελοντική κοινωνική εργασία. Να βρείτε πόσες το πολύ ομοιόμορφες ομάδες μπορούν να σχηματισθούν και πόσους μαθητές από κάθε τάξη θα περιέχει η κάθε ομάδα, αν είναι απαραίτητο, σε κάθε ομάδα να υπάρχουν τουλάχιστον 4 μαθητές της Γ΄ τάξης για να συντονίζουν.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. Έστω χ ο ένας ζητούμενος αριθμός → 3χ ο άλλος ζητούμενος αριθμός

$$\frac{4+6+3+4+2+x+3x}{7}=9\Rightarrow\frac{19+4x}{7}=9\Rightarrow 4x=44\Rightarrow x=11.$$

Οι αριθμοί είναι: 11 και 33

2. Έστω χ η ζητούμενη τιμή $\Rightarrow \frac{115}{100}x=805\Rightarrow x=\frac{805\cdot 100}{115}\Rightarrow x=£700$

3. Α=$\frac{12!}{3!\cdot 10!}+\frac{7!}{5!\cdot 2!}=\frac{11\cdot 12}{6}+\frac{6\cdot 7}{2}=22+21=43$

4. $E_\pi = \Pi_\beta \cdot \upsilon \Rightarrow E_\pi=12\cdot 15 \Rightarrow \boxed{E_\pi = 180 \text{ cm}^2}$. $V=E_\beta\cdot\upsilon \Rightarrow V=9\cdot 15\Rightarrow \boxed{V=135 \text{ cm}^3}$

5. 0,750 · 600 = £450

6. (i)

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες	
3	4	3	=36
το “1” ή “2” η “3”			

(ii) Περιττοί τριψήφιοι αριθμοί μικρότεροι του 450:

Να λήγουν σε “5”	3	3	1	= 9	
Να λήγουν σε “3”	2	3	1	= 6	9+6+6 = 21 τριψήφιοι < 450
Να λήγουν σε “1”	2	3	1	= 6	

7. (α) $P(B)=1-P(B')=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$,

(β) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

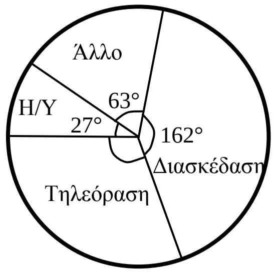
$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{8}{15}=\frac{1}{5}$

(γ) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

8. Ε, Π, Ι, Μ, Ε, Λ, Ε, Ι, Α

(i) $M_9^\varepsilon=\frac{9!}{3!\cdot 2!}=30240$ (ii) $\mathrm{M}_4\cdot\mathrm{M}_6^\varepsilon=4!\cdot\frac{6!}{3!\cdot 2!}=1440$

9. (α) $\frac{162}{360}\cdot 80 = 36$, (β) $\frac{27}{360}\cdot 80 = 6$

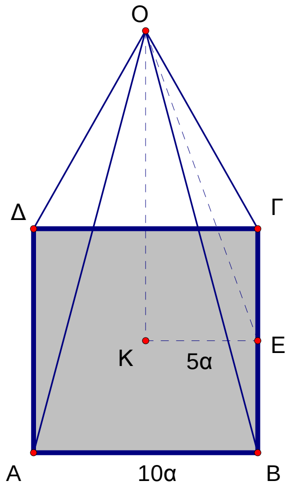


(γ) $360^0 - \left(27^0 + 63^0 + 162^0\right) = 108^0 \Rightarrow \frac{108}{360}\cdot 100 = 30\%$

10. Ευνοϊκές περιπτώσεις: $\{15,18\}$. Δυνατές περιπτώσεις: $\{1,2,\ldots 20\}$

$\Rightarrow P = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

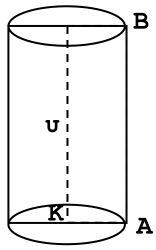
11. (α) Πβ = 40α cm, (ΟΕ) = 13α cm,
$(ΟΕ)^2=(ΚΕ)^2+(ΟΚ)^2 \Rightarrow 169α^2 = 25α^2 + υ^2 \Rightarrow υ^2 = 144α^2$
$\Rightarrow υ = 12α$ cm.



(β) $E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} \Rightarrow E_\pi = \frac{40a\cdot 13a}{2} \Rightarrow \boxed{E_\pi = 260a^2}$

(γ) $V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3} \Rightarrow V = \frac{100\alpha^2 \cdot 12\alpha}{3} \Rightarrow \boxed{V = 400a^3\, cm^3}$

12. $E_\kappa = 294\pi\, cm^2 \Rightarrow 294\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi}\cdot x\cdot 3x \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow$
$R = 7\, cm,\qquad \upsilon = 21 cm$



$V = \pi R^2 \upsilon \Rightarrow V = \pi\cdot 49\cdot 21 \Rightarrow \boxed{V = 1029\pi\, cm^3}$

13. $(6-1)!3! = 5!\cdot 3! = 720\, \tau\rho\acute{o}\pi o\iota$

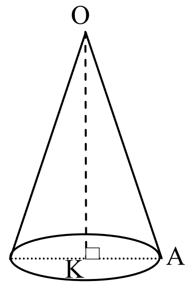
14. Ε.Κ.Π. (3,5,6,10) = 30 μέρες.

Α: 30 : 3 = 10 κρουαζιέρες, Β: 30 : 5 = 6 κρουαζιέρες

Γ: 30 : 6 = 5 κρουαζιέρες, Δ: 30 : 10 = 3 κρουαζιέρες

15. υ=(ΟΚ)=6 cm, Εκ = 80π cm². $\Rightarrow \cancel{\pi} R\lambda = 80\cancel{\pi} \Rightarrow R\lambda = 80 \quad (1)$

$R^2 + \upsilon^2 = \lambda^2 \Rightarrow R^2 + 36 = \lambda^2 \quad (2)$



Από (1) και (2) $\Rightarrow R^2 + 36 = \left(\dfrac{80}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow R^4 + 36R^2 - 6400 = 0$

$$R^2 = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 + 4 \cdot 80^2}}{2} = \begin{cases} 64 \\ -100 \ \textit{απορρίπτεται} \end{cases} \Rightarrow \boxed{R = 8 \text{ cm}}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 \upsilon \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 64 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{V = 128\pi \ cm^3}$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u>

1.

αριθμός παιδιών (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
αριθμός οικογενειών (f_i)	1	8	34	26	15	10	6

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i$
0	1	0	$(0-3)^2 = 9$	9·1 = 9
1	8	8	$(1-3)^2 = 4$	4·8 = 32
2	34	68	$(2-3)^2 = 1$	1·34=34
3	26	78	$(3-3)^2 = 0$	0·26 =0
4	15	60	$(4-3)^2 = 1$	1·15 = 15
5	10	50	$(5-3)^2 = 4$	4·10 = 40
6	6	36	$(6-3)^2 = 9$	9·6 = 54
	$\Sigma f_i = 100$	$\Sigma f_i \cdot x_i = 300$		$\Sigma (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i = 184$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{\Sigma f_i} = \frac{300}{100} = 3 \Rightarrow \boxed{\overline{x} = 3}, \quad x_\delta = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} \Rightarrow x_\delta = \frac{3+3}{2} \Rightarrow \boxed{x_\delta = 3}, \quad \boxed{x_\varepsilon = 2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{184}{100}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{1,84} \Rightarrow \boxed{\sigma \simeq 1,35}$$

2. <u>Κύλινδρος</u> υ = 6 cm. Πβ = 4π cm $\Rightarrow$ 2πR=4π $\Rightarrow$ R=2 cm.

$$V = \pi R^2 \upsilon \Rightarrow V = \pi \cdot 4 \cdot 6 \Rightarrow \boxed{V = 24\pi \ cm^3}$$

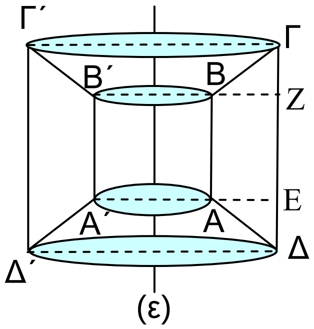
Σφαίρα: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 27 \Rightarrow \boxed{V = 36\pi \ cm^3}$

(α) $36\pi - 24\pi = 12\pi$ cm³ , (β) $\dfrac{12\pi}{24\pi} \cdot 100 = 50\%$

3. (α) Αν θέσουμε χ της τιμή αγοράς $\Rightarrow$ καθαρό κέρδος = 44000 – (χ+5000) $\Rightarrow$
$\dfrac{44000 - x - 5000}{x} = \dfrac{30}{100} \Leftrightarrow \dfrac{39000 - x}{x} = \dfrac{3}{10} \Leftrightarrow 39000 - 10x = 3x \Leftrightarrow$ x = £30 000

(β) $\dfrac{130}{100} \cdot (30000 + 5000) = \dfrac{13}{10} \cdot 35000 = 45500 \Rightarrow$ Τιμή πώλησης £45 500

4. $(\mathrm{A}\Delta)^2 = (\mathrm{AE})^2 + (\mathrm{E}\Delta)^2 \Leftrightarrow (\mathrm{A}\Delta)^2 = 9 + 16 \Leftrightarrow$



ΑΔ = 5 cm

$E_{ολ} = E_1 + E_2 + 2\,E_3$

$E_1 = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\,\pi$ cm² , $E_2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 14 = 140\,\pi$ cm²

$E_3 = \pi(2+5) \cdot 5 = 35\pi$ cm²

$E_{ολ} = (24\pi + 140\pi + 70\pi)$ cm² $\Rightarrow \boxed{E_{ολ} = 234\pi \text{ cm}^2}$

$V_{ολ} = V_1 - (V_2 + 2V_3)$

$V_1 = \pi \cdot 25 \cdot 14 = 350$ cm³, $V_2 = \pi \cdot 4 \cdot 6 = 24\pi$ cm³ , $V_3 = \dfrac{4\pi}{3} \cdot (4+10+25) = 52\pi$ cm³

$V_{ολ} = 350\pi - (24\pi + 52\pi) = 350\pi - 76\pi = 274\pi$ cm³

5. $N(\Omega) = 6^2$, A ={(1,6) , (6,1), (2,5) , (5,2) , (3,4) , (4,3) }, N(A)=6 $\Rightarrow$

$P(A) = \dfrac{6}{36} \Rightarrow \boxed{P(A) = \dfrac{1}{6}}$

Β΄ = {(1,1) , (2,2) , ... , (6,6)} $\Rightarrow$ N(Β΄)=6 $\Rightarrow$ N(B) = 36 – 6 = 30 $\Rightarrow$

$P(B) = \dfrac{30}{36} \Rightarrow \boxed{P(B) = \dfrac{5}{6}}$

Γ = {(2,1) , (2,2) , (2,3) , (4,1) , (4,2) , (4,3) , (6,1) , (6,2) , (6,3)} $\Rightarrow$ N(Γ) = 9

$P(\Gamma) = \dfrac{9}{36} \Rightarrow \boxed{P(\Gamma) = \dfrac{1}{4}}$

Δ = {(1,5) , (2,5) , (3,5) , (4,5) , (5,5) , (6,5) , (5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,6)} $\Rightarrow$

N(Δ) = 11 $\Rightarrow \boxed{P(\Gamma) = \dfrac{11}{36}}$

6. 32 Α, 40 Β, 24 Γ. Μ.Κ.Δ.(32,40,24) = 8, $32 = 2^5$, $40 = 2^3 \cdot 5$, $24 = 2^3 \cdot 3$

Αν γίνουν 8 ομάδες θα περιέχουν 4 Α, 5Β, 3Γ η καθεμιά.

Επειδή θέλουμε τουλάχιστον 4Γ η περίπτωση αυτή απορρίπτεται.

Οι περιπτώσεις για 7 ή 6 ή 5 ή 3 ομάδες απορρίπτονται επίσης διότι δεν μπορεί να χωριστούν σε ομοιόμορφες ομάδες. Άρα θα γίνουν *το πολύ 4 ομοιόμορφες ομάδες* που αποτελούνται από 8Α, 5Β, 6Γ η κάθε μία.

<u>ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ</u>

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2002-2003

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΤΕΧΝΙΚΗ**

ΧΡΟΝΟΣ : 2 ώρες και 30 λεπτά Ιούνιος 2003

ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε μόνο στις 12. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το $\int (2x^3 - 5)\, dx$

2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \eta\mu x}{x^2}$

3. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu(5x+20°)=\dfrac{1}{2}$.

4. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2+2x-6y+1=0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του.

5. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ υπάρχουν; Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το γράμμα Σ και έχουν όλα τα φωνήεντα συνεχόμενα;

6. Στο ανάπτυγμα του $\left(x + \dfrac{5}{x^2}\right)^6$ να βρείτε τον όρο τον ανεξάρτητο του x.

7. Να βρείτε την παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων: (α) $y=e^{3x} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ (β) $y=\dfrac{x^2}{\eta\mu x}$

8. Η καμπύλη με εξίσωση $y=\alpha x^3+\beta x+2$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο A(1,-2). (α) Να υπολογίσετε τα α και β. (β) Να βρείτε το άλλο ακρότατο της καμπύλης και να το χαρακτηρίσετε (μέγιστο/ελάχιστο).

9. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 7\alpha} = \varepsilon\varphi 5\alpha$

10. Να δείξετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, ότι: $\tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{1}{2} + \mathrm{T}o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.

11. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $(y+1)e^{-x}\dfrac{dy}{dx} = xy$.

(α) Να βρείτε τη γενική της λύση.

(β) Να βρείτε την ειδική λύση για την οποία είναι y=1 όταν x = 1.

12. Αν $y=(3x+2)e^x+e^{2x}$ να δείξετε ότι: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = e^{2x}$.

13. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 x(x^2-1)^5\, dx$.

14. Αν $\binom{\nu}{2}=15, \quad \nu\rangle 2$, να βρείτε το ν.

15. Δίνεται η καμπύλη (κ): $y=x^2+1$ και η ευθεία (ε): $y=\lambda x, \quad \lambda\rangle\, 0$, η οποία εφάπτεται της καμπύλης στο σημείο (1,2) αυτής. (α) Να βρείτε την τιμή του λ. (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη (κ), την ευθεία (ε) και τον άξονα των y.

ΜΕΡΟΣ Β΄. *Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 4* ***μόνο****. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.*

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y=(x-1)(x-3)^2$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Α(4,3) αυτής.

2. Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y=3x-x^2$ και της ευθείας $y=x$ κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

3. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^3+1$.

4. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x=2\varepsilon\varphi\theta, \quad -\dfrac{\pi}{2}\langle\theta\langle\dfrac{\pi}{2}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

5. Πόσους άρτιους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων; Πόσοι από αυτούς είναι μεγαλύτεροι από τον αριθμό 4000;

6. (α) Να δείξετε ότι: $\eta\mu 5\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\eta\mu 4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 3\alpha=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha$

(β) Να λύσετε, στο διάστημα [0°, 360°], την εξίσωση:

$\eta\mu 5x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x-\eta\mu 4x\cdot\sigma\upsilon\nu 3x+\eta\mu x=0$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

ΜΕΡΟΣ Α΄:

1. $\displaystyle\int(2x^3-5)dx=\frac{2x^4}{4}-5x+c=\frac{x^4}{2}-5x+c$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^2}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2}=0$

3. $\sigma\upsilon\nu(5x+20^0)=\frac{1}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu(5x+20^0)=\sigma\upsilon\nu 60^0$

$5x+20^0=360^0\kappa+60^0\Rightarrow 5x=360^0\kappa+40^0\Rightarrow x=72^0\kappa+8^0$

$5x+20^0=360^0\kappa-60^0\Rightarrow 5x=360^0\kappa-80^0\Rightarrow x=72^0\kappa-16^0$

4. $x^2+\psi^2+2x-6\psi+1=0 \qquad g=1,\ f=-3,\ c=1\Rightarrow$ Κ(-1,3),

$R=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{1^2+(-3)^2-1}=\sqrt{9}=3$

5. $\frac{9!}{3!\cdot 2!}=30240$, $\quad \frac{5!}{3!}\cdot 4!=480$

6. $\left(x+\frac{5}{x}\right)^6$, $T_{\kappa+1}=\binom{6}{\kappa}x^{6-\kappa}\left(\frac{5}{x^2}\right)^{\kappa}=\binom{6}{\kappa}x^{6-\kappa}\cdot\frac{5^{\kappa}}{x^{2\kappa}}=\binom{6}{\kappa}x^{6-3\kappa}\cdot 5^{\kappa}\Rightarrow$

$6-3\kappa=0\Rightarrow\kappa=2$. Άρα ο ανεξάρτητος όρος του x είναι:

$T_3=\binom{6}{2}\cdot 5^2=15\cdot 25=375$

7. (α) $\psi=e^{3x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow\frac{d\psi}{dx}=3e^{3x}\cdot\sigma\upsilon\nu x-e^{3x}\cdot\eta\mu x$

(β) $\psi=\frac{x^2}{\eta\mu x}\Rightarrow\frac{d\psi}{dx}=\frac{2x\eta\mu x-x^2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$

8. $\psi=\alpha x^3+\beta x+2\Rightarrow\frac{d\psi}{dx}=3\alpha x^2+\beta$, $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=1}=0\Rightarrow 3\alpha+\beta=0$

περνά από το Α(1,-2): $\alpha+\beta+2=-2\Rightarrow\alpha+\beta=-4$

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{matrix}\alpha+\beta= & -4\\ 3\alpha+\beta= & 0\end{matrix}\Rightarrow 2a=4\Rightarrow a=2\Rightarrow 6+\beta=0\Rightarrow\beta=-6$

$\psi=2x^3-6x+2\Rightarrow\frac{d\psi}{dx}=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\frac{d\psi}{dx}$		+	0	−	0	+	
ψ		↗		↘		↗	

(-1,6)
μέγιστο

9. $\frac{\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 7\alpha}=\frac{2\eta\mu 5\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 5\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\frac{\eta\mu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu 5\alpha}=\varepsilon\phi 5\alpha$

10. Θέτω: τοξεφ$\frac{1}{2}=\alpha\Rightarrow\varepsilon\phi\alpha=\frac{1}{2} \qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, και

τοξεφ$\frac{1}{3}=\beta\Rightarrow\varepsilon\phi\beta=\frac{1}{3} \qquad 0<\beta<\frac{\pi}{4}$

$$\varepsilon\phi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta}{1-\varepsilon\phi\alpha\cdot\varepsilon\phi\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1 \text{ και } 0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2} \text{ άρα } \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$ δηλαδή $\text{τοξεφ}\frac{1}{2}+\text{τοξεφ}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

11. (α) $(\psi+1)e^{-x}\dfrac{d\psi}{dx}=x\psi\Rightarrow\displaystyle\int\frac{\psi+1}{\psi}d\psi=\int xe^x dx$

$$\Rightarrow\int\left(1+\frac{1}{\psi}\right)d\psi=\int xd\left(e^x\right)\Rightarrow\psi+\ln|\psi|=xe^x-\int e^x dx\ \Rightarrow\psi+\ln|\psi|=xe^x-e^x+c$$

(β) ψ=1 όταν x=1 $\Rightarrow 1=1\cdot e-e+c\Rightarrow c=1$, ειδική λύση: $\psi+\ln|\psi|=xe^x-e^x+1$.

12. $\psi=\left(3x+2\right)e^x+e^{2x}\Rightarrow\dfrac{d\psi}{dx}=3e^x+3xe^x+2e^x+2e^{2x}=5e^x+3xe^x+2e^{2x}$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=5e^x+3e^x+3xe^x+4e^{2x}=8e^x+3xe^x+4e^{2x}.$$

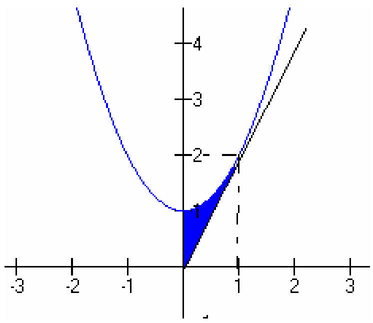
$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dx^2}-2\frac{d\psi}{dx}+\psi&=8e^x+3xe^x+4e^{2x}-2(5e^x+3xe^x+2e^{2x})+3xe^x+2e^x+e^{2x}\\&=8e^x+3xe^x+4e^{2x}-10e^x-6xe^x-4e^{2x}+3xe^x+2e^x+e^{2x}\\&=e^{2x}\end{aligned}$$

13. $\displaystyle\int_0^1 x(x^2-1)^5dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-1)^5d(x^2-1)=\left[\frac{(x^2-1)^6}{12}\right]_0^1=0-\frac{(-1)^6}{12}=-\frac{1}{12}$

14. $\dbinom{\nu}{2}=15\Rightarrow\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}=15\Rightarrow\nu^2-\nu-30=0$, $\quad\nu=\dfrac{1\pm\sqrt{1+120}}{2}=\dfrac{1+11}{2}=\left\langle\begin{matrix}6\\-5\end{matrix}\right.$

αλλά $\nu>2\Rightarrow\nu=6$

15. $\psi=x^2+1\Rightarrow\dfrac{d\psi}{dx}=2x\Rightarrow\left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)_{x=1}=2\Rightarrow\lambda=2$



$$\mathrm{E}=\int_0^1(x^2+1)dx-\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1-1=\frac{1}{3}+1-1=\frac{1}{3}\tau.\mu$$

ΜΕΡΟΣ Β:

1. (α) $\psi = (x-1)(x-3)^2$ $\quad \pi.o. = R$

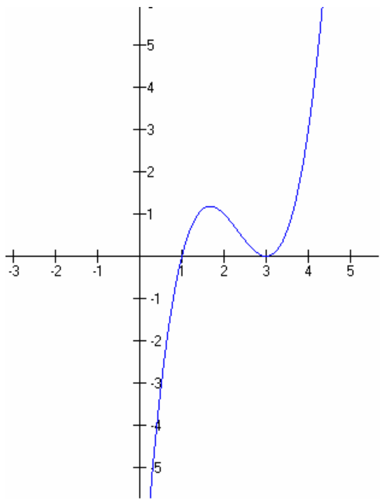
σημεία τομής με τον άξονα των x: για $\psi = 0 : x = 1 \Rightarrow (1,0), \quad x = 3 \Rightarrow (3,0)$

σημεία τομής με τον άξονα των ψ: για $x = 0 : \psi = -9 \Rightarrow (0,-9)$

$$\frac{d\psi}{dx} = (x-3)^2 + 2(x-3)(x-1) = (x-3)(x-3+2x-2) = (x-3)(3x-5)$$

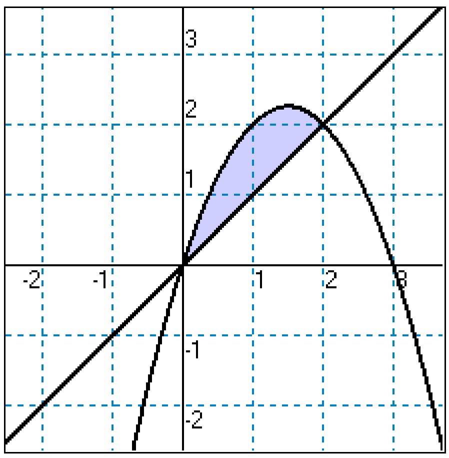
x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
$\frac{d\psi}{dx}$		+	0	-	0	+	
ψ		↗		↘		↗	

max $\left(\frac{5}{3}, \frac{32}{27}\right)$ $\qquad$ min (3,0)



(β) $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=4} = 1\cdot 7 = 7 = \lambda_{\varepsilon\varphi}$, εξίσωση της εφαπτομένης: $\psi - 3 = 7(x-4) \Rightarrow \psi - 3 = 7x - 28 \Rightarrow \psi = 7x - 25$

2. $\psi = -x(x-3) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \psi = 3x - x^2 \\ \psi = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - 3x + x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \psi = 0 \\ x = 2 \Rightarrow \psi = 2 \end{cases}$



$$V = \pi\int_0^2 \left[(3x-x^2)^2 - x^2\right]dx = \pi\int_0^2 (9x^2 - 6x^3 + x^4 - x^2)dx$$

$$= \pi\int_0^2 (8x^2 - 6x^3 + x^4)dx = \pi\left[\frac{8x^3}{3} - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{64}{3} - \frac{48}{2} + \frac{32}{5}\right) = 3\frac{11}{15}\pi \ \ \kappa.\mu.$$

3. $x\dfrac{dy}{dx}-2\psi = x^3+1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}\psi = x^2+\dfrac{1}{x}$

$I = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{x^2}$

$\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x^3}y = 1+\dfrac{1}{x^3} \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{x^2}y) = 1+\dfrac{1}{x^3} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}y = \int(1+\dfrac{1}{x^3})dx \Rightarrow \dfrac{1}{x^2}y = x-\dfrac{1}{2x^2}+c$

$\Rightarrow y = x^3+cx^2-\dfrac{1}{2}$ $\quad$ *γενική λύση*

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ $\qquad$ *θέτω* $x = 2\varepsilon\phi\theta \Rightarrow dx = 2\tau\varepsilon\mu^2\theta d\theta$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\tau\varepsilon\mu^2\theta d\theta}{4\varepsilon\phi^2\theta\cdot 2\sqrt{\varepsilon\phi^2\theta+1}} = \frac{1}{4}\int\frac{\tau\varepsilon\mu\theta}{\varepsilon\phi^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int\frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}d\theta = \frac{1}{4}\int\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu^2\theta}d\theta =$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{d(\eta\mu\theta)}{\eta\mu^2\theta} = -\frac{1}{4\eta\mu\theta}+c = -\frac{1}{4\frac{\varepsilon\phi\theta}{\sqrt{\varepsilon\phi^2\theta+1}}}+c = \frac{-\sqrt{\varepsilon\phi^2\theta+1}}{4\varepsilon\phi\theta}+c = -\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}{4\cdot\frac{x}{2}}+c$$

$$= -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+c$$

5. Άρτιοι τετραψήφιοι που μπορούν να σχηματιστούν:

Χ	Ε	Δ	Μ
5	4	3	3
			↑ 2 ή 4 ή 6

$5\cdot4\cdot3\cdot3 = 180$

Άρτιοι τετραψήφιοι μεγαλύτεροι του 4000

Χ	Ε	Δ	Μ
2	4	3	2
↑ 4 ή 6			↑ 2 ή 4 ή 6

$2\cdot4\cdot3\cdot2 = 48$

Χ	Ε	Δ	Μ
1	4	3	3
↑ 5			↑ 2 ή 4 ή 6

$1\cdot4\cdot3\cdot3 = 36$

Άρα $48+36 = 84$ *αριθμοί*

6. (α) $\eta\mu5\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu2\alpha-\eta\mu4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu3\alpha = \dfrac{1}{2}\left[\eta\mu7\alpha+\eta\mu3\alpha-(\eta\mu7\alpha+\eta\mu\alpha)\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left(\eta\mu3\alpha+\eta\mu\alpha\right) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu2\alpha$

(β) $\eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x + \eta\mu x = 0$

$\Rightarrow \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu x = 0 \Rightarrow \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu 2x + 1) = 0$

$\alpha\nu\ \eta\mu x = 0 \Rightarrow x = 180\kappa \quad \gamma\iota\alpha\ \ \kappa = 0 \Rightarrow \underline{x = 0^\circ}|, \quad \kappa = 1 \Rightarrow \underline{x = 180^\circ}|$

$\alpha\nu\ \sigma\upsilon\nu 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = -1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu 180^\circ$

$2x = 360^\circ\kappa + 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ\kappa + 90^\circ \ \ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa = 0 \Rightarrow \underline{x = 90^\circ}|, \quad \kappa = 1 \Rightarrow \underline{x = 270^\circ}|$

$2x = 360^\circ\kappa - 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ\kappa - 90^\circ \ \ \gamma\iota\alpha\ \ \kappa = 1 \Rightarrow \underline{x = 90^\circ}|, \quad \kappa = 2 \Rightarrow \underline{x = 270^\circ}|$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** Χρόνος: **3 ώρες**

<u>ΜΕΡΟΣ Α</u>:

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις: $x = t^3 + 4t$, $y = 6t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $t = 1$.

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος εφάπτεται του άξονα των y στο σημείο Α(0,2) και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $y = 2x$.

3. Να δείξετε ότι η ευθεία $\chi = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της καμπύλης $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$.

4. Οι βαθμοί δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα είναι: 10, 12, x, 18, 13, y, 15, 18, 10, 10.

(α) Αν ο μέσος όρος των βαθμών είναι 13 και ο βαθμός y είναι διπλάσιος του x, να βρείτε τους x και y.

(β) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση της κατανομής, με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

5. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(α) Να δείξετε ότι $\mathbf{A^2 - 4A + 7I = O}$**,** οπου **Ι** ο μοναδιαίος 2x2 πίνακας και **Ο** ο μηδενικός 2x2 πίνακας,

(β) Να δείξετε ότι $\mathbf{7A^{-1} = 4I - A}$

(γ) Να βρείτε τον πίνακα **Χ** για τον οποίο ισχύει η σχέση $A \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & -7 & 21 \end{pmatrix}$.

6. Το 75% του πληθυσμού μιας πόλης διαβάζει την εφημερίδα Α, το 65% διαβάζει την Α αλλά όχι τη Β και το 20% δεν διαβάζει καμιά από τις Α και Β. Παίρνουμε τυχαία ένα άτομο από τον πληθυσμό. Να βρείτε την πιθανότητα:

(α) Να διαβάζει και τις δύο εφημερίδες. (β) Να διαβάζει τη Β αλλά όχι την Α. (γ) Να διαβάζει την Α δεδομένου ότι διαβάζει τη Β.

7. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$, α>0. Φέρουμε την εστιακή χορδή ΑΒ κάθετη στον άξονα των χ.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

(β) Να δείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και *(ε_2)* είναι κάθετες μεταξύ τους και να βρείτε το σημείο τομής τους Σ.

(γ) Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή και τις δύο εφαπτόμενες στρέφεται κατά π γύρω από τον άξονα των χ. Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι 18π cm^3, να βρείτε την τιμή του α.

8. Αν η γραφική παράσταση της f(x) παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία Α(5,2) και Β(8,1) και η f΄΄(x) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\int_5^8 xf''(x)\,dx = 1$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & -x & 1 \\ 3 & 2x & -2 \end{vmatrix}$

(α) Να δείξετε ότι $f(x) = 5 - 5x^2$. (β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{5f(3x)}}dx$.

10. (α) Αν M_ν είναι οι μεταθέσεις ν διαφορετικών αντικειμένων, να δείξετε ότι: $M_\nu - \mathrm{M}_{\nu-1} = (\nu-1)\mathrm{M}_{\nu-1}, \qquad \nu \geq 3$.

(β) Να δείξετε ότι: $2 + 2\mathrm{M}_2 + 3\mathrm{M}_3 + \ldots + (\nu-1)\mathrm{M}_{\nu-1} = \mathrm{M}_\nu$

ΜΕΡΟΣ Β΄:

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, την ασύμπτωτη και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) που ενώνει τα ακρότατα της καμπύλης περνά από την αρχή των αξόνων.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και την ευθεία (ε).

2. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$ και το σημείο της Μ (τεμθ, εφθ), $0 \leq \theta < 2\pi$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$. Το σημείο Κ είναι η προβολή του σημείου Μ πάνω στον άξονα των y. Προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΚΜ προς το μέρος του Μ και στην προέκταση παίρνουμε σημείο Λ τέτοιο, ώστε (ΜΛ) = (ΚΜ). Αν Α και Α' είναι οι κορυφές της υπερβολής (Α η κορυφή στο θετικό ημιάξονα των χ) και Σ το σημείο τομής των ευθειών ΑΛ και Α'Κ, να δείξετε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του Σ είναι $y^2 = -2x - 1$.

3. Ευθεία (ε) περνά από το σταθερό σημείο Α(α,α), α>0 και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Οχ και Οy στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα (Ο η αρχή των αξόνων). Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος S = (ΟΓ) + (ΟΔ).

4. (α) Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι Ω = {α, β, γ, δ} και $P(a) = \frac{1}{10}$, P(β)=$\frac{1}{5}$, P(γ)=$\frac{2}{5}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(δ).

(β) Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω = {0,1, 2.....13} ενός πειράματος και $P(\kappa) = \frac{\kappa(\kappa+1)}{1000}$, κ = 1,2.....13. Να υπολογίσετε την πιθανότητα P(0).

5. Αν η συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο R, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = \pi - x$, να δείξετε ότι: $\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu^3 x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α:

1. $\begin{matrix} x = t^3 + 4t \\ y = 6t^2 \end{matrix} \qquad t \in \mathbb{R}, \quad \Gamma\iota\alpha \quad t = 1 \Rightarrow x = 5, \quad y = 6 \quad (5,6)$

$$\left.\begin{matrix} \frac{dy}{dt} = 12t \\ \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{12t}{3t^2+4} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\phi} = \frac{12}{7} \Rightarrow (\varepsilon): y - 6 = \frac{12}{7}(x-5) \Rightarrow 12x - 7y - 18 = 0$$

2. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$. Για Α(0,2) $\Rightarrow 4 + 4f + c = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2fy + c = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow f^2 = c,$$

$K(-g,-f)$ *ανήκει στην ευθεία* $y = 2x \Rightarrow f = 2g$

$$\left.\begin{matrix} 4 + 4f + c = 0 \\ f^2 = c \\ f = 2g \end{matrix}\right\} \Rightarrow f = -2, \quad g = -1, \quad c = 4 \quad \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0}$$

3. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$, $x>1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2\cdot 0^+}=+\infty$.

Άρα $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

4. 10, 12, x, 18, 13, y, 15, 18, 10, 10 Άρα

$$13=\frac{10+12+x+18+13+y+15+18+10+10}{10}$$

$\Rightarrow\ 130=3x+106\Rightarrow x=8,\quad y=16$

$$\sigma=\sqrt{\frac{116}{10}}=\sqrt{11,6}\Rightarrow \boxed{\sigma=3,41}$$

x_i	f_i	$f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
8	1	$1\cdot(8-13)^2=25$
10	3	$3\cdot(10-13)^2=27$
12	1	$1\cdot(12-13)^2=1$
13	1	$1\cdot(13-13)^2=0$
15	1	$1\cdot(15-13)^2=4$
16	1	$1\cdot(16-13)^2=9$
18	2	$2\cdot(18-13)^2=50$
		$\sum f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=116$

5. (α) $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&8\\-8&5\end{pmatrix}$

$$\mathrm{A}^2-4\mathrm{A}+7\mathrm{I}=\begin{pmatrix}-3&8\\-8&5\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=(\mathrm{O})$$

(β) Από το $\mathrm{A}^2-4\mathrm{A}+7\mathrm{I}=(\mathrm{O})\ \Rightarrow$

$7\mathrm{I}=4\mathrm{A}-\mathrm{A}^2\Rightarrow 7\mathrm{A}^{-1}=4\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}-\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}^2\Rightarrow 7\mathrm{A}^{-1}=4\mathrm{I}-\mathrm{A}$

(γ) $A\cdot X=\begin{pmatrix}7&0&14\\0&-7&21\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{A}^{-1}\cdot\left(A\cdot X\right)=\mathrm{A}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}7&0&14\\0&-7&21\end{pmatrix}\Rightarrow$

$X=\mathrm{A}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}7&0&14\\0&-7&21\end{pmatrix}$

Αλλά $\mathrm{A}^{-1}=\dfrac{1}{7}\left(4\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}-\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3&-2\\2&1\end{pmatrix}$

Άρα $X=\mathrm{A}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}7&0&14\\0&-7&21\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3&-2\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&0&14\\0&-7&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&-1&7\end{pmatrix}$

6. $P(A)=\dfrac{75}{100}$, $P(A-B)=\dfrac{65}{100}$, $P(A'\cap B')=\dfrac{20}{100}$, (α) $P(A-B)=\frac{65}{100}\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{65}{100}\Rightarrow \frac{75}{100}-P(A\cap B)=\frac{65}{100}\Rightarrow$

$P(A\cap B)=\frac{10}{100}$.

(β) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)\Rightarrow \frac{20}{100}=1-P(A\cup B)\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{80}{100}$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{80}{100}=\frac{75}{100}+P(B)-\frac{10}{100}\Rightarrow P(B)=\frac{15}{100}$.

$P(\mathrm{B}-\mathrm{A})=P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\frac{15}{100}-\frac{10}{100}\Rightarrow P(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\frac{5}{100}$

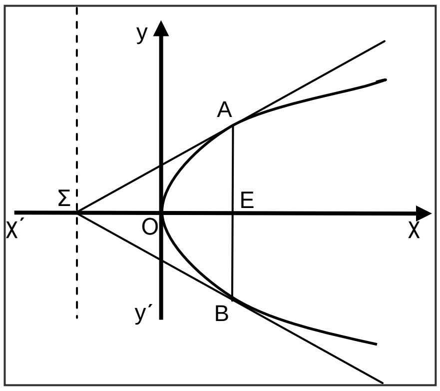
(γ) $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A/B)=\frac{10/100}{15/100}\Rightarrow P(A/B)=\frac{2}{3}$

7. $\left.\begin{matrix} y^2=4ax,\ a>0 \\ AB:\ x=a \end{matrix}\right\}\Rightarrow y^2=4a^2\Rightarrow y=\pm 2a\Rightarrow$

$A(a,2a)$, $\mathbf{B}(a,-2a)$

$y^2=4ax\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=4a\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$

$\lambda_A=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=a\\y=2a}}=\frac{2a}{2a}=1,\quad \lambda_B=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=a\\y=-2a}}=\frac{2a}{-2a}=-1$



Εφαπτομένη στο Α: $y-2a=1(x-a)\Rightarrow y=x+a\Rightarrow \lambda_1=1$

Εφαπτομένη στο Β: $y+2a=-1(x-a)\Rightarrow y=-x-a\Rightarrow \lambda_2=-1$

$\Rightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2=-1\Rightarrow (\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)$

Σημείο Σ: $\left.\begin{matrix} y=x+a \\ y=-x-a \end{matrix}\right\}\Rightarrow x=-a,\ y=0\Rightarrow \Sigma(-\alpha,0)$

$$\mathrm{V}=\pi\int_{-\alpha}^{\alpha}(x+a)^2\,dx-\pi\int_0^{\alpha}4ax\,dx=\pi\left.\frac{(x+a)^3}{3}\right]_{-a}^{a}-\pi\cdot 2ax^2\Big]_0^a=\frac{2\pi a^3}{3}$$

$$\left.\begin{matrix} V=\frac{2\pi a^3}{3} \\ V=18\pi \end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{2\pi a^3}{3}=18\pi\Rightarrow \alpha^3=27\Rightarrow \boxed{\alpha=3}$$

8. Α(5,2), Β(8,1) ακρότατα $\Rightarrow$ $f(5)=2$, $f'(5)=0$ και $f(8)=1$, $f'(8)=0$.

$$\int_5^8 x\cdot f''(x)\,dx=\int_5^8 x\cdot d\left(f'(x)\right)=x\,f'(x)\Big|_5^8-\int_5^8 f'(x)\,dx=x\,f'(x)\Big|_5^8-f(x)\Big|_5^8=$$

$=8\cdot f'(8)-5f'(5)-f(8)+f(5)=8\cdot 0-5\cdot 0-1+2=\mathbf{1}$

9. (α) $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & -x & 1 \\ 3 & 2x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & -x & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 5\left(1-x^2\right) = 5-5x^2$

(β) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{5f(3x)}}dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{25\left(1-9x^2\right)}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}}dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx =$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{18}\int \frac{(-18x)}{\sqrt{1-9x^2}}dx + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\tau o\xi\eta\mu(3x) + c = -\frac{1}{90}\frac{\left(1-9x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{15}\tau o\xi\eta\mu(3x) + c$$

$$= -\frac{1}{45}\sqrt{1-9x^2} + \frac{1}{15}\tau o\xi\eta\mu(3x) + c$$

10. (α) $M_\nu - M_{\nu-1} = \nu! - (\nu-1)! = \nu\cdot(\nu-1)! - (\nu-1)! = (\nu-1)(\nu-1)! = (\nu-1)M_{\nu-1}$

(β) $2 + 2\mathrm{M}_2 + 3\mathrm{M}_3 + \ldots + (\nu-1)\mathrm{M}_{\nu-1}$

$= 2 + \cancel{M_3} - M_2 + \cancel{M_4} - \cancel{M_3} + \cancel{M_5} - \cancel{M_4} + \ldots + M_\nu - \cancel{M_{\nu-1}} = 2 - M_2 + M_\nu$

$= 2 - 2! + M_\nu = M_\nu$

ΜΕΡΟΣ Β΄

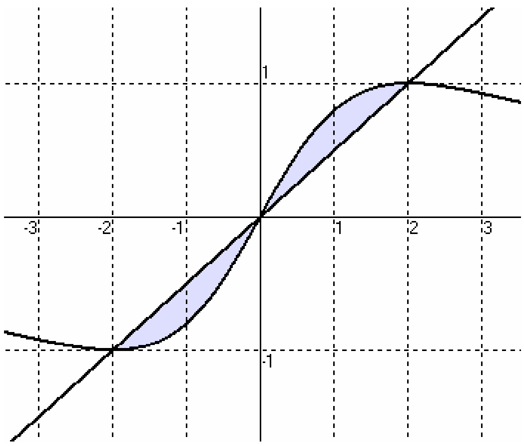
1. $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$. Για $x = 0 \Rightarrow y = 0$ (0,0)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\left(x^2+4\right) - 8x^2}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{16-4x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

χ	$-\infty$		-2		+2		∞
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘	min (-2,-1)	↗	max (2,1)	↘	

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -2$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+4} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2x} = 0^-$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2x} = 0^+ \Rightarrow$ $y = 0$ ορ. ασύμπτωτη.



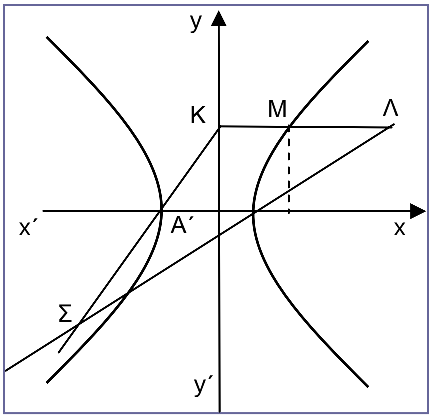
$\lambda_{AB} = \dfrac{1+1}{2+2} = \dfrac{1}{2}$, ΑΒ: $y-1 = \dfrac{1}{2}(x-2) \Rightarrow 2y = x$ (ε), Ο(0,0) χ=0, y=0 $\Rightarrow$ 2·0=0

$\Rightarrow$ 0=0 Άρα η ευθεία (ε) περνά από την αρχή των αξόνων.

$$E = 2\int_0^2 \left(\frac{4x}{x^2+4} - \frac{x}{2}\right)dx = 2\left[2\ln\left(x^2+4\right) - \frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 2\left(2\ln 8 - 1 - 2\ln 4\right) =$$

$$= 12\ln 2 - 2 - 8\ln 2 = \left(4\ln 2 - 2\right)\tau.\mu.$$

2. $x^2 - y^2 = 1$, Μ(τεμθ,εφθ), Κ(0,εφθ), Λ(2τεμθ,εφθ)



Α(1,0), Α΄(-1,0). $\lambda_{A\Lambda} = \dfrac{\varepsilon\phi\theta}{2\tau\varepsilon\mu\theta - 1}$, $\lambda_{A'K} = \varepsilon\phi\theta$

Εξίσωση ΑΛ: $y = \dfrac{\varepsilon\phi\theta}{2\tau\varepsilon\mu\theta - 1}(x-1)$

Εξίσωση Α΄Λ: $y = \varepsilon\phi\theta(x+1)$

Σημείο Σ: $$\left.\begin{aligned} y &= \varepsilon\phi\theta(x+1) \\ y &= \frac{\varepsilon\phi\theta}{2\tau\varepsilon\mu\theta - 1}(x-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{\tau\varepsilon\mu\theta}{1-\tau\varepsilon\mu\theta},\ y = \frac{\varepsilon\phi\theta}{1-\tau\varepsilon\mu\theta} \Rightarrow \Sigma\left(\frac{\tau\varepsilon\mu\theta}{1-\tau\varepsilon\mu\theta}, \frac{\varepsilon\phi\theta}{1-\tau\varepsilon\mu\theta}\right)$$

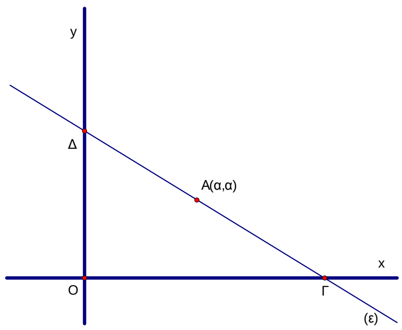
Εξίσωση γεωμετρικού τόπου σημείου Σ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\tau\varepsilon\mu\theta}{1-\tau\varepsilon\mu\theta} \\ y &= \frac{\varepsilon\phi\theta}{1-\tau\varepsilon\mu\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau\varepsilon\mu\theta = \frac{x}{1+x},\ \varepsilon\phi\theta = y(1-\tau\varepsilon\mu\theta) = y\left(1 - \frac{x}{1+x}\right) = \frac{y}{1+x}$$

$$1 + \varepsilon\phi^2\theta = \tau\varepsilon\mu^2\theta \Rightarrow 1 + \frac{y^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow (1+x)^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow 1 + 2x + x^2 + y^2 = x^2$$

$\Rightarrow \boxed{y^2 = 2x - 1}$ Εξίσωση Γεωμετρικού Τόπου σημείου Σ.

3. (ε): $\psi = \lambda x + \beta$.



Για Α(α,α) $\Rightarrow$ α = λ·α+β $\Rightarrow$ β=α-αλ $\Rightarrow$
(ε): ψ=λχ+α-αλ

Γ: $\psi = 0 \Rightarrow \chi = \dfrac{\alpha\lambda - \alpha}{\lambda} \Rightarrow \Gamma\left(\dfrac{\alpha\lambda - \alpha}{\lambda}, 0\right)$

Δ: χ=0 $\Rightarrow$ ψ=α-αλ $\Rightarrow$ Δ(0,α-αλ) $\Rightarrow$ (ΟΓ) = $\dfrac{\alpha\lambda - \alpha}{\lambda}$

$\Rightarrow$ (ΟΓ) = $\alpha - \dfrac{\alpha}{\lambda}$, (ΟΔ)=α-αλ $\Rightarrow$ S=(ΟΓ)+(ΟΔ)

$$\Rightarrow\ S = a - \frac{a}{\lambda} + a - a\lambda \Rightarrow \frac{dS}{d\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda^2} - \alpha\ ,\ \ \frac{dS}{d\lambda} = 0\ \Rightarrow$$

α-αλ²=0 $\Rightarrow$ λ²=1 $\Rightarrow$ λ=±1

λ		-1		0		+1	
$\frac{dS}{d\lambda}$	−	0	+		+	0	−
S	↘		↗		↗		↘

Άρα για λ=1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο δηλ.

S_{min}= 4α

4. (α) Ω={α,β,γ,δ} $\Rightarrow$ P(α)+P(β)+P(γ)+P(δ)=1$\Rightarrow \frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+P(\delta)=1 \Rightarrow \boxed{P(\delta)=\frac{3}{10}}$

(β) Ω={0,1,2,3, ... , 13} $\Rightarrow$ P(0) + P(1) + P(2) + ... + P(13) = 1 $\Rightarrow$

$$P(0)=1-\sum_{\kappa=1}^{13}\mathrm{P}(\kappa)=1-\sum_{\kappa=1}^{13}\frac{\kappa(\kappa+1)}{1000}=1-\sum_{\kappa=1}^{13}\frac{\kappa^2+\kappa}{1000}= \quad 1-\frac{1}{1000}\sum_{\kappa=1}^{13}\kappa^2-\frac{1}{1000}\sum_{\kappa=1}^{13}\kappa=$$

$$=1-\frac{1}{1000}\cdot\frac{13\cdot 14\cdot 27}{6}-\frac{1}{1000}\cdot\frac{13\cdot 14}{2}=1-\frac{819}{1000}-\frac{91}{1000}=\frac{9}{100}$$

5. $u=\pi-x\Rightarrow du=-dx$,

x	0	π
u	π	0

$$I=\int_0^\pi x\cdot f(\eta\mu x)\,dx \Rightarrow I=-\int_0^\pi(\pi-u)\cdot f\left(\eta\mu(\pi-u)\right)du \Rightarrow I=-\int_0^\pi(\pi-u)\cdot f(\eta\mu u)\,du$$

$$I=\pi\int_0^\pi f(\eta\mu u)\,du-\int_0^\pi u\cdot f(\eta\mu u)\,du \Rightarrow\ I=\pi\int_0^\pi f(\eta\mu u)\,du-I\Rightarrow 2I=\pi\int_0^\pi f(\eta\mu u)\,du\Rightarrow$$

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu u)\,du\Rightarrow\ I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu x)\,dx\,.$$

$$\int_0^\pi\frac{x\eta\mu^3x}{1+\sigma\upsilon\nu^2x}dx=\int_0^\pi\frac{x\eta\mu^3x}{2-\eta\mu^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\eta\mu^3x}{2-\eta\mu^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\eta\mu^3x}{1+\sigma\upsilon\nu^2x}dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\eta\mu^2x}{1+\sigma\upsilon\nu^2x}d(\sigma\upsilon\nu x)=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sigma\upsilon\nu^2x+1-2}{1+\sigma\upsilon\nu^2x}d(\sigma\upsilon\nu x)$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi d(\sigma\upsilon\nu x)-\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}\int_0^\pi\frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{1+\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x\Big|_0^\pi-\pi\cdot\tau o\xi\varepsilon\phi(\sigma\upsilon\nu\chi)\Big|_0^\pi=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\pi-\frac{\pi}{2}.\sigma\upsilon\nu 0-\pi\cdot\tau o\xi\varepsilon\phi(\sigma\upsilon\nu\pi)+\pi.\tau o\xi\varepsilon\phi(\sigma\upsilon\nu 0)=$$

$$=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\pi\cdot\tau o\xi\varepsilon\phi(-1)+\pi.\tau o\xi\varepsilon\phi 1=-\pi+\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** (Για αποφοίτους Τεχνικών Σχολών) Ιούλιος 2003

Χρόνος: 3 Ώρες

ΜΕΡΟΣ Α: *Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες*

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y= x^3-4x^2+x+3$.

2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\eta\mu x}$.

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}dx$.

4. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2+6x-2y-15=0$. Να βρείτε: α) Της συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου. β) Τη θέση του σημείου Β(3, 1) ως της τον κύκλο γ) Την εξίσωση της κάθετης του κύκλου στο σημείο του Α(0, 5).

5. Αν ο έκτος όρος του διωνύμου $\left(x^2+\beta\right)^{12}$ είναι ο $32\binom{12}{5}x^9$ να βρείτε τον όρο β του διωνύμου.

6. Αν y=xΤοξεφx να δείξετε ότι $x\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}=x^2+(1+x^2).y$

7. α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΡΙΘΜΟΙ. β) Πόσοι από αυτούς έχουν όλα τα σύμφωνα μαζί;

8. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \eta\mu^2 5x\,\sigma\upsilon\nu 3x\,dx$

9. Το χωρίο Β, περικλείεται από την καμπύλη $y=3\alpha x^2$, $\alpha>0$, τον άξονα των x και της ευθείες x=1 και x=2. Ο όγκος που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου Β γύρω από τον άξονα των x είναι $\dfrac{2511\pi}{5}$ κυβικές μονάδες. α) Να δείξετε ότι η καμπύλη είναι η $y=9x^2$. β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Β.

10. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του κύβου είναι 6 cm^3/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας του κύβου κατά τη χρονική στιγμή που η ακμή του κύβου είναι ίση με 3 cm.

ΜΕΡΟΣ Β: *Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.*

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες και τις εξισώσεις των ασύμπτωτών της. β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως της τη μονοτονία της και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της. γ) Να κάμετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο της με χ = 2.

2. α) Να δείξετε ότι ημ8x+ημ6χ=2συνx.συν(90-7x). β) Να βρείτε της λύσεις της εξίσωσης συν4x+συν2x=ημ8x+ημ6x για της οποίες $x \in \left[0^o,\ 90^o\right]$

3. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\eta\mu^3 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\sigma\upsilon\nu x = u$

4. Δίνονται οι κύκλοι K_1: $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ και K_2: $x^2+y^2=9$ με κέντρα Λ και Μ αντίστοιχα. α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι K_1, K_2 εφάπτονται εξωτερικά. β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου K_3 που έχει διάμετρο την ΛΜ. γ) Να δείξετε ότι ο κύκλος K_3 αποκόπτει από τον άξονα των y χορδή ίση με 4 μονάδες.

5. Να βρείτε στη μορφή y=f(x) τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x\ln x\frac{dy}{dx}+y=x^2e^x$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α

1. $y= x^3-4x^2+x+3 \Rightarrow\ y'=3x^2-8x+1$

2. L = $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\eta\mu x}=\frac{e^0+e^{-0}-2}{\eta\mu 0}=\frac{0}{0}$ (απροσδιόριστη μορφή)

$$\Rightarrow L=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(\eta\mu x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-1}{1}=0$$

3. $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}dx=\int_1^2\frac{(x^2+x)'}{x^2+x}dx = \left[\ln\left|x^2+x\right|\right]_1^2=\ln 6-\ln 2=\ln 3$

4. (α) $x^2+y^2+6x-2y-15=0 \ \Rightarrow K(-3, 1)$, $R=\sqrt{(-3)^2+1^2+15}=\sqrt{25}=5$

β) $3^2+1^2+6.3-2.1-15=9+1+18-2-15=11>0$ Το σημείο είναι έξω από τον κύκλο.

γ) $2x+2yy'+6-2y'=0 \Rightarrow 2yy'-2y'=-2x-6 \ \Rightarrow y'=\frac{-2x-6}{2y-2}=\frac{x+3}{1-y}$

$$\Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=\frac{0+3}{1-5}=\frac{3}{-4}=-\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \lambda_{\kappa\alpha\theta}=\frac{4}{3}$$

εξ. καθέτου: $y-5=\frac{4}{3}(x-0) \Rightarrow 3y-15=4x \Rightarrow 4x-3y=-15$

5. $\left(x^2+\beta\right)^{12}$, T_6 = $32\binom{12}{5}x^9, \Rightarrow\ T_6=\binom{12}{5}(x^2)^{12-5}.\beta^5=\binom{12}{5}x^{14}.\beta^5$

$$\Rightarrow \cancel{\binom{12}{5}}x^{14}\beta^5=32\cancel{\binom{12}{5}}x^9 \quad \Rightarrow x^{14}\beta^5=32x^9 \Rightarrow \beta^5=\frac{32}{x^5} \Rightarrow \beta=\frac{2}{x}$$

6. Αν y=xΤοξεφx $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \text{Τοξεφx} + x.\dfrac{1}{1+x^2}$

$$x\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = x(1+x^2).\left[\text{Τοξεφx} + \frac{x}{1+x^2}\right] = x(1+x^2).\text{Τοξεφx} + x^2$$

$$= (1+x^2).\left[x\text{Τοξεφx}\right] + x^2 = (1+x^2).y + x^2$$

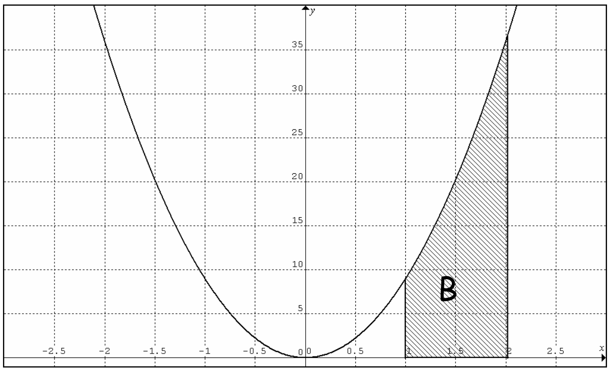
7. Α, Ρ, Ι, Θ, Μ, Ο, Ι.

(α) Όλα τα σύμφωνα μαζί $\Rightarrow \dfrac{7!}{2!} = 2520$, β) $\dfrac{5!}{2!}.3! = 360$

8. $\displaystyle\int \eta\mu^2 5x\,\sigma\upsilon\nu 3x\,dx = \int \frac{1-\sigma\upsilon\nu 10x}{2}\sigma\upsilon\nu 3x\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 10x.\sigma\upsilon\nu 3\chi\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 3x\,dx - \frac{1}{4}\int\left(\sigma\upsilon\nu 13x + \sigma\upsilon\nu 7x\right)dx = \frac{1}{6}\eta\mu 3x - \frac{1}{52}\eta\mu 13x - \frac{1}{28}\eta\mu 7x + c\,.$$

9. y=3αx^2, α>0, τον άξονα των x, x=1 και x=2. ↻ ΟΧ, V= $\dfrac{2511\pi}{5}$.



α) $V = \pi\displaystyle\int_1^2 9\alpha^2 x^4 dx = \pi\left[9\alpha^2\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \pi\left[9\alpha^2.\frac{32}{5} - 9\alpha^2.\frac{1}{5}\right] = \frac{279\alpha^2}{5}\pi$ κ.μ.

$\Rightarrow \dfrac{279\alpha^2}{5}\cancel{\pi} = \dfrac{2511}{5}\cancel{\pi} \Rightarrow \alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$ (α>0) $\Rightarrow$ y=9x^2

β) Ε=$\displaystyle\int_1^2 9x^2 dx = \left[9\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[3x^3\right]_1^2 = 3.8 - 3.1 = 21$ τ.μ.

10. $V = \alpha^3 \Rightarrow \dfrac{dV}{d\alpha} = 3\alpha^2 \Rightarrow \dfrac{dV}{dt}.\dfrac{dt}{d\alpha} = 3\alpha^2 \Rightarrow 6.\dfrac{dt}{d\alpha} = 3\alpha^2 \Rightarrow \dfrac{dt}{d\alpha} = \dfrac{\alpha^2}{2}$

$E = 6\alpha^2 \Rightarrow \dfrac{dE}{d\alpha} = 12\alpha \Rightarrow \dfrac{dE}{dt}\dfrac{dt}{d\alpha} = 12\alpha \Rightarrow \dfrac{dE}{dt}.\dfrac{\alpha^2}{2} = 12\alpha \Rightarrow \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{24}{\alpha}$

Αν α=3 cm $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{24}{3} = 8 \, cm^2/sec$

ΜΕΡΟΣ Β

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

α) Π.Ο. $x \in R - \{-1, 1\}$, Αν x=0 $\Rightarrow y = -1$ (0, -1), Δεν τέμνει τον άξονα των x

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$ $\Rightarrow$x=1 Κ.Α, ομοίως χ= -1

Κ.Α. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \Rightarrow y = 1$ Ο. Α.

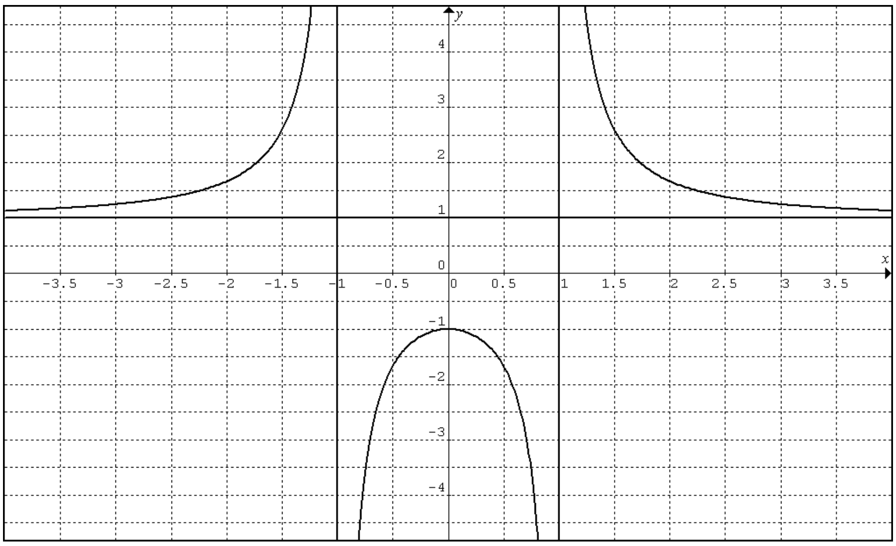
x	$-\infty$	-1		0		+1		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$	+	||	+	0	−	||	−	
y	↗	||	↗	-1	↘	||	↘	

Τ.Μ. Τοπικό Μέγιστο (0, -1)

β) $f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$

γ)



δ) Αν x=2 $\Rightarrow y=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=\frac{-4.2}{(2^2-1)^2}=\frac{-8}{9}$ $\Rightarrow$ εξ. Εφαπτομένης $y-\frac{5}{3}=-\frac{8}{9}(x-2)$

$\Rightarrow 8x+9y=31$

2. α) Α.Μ.= ημ8x+ημ6x=2ημ7x συνx=2συν(90^o-7x)συνx = Β.Μ

β) συν4x+συν2x=ημ8x+ημ6x $\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu\frac{4x+2x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{4x-2x}{2}=2\sigma\upsilon\nu x.\sigma\upsilon\nu(90\text{-}7x)$

$\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu 3x.\sigma\upsilon\nu x=2\sigma\upsilon\nu x.\sigma\upsilon\nu(90^o-7x)$ $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x[\sigma\upsilon\nu 3\chi-\sigma\upsilon\nu(90^o-7x)]=0$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=0$ $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu 90^o$ $\Rightarrow x=360^o k\pm 90^o$, $k\in Z$

ή $\sigma\upsilon\nu 3x=\sigma\upsilon\nu(90^o-7\chi)$ $\Rightarrow 3x=360^o k\pm(90^o-7x)$

$\Rightarrow 3x=360^o k+90^o-7x$ $\Rightarrow 10x=360^o k+90^o$ $\Rightarrow x=36^o k+9^o$, $k\in Z$

ή $3x=360^o k-90^o+7x \Rightarrow -4x=360^o k-90^o$ $\Rightarrow x=-90^o k+22{,}5^o$, $k\in Z$

Αν k=0 x= 90^o, x=9^o, x=$22{,}5^o$, Αν k=1 x=45^o, Αν k=2 x=81^o

3. $\int\frac{\eta\mu^3 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\upsilon\nu x=u$ $\Rightarrow$ $-\eta\mu x dx=du$

$$\Rightarrow \int\frac{\eta\mu^3 x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int\frac{\eta\mu^2 x.\eta\mu x}{2+\sigma\upsilon\nu x}dx=-\int\frac{(1-u^2)}{2+u}du$$

$$=\int\frac{u^2-1}{2+u}du=\int\left(u-2+\frac{3}{2+u}\right)du=\frac{u^2}{2}-2u+3\ln|2+u|+c$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{2}-2\sigma\upsilon\nu x+3\ln|2+\sigma\upsilon\nu x|+c$$

4. K_1: $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ και K_2: $x^2+y^2=9$

α) K_1: Λ(3, 4) , $R_1=\sqrt{9+16-21}=\sqrt{4}=2$ μ. K_2: Μ(0, 0) $R_2=3$ μ.

(ΛΜ)=$\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}=5 \Rightarrow R_1+R_2=(\Lambda M) \Rightarrow$ εφάπτονται εξωτερ.

β) $x_{\mu\varepsilon\sigma o\upsilon}=\frac{x_\Lambda+x_M}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}$, $y_{\mu\varepsilon\sigma o\upsilon}=\frac{y_\Lambda+y_M}{2}=\frac{4+0}{2}=2$

Κέντρο του K_3 $\left(\frac{3}{2},2\right)$ και R=$\frac{5}{2}$ μ. $\Rightarrow c=\frac{9}{4}+4-\frac{25}{4}=0$

Εξίσωση κύκλου K_3: $x^2+y^2-3x-4y=0$

γ) Αν $x=0 \Rightarrow y^2-4y=0 \Rightarrow y=0$ και $y=4 \Rightarrow$ χορδή = 4 μονάδες.

5. $x\ln x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2e^x$, $x\ln x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2e^x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x\ln x}=\dfrac{xe^x}{\ln x}$

$$I(x)=e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}=e^{\ln(\ln x)}=\ln x \Rightarrow \ln x\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\ln x}.\ln x=\frac{xe^x}{\cancel{\ln x}}\cancel{\ln x}$$

$$\Rightarrow \ln x.y=\int xe^x dx=\int x d(e^x)=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c \Rightarrow y=\frac{x.e^x-e^x+c}{\ln x}.$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.)

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Τ.Ε.Ι. Ιούνιος 2003

Χρόνος: 2 ώρες και 30 λεπτά

Από τις 16 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 10.

1. α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 5\alpha\,\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} = \sigma\upsilon\nu 4\alpha$

   β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3\chi\,\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu 5\chi\,\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi} = \sigma\upsilon\nu(2\chi - 72°)$

   που βρίσκονται στο διάστημα [0°, 180°].

2. α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega}{1+\sigma\upsilon\nu 2\omega} = \varepsilon\phi^2\omega$

   β) Αν 0°<ω<90° και η εφω είναι λύση της εξίσωσης χ^2-χ-6 = 0, να βρείτε την τιμή της παράστασης: Α = 10 ημ2ω -15συν2ω - 4 εφ2ω

3. α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \dfrac{1}{\eta\mu^2\theta} = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta\cdot\eta\mu^2\theta}$

   β) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \dfrac{1}{\eta\mu^2\theta} = 8$

4. α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΕΤΟΣ.

   β) Πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς έχουν τα σύμφωνα συνεχόμενα.

   γ) Να βρείτε πόσες λέξεις μπορούμε να σχηματίσουμε (όχι κατ' ανάγκη με νόημα) αν πάρουμε τρία από τα γράμματα της λέξης ΑΕΤΟΣ.

5. α) Χρησιμοποιώντας τα ψηφία 0, 2, 2, 3, 3, 3 να βρείτε πόσους εξαψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε.

   β) Δίνονται τα ψηφία 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Να βρείτε πόσους περιττούς τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία αυτά, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου. Πόσοι από αυτούς είναι μεγαλύτεροι του 5000;

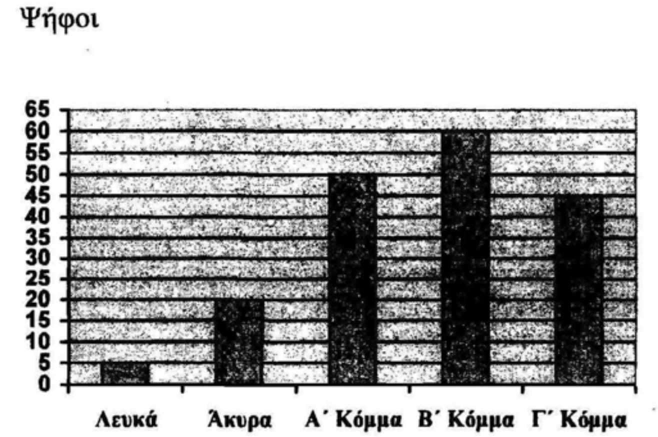
6. Σε μια πόλη κυκλοφορούν οι εφημερίδες Α και Β. Το 25% των κατοίκων της πόλης διαβάζει την εφημερίδα Α, το 85% δεν διαβάζει την εφημερίδα Β και το 2% διαβάζει και τις δύο εφημερίδες. Αν πάρουμε στην τύχη ένα κάτοικο Κ της πόλης να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

   Γ: ο κάτοικος Κ διαβάζει τουλάχιστον μια από τις δύο εφημερίδες.

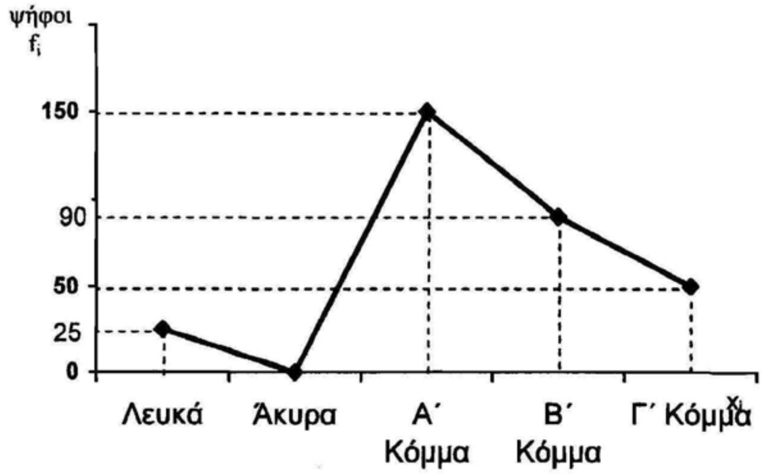
   Δ: ο κάτοικος Κ δεν διαβάζει καμιά από τις δύο εφημερίδες.

   Ε: ο κάτοικος Κ διαβάζει μόνο την εφημερίδα Α.

7. Σε κάποιες βουλευτικές εκλογές πήραν μέρος τα κόμματα Α, Β και Γ. Τα πιο κάτω διαγράμματα παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των εκλογών στα χωριά X_1 και X_2.



Χωριό X_1



Χωριό X_2

α) Να βρείτε:

i) Ποιο κόμμα πήρε τις περισσότερες ψήφους στο χωριό X_1 και πόσες ήταν αυτές

ii) Ποιο χωριό υπερείχε σε προσέλευση και κατά πόσους ψηφοφόρους.

iii) Το σύνολο των λευκών ψηφοδελτίων και στα δυο χωριά.

β) Να κάμετε κυκλικό διάγραμμα το οποίο να παρουσιάζει τα αποτελέσματα των εκλογών στο χωριό X_1 .

8. Σε μια αθλητική διοργάνωση οι μαθητές ενός σχολείου κλήθηκαν από τη Διεύθυνση να δηλώσουν, αν επιθυμούν, συμμετοχή σε πέντε το πολύ αγωνίσματα στίβου. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις δηλώσεις των μαθητών.

Αριθμός Αγωνισμάτων	Αριθμός Μαθητών
0	10
το πολύ 1	25
το πολύ 2	45
το πολύ 3	70
το πολύ 4	90
το πολύ 5	100

(α) Να βρείτε πόσοι μαθητές δήλωσαν συμμετοχή και στα πέντε αγωνίσματα.

(β) Να κάμετε τον πίνακα συχνοτήτων της κατανομής.

(γ) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο, την επικρατούσα τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής.

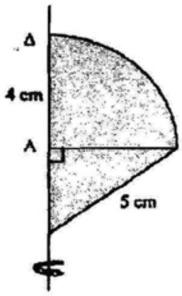
9. Οι ηλικίες 6 παιδιών είναι: α, β, 7, 5, 6, 12. Αν η μέση τιμή των ηλικιών είναι $\overline{x} = 6$ και η τυπική απόκλιση τους είναι $\sigma = \sqrt{\frac{29}{3}}$ να βρείτε τις τιμές των α και β.

10. Το ύψος κυλίνδρου είναι διπλάσιο της ακτίνας του. Αν το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας είναι ίσο με $100\,\pi\ m^2$ να βρείτε:

(α) την ακτίνα του κυλίνδρου (β) τον όγκο του κυλίνδρου

11. Κλειστό κυβικό δοχείο Α είναι γεμάτο με λάδι και ένα άλλο κλειστό δοχείο Β που είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 6 cm, 12 cm και 20 cm είναι άδειο. Τα εμβαδά των ολικών επιφανειών των δύο δοχείων είναι ίσα. Ανοίγουμε τα δοχεία και από το δοχείο Α αδειάζουμε λάδι στο δοχείο Β μέχρι αυτό να γεμίσει. Να βρείτε το ύψος της στάθμης του λαδιού που απέμεινε στο δοχείο Α.

12. Στο σχήμα είναι ΑΓ ⊥ ΒΔ. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΓ γράψαμε το τόξο ΓΔ. Το γραμμοσκιασμένο σχήμα κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από την ευθεία ΒΔ. Αν (ΒΓ)=5cm και (ΑΔ)=4cm να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



13. Το παράπλευρο ύψος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας σχηματίζει με τη βάση της γωνία 60° και η παράπλευρη ακμή της είναι ίση με $3\sqrt{5}$ cm. (α) Να δείξετε ότι η πλευρά της βάσης της πυραμίδας είναι ίση με 6 cm. (β) Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας. (γ) Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας.

14. Δίνεται η καμπύλη (κ) με εξίσωση $y = \chi^2 + \beta\chi + \gamma$. (α) Αν το σημείο $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, είναι ακρότατο της καμπύλης να δείξετε ότι β= -5 και γ= 4. (β) Αφού βρείτε και τα

σημεία τομής της καμπύλης με τους άξονες των συντεταγμένων, να κάμετε τη γραφική της παράσταση. (γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των χ.

15. (α) Να βρείτε το $\int\left(3+\frac{1}{\sqrt{\chi}}-\eta\mu^2\chi\right)dx$

(β) Δίνεται η καμπύλη (c) με εξίσωση: $y = \chi^3 - 3\chi + 2$. (i) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της (μέγιστα, ελάχιστα) (ii) Να βρείτε το σημείο Α στο οποίο η καμπύλη (c) τέμνει τον άξονα των y. (iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (c) στο σημείο Α.

16. (α) Να βρείτε το $\int \sigma\upsilon\nu^3 5x\, dx$.

(β) Αν $y = \chi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\chi$ να δείξετε ότι : $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y + 4\eta\mu 2\chi = 0$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α) $$\frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 5\alpha\,\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \cancel{\sigma\upsilon\nu 4\alpha} - \cancel{\sigma\upsilon\nu 4\alpha} + \sigma\upsilon\nu 6\alpha\right]}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 6\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\,\cancel{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\,\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\cancel{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}} = \sigma\upsilon\nu 4\alpha$$

β) συν4χ=συν(2χ-72°)

i) 4χ=360°κ+2χ-72° ⇒ 2χ=360°κ-72° ⇒ χ=180°κ-36°

κ=0 ⇒ <u>χ=144°</u>

ii) 4χ=360°κ-2χ+72° ⇒ 6χ=360°κ+72° ⇒ χ=60°κ + 12°

κ=0 ⇒ <u>χ=12°</u>, κ=1 ⇒ <u>χ=72°</u> ⇒ κ=2 ⇒ <u>χ=132°</u>

2. α) $$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega}{1+\sigma\upsilon\nu 2\omega} = \frac{1-1+2\eta\mu^2\omega}{1+2\sigma\upsilon\nu^2\omega-1} = \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \varepsilon\phi^2\omega \quad (1)$$

β) $\chi^2-\chi-6=0 \Rightarrow \chi=3,\ \chi=-2$. Επειδή $0° < \omega < 90^0 \Rightarrow$ εφω = 3 ⇒ εφ²ω = 9 $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega}{1+\sigma\upsilon\nu 2\omega} = 9 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2\omega = -\frac{4}{5}$.

$\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega = 1 \Rightarrow \eta\mu^2 2\omega = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \eta\mu 2\omega = \frac{3}{5}$.

$$\varepsilon\phi 2\omega = \varepsilon\phi 2\omega = \frac{\eta\mu 2\omega}{\sigma\upsilon\nu 2\omega} = -\frac{3}{4}.$$

$$A = 10\left(+\frac{3}{5}\right) - 15\left(-\frac{4}{5}\right) - 4\left(-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \mathbf{A = 21}$$

3. α) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{1}{\eta\mu^2\theta} = \frac{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta}$

β) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{1}{\eta\mu^2\theta} = 8 \Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta} = 8 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta = \frac{1}{8} \Rightarrow$

$4\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu 2\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\eta\mu 2\theta = \eta\mu 45° \Rightarrow 2\theta = 360°\kappa + 45°$ ή $2\theta = 360°\kappa + 135° \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\theta = 180°\kappa + 22{,}5°$ ή $\theta = 180° + 67{,}5° \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $\eta\mu 2\theta = \eta\mu(-45°) \Rightarrow 2\theta = 360°\kappa - 45°$ ή $2\theta = 360°\kappa + 225° \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\theta = 180°\kappa - 22{,}5°$ ή $\theta = 180° + 112{,}5° \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

4. (α) $5! = 120$. (β) $4!2! = 48$. (γ) $\Delta_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$

5. (α) $\frac{6!}{3!2!} - \frac{5!}{3!2!} = \frac{720-120}{12} = 50$.

(β) $\boxed{6 \mid 5 \mid 4 \mid 4} = 480 \qquad \boxed{3 \mid 5 \mid 4 \mid 3} = 180 \qquad \boxed{2 \mid 5 \mid 4 \mid 4} = 160$

Άρα 480 + 180 + 160 = 340 αριθμοί μεγαλύτεροι του 5000

6. $P((A) = \frac{25}{100}, \; P(B') = \frac{85}{100}, \; P(A \cap B) = \frac{2}{100}. \quad P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{85}{100} = \frac{15}{100}$

α) $P(\Gamma) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{25}{100} + \frac{15}{100} - \frac{2}{100} = \frac{19}{50}$

β) $P(\Delta) = P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{19}{50} = \frac{31}{50}$

γ) $P(E) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{25}{100} - \frac{2}{100} = \frac{23}{100}$

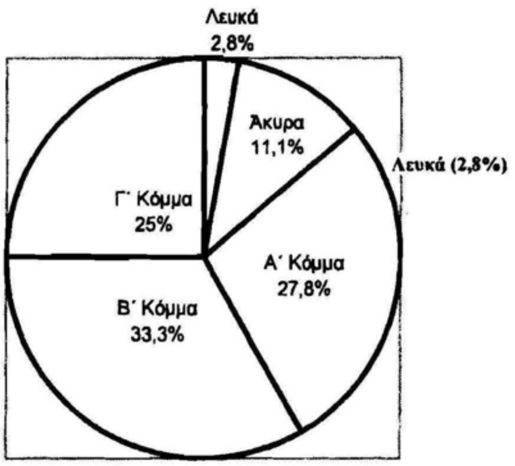
7. α) i) Το κόμμα Β (60 ψήφους)

ii) Στο X_1 ψήφισαν 180, στο X_2 ψήφισαν 315.

Υπερείχε το χωριό X_2 κατά 135 ψήφους

iii) 30 λευκά

β)



$\mu^o=2f_i$ Άρα $\mu_A=100^o$, $\mu_B=120^o$,$\mu_\Gamma=90^0$,$\mu_{\alpha\kappa}=40^0$ και $\mu_{\lambda\varepsilon\upsilon\kappa\acute{\alpha}}=10^o$

ποσοστά: $\chi=5\mu^o/18$. Άρα: $\chi_A=27{,}8\%$, $\chi_B=33{,}3\%$, $\chi_\Gamma=25\%$, $\chi_{\alpha\kappa.}=11{,}1\%$ και $\chi_{\lambda\varepsilon\upsilon\kappa\acute{\alpha}}=2{,}8\%$

8. α) 100-90=10 δήλωσαν συμμετοχή και στα πέντε αγωνίσματα.

Αριθμός αγωνισμάτων χ_i	Αριθμός f_i
0	10
1	15
2	20
3	25
4	20
5	10

β) Επικρατούσα τιμή $\chi_\varepsilon=3$

γ) $\bar{x}=\dfrac{10\cdot0+15\cdot1+20\cdot2+25\cdot3+20\cdot4+10\cdot5}{100}=\dfrac{15+40+75+80+50}{100}=\dfrac{260}{100}=2{,}6$

δ) $\sigma=\sqrt{\dfrac{10\cdot(0-2{,}6)^2+15\cdot(1-2{,}6)^2+20\cdot(2-2{,}6)^2+25\cdot(3-2{,}6)^2+20\cdot(4-2{,}6)^2+10\cdot(5-2{,}6)^2}{100}}=$

$\sigma=\sqrt{\dfrac{214}{100}}\Rightarrow\sigma=\sqrt{2{,}14}\Rightarrow\sigma=1{,}46$

9. $\alpha,\beta,7,5,6,12 \Rightarrow \bar{x} = 6 \Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta+7+5+6+12}{6} = 6 \Rightarrow \alpha + \beta + 30 = 36 \Rightarrow \alpha = 6 - \beta \ (1)$

$$\sigma = \sqrt{\frac{29}{3}} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{29}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{(\alpha-6)^2+(\beta-6)^2+(7-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(12-6)^2}{6} = \frac{29}{3}$$

$(1) \Rightarrow (6-\beta-6)^2 + \beta^2 - 12\beta + 36 + 1 + 1 + 0 + 36 = 58 \Rightarrow 2\beta^2 - 12\beta + 16 = 0 \Rightarrow$

$\beta^2 - 6\beta + 8 = 0 \Rightarrow (\beta-2)(\beta-4) = 0 \Rightarrow \beta_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 4, \ \ \beta_2 = 4, \alpha_2 = 2$

10. $\upsilon = 2R$

α) $E_\kappa=100\pi \Rightarrow 2\pi R\upsilon = 100\pi \Rightarrow 2R\cdot 2R=100 \Rightarrow R^2=25 \Rightarrow R=5m$ και $\upsilon=10m$

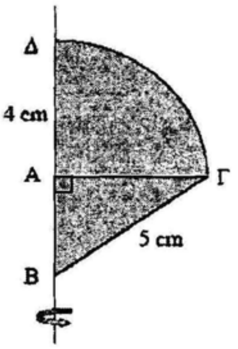
β) $V=\pi R^2\cdot\upsilon \Rightarrow V = \pi\cdot 5^2\cdot 10\ m^3 \Rightarrow V=250\pi\ \ m^3$

11. $E_A=E_B \Rightarrow 6\alpha^2 = 2(12\cdot 6+12\cdot 20+6\cdot 20) \Rightarrow \alpha^2 = 144 \Rightarrow \alpha = 12$ cm.

$V_B=12\cdot 20\cdot 6\ \ cm^3 \Rightarrow V_B=1440\ cm^3 \Rightarrow$ Άρα $V_A=12^3\ cm^3 = 1728\ cm^3$

$V_A-V_B=288\ cm^3 \Rightarrow \alpha^2\cdot\chi=288 \Rightarrow 144\chi=288 \Rightarrow \chi = 2$ cm

12. $A\Gamma=A\Delta=4$ cm $(AB)^2 = 25-16 = 9 \Rightarrow AB = 3$ cm



$E_{o\lambda} = E_{\eta\mu\iota\sigma\varphi.} + E_{\kappa.\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = (2\pi\cdot 4^2+\pi\cdot 4\cdot 5)\ cm^2 = (32\pi+20\pi)\ cm^2$
$=52\pi\ cm^2$

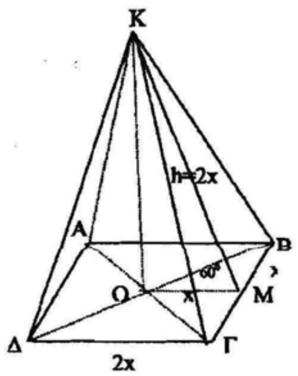
$V = V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} + V_{\eta\mu\iota\sigma\varphi.} \Rightarrow$

$$V = (\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 4^3\cdot 3)\,cm^3 = \left(\frac{128\pi}{3}+\frac{48\pi}{3}\right)cm^3 = \frac{176\pi}{3}cm^3$$

13. Γωνία OKM=30° $\Rightarrow KM = h = 2x$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο KMB $\Rightarrow$

$(2\chi)^2 + \chi^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow x=3cm\ \Gamma\Delta=2\chi= 6$ cm



$E_{o\lambda}=6^2 + \dfrac{24\cdot 6}{2} =108\ cm^2$

$OK = \upsilon = \sqrt{6^2-3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\ cm$

$V = \dfrac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\ \ cm^3$

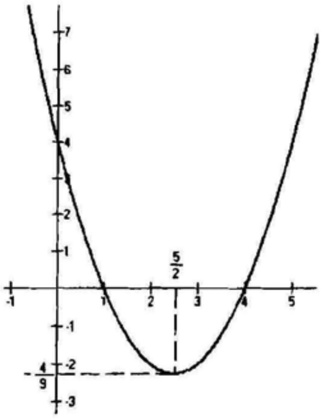
14. (α) $\psi = \chi^2 + \beta\chi + \gamma$ $A(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4})$ ακρότατο

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{5}{2}} = 0 \Rightarrow 2x + \beta\Big|_{x=\frac{5}{2}} \Rightarrow 2\cdot\frac{5}{2} + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -5, \quad -\frac{9}{4} = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + \gamma \Rightarrow \gamma = 4$$

(β) $y = x^2 - 5x + 4 = (x-1)(\chi - 4)$

Για $\chi = 0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (0,4)$.

Για $y = 0 \Rightarrow \chi = 1$ ή $\chi = 4 \Rightarrow (1,0), (4,0)$



$$E = -\int_1^4 \left(\chi^2 - 5\chi + 4\right) dx = -\left[\frac{\chi^3}{3} - \frac{5\chi^2}{2} + 4\chi\right]_1^4 =$$

$$-\left[\frac{64}{3} - \frac{80}{2} + 16 - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4\right)\right] = \frac{9}{2}\ \tau.\mu.$$

15. (α) $\int\left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \eta\mu^2 x\right)dx = 3x + 2\sqrt{x} - \int \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx =$

$$3x + 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\eta\mu 2x\right) + c = 3x + 2\sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c = \frac{5x}{2} + 2\sqrt{x} + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c$$

(β) $y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	max (-1,4)	↘	min (1,0)	↗	

ii) Για $\chi = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0,2)$

iii) $\lambda_{\varepsilon\varphi} = 3\cdot 0^2 - 3 = -3 \Rightarrow y - 2 = -3(x-0) \Rightarrow 3x + y - 2 = 0$

16. (α) $\int \sigma\upsilon\nu^3 5\chi dx = \frac{1}{5}\int \sigma\upsilon\nu^2 5\chi\, d(\eta\mu x) = \frac{1}{5}\int\left(1 - \eta\mu^2 5\chi\right)d(\eta\mu x) =$

$$\frac{1}{5}\int d(\eta\mu x) - \frac{1}{5}\int \eta\mu^2 5\chi\, d(\eta\mu x) = \frac{1}{5}\eta\mu 5x - \frac{\eta\mu^3 5x}{15} + c$$

(β) $y = x\,\sigma\upsilon\nu 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu 2x - 2x\,\eta\mu 2x,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2\eta\mu 2x - 2\eta\mu 2x - 4x\sigma\upsilon\nu 2x = -4\eta\mu 2x - 4x\sigma\upsilon\nu 2x$$

Άρα $\frac{d^2y}{dx^2}$+4y+4ημ2χ=$\frac{d^2y}{dx^2}$+4y+4ημ2χ= -4ημ2χ-4χσυν2χ+4χσυν2χ+4ημ2χ=0.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ

“ Ιάκωβος Πατάτσος” **Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

Δεκέμβριος 2002 Διάρκεια 3 ώρες

Επιμέλεια: Σάββας Αντωνίου – Νικόλας Γιασουμή

Να λυθούν τα πέντε προβλήματα:

Πρόβλημα 1. Στο επίπεδο θεωρούμε τα σημεία Α (κσυνφ, ληµφ), Β (κηµφ, -λσυνφ) και Γ (κ, λ), όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και 0 < φ < π. Για ποιες τιμές του φ τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά;

Πρόβλημα 2. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = x+2$.

(α)Να αποδείξετε ότι η f είναι ένα- προς- ένα (1-1).

(β)Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) = f(2x+3)$.

Πρόβλημα 3. Να λύσετε το σύστημα $\dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{3y-1}{2y-1} = \dfrac{4x+12y}{3} = \omega$, όπου $x, y, \omega \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4. Δίνεται ο κύκλος (Ο,R). Αν ΑΒ, ΓΔ είναι δύο κάθετες χορδές του που τέμνονται στο σημείο Ρ, να δείξετε ότι:

(α) $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{P\Gamma}^2 + \mathrm{P\Delta}^2 = 4R^2$

(β) $\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma B}^2 + \mathrm{B\Delta}^2 + \mathrm{\Delta A}^2 = 8R^2$.

Πρόβλημα 5. (α) Να δείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου Μ της βάσης ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, από τις ίσες πλευρές του, είναι σταθερό και ίσο με ένα από τα ίσα ύψη του.

(β) Να δείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου εσωτερικού σημείου Μ, ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, από τις πλευρές του, είναι σταθερό και ίσο με το ύψος του.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

Πρόβλημα 1. **<u>(Α΄ ΤΡΟΠΟΣ)</u>**

Για να είναι τα σημεία Α, Β, Γ συνευθειακά πρέπει: $\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma}$.

$$\lambda_{AB} = \frac{-\lambda\sigma\upsilon\nu\phi - \lambda\eta\mu\phi}{\kappa\eta\mu\phi - \kappa\sigma\upsilon\nu\phi} \Rightarrow \lambda_{AB} = \frac{-\lambda(\sigma\upsilon\nu\phi + \eta\mu\phi)}{\kappa(\eta\mu\phi - \sigma\upsilon\nu\phi)}$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{\lambda + \lambda\sigma\upsilon\nu\phi}{\kappa - \kappa\eta\mu\phi} \Rightarrow \lambda_{B\Gamma} = \frac{\lambda(1+\sigma\upsilon\nu\phi)}{\kappa(1-\eta\mu\phi)}, \quad \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Rightarrow \frac{-\lambda(\sigma\upsilon\nu\phi + \eta\mu\phi)}{\kappa(\eta\mu\phi - \sigma\upsilon\nu\phi)} = \frac{\lambda(1+\sigma\upsilon\nu\phi)}{\kappa(1-\eta\mu\phi)}$$

$$\Rightarrow -(\sigma\upsilon\nu\phi + \eta\mu\phi)(1-\eta\mu\phi) = (\eta\mu\phi - \sigma\upsilon\nu\phi)(1+\sigma\upsilon\nu\phi)$$

$$\Rightarrow -\sigma\upsilon\nu\phi+\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi-\eta\mu\phi+\eta\mu^2\phi=\eta\mu\phi+\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi-\sigma\upsilon\nu\phi-\sigma\upsilon\nu^2\phi$$

$$\Rightarrow \eta\mu^2\phi+\sigma\upsilon\nu^2\phi-2\eta\mu\phi=0\Rightarrow 1-2\eta\mu\phi=0\Rightarrow 2\eta\mu\phi=1\Rightarrow \eta\mu\phi=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} \phi=\dfrac{\pi}{6} \\ \phi=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ Για να είναι τα σημεία Α, Β, Γ συνευθειακά πρέπει:

$$\begin{vmatrix} \kappa\sigma\upsilon\nu\phi & \lambda\eta\mu\phi & 1 \\ \kappa\eta\mu\phi & -\lambda\sigma\upsilon\nu\phi & 1 \\ \kappa & \lambda & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \kappa\sigma\upsilon\nu\phi(-\lambda\sigma\upsilon\nu\phi-\lambda)-\lambda\eta\mu\phi(\kappa\eta\mu\phi-\kappa)+\kappa\lambda\eta\mu\phi+\kappa\lambda\sigma\upsilon\nu\phi=0$$

$$\Rightarrow -\kappa\lambda\sigma\upsilon\nu^2\phi-\kappa\lambda\sigma\upsilon\nu\phi-\kappa\lambda\eta\mu^2\phi+\kappa\lambda\eta\mu\phi+\kappa\lambda\eta\mu\phi+\kappa\lambda\sigma\upsilon\nu\phi=0$$

$$\Rightarrow -\sigma\upsilon\nu^2\phi-\eta\mu^2\phi+2\eta\mu\phi=0$$

$$\Rightarrow -1+2\eta\mu\phi=0\Rightarrow 2\eta\mu\phi=1\Rightarrow \eta\mu\phi=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases} \phi=\dfrac{\pi}{6} \\ \phi=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}\end{cases}$$

(α) Έστω $f(a)=f(\beta)$ τότε $f(f(\alpha))=f(f(\beta))\Rightarrow \alpha+2=\beta+2\Rightarrow \alpha=\beta\Rightarrow$ η συνάρτηση είναι 1-1.

(β) $f(x^2)=f(2x+3)\Rightarrow x^2=2x+3\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow (x-3)(x+1)=0\Rightarrow x=3, x=-1$

Πρόβλημα 2.

$$\frac{x+1}{2x+1}=\frac{3y-1}{2y-1}=\frac{4x+12y}{3}=\omega\Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{2x+1}=\omega\Rightarrow x+1=\omega(2x+1)\Rightarrow x+1=2\omega x+\omega\Rightarrow x-2\omega x=\omega-1\Rightarrow x=\frac{\omega-1}{1-2\omega}$$

$$\frac{3y-1}{2y-1}=\omega\Rightarrow 3y-1=\omega(2y-1)\Rightarrow 3y-1=2\omega y-\omega\Rightarrow 3y-2\omega y=1-\omega\Rightarrow y=\frac{1-\omega}{3-2\omega}$$

$$\frac{4x+12y}{3}=\omega\Rightarrow 4x+12y=3\omega\Rightarrow 4\frac{\omega-1}{1-2\omega}+12\frac{1-\omega}{3-2\omega}=3\omega$$

$$\Rightarrow (4\omega-4)(3-2\omega)+(12-12\omega)(1-2\omega)=3\omega(1-2\omega)(3-2\omega)$$

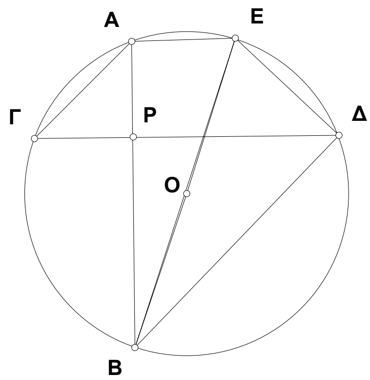
$$\Rightarrow 12\omega^3-40\omega^2+25\omega=0\Rightarrow \omega(12\omega^2-40\omega+25)=0$$

$$\Rightarrow \omega=0 \;\; ή \;\; 12\omega^2-40\omega+25=0\Rightarrow (6\omega-5)(2\omega-5)=0\Rightarrow \omega=\frac{5}{6}, \omega=\frac{5}{2}$$

Αν $\omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{0-1}{1-0} \Rightarrow x = -1 \\ y = \dfrac{1-0}{3-0} \Rightarrow y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, Αν $\omega = \dfrac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\frac{5}{6}-1}{1-2(\frac{5}{6})} \Rightarrow x = \dfrac{\frac{-1}{6}}{\frac{-4}{6}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{1-\frac{5}{6}}{3-2(\frac{5}{6})} \Rightarrow y = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{8}{6}} \Rightarrow y = \dfrac{1}{8} \end{cases}$

Αν $\omega = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\frac{5}{2}-1}{1-2(\frac{5}{2})} \Rightarrow x = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{-4}{1}} \Rightarrow x = -\dfrac{3}{8} \\ y = \dfrac{1-\frac{5}{2}}{3-2(\frac{5}{2})} \Rightarrow y = \dfrac{-\frac{3}{2}}{-\frac{4}{2}} \Rightarrow y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$, $(x, y, \omega) = (-1, \frac{1}{3}, 0), (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{6}), (-\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2})$

Πρόβλημα 3.



(α) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΡΓ και ΒΡΔ έχουμε:

$ΡΑ^2+ΡΓ^2=ΑΓ^2$ (1) και $ΡΒ^2+ΡΔ^2=ΔΒ^2$ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$ΡΑ^2+ΡΓ^2+ ΡΒ^2+ΡΔ^2= ΑΓ^2+ ΔΒ^2$ (3)

Φέρουμε τη διάμετρο ΒΕ, οπότε ΑΕ//ΓΔ, διότι ΑΕ⊥ΒΑ και ΓΔ⊥ΒΑ, άρα τα τόξα ΑΓ και ΔΕ είναι ίσα αφού περιέχονται ανάμεσα σε παράλληλες χορδές. Επομένως και οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες ΑΓ=ΔΕ. Αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$ΡΑ^2+ΡΓ^2+ ΡΒ^2+ΡΔ^2= ΔΕ^2+ ΔΒ^2 \Rightarrow$

$ΡΑ^2+ΡΓ^2+ ΡΒ^2+ΡΔ^2= ΒΕ^2 \Rightarrow$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΕ προκύπτει: $ΡΑ^2+ΡΓ^2+ ΡΒ^2+ΡΔ^2= (2R)^2 =4R^2$

(β) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΡΓ, ΓΡΒ, ΒΡΔ και ΔΡΑ έχουμε:

$ΑΓ^2=ΡΑ^2+ΡΓ^2$, $ΓΒ^2=ΡΒ^2+ΡΔ^2$, $ΒΔ^2=ΡΒ^2+ΡΔ^2$, $ΔΑ^2=ΡΔ^2+ΡΑ^2$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες έχουμε:

$ΑΓ^2+ ΓΒ^2+ ΒΔ^2+ ΔΑ^2= 2(ΡΑ^2+ΡΓ^2+ ΡΒ^2+ΡΔ^2) \Rightarrow$

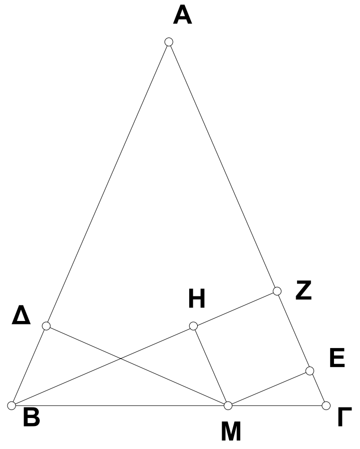
$ΑΓ^2+ ΓΒ^2+ ΒΔ^2+ ΔΑ^2= 2(4R^2)= 8R^2$

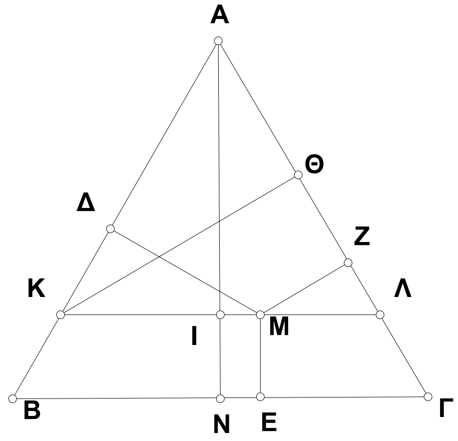
Πρόβλημα 4.

(α) Φέρουμε την ΜΗ//ΑΓ. Το τετράπλευρο ΜΕΖΗ είναι ορθογώνιο, άρα ΜΕ=ΗΖ (1).

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΜΗ και ΒΜΔ: ΒΜ κοινή πλευρά, οι γωνίες ΔΒΜ=ΒΜΗ (=ΜΓΕ), άρα ΜΔ=ΒΗ (2).

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε: ΜΔ+ΜΕ=ΒΗ+ΗΖ=ΒΖ





(β) Φέρουμε από το Μ την ΚΛ//ΒΓ, έτσι το ΑΚΛ είναι ισόπλευρο.

Με βάση το ερώτημα (α) ΜΔ+ΜΕ=ΚΘ=ΑΙ (1)

Επίσης ΜΕ=ΙΝ (2) (αποστάσεις μεταξύ παραλλήλων ευθυγράμμων τμημάτων)

Από τις (1) και (2) συνεπάγεται ότι ΜΔ+ΜΕ+ΜΖ=ΑΙ+ΙΝ=ΑΝ

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΜΕΣΟΥ

“ ΑΝΔΡΕΑΣ ΒΛΑΜΗΣ ” Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Δεκέμβριος 2002 Διάρκεια 3 ώρες

Επιμέλεια: Μάριος Ευσταθίου – Θεόκλητος Παραγυιού

Να λυθούν τα πέντε προβλήματα:

Πρόβλημα 1. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων δίνεται η ευθεία (ε) $2x+y-4=0$ και τα σημεία Α, Β της τομής της με τους άξονες Οx και Οy αντίστοιχα . Έστω $Ο\Gamma\perp(\varepsilon)$. Από το σημείο Γ φέρουμε τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) παράλληλες προς τους άξονες που τέμνουν τις Οx και Οy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Αν $AZ\perp(\varepsilon_1)$ και $BH\perp(\varepsilon_2)$ να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΗΖ ,ΒΓ και ΕΔ περνούν από το ίδιο σημείο.

Πρόβλημα 2. Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ.Φέρουμε την εφαπτόμενη (ε) του κύκλου στο σημείο Α. Έστω Γ σημείο της (ε) και ΓΔ το εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο (Δ σημείο επαφής).Φέρουμε $\Delta E\perp AB$,και Ν το σημείο τομής της ΔΕ με την ΒΓ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΔΝΓ.

Πρόβλημα 3. Να δείξετε ότι: (α) Για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει: $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$

(β)Να αποδείξετε ότι: $\left(\eta\mu^2x+\sigma\tau\varepsilon\mu^2x\right)^2+\left(\sigma\upsilon\nu^2x+\tau\varepsilon\mu^2x\right)^2\geq\dfrac{25}{2}$

Πρόβλημα 4. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 12λ+5, $\lambda\in\mathbb{N}_0$ δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή $12\lambda+5=\kappa^2$, $\kappa\in Z$.

Πρόβλημα 5. (α) Να λύσετε το παρακάτω σύστημα $\begin{cases}\dfrac{1}{2x+y}+y=\alpha\\ \dfrac{y}{2x+y}=\alpha-1\end{cases}$ εκφράζοντας το ζεύγος των λύσεων (x,y) συναρτήσει του $\alpha\in\mathbb{R}$. (β) Αν $\alpha\in(1,2)$ να βρεθεί η τιμή του α ώστε η παράσταση $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ να γίνεται ελάχιστη.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Η ευθεία ΑΒ: $2x+y-4=0$ έχει κλίση $\lambda_{AB}=-2$.

Επειδή $Ο\Gamma\perp AB\Rightarrow\lambda_{Ο\Gamma}=\dfrac{1}{2}$. <u>Εξίσωση ΟΓ</u>: $y=\dfrac{1}{2}x\Rightarrow x-2y=0$.

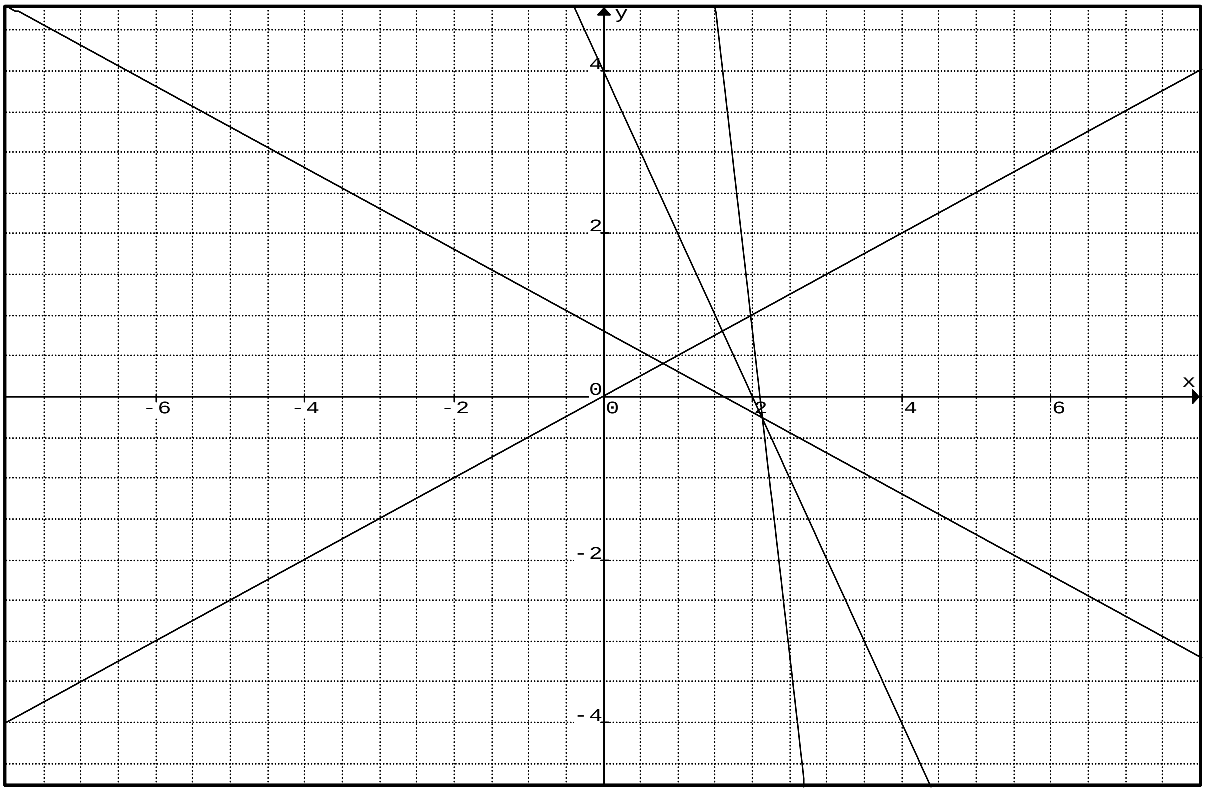
Σημείο Γ: $\left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \end{array} \Rightarrow \Gamma\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

Αφού $E\left(0,\dfrac{4}{5}\right)$, $\Delta\left(\dfrac{8}{5},0\right) \Rightarrow \lambda_{E\Delta}=-\dfrac{1}{2}$. Εξίσωση ΕΔ: $y-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{1}{2}x \Rightarrow 5x+10y=8$

Αφού $H\left(\dfrac{8}{5},4\right)$, $Z\left(2,\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow \lambda_{HZ}=-8$. Εξίσωση ΗΖ: $40x+5y=84$

Σημείο τομής ΑΒ ,ΕΔ $\begin{array}{c} 2x+y=4 \\ 5x+10y=8 \end{array} \Rightarrow y=-\dfrac{4}{15}$ και $x=\dfrac{32}{15}$

Άρα το κοινό σημείο των ΑΒ ,ΕΔ $\left(\dfrac{32}{15},-\dfrac{4}{15}\right)$ που επαληθεύει την ευθεία ΗΖ είναι το κοινό σημείο των ευθειών ΗΖ,ΒΓ και ΕΔ.



Πρόβλημα 2. Προεκτείνω την ΒΔ που συναντά την ΑΓ στο Ζ.

ΑΒ διάμετρος $\Rightarrow A\widehat{\Delta}B=90^\circ \Rightarrow$ τρίγωνο ΑΔΓ ορθογώνιο. Αφού ΓΔ, ΓΑ εφαπτόμενα τμήματα από το Γ $\Rightarrow$ ΓΔ=ΓΑ.

Ο κύκλος με διάμετρο το ΑΖ έχει κέντρο το Γ και περνά απο το Δ (αφού ΑΓ=ΓΔ).

Έτσι ΖΓ=ΑΓ.(1) Αφού ΔΕ//ΑΖ (κάθετες στη ίδια ευθεία) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\text{τριγ.}B\Delta N \approx \text{τριγ.}BZ\Gamma\\ \text{τριγ.}BNE \approx \text{τριγ.}B\Gamma A\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta N}{Z\Gamma}=\frac{NE}{\Gamma A}=\frac{BN}{B\Gamma} \Rightarrow \Delta N = NE$$

Άρα το τρίγωνο ΔΕΑ έχει εμβαδόν διπλάσιο του τριγ. ΔΝΓ αφού έχουν ίσα ύψη και η βάση του τριγ. ΔΕΑ είναι διπλάσια της βάσης του ΓΔΝ.

Πρόβλημα 3. (α) $2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2$, $(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$.Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$2(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2 \Rightarrow 2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$ (1).

(β) Χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε:

$$(\eta\mu^2 x+\sigma\tau\epsilon\mu^2 x)^2+(\sigma\upsilon\nu^2 x+\tau\epsilon\mu^2 x)^2 \geq \frac{(\eta\mu^2 x+\sigma\tau\epsilon\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x+\tau\epsilon\mu^2 x)^2}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta\mu^2 x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{4\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{\eta\mu^2 2x}\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{1}\right)^2=\frac{25}{2}$$

αφού $\dfrac{1}{\eta\mu^2 2x}\geq 1$.

Πρόβλημα 4. Έστω ότι ο $12\lambda+5$, $\lambda\in\mathbb{N}_0$ γράφεται σαν τετράγωνο ακεραίου.

$12\lambda+5=\kappa^2$ (1), $\kappa\in\mathbb{Z}$ τότε αφού $12\lambda+5$ περιττός $\Rightarrow$ κ περιττός $\Rightarrow \kappa=2\mu+1$, $\mu\in\mathbb{Z}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε: $\Rightarrow 12\lambda+5=(2\mu+1)^2 \Rightarrow 12\lambda+5=4\mu^2+4\mu+1\Rightarrow$
$12\lambda=4\mu^2+4\mu-4\Rightarrow 3\lambda=\mu^2+\mu-1\Rightarrow 3\lambda=(\mu-1)(\mu+1)+\mu$ (3)

Όμως οι αριθμοί $\mu-1$, μ, $\mu+1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι άρα ένας απο αυτούς διαιρείται με 3.

Αν 3/μ τότε ο 3 δεν διαιρεί τον $(\mu-1)(\mu+1)$ άρα δεν ισχύει η (3).

Αν ο 3/το μ-1 ή μ+1 τότε ο 3 δεν διαιρεί τον μ και άρα δεν ισχύει η (3).

Καταλήξαμε σε άτοπο άρα $12\lambda+5\neq\kappa^2$.

Πρόβλημα 5. (α) Οι y, $\dfrac{1}{2x+y}$ έχουν άθροισμα α και γινόμενο $\alpha-1$ άρα είναι ρίζες της

εξίσωσης : $\omega^2-\alpha\omega+\alpha-1=0\Rightarrow\omega_{1,2}=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4(\alpha-1)}}{2}=\dfrac{\alpha\pm|\alpha-2|}{2}=$

$$=\frac{\alpha\pm(\alpha-2)}{2}\Rightarrow \omega_1=1 \text{ και } \omega_2=\alpha-1.$$

Άρα έχουμε: Αν $y=1$ τότε $x=\dfrac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}$, Αν $y=\alpha-1$ τότε $x=\dfrac{2-\alpha}{2}$.

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι: $\left(\dfrac{2-\alpha}{2(\alpha-1)},1\right)$ (1) και $\left(\dfrac{2-\alpha}{2},\alpha-1\right)$ (2)

(β) Από (1) και (2) $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}$ και $\dfrac{y}{x}=\dfrac{2(\alpha-1)}{2-\alpha}$.

Τα $\dfrac{x}{y}$ και $\dfrac{y}{x}$ θετικά αφού $\alpha\in(1,2)\Rightarrow xy>0$ (3) .

Άρα έχουμε: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}\geq\dfrac{2xy}{xy}=2\Rightarrow\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$ (4)

Από την σχέση (4) η ελάχιστη τιμή της $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\Rightarrow x^2+y^2-2xy=0$

Άρα $(x-y)^2=0\Rightarrow x=y\Rightarrow\dfrac{2-\alpha}{2(\alpha-1)}=1\Rightarrow 2-\alpha=2\alpha-2\Rightarrow 3\alpha=4\Rightarrow\alpha=\dfrac{4}{3}$.

<u>ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ</u>

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΑΡΝΑΚΑΣ – ΑΜΜΟΧΩΣΤΟΥ

“ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΚΥΠΡΙΑΝΟΥ ” Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Δεκέμβριος 2002 Διάρκεια 3 ώρες

Επιμέλεια: Ανδρέας Σαββίδης – Ανδρέας Φιλίππου

Να λυθούν τα πέντε προβλήματα:

Πρόβλημα 1. Να δείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{32\pi}{65}=\frac{1}{64}$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^{\circ}$) με κάθετες πλευρές 2α. Ο κύκλος $\left(B,B\Gamma\right)$ τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Δ. Η εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο Δ τέμνει τη προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να φέρετε ευθεία από το Β, που να σχηματίζει γωνία 30° με την ΒΔ, μέσα στο τρίγωνο ΑΒΓ και που τέμνει τον κύκλο $\left(B,B\Gamma\right)$ στο Η και την ΔΕ στο Ζ. Να υπολογίσετε: α) το μήκος ΗΖ και β) το εμβαδόν του μικτογράμμου χωρίου ΓΕΖΗ.

Πρόβλημα 3. α) Να αποδειχθεί ότι: $4x^4+1=\left[\left(x-1\right)^2+x^2\right]\cdot\left[\left(x+1\right)^2+x^2\right]$

β) Να αποδειχθεί ότι: $$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(19^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(20^4+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{841}$$

Πρόβλημα 4. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=\dfrac{2a^{x+1}-\beta^{x+2}-1}{a^x+\beta^x}$ όπου a,β θετικοί με $a\beta+1<a+\beta$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)$.

Πρόβλημα 5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο με ΑΒ=ΑΓ=5 και ΒΓ=6. Σημείο Δ βρίσκεται στην πλευρά ΑΓ και Ρ σημείο του ΒΔ έτσι ώστε $\widehat{A\mathrm{P}\Gamma}=90^{\circ}$. Αν $\widehat{AB\mathrm{P}}=\widehat{B\Gamma\mathrm{P}}$, να υπολογίσετε τον λόγο $A\Delta:\Delta\Gamma$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

Πρόβλημα 1.

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{32\pi}{65}=$$

$$\frac{\eta\mu\frac{\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{32\pi}{65}}{\eta\mu\frac{\pi}{65}}=$$

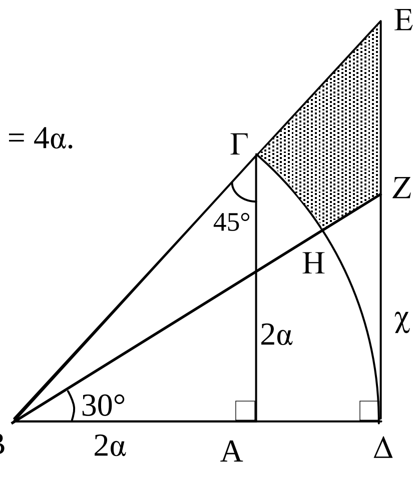
$$\frac{\frac{1}{2}\eta\mu\frac{2\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{32\pi}{65}}{\eta\mu\frac{\pi}{65}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\eta\mu\frac{4\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{32\pi}{65}}{2\eta\mu\frac{\pi}{65}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}\eta\mu\frac{8\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{32\pi}{65}}{4\eta\mu\frac{\pi}{65}}=\frac{\frac{1}{2}\eta\mu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{16\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{32\pi}{65}}{8\eta\mu\frac{\pi}{65}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\eta\mu\frac{32\pi}{65}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{32\pi}{65}}{16\eta\mu\frac{\pi}{65}}=\frac{\frac{1}{2}\eta\mu\frac{64\pi}{65}}{32\eta\mu\frac{\pi}{65}}=\frac{\eta\mu\frac{64\pi}{65}}{64\eta\mu\frac{\pi}{65}}=\frac{\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{65}\right)}{64\eta\mu\frac{\pi}{65}}=\frac{\cancel{\eta\mu\frac{\pi}{65}}}{64\ \cancel{\eta\mu\frac{\pi}{65}}}=\frac{1}{64}$$

Πρόβλημα 2.



ΑΒ = ΑΓ = 2α $\Rightarrow$ 2·4α² = ΒΓ² $\Rightarrow$ ΒΓ = 2α$\sqrt{2}$

ΒΔ = ΒΓ = ΔΕ. $BE^2=2\Delta E^2=2\cdot 4a^2\cdot 2\ \Rightarrow$ ΒΕ = 4α.

άρα ΓΕ = ΒΕ – ΒΓ = 4α -2α$\sqrt{2}$ = 2α(2-$\sqrt{2}$)

$$E_{\mu\iota\kappa\tau o\gamma\rho}=E_{\tau\rho\iota\gamma B\Delta E}-E_{\tau o\mu}=\left(\frac{2a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{\pi\left(2a\sqrt{2}\right)^2}{8}$$

$$=\frac{8a^2}{2}-\frac{\pi\cancel{8}a^2}{\cancel{8}}=a^2\left(4-\pi\right)$$

ΒΔ = 2α$\sqrt{2}$, ΖΔ = χ, $\widehat{Z B\Delta}=30°\Rightarrow$ ΒΖ=2χ,

$$\left(\overset{\Delta}{BZ\Delta}\right):\quad 4\chi^2-\chi^2=8\alpha^2\Rightarrow\ x^2=\frac{8a^2}{3}\Rightarrow x=\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$$

(ZH) = (BZ) – (BH) $\Rightarrow$ (ZH)= $\frac{4\alpha\sqrt{6}}{3} - 2\alpha\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ (ZH)= $\frac{4\alpha\sqrt{6} - 6\alpha\sqrt{2}}{3}$ $\Rightarrow$ (ZH) = $\frac{2a\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-3\right)}{3}$

$E_{\mu\iota\kappa\tau HZ\Delta} = E_{\overset{D}{BZ\Delta}} - E_{\tau o\mu} \Rightarrow E_{\mu\iota\kappa\tau HZ\Delta} = \frac{2a\sqrt{2}\cdot 2a\sqrt{6}}{2\cdot 3} - \frac{30^0}{360^0}\cdot\left(2a\sqrt{2}\right)^2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{\mu\iota\kappa\tau HZ\Delta} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{12}\pi 8a^2 \Rightarrow E_{\mu\iota\kappa\tau HZ\Delta} = \frac{a^2}{3}\left(4\sqrt{3}-2\pi\right) \Rightarrow E_{\mu\iota\kappa\tau HZ\Delta} = \frac{2a^2}{3}\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$

$$E_{\mu\,\tau\epsilon\tau\rho\alpha\pi\lambda} = 4\alpha^2 - \alpha^2\pi - \frac{4\alpha^2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\alpha^2\pi}{3} \Rightarrow E_{\mu\,\tau\epsilon\tau\rho\alpha\pi\lambda} = 4\alpha^2 - \frac{4\alpha^2\sqrt{3}}{3} - \frac{\alpha^2\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{\mu\,\tau\epsilon\tau\rho\alpha\pi\lambda} = \frac{a^2}{3}\left(12-4\sqrt{3}-\pi\right)}$$

Πρόβλημα 3.

α) $\left[\left(x-1\right)^2+x^2\right]\cdot\left[\left(x+1\right)^2+x^2\right] = \left[x^2-2x+1+x^2\right]\cdot\left[x^2+2x+1+x^2\right]$

$= \left[2x^2-2x+1\right]\cdot\left[2x^2+2x+1\right] = \left[\left(2x^2+1\right)-2x\right]\cdot\left[\left(2x^2+1\right)+2x\right]$

$= \left(2x^2+1\right)^2-\left(2x\right)^2 = 4x^4+\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2} = 4x^4+1$

β) $4x^4+1 = \left[\left(x-1\right)^2+x^2\right]\cdot\left[\left(x+1\right)^2+x^2\right]$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(12^4+\frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\left[\left(0^2+1^2\right)\cancel{\left(2^2+1^2\right)}\right]\left[\cancel{\left(2^2+3^2\right)}\cancel{\left(4^2+3^2\right)}\right]\left[\cancel{\left(4^2+5^2\right)}\cancel{\left(6^2+5^2\right)}\right]\ldots\left[\cancel{\left(18^2+19^2\right)}\cancel{\left(20^2+19^2\right)}\right]}{\left[\cancel{\left(1^2+2^2\right)}\cancel{\left(3^2+3^2\right)}\right]\left[\cancel{\left(3^2+4^2\right)}\cancel{\left(5^2+4^2\right)}\right]\left[\cancel{\left(5^2+6^2\right)}\cancel{\left(7^2+6^2\right)}\right]\ldots\left[\cancel{\left(19^2+20^2\right)}\left(21^2+20^2\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{21^2+20^2} = \frac{1}{441+400} = \frac{1}{841}$$

Πρόβλημα 4.

$a\beta+1 < a+\beta \Rightarrow a\beta+1-a-\beta < 0 \Rightarrow a\left(\beta-1\right)-\left(\beta-1\right) = 0 \Rightarrow \left(a-1\right)\left(\beta-1\right) < 0$

$\Rightarrow a<1 \ \ \kappa\alpha\iota\ \beta>1$ ή $a>1\ \ \kappa\alpha\iota\ \beta<1$

1η περίπτωση $\boxed{a<1<\beta}$

$$f(x)=\frac{2a^x\cdot a-\beta^x\cdot\beta^2-1}{a^x+\beta^x}=\frac{\beta^x\left[2a\left(\frac{a}{\beta}\right)^x-\beta^2-\left(\frac{1}{\beta}\right)^x\right]}{\beta^x\left[\left(\frac{a}{\beta}\right)^x+1\right]},\qquad 0<\frac{a}{\beta}<1$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a}{\beta}\right)^x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^x=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{-\beta^2}{1}=-\beta^2$

1η περίπτωση $\boxed{\beta<1<a}$

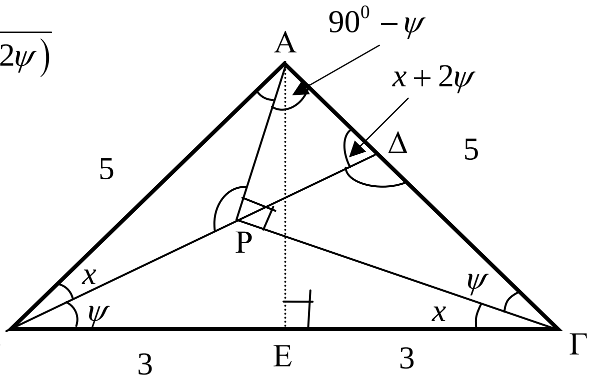
$$f(x)=\frac{2a^x\cdot a-\beta^x\cdot\beta^2-1}{a^x+\beta^x}=\frac{a^x\left[2a-\left(\frac{\beta}{a}\right)^x\beta^2-\left(\frac{1}{a}\right)^x\right]}{a^x\left[1+\left(\frac{\beta}{a}\right)^x\right]},\qquad 0<\frac{\beta}{a}<1$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\beta}{a}\right)^x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^x=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{2a}{1+0}=2a$

Άρα $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}-\beta^2 & \alpha\nu\quad a<1<\beta\\ 2a & \alpha\nu\quad \beta<1<\alpha\end{cases}$

Πρόβλημα 5.

Νόμος Ημιτόνων: $\left(\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Delta}}\right)$ $\frac{\mathrm{A\Delta}}{\eta\mu\chi}=\frac{5}{\eta\mu(\chi+2\psi)}$



$\left(\overset{\Delta}{\mathrm{\Gamma B\Delta}}\right)$: $\frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\psi}=\frac{6}{\eta\mu\left(180^0-(\chi+2\psi)\right)}$

$$\Rightarrow\quad\frac{\frac{\mathrm{A\Delta}}{\eta\mu\chi}}{\frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\psi}}=\frac{\frac{5}{\cancel{\eta\mu(\chi+2\psi)}}}{\frac{6}{\cancel{\eta\mu(\chi+2\psi)}}}\quad\Rightarrow$$

$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\Gamma}=\frac{5\eta\mu\chi}{6\eta\mu\psi}$ (1), Ορθογώνιο τρίγωνο $\left(\overset{\Delta}{\mathrm{AP\Gamma}}\right)$: $\eta\mu\psi=\frac{\mathrm{AP}}{5}\Rightarrow\mathrm{AP}=5\eta\mu\psi$ (2)

$\left(\overset{\Delta}{\mathrm{ABP}}\right)$: $\frac{\mathrm{AP}}{\eta\mu\chi}=\frac{5}{\eta\mu\hat{\mathrm{P}}}\Rightarrow\frac{\mathrm{AP}}{\eta\mu\chi}=\frac{5}{\eta\mu\left(90^0+\chi+\psi\right)}\Rightarrow\frac{\mathrm{AP}}{\eta\mu\chi}=\frac{5}{\sigma\upsilon\nu(\chi+\psi)}$

$\left(\overset{\Delta}{\mathrm{ABE}}\right)$: $\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{B}}=\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{AP}}{\eta\mu\chi}=\frac{5}{\frac{3}{5}}\Rightarrow A\mathrm{P}=\frac{25}{3}\eta\mu\chi$ (3)

(2) $\wedge$ (3) $\Rightarrow 5\eta\mu\psi=\frac{25}{3}\eta\mu\chi\Rightarrow\frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\psi}=\frac{3}{5}$ (4), (1) $\wedge$ (4) $\Rightarrow\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\Gamma}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}\Rightarrow\boxed{\frac{\mathrm{A\Delta}}{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}}$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΦΟΥ

"ΑΝΔΡΕΑΣ ΧΑΤΖΗΘΕΟΡΗΣ" Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Δεκέμβριος 2002 Διάρκεια 3 ώρες

Επιμέλεια: Ευθύβουλος Λιασίδης – Χριστόδωρος Παπασάββας

Να λυθούν τα πέντε προβλήματα:

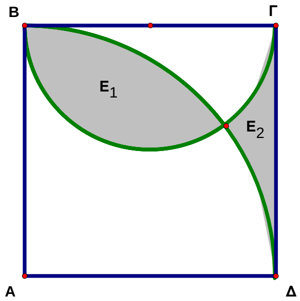
Πρόβλημα 1. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Φέρουμε τρεις παράλληλες ευθείες που περνούν από τις κορυφές Β, Γ και Δ έτσι που η μεσαία παράλληλη να απέχει από τις άλλες δύο 5 cm και 7 cm. Να βρεθεί το εμβαδό του τετραγώνου.

Πρόβλημα 2. α) Αν Α + Β + Γ = 90°. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}+\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

β) Να λυθεί η εξίσωση $x^2+x\sqrt{x+3}=6(x+3)$

Πρόβλημα 3. (α) Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $2\sqrt{2}cm$ με κέντρο Α και ακτίνα ίση με $2\sqrt{2}cm$ εγγράφουμε τεταρτοκύκλιο. Με διάμετρο τη ΒΓ εγγράφουμε ημικύκλιο μέσα στο τετράγωνο. Να υπολογιστεί η διαφορά $\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2$.



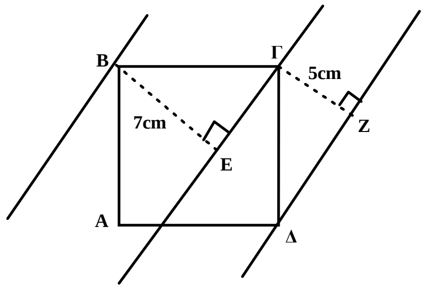
β) Σε τρίγωνο ΑΒΓ Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Ο είναι ένα σημείο εντός του τριγώνου ΑΒΓ μεταξύ της ΜΝ και ΒΓ, έτσι ώστε το εμβαδόν του $\overset{\triangle}{\mathrm{OMN}}$ να είναι 8 cm² και το εμβαδό του $\overset{\triangle}{\mathrm{OB\Gamma}}$ 18 cm² να υπολογιστεί το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 4. α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=2^{62}+1$ διαιρείται ακριβώς με τον αριθμό $\beta=2^{31}+2^{16}+1$ β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{2n}+24n-10$ διαιρείται ακριβώς με το 18 για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Πρόβλημα 5. Ένας κύκλος έχει διάμετρο ΑΒ. Το Χ είναι σταθερό σημείο πάνω στην ΑΒ μεταξύ των Α και Β. Ένα σημείο Γ διαφορετικό από τα Α και Β βρίσκεται πάνω στον πιο πάνω κύκλο. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα από τη θέση του Γ ο λόγος $\dfrac{\varepsilon\phi(\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{X})}{\varepsilon\phi(\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{X})}$ παραμένει σταθερός.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. $\overset{\triangle}{\mathrm{B\Gamma E}}$ *και* $\overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma\Delta Z}}$ *ορθογώνια*



(1) ΒΓ = ΓΔ (πλευρές τετραγώνου)

(2) $\widehat{\mathrm{B\Gamma E}} = \widehat{\mathrm{\Delta\Gamma Z}}$ (*πλευρές κάθετες*)

$\Rightarrow$ $\overset{\triangle}{\mathrm{B\Gamma E}} = \overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma\Delta Z}} \Rightarrow \mathrm{\Gamma E} = 5.$

Άρα Ε=ΒΓ² = ΒΕ² + ΕΓ² $\Rightarrow$ Ε = 49 + 25 = 74 cm².

Πρόβλημα 2.

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}+\eta\mu\mathrm{A}\,\eta\mu\mathrm{B}}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}} = 1+\varepsilon\phi\mathrm{A}\cdot\varepsilon\phi\mathrm{B}$. Άρα έστω

$$\mathrm{K} \equiv \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}+\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\mathrm{B}-\Gamma\right)}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\Gamma-\mathrm{A}\right)}{\sigma\upsilon\nu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}} = 1+\varepsilon\phi\mathrm{A}\,\varepsilon\phi\mathrm{B}+1+\varepsilon\phi\mathrm{B}\,\varepsilon\phi\Gamma+1+\varepsilon\phi\Gamma\,\varepsilon\phi\mathrm{A}$$

$= 3+\varepsilon\phi\mathrm{A}\,\varepsilon\phi\mathrm{B}+\varepsilon\phi\mathrm{B}\,\varepsilon\phi\Gamma+\varepsilon\phi\Gamma\,\varepsilon\phi\mathrm{A}$. Αλλά $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=90° \Rightarrow \hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}=90°-\hat{\Gamma} \Rightarrow$

$\varepsilon\phi\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)=\varepsilon\phi\left(90°-\Gamma\right) \Rightarrow \dfrac{\varepsilon\phi\mathrm{A}+\varepsilon\phi\mathrm{B}}{1-\varepsilon\phi\mathrm{A}\,\varepsilon\phi\mathrm{B}} = \dfrac{1}{\varepsilon\phi\Gamma} \Rightarrow \varepsilon\phi\mathrm{A}\,\varepsilon\phi\Gamma+\varepsilon\phi\mathrm{B}\,\varepsilon\phi\Gamma = 1-\varepsilon\phi\mathrm{A}\,\varepsilon\phi\mathrm{B} \Rightarrow$

$\varepsilon\phi\mathrm{A}\,\varepsilon\phi\Gamma+\varepsilon\phi\mathrm{B}\,\varepsilon\phi\Gamma+\varepsilon\phi\mathrm{A}\,\varepsilon\phi\mathrm{B}=1 \Rightarrow$ K=3+1=4 δηλαδή

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}+\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{A}-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}=4$$

β) $x^2+x\sqrt{x+3}=6(x+3)$. Θέτω $\sqrt{x+3}=t \Rightarrow \left(x\geq -3,\ t\geq 0\right)$ $x^2+tx=+6t^2 \Rightarrow$

$$t_{1,2}=\frac{x\pm\sqrt{x^2+24x^2}}{12} = \frac{x\pm 5|x|}{12},$$

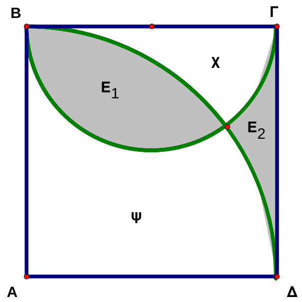
για $\chi \geq 0 \Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{x\pm 5x}{12}\left\langle \begin{array}{l} \dfrac{x}{2} \\ -\dfrac{x}{3}\ \textit{απορρίπτεται} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{x+3}=\dfrac{x}{2} \Rightarrow x+3=\dfrac{x^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-4x-12=0 \Rightarrow x_1=6\ \left(\textit{δεκτή}\right),\ \ x_2=-2\ \left(\textit{απορ.}\right)$

Για $x\in[-3,0) \Rightarrow t_{1,2}=\dfrac{x\mp 5x}{12}\left\langle \begin{array}{l} -\dfrac{x}{3}\ \textit{δεκτή} \\ \dfrac{x}{2}\ \textit{απορ.} \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{x+3}=\dfrac{x^2}{9} \Rightarrow x^2-9x-27=0 \Rightarrow$

$x_1=\dfrac{9+\sqrt{189}}{2}$ *απορ.*, $\chi_2=\dfrac{9-\sqrt{189}}{2}=\dfrac{9-3\sqrt{21}}{2}$ *δεκτή*

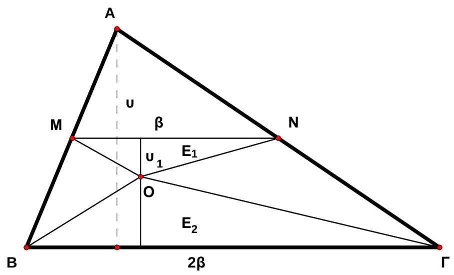
Πρόβλημα 3. (α)



$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{E}_1+\psi=\frac{\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2}{4}\Rightarrow \mathrm{E}_1+\psi=2\pi \\ &\mathrm{E}_2+\psi=\left(2\sqrt{2}\right)^2-\frac{\pi\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\Rightarrow \mathrm{E}_2+\psi=8-\pi \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2=2\pi-\left(8-\pi\right)\Rightarrow \mathrm{E}_1-\mathrm{E}_2=3\pi-8$$

(β) $\mathrm{E}_{\mathrm{OMN}}=8cm^2,\ \ \mathrm{E}_{\mathrm{OB\Gamma}}=18cm^2$



$$\mathrm{E}_1=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon_1=8\,,\ \ \mathrm{E}_2=\frac{1}{2}\cdot 2\beta\cdot\upsilon_2=18\ \Rightarrow$$

$$\beta\cdot\upsilon_1=16,\qquad \beta\cdot\upsilon_2=18\ \Rightarrow\ \beta\left(\upsilon_1+\upsilon_2\right)=34\ \Rightarrow$$

$$\upsilon=2\left(\upsilon_1+\upsilon_2\right)\ \Rightarrow\ \mathrm{E}=\frac{1}{2}\cdot 2\beta\cdot\upsilon=\frac{2\beta\cdot 2\left(\upsilon_1+\upsilon_2\right)}{2}\ \Rightarrow$$

$$\mathrm{E}=2\beta\left(\upsilon_1+\upsilon_2\right)=2\cdot 34\Rightarrow \boxed{\mathrm{E}=68cm^2}$$

Πρόβλημα 4.

(α) $\alpha=2^{62}+1=2^{62}+2\cdot 2^{31}+1-2\cdot 2^{31}=\left(2^{31}+1\right)^2-2^{32}=\left(2^{31}+1-2^{16}\right)\left(2^{31}+1+2^{16}\right)$

(β) $2^{2n}+24n-10\ \textit{διαιρείται με το}\ 18$

Για η = 1 ⇒ 2² + 24 – 1 = 18 διαιρείται με το 18 δηλ. Ισχύει για n = 1

Έστω ότι ισχύει για n = κ δηλ. $2^{2\kappa}+24\kappa-10=18\cdot\rho$ (1)

Θέλω να αποδείξω ότι ισχύει για ν = κ + 1 δηλ. $2^{2\kappa+2}+24\left(\kappa+1\right)-10=18\cdot\mu$

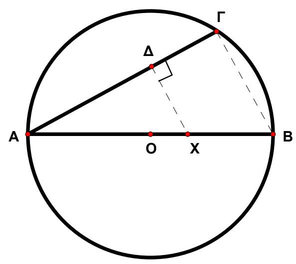
Απόδειξη πολλαπλασιάζω την (1) επί 4 ⇒ $2^2\left(2^{2\kappa}+24\kappa-10\right)=2^2\cdot 18\cdot\rho\Rightarrow$

$$2^{2\kappa+2}+96\kappa-40=18\cdot\rho_1\Rightarrow\ 2^{2\kappa+2}+24\kappa+24-10+72\kappa-54=18\cdot\rho_1\Rightarrow$$

$$2^{2\kappa+2}+24\left(\kappa+1\right)-10=18\cdot\rho_1-72\kappa+54=18\cdot\rho_2\ \ o.\varepsilon.\delta.$$

Πρόβλημα 5.

$$\varepsilon\phi\left(\widehat{\mathrm{A\Gamma X}}\right)=\frac{\Delta\mathrm{X}}{\Delta\Gamma},\ \ \varepsilon\phi\left(\widehat{\Gamma\mathrm{AX}}\right)=\frac{\Delta\mathrm{X}}{\mathrm{A}\Delta}\Rightarrow\ \frac{\varepsilon\phi\left(\widehat{\mathrm{A\Gamma X}}\right)}{\varepsilon\phi\left(\widehat{\Gamma\mathrm{AX}}\right)}=\frac{\dfrac{\Delta\mathrm{X}}{\Delta\Gamma}}{\dfrac{\Delta\mathrm{X}}{\mathrm{A}\Delta}}=\frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\Gamma}$$



ΔΧ // ΓΒ Από το θεώρημα του Θαλή (ή με ομοιότητα τριγώνων) $\Rightarrow\ \dfrac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\Gamma}=\dfrac{\mathrm{AX}}{\mathrm{XB}}$ άρα $\dfrac{\varepsilon\phi\left(\widehat{\mathrm{A\Gamma X}}\right)}{\varepsilon\phi\left(\widehat{\Gamma\mathrm{AX}}\right)}=\dfrac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\Gamma}=\dfrac{\mathrm{AX}}{\mathrm{XB}}\ \textit{σταθερό}.$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ **"Ζήνων"**

Μάρτιος 2003 Διάρκεια 3 ώρες

Επιμέλεια : Ανδρέας Σχοινής – Σάββας Αντωνίου

Να λυθούν όλα τα προβλήματα.

Πρόβλημα 1. Να λυθεί η εξίσωση: $x^{100}+\psi^{100}-2=100(x\psi-1)$.

Πρόβλημα 2. Δίδεται το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Συμβολίζουμε με Η' το συμμετρικό του ορθόκεντρου Η ως προς άξονα συμμετρίας την πλευρά ΒΓ του τριγώνου. Αν το έγκεντρο του τριγώνου ισαπέχει από τα σημεία Α και Η' να δείξετε ότι: συνΒ+συνΓ =1.

(Ορθόκεντρο είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου και έγκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του).

Πρόβλημα 3. Δίδεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ το οποίο είναι περιγεγραμμένο περί κύκλο (Κ , R). Συμβολίζουμε με Ε , Ζ, Η και Θ τα σημεία επαφής των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα με το κύκλο. Να δείξετε ότι οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου και τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΗ και ΖΘ περνούν από το ίδιο σημείο.

Πρόβλημα 4. Αν $H_\kappa=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\kappa}$ με $\kappa=1,2,3,\ldots$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής να δείξετε ότι: $H_{2^\nu}\geq 1+\frac{\nu}{2}$.

Πρόβλημα 5. Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x+\psi)\geq f(x)\cdot f(\psi)\geq 2003^{x+\psi}$ για όλες τις πραγματικές τιμές των x και ψ.

Προτεινόμενες λύσεις:

Πρόβλημα 1. Πρώτα παρατηρούμε ότι: $x\psi=\dfrac{x^{100}+\psi^{100}+98}{100}>0$

Επομένως οι αριθμοί x και ψ είναι ομόσημοι. Η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως ακολούθως: $\dfrac{x^{100}+\psi^{100}+1+1+1+\ldots+1}{100}=\sqrt[100]{x^{100}\cdot\psi^{100}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}$

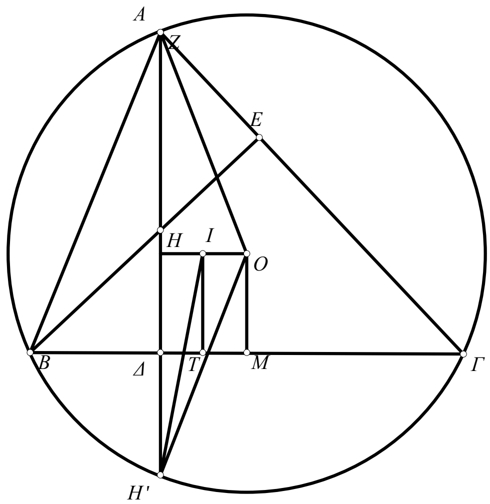
(το πλήθος των μονάδων είναι 98).

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $x^{100},\psi^{100},1,1,1,\ldots,1$ είναι ίσος με το γεωμετρικό μέσο των ίδιων αριθμών.

Άρα $x^{100} = \psi^{100} = 1 \Rightarrow x = \psi = 1$ *ή* $x = \psi = -1$ (έχουμε xψ>0).

<u>Πρόβλημα 2.</u> $\text{Α}\Delta \perp \text{ΒΓ}$, $\text{ΒΕ} \perp \text{ΑΓ}$, Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ

ΔΗ=ΔΗ’ $\Rightarrow$ Η΄ ανήκει στο περιγεγραμμένο κύκλο.



και $\left.\begin{matrix}\text{ΙΑ} = \text{ΙΗ}' \\ \text{ΟΑ} = \text{ΟΗ}'\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ΟΙ} \perp \text{ΑΗ}$

και $\text{ΟΙ} \parallel \text{ΒΓ} \Rightarrow \text{ΟΜ} = \text{ΙΤ}$

$\text{ΙΤ} = \rho \Rightarrow \text{ΟΜ} = \rho$

Αλλά $\text{ΟΜ} = \dfrac{\text{ΑΗ}}{2}\ \kappa\alpha\iota\ \text{ΑΗ} = 2R \cdot \sigma\upsilon\nu\text{Α}$

$\Rightarrow \rho = R\eta\mu\text{Α} \Rightarrow$

$4R \cdot \eta\mu\dfrac{\text{Α}}{2} \cdot \eta\mu\dfrac{\text{Β}}{2} \cdot \eta\mu\dfrac{\Gamma}{2} = R\sigma\upsilon\nu\text{Α}$

$\Rightarrow 4\eta\mu\dfrac{\text{Α}}{2} \cdot \eta\mu\dfrac{\text{Β}}{2} \cdot \eta\mu\dfrac{\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu\text{Α}$

<u>Λήμμα</u> $\text{Α} + \text{Β} + \Gamma = 180^\circ$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\text{Α} + \sigma\upsilon\nu\text{Β} + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\text{Α}+\text{Β}}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\text{Α}-\text{Β}}{2} + 1 - 2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\text{Α} + \sigma\upsilon\nu\text{Β} + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\text{Α}-\text{Β}}{2} + 1 - 2\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\text{Α} + \sigma\upsilon\nu\text{Β} + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \cdot (\sigma\upsilon\nu\frac{\text{Α}-\text{Β}}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\text{Α}+\text{Β}}{2})$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\text{Α} + \sigma\upsilon\nu\text{Β} + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \cdot 2\eta\mu\frac{\text{Α}-\text{Β}+\text{Α}+\text{Β}}{4} \cdot \eta\mu\frac{\text{Α}+\text{Β}-\text{Α}+\text{Β}}{4}$$

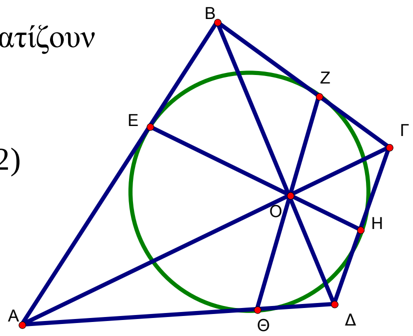
$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\text{Α} + \sigma\upsilon\nu\text{Β} + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + 4\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \cdot \eta\mu\frac{\text{Α}}{2} \cdot \eta\mu\frac{\text{Β}}{2}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \sigma\upsilon\nu\text{Α} + \sigma\upsilon\nu\text{Β} + \sigma\upsilon\nu\Gamma - 1 = \sigma\upsilon\nu\text{Α} \ \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\text{Β} + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1$$

<u>Πρόβλημα 3.</u> Φέρουμε τις ΑΓ και ΕΗ οι οποίες τέμνονται στο Ο. Τα τρίγωνα

$\text{Α}\overset{\vartriangle}{\text{Ε}}\text{Ο}\ \kappa\alpha\iota\ \Gamma\overset{\vartriangle}{\text{Η}}\text{Ο}$ έχουν τις κατακορυφή γωνίες εις το Ο ίσες.

$\Rightarrow \dfrac{\text{Ε}_{(\text{ΑΕΟ})}}{\text{Ε}_{(\Gamma\text{ΗΟ})}} = \dfrac{\text{ΑΟ} \cdot \text{ΕΟ}}{\Gamma\text{Ο} \cdot \text{ΗΟ}}$ (1).



Επειδή $B\hat{E}O = \Gamma\hat{H}O$ (εφαπτόμενες και χορδή σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο) και $B\hat{E}O + A\hat{E}O = 2\,\textit{ορθές}$

$$\Rightarrow \Gamma\hat{H}O + A\hat{E}O = 2\,\textit{ορθές} \Rightarrow \frac{E_{(AEO)}}{E_{(\Gamma HO)}} = \frac{EO\cdot EA}{HO\cdot H\Gamma} \quad (2)$$

$$\overset{(1)\wedge(2)}{\Rightarrow} \frac{AO\cdot EO}{\Gamma O\cdot HO} = \frac{EO\cdot EA}{HO\cdot H\Gamma} \Rightarrow \frac{AO}{\Gamma O} = \frac{EA}{H\Gamma} (3)$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η ΘΖ τέμνει την ΑΓ σε άλλο σημείο O' θα έχουμε κατά όμοιο τρόπο $\frac{AB'}{\Gamma O'} = \frac{A\Theta}{\Gamma Z}$ (4). Αλλά ΑΘ=ΑΕ και ΓΖ=ΓΗ $\overset{(3)\wedge(4)}{\Rightarrow} \frac{AO}{\Gamma O} = \frac{AO'}{\Gamma O'} \Rightarrow O \equiv O'$

Άρα η διαγώνιος ΑΓ περνά από το κοινό σημείο Ο την ΕΗ και ΖΘ. Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η διαγώνιος ΒΔ περνά από το ίδιο σημείο. Άρα οι τέσσερις ευθείες συγκλίνουν.

Πρόβλημα 4. Για $\nu = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} H_{2^0} = H_1 \\ 1+\frac{0}{2} = 1 \end{matrix}\right\} \textit{ισχύει } H_{2^0} = H_1 \geq 1+\frac{0}{2}$

Δεχόμαστε ότι είναι αληθής για $\nu = \kappa$ δηλαδή $H_{2^\kappa} \geq 1+\frac{\kappa}{2}$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa+1$ δηλαδή $H_{2^{\kappa+1}} \geq 1+\frac{\kappa+1}{2}$

$$H_{2^{\kappa+1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^\kappa}+\frac{1}{2^\kappa+1}+\frac{1}{2^\kappa+2}+\dots+\frac{1}{2^\kappa+2^\kappa}$$

$$H_{2^{\kappa+1}} = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^\kappa}}_{\downarrow}+\frac{1}{2^\kappa+1}+\frac{1}{2^\kappa+2}+\dots+\frac{1}{2^\kappa+2^\kappa}$$

$$H_{2^{\kappa+1}} = H_{2^\kappa} + \frac{1}{2^\kappa+1}+\frac{1}{2^\kappa+2}+\dots+\frac{1}{2^\kappa+2^\kappa} \geq 1+\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{2^\kappa+1}+\dots+\frac{1}{2^{\kappa+1}}$$

το πλήθος των $\frac{1}{2^\kappa+1},\dots,\frac{1}{2^{\kappa+1}}$ είναι 2^κ. Ο πιο μικρός από αυτούς είναι ο $\frac{1}{2^{\kappa+1}}$

Επομένως $\frac{1}{2^\kappa+1}+\frac{1}{2^\kappa+2}+\dots+\frac{1}{2^{\kappa+1}} \geq \underbrace{\frac{1}{2^{\kappa+1}}+\frac{1}{2^{\kappa+1}}+\dots+\frac{1}{2^{\kappa+1}}}_{2^\kappa \textit{ όροι}} = 2^\kappa\cdot\frac{1}{2^{\kappa+1}}$

$$H_{2^{\kappa+1}} \geq 1+\frac{\kappa}{2}+2^\kappa\cdot\frac{1}{2^{\kappa+1}} = 1+\frac{\kappa}{2}+\frac{1}{2} = 1+\frac{\kappa+1}{2}$$

Πρόβλημα 5. Παρατηρούμε ότι $f(x) \geq 2003^x > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$.

Τότε $\log_{2003} f(x+\psi) \geq \log_{2003} f(x) + \log_{2003} f(\psi) \geq x + \psi \quad \forall x, \psi \in \mathbb{R}$

Συμβολίζουμε: $g(x) = \log_{2003} f(x)$. Έτσι έχουμε:

$g(x+\psi) \geq g(x) + g(\psi) \geq x + \psi \, \forall x, \psi \in \mathbb{R}$.

Για $x = \psi = 0 \, \acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\tau\alpha\iota : g(0) \geq 2g(0) \geq 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Για $\psi = 0 \, \acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\tau\alpha\iota : g(x) \geq x \, \forall x \in R$

Για $\psi = -x \, \acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\tau\alpha\iota : g(0) \geq g(x) + g(-x) \geq 0$

Άρα $g(x) + g(-x) = 0 \Rightarrow g(-x) = -g(x)$

Είναι όμως $g(-x) \geq -x \, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -g(x) \geq -x \Rightarrow g(x) \leq x \, \forall x \in \mathbb{R}$

Ήδη όμως έχουμε αποδείξει ότι $g(x) \geq x$. Έτσι υποχρεωτικά

$g(x) = x \, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_{2003} f(x) = x \Rightarrow f(x) = 2003^x \, \forall x \in \mathbb{R}$.

<u>ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ</u>

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

«ΕΥΑΓΟΡΑΣ ΠΑΛΛΗΚΑΡΙΔΗΣ»

Φεβρουάριος 2003 Διάρκεια: 3 ώρες

Επιμέλεια: Μάριος Ευσταθίου - Παντελής Ζαμπυρίνης

Να λυθούν τα πέντε προβλήματα:

Πρόβλημα 1. α) Αν $\alpha \neq \beta$ και $\alpha(\beta^2+1)= \beta(\alpha^2+1)$ να βρείτε την τιμή του γινομένου $\alpha\beta$.

β) Αν το α είναι μια λύση της εξίσωσης $x^5 - \sqrt{2} = 0$ να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A=(\alpha-1)\ (\alpha^{10} + \alpha^{11} + \alpha^{12} + \alpha^{13} + \ldots + \alpha^{29})$

γ) Αν $\alpha= 2^{2003} + 2^{-2003}$ και $\beta= 2^{2003} - 2^{-2003}$ να δείξετε ότι: $\alpha^2 - \beta^2 = 4$

Πρόβλημα 2. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \dfrac{\alpha^3 x - \alpha^2 \beta x - 6\alpha\beta^2 x}{\alpha^2 \beta x^2 - 4\alpha\beta^2 x^2 + 3\beta^3 x^2}$

β) Να μετατρέψετε σε γινόμενο παραγόντων την παράσταση:

$A = \alpha(\gamma+\beta)(\gamma-\beta) + \beta(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma) - \gamma(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

Πρόβλημα 3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$, ΑΒ>ΔΓ και τέτοιο ώστε η διαγώνιος ΑΓ να είναι κάθετη στη ΒΓ. Αν (ΒΓ) =10 cm και (ΑΒ) - (ΔΓ)=8 cm, να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τραπεζίου.

Πρόβλημα 4. Αν $A= 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{8^2}\ldots$ και

$B= 1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}+\dfrac{1}{11^2}+\ldots$ να δείξετε ότι: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{4}{3}$

Πρόβλημα 5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 120^0$ και (ΑΒ)=2(ΒΓ) . Από το μέσο Μ της ΓΔ φέρουμε κάθετη ΜΕ στη διαγώνιο ΒΔ (Ε το σημείο τομής) . Να δείξετε ότι: (ΔΜ)·(ΜΒ) = 2(ΜΕ)·(ΒΔ) .

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1.

α) $\alpha(\beta^2+1)=\beta(\alpha^2+1) \Rightarrow \alpha\beta^2+\alpha-\beta\alpha^2-\beta=0 \Rightarrow \alpha\beta(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)=0 \Rightarrow (\beta-\alpha)(\alpha\beta-1)=0$
$\Rightarrow \alpha\beta=1$ αφού $\alpha \neq \beta$

β) Το α λύση $\Rightarrow$ $\alpha^5=\sqrt{2}$

$(\alpha-1)(\alpha^{10}+\alpha^{11}+\alpha^{12}+\ldots+\alpha^{29})=\alpha^{11}+\alpha^{12}+\alpha^{13}+\ldots+\alpha^{29}+\alpha^{30}-(\alpha^{10}+\alpha^{11}+\alpha^{12}+\alpha^{13}+\ldots+\alpha^{29})$
$=\alpha^{30}-\alpha^{10}=(\alpha^{10})^3-\alpha^{10}=2^3-2=6$

γ) $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=(2^{2003}+2^{-2003}+2^{2003}-2^{-2003})(2^{2003}+2^{-2003}-2^{2003}+2^{-2003})=2.2^{2003}2.2^{-2003}=4$

Πρόβλημα 2. (α) $A=\dfrac{ax(a^2-a\beta-6\beta^2)}{\beta x^2(a^2-4\alpha\beta+3\beta^2)}=\dfrac{ax(a-3\beta)(a+2\beta)}{\beta x^2(a-\beta)(a-3\beta)}=\dfrac{a(a+2\beta)}{\beta x(a-\beta)}$

β) $A=\alpha(\gamma^2-\beta^2)+\beta(\alpha^2-\gamma^2)-\gamma(\alpha^2-\beta^2)=\alpha\gamma^2-\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\beta\gamma^2-\gamma\alpha^2+\gamma\beta^2=$

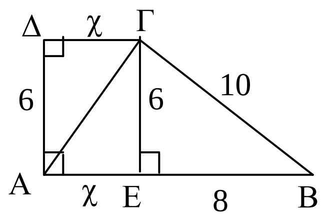
$(\alpha\gamma^2-\gamma\alpha^2)-(\beta\gamma^2-\beta\alpha^2)+(\gamma\beta^2-\alpha\beta^2)=\alpha\gamma(\gamma-\alpha)-\beta(\gamma^2-\alpha^2)+\beta^2(\gamma-\alpha)=(\gamma-\alpha)(\alpha\gamma-\beta\gamma-\beta\alpha+\beta^2)=$

$(\gamma-\alpha)\left[\gamma(a-\beta)-\beta(a-\beta)\right]=(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)$.

Πρόβλημα 3.

$(A\Gamma)^2=(A\Delta)^2+(\Gamma\Delta)^2 \Rightarrow (A\Gamma)^2=6^2+\chi^2$ (1)

$(A\Gamma)^2=(AB)^2-(\Gamma B)^2 \Rightarrow (A\Gamma)^2=(\chi+8)^2-10^2$ (2)



Από (1)Λ(2) $\Rightarrow (\chi+8)^2-10^2=6^2+\chi^2 \Rightarrow x^2+16x+64-100=$
$36+x^2 \Rightarrow x=\dfrac{9}{2}=4{,}5$

Περίμετρος = (ΑΒ)+(ΒΓ)+(ΓΔ)+(ΔΑ) = 12,5+10+4,5+6 = 33cm.

Εμβαδό = $\dfrac{(12{,}5+4{,}5).6}{2}=51\ \text{cm}^2$

Πρόβλημα 4.

$$A= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}\ldots = B+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots =$$

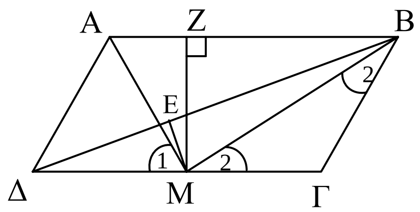
$$B+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots\right) = B+\frac{1}{4}A\Rightarrow$$

$$A-\frac{1}{4}A = B\Rightarrow \frac{3}{4}A = B \Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{4}{3}$$

Πρόβλημα 5.

$\hat{A}=120^0 \Rightarrow A\hat{\Delta}\Gamma = 60^0 \Rightarrow$ το τρίγωνο ΔΜΑ ισόπλευρο $\Rightarrow$ (ΑΜ)=(ΔΜ) (1)

το τρίγωνο ΒΓΜ είναι ισοσκελές αφού (ΜΓ)=(ΓΒ) $\Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{B}_2 = 30^0$ (2)



$(\hat{M}_1 = 60^0)\ \Lambda(\hat{M}_2 = 30^0) \Rightarrow A\hat{M}B=90^0 \Rightarrow$ το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο. Το τρίγωνο ΑΒΜ έχει εμβαδό

$$E_1=\frac{(AB)(MZ)}{2}=\frac{(AM)(MB)}{2}=\frac{(\Delta M)(MB)}{2} \quad (3)$$

Το τρίγωνο ΔΒΜ έχει εμβαδό $E_2=\frac{(\Delta M)(MZ)}{2}=\frac{(B\Delta)(ME)}{2}$ (4)

Αφού (ΑΒ)=2(ΔΜ) $\Rightarrow E_1=2E_2 \Rightarrow$

$$\frac{(\Delta M)(MB)}{2}=2\frac{(B\Delta)(ME)}{2} \Rightarrow (\Delta M)\cdot(MB) = 2(ME)\cdot(B\Delta)$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ
"ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΓΙΑΛΛΟΥΡΟΣ"

Φεβρουάριος, 2003 *Διάρκεια 3 ώρες*

Επιμέλεια: Χρ. Παπαχριστοδούλου – 'Ολγα Παπαγιάννη

Να λυθούν όλες οι ασκήσεις

1. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΓ=ΒΓ) έχει κορυφή Α(2, 3). Το ύψος του ΒΔ έχει εξίσωση χ - 7ψ + 9 = 0 και η διάμεσος του ΓΜ έχει εξίσωση 2χ + ψ - 2=0. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

2. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 120°$ και (ΑΓ) = 2.(ΑΒ). Κατασκευάζουμε έξω από αυτό τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε, Η βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

3. (α) Να λύσετε το σύστημα:
$$\chi + \psi - 2\sqrt{\chi\psi} = \sqrt{\chi} - \sqrt{\psi}$$
$$\sqrt{\chi} + \sqrt{\psi} = 5$$

(β) Αν Α = $\frac{1}{2}\left(2\nu - 1 - \sqrt{4\nu - 3}\right)$ είναι ακέραιος αριθμός, να αποδείξετε πως ο αριθμός Α είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου αριθμού όπου ν φυσικός αριθμός.

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) δίνεται $\hat{A} = 120°$ και τα σημεία Δ, Ε της ΒΓ ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}\Gamma = 90°$.

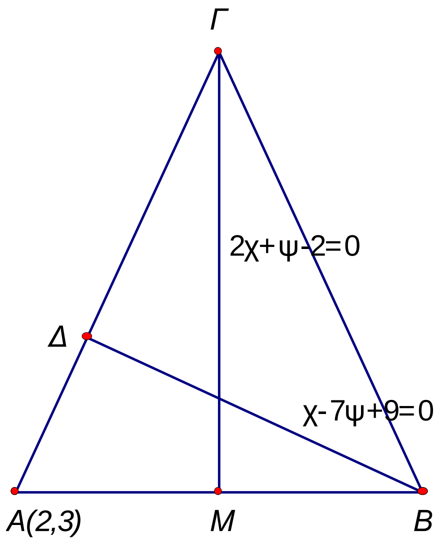
5. (α) Να λύσετε την εξίσωση : $\chi^2 + \frac{1}{\chi^2} - 4\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right) - 10 = 0$.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός Α, όπου Α = $\nu^4 - \nu^2$ διαιρείται δια 12 για κάθε φυσικό αριθμό ν (ν∈Ν), όπου ν ≥ 2.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$\lambda_{\Gamma M}= -2$. Η ΓΜ είναι διάμεσος και ύψος άρα $\lambda_{AB}= \frac{1}{2}$.



Εξίσωση ΑΒ : $\psi= \frac{1}{2}\chi +\beta \Rightarrow 3 = 2(\frac{1}{2}) + \beta \Rightarrow \beta=2$

ΑΒ: $\psi= \frac{1}{2}\chi + 2 \Rightarrow 2\psi - \chi = 4$.   Εξίσωση ΑΒ : $2\psi - \chi = 4$

<u>Εξίσωση ΒΔ : $\chi - 7\psi = -9 \Rightarrow$</u> $\chi= - 2$, $\psi = 1$, Β (-2, 1), $\lambda_{B\Delta} = \frac{1}{7} \Rightarrow \lambda_{A\Gamma} = -7$

Εξίσωση ΑΓ:$\psi= - 7\chi + \beta \Rightarrow 3 = - 7 (2) + \beta \Rightarrow \beta= 17$, $\Rightarrow \psi = - 7\chi + 17$

Εξίσωση ΑΓ: $\psi= - 7\chi + 17$, Εξίσωση ΓΜ : $2\chi + \psi - 2 = 0 \Rightarrow$

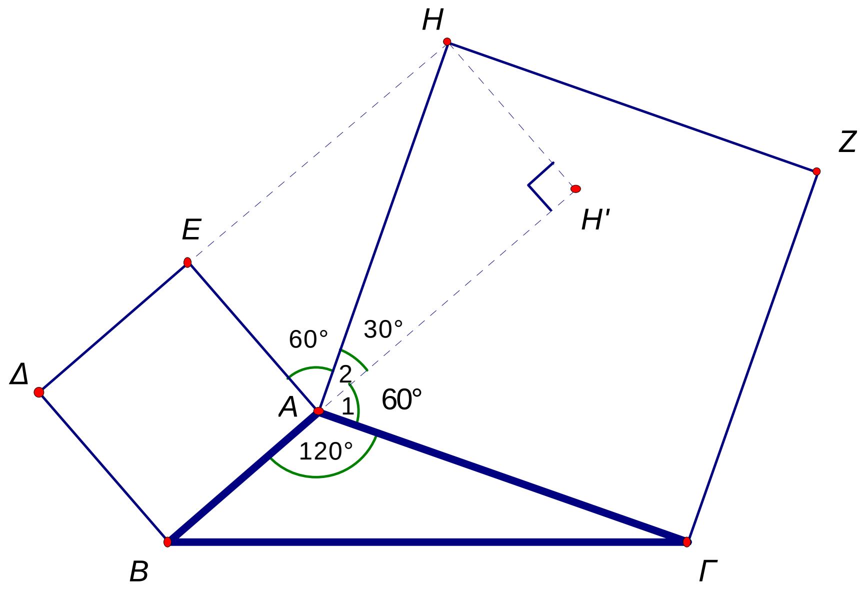
$\chi= 3$, $\psi= -4$, Γ(3, -4)

ΑΣΚΗΣΗ 2

Φέρουμε την ΗΗ΄⊥ΑΒ. $\hat{A}_1 = 60°$ (παραπληρωματική της 120°) $\Rightarrow \hat{A}_2 = 30°$

ΑΗΗ΄τρίγωνο : $HH' = \frac{AH}{2}$ (απέναντι των 30°) $\Rightarrow HH' = \frac{A\Gamma}{2} = AB \Rightarrow$ ΗΗ΄=//ΕΑ

$\Rightarrow$ ΕΗΗ΄Α είναι ορθογώνιο (παραλληλόγραμμο και μια ορθή γωνία) $\Rightarrow$
$A\hat{E}H=90°$. (1)



Όμως η $\Delta\hat{E}A = 90°$ (ΕΑΒΔ τετράγωνο) (2)

Από (1) και (2) η $\Delta\hat{E}H = 180°$ $\Rightarrow$ Δ, Ε, Η είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ 3

(α) $\chi + \psi - 2\sqrt{\chi\psi} = \sqrt{\chi} - \sqrt{\psi}$ $\Rightarrow (\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi})^2 = \sqrt{\chi} - \sqrt{\psi}$

$\Rightarrow (\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi})^2 - (\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi}) = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi} - 1)(\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi}) = 0$

$\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi} = 1$ ή $\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi} = 0$

$\sqrt{\chi} + \sqrt{\psi} = 5$ $\sqrt{\chi} + \sqrt{\psi} = 5$

$\sqrt{\chi} = 3 \Rightarrow \chi = 9$ $\sqrt{\chi} = \sqrt{\psi} = \frac{5}{2}$

$\sqrt{\psi} = 2 \Rightarrow \psi = 4$ $\chi = \psi = \frac{25}{4}$

(β) $A = \frac{1}{2}(2\nu - 1 - \sqrt{4\nu - 3})$

Ο 2ν-1 είναι περιττός άρα $\sqrt{4\nu - 3}$ είναι περιττός και 4ν-3 τετράγωνο περιττού.

$4\nu - 3 = (2\kappa + 1)^2 \Rightarrow 4\nu + 3 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 4 \Rightarrow \nu = \kappa^2 + \kappa + 1$

$A = \frac{1}{2}(2\kappa^2 + 2\kappa + 2 - 1 - \sqrt{(4\nu - 3)^2}) = \ldots = \kappa^2$

ΑΣΚΗΣΗ 3Α

$\chi+\psi -2\sqrt{\chi\psi} = \sqrt{\chi}-\sqrt{\psi} \Rightarrow \left(\sqrt{\chi}\right)^2+\left(\sqrt{\psi}\right)^2-2\sqrt{\chi\psi} = \sqrt{\chi}-\sqrt{\psi}$

$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi}\right)^2 = \sqrt{\chi}-\sqrt{\psi} \Rightarrow \quad \left(\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi}\right)^2 - \sqrt{\chi}-\sqrt{\psi} = 0$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi})(\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi} - 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{\chi}-\sqrt{\psi} = 0, \qquad \sqrt{\chi}-\sqrt{\psi} = 1$

$\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi} = 5 \qquad \sqrt{\chi}+\sqrt{\psi} = 5$

$\sqrt{\chi} = 3 \Rightarrow \chi = 9 \qquad \sqrt{\chi} = \sqrt{\psi} = \frac{5}{2}$

$\sqrt{\psi} = 2 \Rightarrow \psi=4 \qquad \chi=\psi = \frac{25}{4}, \Rightarrow$ Λύσεις: $(9 , 4)$ $(\frac{25}{4}, \frac{25}{4})$

ΑΣΚΗΣΗ 3Β

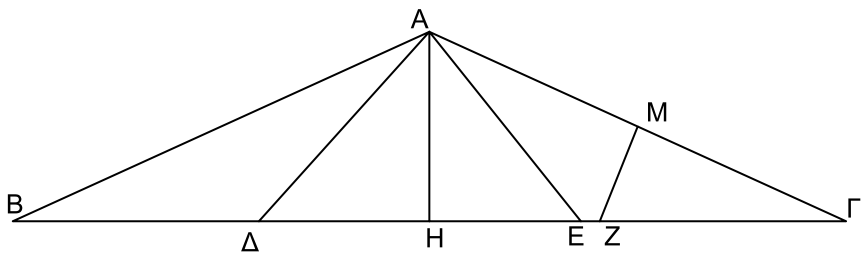
$A = \frac{1}{2}\left(2\nu-1-\sqrt{4\nu-3}\right)$

Ο αριθμός 2ν-1 είναι περιττός αριθμός άρα και ο αριθμός $\sqrt{4\nu-3}$ πρέπει να είναι περιττός. Κατά συνέπεια ο αριθμός 4ν - 3 πρέπει να είναι τετράγωνο περιττού αριθμού.

$4\nu-3 = (2\kappa+1)^2 \Rightarrow 4\nu-3 = 4\kappa^2 + 4\kappa + 4 \Rightarrow \nu = \kappa^2 + \kappa + 1$

$A = \frac{1}{2}\left(2\nu-1-\sqrt{4\nu-3}\right) = \frac{1}{2}(2\kappa^2+2\kappa+2-1-\sqrt{(2\kappa+1)^2}) = \ldots = \kappa^2$

ΑΣΚΗΣΗ 4



Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρω την ΜΖ ⊥ΑΓ και το ύψος ΑΗ.

Στο τρίγωνο ΑΗΓ: $\hat{\Gamma} = 30°, \hat{H} = 90° \Rightarrow AH = \frac{A\Gamma}{2} = AM \Rightarrow$ ΑΗΜ είναι ισόπλευρο

Στο τρίγωνο ΓΜΖ: $MZ = \frac{\Gamma Z}{2}$ $(\hat{\Gamma} = 30°, \hat{M} = 90°)$

$MZ = HZ = \frac{\Gamma Z}{2}$ (τριγωνο ΗΜΖ ισοσκελές, $E\hat{H}M = E\hat{M}H = 30°$). Άρα $HZ = \frac{H\Gamma}{3}$

Όμως $HE = \frac{\Delta E}{2} = \frac{E\Gamma}{2} \Rightarrow HE = \frac{H\Gamma}{3} \Rightarrow$ Ζ και Η συμπίπτουν.

Άρα ΜΕ μεσοκάθετος της ΑΓ
Ε μέσο του ΓΔ | $\Rightarrow$ ΜΕ// ΑΔ $\Rightarrow \hat{M} = \Delta\hat{A}M = 90°$

ΑΣΚΗΣΗ 5Α

$\chi^2 + \frac{1}{\chi^2} - 4\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right) - 10 = 0 \quad (1)$

Θέτω $\chi + \frac{1}{\chi} = \alpha \Rightarrow (\chi + \frac{1}{\chi})^2 = \alpha^2 \Rightarrow \chi^2 + \frac{1}{\chi^2} + 2 = \alpha^2 \Rightarrow \chi^2 + \frac{1}{\chi^2} = \alpha^2 - 2$

Αντικαθιστώ στην (1)

$\alpha^2 - 2 - 4\alpha - 10 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 12 = 0$

$\Rightarrow (\alpha - 6)(\alpha + 2) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 6$ ή $\alpha = -2$

$\chi + \frac{1}{\chi} = 6$	$\chi + \frac{1}{\chi} = -2$
$\chi^2 - 6\chi + 1 = 0$	$\chi^2 + 2\chi + 1 = 0$
$\chi_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$	$\chi = -1$ (διπλή ρίζα)

ΑΣΚΗΣΗ 5Β

$A = \nu^4 - \nu^2 = \nu^2(\nu^2 - 1) = \nu^2(\nu - 1)(\nu + 1) = \nu\,[(\nu - 1).(\nu).(\nu+1)]$

(α) Αν ν = άρτιος τότε οι ν-1 και ν+1 αριθμοί είναι περιττοί και το γινόμενο δυο διαδοχικών περιττών διαιρείται με το 12.

(β) Αν ν= περιττός τότε οι αριθμοί ν-1 και ν+1 είναι ζυγοί και το γινόμενό τους διαιρείται με το 12.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ

BMO – IMO 2003

Μάρτιος 2003 Χρόνος: 4 ώρες

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μακρίδης, Πέτρος Πέτρου

Να λυθούν τα πέντε προβλήματα

Πρόβλημα 1. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί λ, οι οποίοι διαιρούμενοι με το 7 δίνουν υπόλοιπο 5, ενώ, διαιρούμενοι με το 13 δίνουν υπόλοιπο 4.

Πρόβλημα 2. Έστω $0<a,b,c<1$. Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{b}{1-b}+\dfrac{c}{1-c}\geq\dfrac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}$

Πρόβλημα 3. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα Π(χ) του μικρότερου δυνατού βαθμού με τις παρακάτω ιδιότητες: Α) Ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του χ είναι 200. Β) Ο συντελεστής της μικρότερης δύναμης του χ για την οποία ο συντελεστής δεν είναι μηδέν, είναι 2. Γ) Το άθροισμα όλων των συντελεστών να είναι 4. Δ) Π(-1) = 0. Ε) Π(2)=6. Στ) Π(3) = 8.

Πρόβλημα 4. Δίνεται η ακολουθία 11, 32, 54, 78, 106, 142, 194, ... Να βρεθεί ο μεγαλύτερος από τους όρους μιας υποακολουθίας, της πιο πάνω ακολουθίας, για την οποία ο κάθε όρος της είναι μικρότερος από το άθροισμα των δύο αμέσως προηγούμενων του όρων.

Πρόβλημα 5. Αν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ είναι τρεις διαδοχικές χορδές κύκλου (Κ,R) με μήκος λ η κάθε μία από αυτές, να υπολογιστεί η απόσταση των μέσων των ΑΒ και ΓΔ συναρτήσει των λ και της ακτίνας R του κύκλου.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. $\lambda=7\chi+5,\quad \lambda=13\psi+4\Rightarrow 7\chi+5=13\psi+4\Rightarrow 7\chi-13\psi=-1$. Οι αριθμοί 7 και -13 είναι πρώτοι μεταξύ τους . Η εξίσωση $7\chi-13\psi=-1$ έχει ακέραιες λύσεις διότι 1 / -1. Μια προφανής λύση είναι η $(\chi_0,\psi_0)=(-2,-1)$. Πράγματι $7(-2)-13(-1)=-14+13=-1$. Όλες οι ακέραιες λύσεις για τα χ, ψ δίνονται από τους τύπους : $\chi=-2-13t,\quad \psi=-1-7t,\quad t\in\mathbb{Z}$. Οπότε

$\lambda=7(-2-13t)+5=-14-91t+5=-91t-9$,

$\lambda=13(-1-7t)+4=-13-91t+4=-91t-9\ ,\quad t\in\mathbb{Z}$

Πρόβλημα 2. $0<a,b,c<1$. Το $\dfrac{a}{1-a}$ θυμίζει το άθροισμα άπειρων όρων φθίνουσας

Γ.Π. $\Rightarrow \dfrac{a}{1-a} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \ \mu\varepsilon \ |\alpha| < 1$, λόγο λ = α και πρώτο όρο τα α.

Ομοίως $\dfrac{b}{1-b} = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \ \mu\varepsilon \ |b| < 1, \ \dfrac{c}{1-c} = \sum_{n=1}^{\infty} c^n \ \mu\varepsilon \ |c| < 1 \Rightarrow$

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n + \sum_{n=1}^{\infty} b^n + \sum_{n=1}^{\infty} c^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a^n + b^n + c^n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} 3\sqrt[3]{a^n b^n c^n}$$

$$\left(\text{Α}\nu\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\, Cauchy\right) \quad = 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{abc}\right)^n = \frac{3\sqrt[3]{abc}}{1-\sqrt[3]{abc}}$$

$0 < a < 1, 0 < b < 1, \ 0 < c < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[3]{abc} < 1$ λόγος φθίνουσας Γ.Π.

Πρόβλημα 3. Από ο (Γ) $\Rightarrow$ Π(1)=4.

Επίσης Π(-1) = 0 = 2(-1) +2

Π(1) = 4 = 2·1 + 2

Π(2) = 6 = 2·2 + 2 (2·χ + 2)

Π(3) = 8 = 2·3 + 2

Μπορούμε να ορίσουμε πολυώνυμο Q(x) ώστε Qx) = Π(x) + 2x + 2 για το οποίο θα ισχύει Q(x) = (x+1)(x-1) (x-2)(x-3) R(x) , Q(x) = Π(x) + 2x + 2 $\Rightarrow$ Π(x)=Q(x)+(2x+2).

Εφόσον το Π(χ) θέλουμε να είναι του μικρότερου δυνατού βαθμού τότε και το R(x) θα πρέπει να είναι του μικρότερου δυνατού βαθμού.

Αν R(x) είναι βαθμού 0 τότε R(x) = 200 εφόσον ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του Π(x) είναι 200. Αλλά Π(0) = (1)(-1)(-2)(-3)200+(2·0+2) = -1200 + 2 = -1998 $\neq$ 2 που αντίκειται στην υπόθεση (3)

Το R(x) θα πρέπει να είναι βαθμού τουλάχιστον 1. Εφόσον ο συντελεστής της μεγαλύτερης δύναμης του Π(x) είναι 200 τότε το R(x) θα πρέπει να είναι ης μορφής R(x) = 200x + λ. $\Rightarrow$ P(0) = 1(-1)(-2)(-3)(λ) + 2 = 2 - 6λ.

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις (1) Αν η μικρότερη δύναμη για την οποία ο συντελεστής του Π(x) δεν είναι 0, ισούται με 0, είτε 2 – 6λ =2 ή λ = 0. Σε αυτή την περίπτωση: Π(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)200x + 2x + 2 = $200x^5$-$1000x^4$ + $1000x^2$ - 1198x + 2 Δεκτή λύση.

(2) Αν η μικρότερη δύναμη για την οποία ο συντελεστής του Π(x) δεν είναι 0, δεν ισούται με 0, τότε 2-6λ=0 ή λ = $\frac{1}{3}$. Σε αυτή την περίπτωση ο γραμμικός συ-

ντελεστής πρέπει να ισούται με 2 (με βάση την προϋπόθεση Β.

$(-1200 + \frac{5}{3} + 2)x = -\frac{3589}{3}x \neq 2x \Rightarrow$

Η λύση Π(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)200x + 2x + 2 είναι η μόνη λύση

Πρόβλημα 4. Παρατηρείται ότι:

$x_1 = 11 = 1 \cdot 10 + 1$
$x_2 = 32 = 3 \cdot 10 + 1$
$x_3 = 54 = 5 \cdot 10 + 1$
$x_4 = 78 = 7 \cdot 10 + 1$
$x_5 = 106 = 9 \cdot 10 + 1$
$x_6 = 142 = 11 \cdot 10 + 1$
$x_7 = 194 = 13 \cdot 10 + 1$

Οι αριθμοί 1,3,5,7,9, ... είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου με πρώτο όρο το 1 και διαφορά 2
$a_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\delta = 1 + (\nu - 1)2 = 2\nu - 1$.
Οι αριθμοί 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... είναι δια-δοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου μα πρώτο όρο τι 1 και λόγο 2 $\Rightarrow$
$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} = 1 \cdot 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1}$

Άρα ο $\nu^{ος}$ όρος της ακολουθίας θα είναι:
$x_\nu = (2\nu - 1) \cdot 10 + 2^{\nu-1} = 20\nu - 10 + 2^{\nu-1} = 2^{\nu-1} + 20\nu - 10$

Σύμφωνα με το ζητούμενο θα πρέπει $x_\nu < x_{\nu-1} + x_{\nu-2} \Rightarrow$

$$2^{\nu-1} + 20\nu - 10 < 2^{\nu-2} + 20(\nu - 1) - 10 + 2^{\nu-3} + 20(\nu - 2) - 10 \Rightarrow$$

$$2^{\nu-3} + 20\nu - 10 < 2^{\nu-2} + 2^{\nu-3} + 20\nu - 20 - 10 + 20\nu - 40 - 10 \Rightarrow$$

$$2^{\nu-1} - 2^{\nu-2} - 2^{\nu-3} < 20\nu - 70 \Rightarrow \frac{2^\nu}{2} - \frac{2^\nu}{4} - \frac{2^\nu}{8} < 20\nu - 70 \Rightarrow \frac{2^\nu}{8} < 20\nu - 70 \quad (1)$$

Εξετάζω για ποιες τιμές του ν αληθεύει η ανισότητα (1)

ν=1	$\frac{1}{8} < 20 - 70$	Δεν αληθεύει	$x_1 = 11$
ν=2	$\frac{1}{2} < 40 - 70$	Δεν αληθεύει	$x_1 = 32$
ν=3	$1 < 60 - 70$	Δεν αληθεύει	$x_1 = 54$
ν=4	$2 < 80 - 70$	Αληθεύει	$x_1 = 78$
ν=5	$4 < 100 - 70$	Αληθεύει	$x_1 = 106$
ν=6	$8 < 120 - 70$	Αληθεύει	$x_1 = 146$
ν=7	$16 < 120 - 70$	Αληθεύει	$x_1 = 184$
ν=8	$32 < 140 - 70$	Αληθεύει	$x_1 = 278$
ν=9	$64 < 180 - 70$	Αληθεύει	$x_1 = 428$
ν=10	$128 < 200 - 70$	Αληθεύει	$x_1 = 702$
ν=11	$256 < 220 - 70$	Αληθεύει	$x_1 = 1234$

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι για $\nu \geq 11$ δεν αληθεύει $\frac{2^\nu}{8} < 20\nu - 70$

δηλαδή $\frac{2^\nu}{8} > 20\nu - 70 \ \forall \nu \geq 11$.

Δια ν=11$\Rightarrow$ Α.Μ. = $\frac{2^{11}}{8} = 2^8 = 256$, Β.Μ. = 20·11-70 = 220 – 70 = 150 αληθής.

Δεχόμαστε ότι ισχύει για ν = κ ≥ 11 δηλαδή $\frac{2^\kappa}{8} > 20\kappa - 70$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για ν = κ +1 δηλ. $\frac{2^{\kappa+1}}{8} > 20(\kappa+1) - 70 = 20\kappa - 50$;

Απόδειξη: $\frac{2^{\kappa+1}}{8} - \frac{2^\kappa}{8} \cdot 2 > (20\kappa - 70) \cdot 2 = 2 \cdot 20\kappa - 140 = 20\kappa + 20\kappa - 50 - 90$

$= (20\kappa - 50) + 10(2\kappa - 9) > 20\kappa - 50$, $\kappa \geq 11$.

Άρα ο μεγαλύτερος όρος που αληθεύει είναι όταν το ν = 10 $\Rightarrow$

$x_{10} = 2^9 + 20 \cdot 10 - 10 = 702$.

Απόδειξη ότι $\frac{2^\nu}{8} + 70 > 20\nu, \quad \forall \nu \geq 11$ (Μια πιο πλήρης απόδειξη)

$\forall$ φυσικό $\kappa \geq 1$ αληθεύει ότι $2^3(2^\kappa - 1) \geq \kappa$ (α)

Για κ=1 Α.Μ.: $2^3(2^1 - 1) = 8$, Β.Μ.: 1 αληθεύει

Δεχόμαστε ότι ισχύει κ=λ $\Rightarrow$ $2^3(2^\lambda - 1) \geq \lambda$ (β) και θα δείξουμε ότι αληθεύει για κ=λ+1.

Από τη σχέση $2^3(2^\kappa - 1) \geq \kappa \Rightarrow 2^4(2^\kappa - 1) \geq 2\kappa$ ή $2^{\kappa+4} \geq 2^4 + 2\kappa$ ή $2^{\kappa+4} \geq 16 + 2\kappa \Rightarrow$

$2^{\kappa+4} \geq 15 + 2\kappa$ ή $2^{\kappa+4} + 7 \geq 22 + 2\kappa$ (γ)

Επειδή $\nu \geq 11$ και $\kappa \geq 11$ θέτουμε $\kappa = \nu - 11$ οπότε η (γ) γίνεται

$2^{\nu-7} + 7 > 22 + 2(\nu - 11)$ ή $2^{\nu-7} + 7 > 2\nu$ ή $\frac{2^\nu}{2^7} > 2\nu - 7$ ή $\frac{2^\nu}{2^3} > 2^4(2\nu - 7)$ ή

$\frac{2^\nu}{8} > 16(2\nu - 7) \Rightarrow \frac{2^\nu}{8} > 10(2\nu - 7) = 20\nu - 70$ ή $\frac{2^\nu}{8} + 70 > 20\nu$

Πρόβλημα 5. Επειδή ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = λ $\Rightarrow$ ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ,R). ΒΓ //ΑΔ $\Rightarrow$ Αν Μ το μέσο της ΑΒ και Ν μέσο της ΓΔ η ΜΝ θα είναι διάμεσος $\Rightarrow$ $\text{MN} = \frac{(\text{ΒΓ}) + (\text{ΑΔ})}{2} = \frac{\lambda + x}{2} \quad (x = \text{ΑΔ})$.

Προσδιορισμός του x. Φέρνω της διάμετρο ΒΒ΄. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΒ΄, $\left(\widehat{BAB'} = 90^0\right)$, $(AB)^2 + (AB')^2 = (BB')^2 \Rightarrow (AB')^2 = 4R^2 - \lambda^2 \Rightarrow$

$(AB') = \sqrt{4R^2 - \lambda^2}$. $\text{ΑΒ} = \text{ΒΓ} \Rightarrow \text{ΑΒ}' = \text{Β}'\text{Γ} \Rightarrow$ οι χορδές ΑΓ και ΒΒ΄ (διάμετρος) τέμνονται κάθετα και διχοτομεί η μια την άλλη.

$\text{E}_{(\text{ΑΒΒ}')} = \frac{1}{2}(\text{ΒΒ}') \cdot \frac{(\text{ΑΓ})}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2R \cdot (A\Gamma) = \frac{1}{2} R (A\Gamma)$

$$\mathrm{E}_{(\mathrm{ABB}')} = \frac{1}{2}(\mathrm{AB})\cdot(\mathrm{AB}') = \frac{1}{4}\cdot\lambda\cdot\sqrt{4R^2-\lambda^2}$$

$$\Rightarrow R(A\Gamma) = \lambda\sqrt{2R^2-\lambda^2} \Rightarrow \boxed{A\Gamma = \frac{\lambda\sqrt{4R^2-\lambda^2}}{R}} \quad (1)$$

Θεώρημα Πτολεμαίου. $(A\Gamma)\cdot(\mathrm{B}\Delta) = (\mathrm{AB})\cdot(\Gamma\Delta) + (\mathrm{B}\Gamma)\cdot(\mathrm{A}\Delta) \Rightarrow$

$$\frac{\lambda}{R}\sqrt{4R^2-\lambda^2}\cdot\frac{\lambda}{R}\sqrt{4R^2-\lambda^2} = \lambda\cdot\lambda + \lambda\cdot\mathrm{A}\Delta \Rightarrow \frac{\lambda^2}{R^2}\left(4R^2-\lambda^2\right) = \lambda^2 + \lambda\cdot\mathrm{A}\Delta \Rightarrow$$

$$A\Delta = \frac{\lambda}{R^2}\left(2R^2-\lambda^2\right) - \lambda \Rightarrow \mathrm{A}\Delta = \frac{\lambda\left(4R^2-\lambda^2\right) - \lambda R^2}{R^2} \Rightarrow \mathrm{A}\Delta = \frac{4\lambda R^2 - \lambda^3 - \lambda R^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow A\Delta = \frac{3\lambda R^2 - \lambda^3}{R^2}$$

$$MN = \frac{1}{2}\left[A\Delta + B\Gamma\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3\lambda R^2-\lambda^2}{R^2} + \lambda\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3\lambda R^2 - \lambda^3 + \lambda R^2}{R^2}\right] \Rightarrow$$

$$MN = \frac{1}{2}\frac{4\lambda R^2 - \lambda^3}{R^2} \Rightarrow MN = \frac{\lambda\left[4R^2-\lambda^2\right]}{2R^2}$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Διαγωνισμός Επιλογής Μαθηματικών για μαθητές κάτω των 15,5 ετών

"Ευκλείδης"

Απρίλιος 2003 Χρόνος: 4 ώρες

Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Θεόκλητος Παραγυιού

Να λυθούν τα πέντε προβλήματα

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Αν α, β, γ, πραγματικοί αριθμοί και ισχύει η σχέση

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=2\alpha\beta\gamma\left(\alpha+\beta+\gamma\right)$ να δείξετε ότι α = β = γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), η γωνία $\hat{A}=80^o$ και το ύψος του ΑΕ. Άν Μ εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\widehat{\mathrm{M B \Gamma}}=30°$ και $\widehat{\mathrm{M \Gamma B}}=10°$ και η ΜΒ τέμνει το ύψος ΑΕ στο σημείο Δ να αποδείξετε:

(α) Το τρίγωνο ΒΔΑ και ΜΔΓ είναι ίσα. (β) Η γωνία ΑΜΓ είναι 70°

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί χ, ψ (χ,ψ>0) οι οποίοι να είναι λύση της εξίσωσης $\chi^3-\psi^3=1331$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου με πλευρά 10 παίρνουμε 51 σημεία. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο με κορυφές 3 σημεία από τα δοσμένα 51 σημεία, του οποίου τα εμβαδόν να είναι μικρότερο ή ίσο του 2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με πλευρές τις ΑΓ και ΑΒ κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{AKB}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K'}}$ αντίστοιχα εκτός του τριγώνου ΑΒΓ. Αν Ζ, Ι, Δ, Ε, Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΚ, ΑΚ΄, ΚΚ΄, ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΝ είναι ισόπλευρο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Αν α, β, γ, πραγματικοί αριθμοί και ισχύει η σχέση

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=2\alpha\beta\gamma\left(\alpha+\beta+\gamma\right)$ να δείξετε ότι α = β = γ.

ΛΥΣΗ

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta^2\gamma-2\alpha\beta\gamma^2=0$$

$$\Rightarrow\left(\alpha^4+\beta^2\gamma^2-2\alpha^2\beta\gamma\right)+\left(\beta^4+\alpha^2\gamma^2-2\alpha\beta^2\gamma\right)+\left(\gamma^4+\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta\gamma^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(\alpha^2-\beta\gamma\right)^2+\left(\beta^2-\alpha\gamma\right)^2+\left(\gamma^2-\alpha\beta\right)^2=0$$

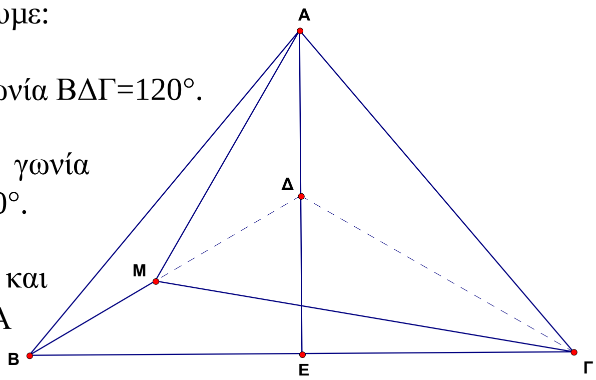
$$\Rightarrow\alpha^2-\beta\gamma=0 \quad ή \quad \beta^2-\alpha\gamma=0 \quad ή \quad \gamma^2-\alpha\beta=0$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\beta=0\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma-2\alpha\gamma-2\alpha\beta=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), η γωνία $\hat{A}=80^o$ και το ύψος του ΑΕ. Άν Μ εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\widehat{\text{ΜΒΓ}}=30^\circ$ και $\widehat{\text{ΜΓΒ}}=10^\circ$ και η ΜΒ τέμνει το ύψος ΑΕ στο σημείο Δ να αποδείξετε: (α) Το τρίγωνο ΒΔΑ και ΜΔΓ είναι ίσα. (β) Η γωνία ΑΜΓ είναι 70°.

ΛΥΣΗ



Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

Γωνία ΑΒΜ=20°, Γωνία ΔΜΓ=40° , Γωνία ΒΔΓ=120°.

Τα τρίγωνα ΒΔΑ και ΑΔΓ είναι ίσα άρα γωνία ΑΓΔ=20° και επομένως Γωνία ΔΓΜ=20°.

(α) Επειδή ΒΔ=ΔΓ , ΑΔ =κοινή πλευρά και $\angle\text{ΒΔΑ}=\angle\text{ΜΔΓ}=120^\circ$ τα τρίγωνα ΒΔΑ και ΜΔΓ είναι ίσα .

(β)Επομένως το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές και άρα η γωνία ΑΜΓ=70°.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί χ, ψ (χ,ψ>0) οι οποίοι να είναι λύση της εξίσωσης $\chi^3-\psi^3=1331$.

ΛΥΣΗ $x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) = 11^3$.

Άρα 0<y<x και $x-y$ διαιρεί το 11^3 και έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

(α) $x-y=1$ $x^2+xy+y^2=11^3$, (β) $x-y=11$ $x^2+xy+y^2=11^2$

(γ) $x-y=11^2$ $x^2+xy+y^2=11$, (δ) $x-y=11^3$ $x^2+xy+y^2=1$

από τις (β) ,(γ) και (δ) έχουμε: $x>11 \Rightarrow x^2>11^2 \Rightarrow x^2+xy+y^2>11^2$ άτοπο.

Από την (α) $\Rightarrow x=y+1$ και άρα

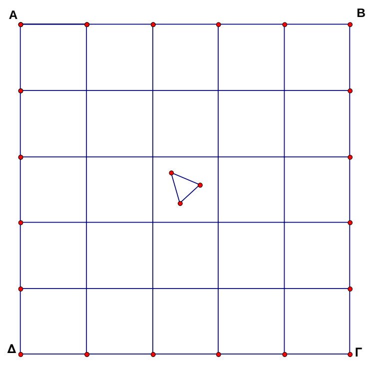
$$(y+1)^2+(y+1)y+y^2=11^3 \Rightarrow y^2+2y+1+y^2+y+y^2=11^3$$
$$\Rightarrow 3y^2+3y=1330 \Rightarrow 3y(y+1)=1330$$

Άρα το 3 δεν διαιρεί το 1330 και επομένως δεν υπάρχει λύση στους θετικούς ακεραίους

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Στο εσωτερικό ενός τετραγώνου με πλευρά 10 παίρνουμε 51 σημεία. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο με κορυφές 3 σημεία από τα δοσμένα 51 σημεία, του οποίου τα εμβαδόν να είναι μικρότερο ή ίσο του 2.

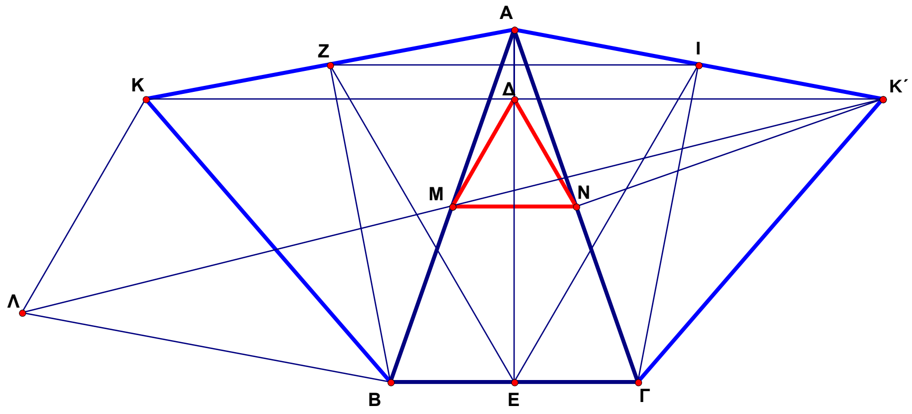
ΛΥΣΗ

Αν χωρίσουμε το αρχικό τετράγωνο σε 25 τετράγωνα πλευράς 2 , τότε χρησιμοποιώντας την αρχή της περιστερωνοφωλιάς θα υπάρχει τουλάχιστον ένα τετράγωνο πλευράς 2 που περιέχει τουλάχιστον 3 από τα δεδομένα 51 σημεία. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι μικρότερο ή ίσο με $\frac{1}{2}2\cdot 2=2$.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με πλευρές τις ΑΓ και ΑΒ κατασκευάζουμε δύο ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{AKB}}$, $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma K'}}$ αντίστοιχα εκτός του τριγώνου ΑΒΓ. Αν Ζ, Ι, Δ, Ε, Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΚ, ΑΚ΄, ΚΚ΄, ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΝ είναι ισόπλευρο.

ΛΥΣΗ



Το τρίγωνο ΑΚΚ΄ είναι ισοσκελές το Δ μέσο της ΚΚ΄ άρα $ΑΔ \perp ΚΚ'$, επίσης

$60^\circ + \angle ΜΑΔ = 60^\circ + \angle ΝΑΔ \Rightarrow \angle ΜΑΔ = \angle ΝΑΔ$.Άρα τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΔΝ είναι ίσα και επομένως ΜΔ=ΔΝ.(1)

Προεκτείνουμε την ΜΚ΄ έτσι ώστε ΜΛ=ΜΚ.Άρα ΑΚΛΒ παραλληλόγραμμο και επομένως ΑΚ=ΒΛ=ΑΒ και ΒΚ=ΑΓ επίσης $\angle ΛΒΜ = \angle ΜΑΚ'$ άρα τα τρίγωνα ΚΛΒ και ΑΒΓ είναι ίσα και επομένως ΚΛ=ΒΓ.

Επειδή $\left.\begin{array}{l} ΔΜ = // \dfrac{ΚΛ}{2} \\ ΜΝ = // \dfrac{ΒΓ}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow ΔΜ = ΔΝ$ (2). Από τις (1) και (2) το τρίγωνο ΔΜΝ είναι ισόπλευρο.

ΕΒΔΟΜΗ ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ JBMO

(ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15,5 ΕΤΩΝ) - ΣΜΥΡΝΗ

Ιούνιος 2003

Επιμέλεια: Ευθύβουλος Λιασίδης – Ανδρέας Σαββίδης

Να λυθούν όλα τα προβλήματα Χρόνος: 4 ½ Ώρες

Πρόβλημα 1. Ένας n θετικός ακέραιος. Ένας αριθμός A έχει 2n ψηφία, από τα οποία είναι το 4 και ένας αριθμός B έχει n καθένα από τα οποία είναι το 8. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός A + 2B + 4 είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 2. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n σημεία ενός επιπέδου, ανά τρία μη συνευθειακά, με την ακόλουθη ιδιότητα: αν τα ονομάσουμε A_1, A_2, . . . A_n, με οποιαδήποτε σειρά, η τεθλασμένη γραμμή A_1 A_2 . . . A_n δεν τέμνει τον εαυτό της. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή πουν μπορεί να πάρει αριθμός n.

Πρόβλημα 3. Έστω κ ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC. Θεωρούμε τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ έτσι ώστε $C \notin \overset{\frown}{AB}$, $A \notin \overset{\frown}{BC}$ και $B \notin \overset{\frown}{CA}$. Έστω D, E και F τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ και $\overset{\frown}{AB}$, αντίστοιχα. Έστω G και H τα σημεία τομής DE με τις CB και CA, αντίστοιχα και I, J τα σημεία τομής της DF με τις BC και BA αντίστοιχα. Συμβολίζουμε τα μέσα των GH και IJ με M και N, αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις γωνιές του τριγώνου DMN συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ

β) Αν O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τρίγωνου DMN και P είναι το σημείο τομής των AD και EF να αποδείξετε ότι τα σημεία O, P, M και N βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4. Αν οι x, y, z είναι πραγματικοί μεγαλύτεροι του -1, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1+\chi^2}{1+\psi+\omega^2}+\frac{1+\psi^2}{1+\omega+\chi^2}+\frac{1+\omega^2}{1+\chi+\psi^2}\geq 2$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Οι αριθμοί A και B γράφονται ως εξής:

$$A = 4\cdot(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\ldots+10+1) = 4\cdot\frac{10^{2n}-1}{10-1}$$

$$\mathrm{B} = 8 \cdot (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) = 8 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1}$$

Τότε η παράσταση Α+2Β+4 γίνεται,

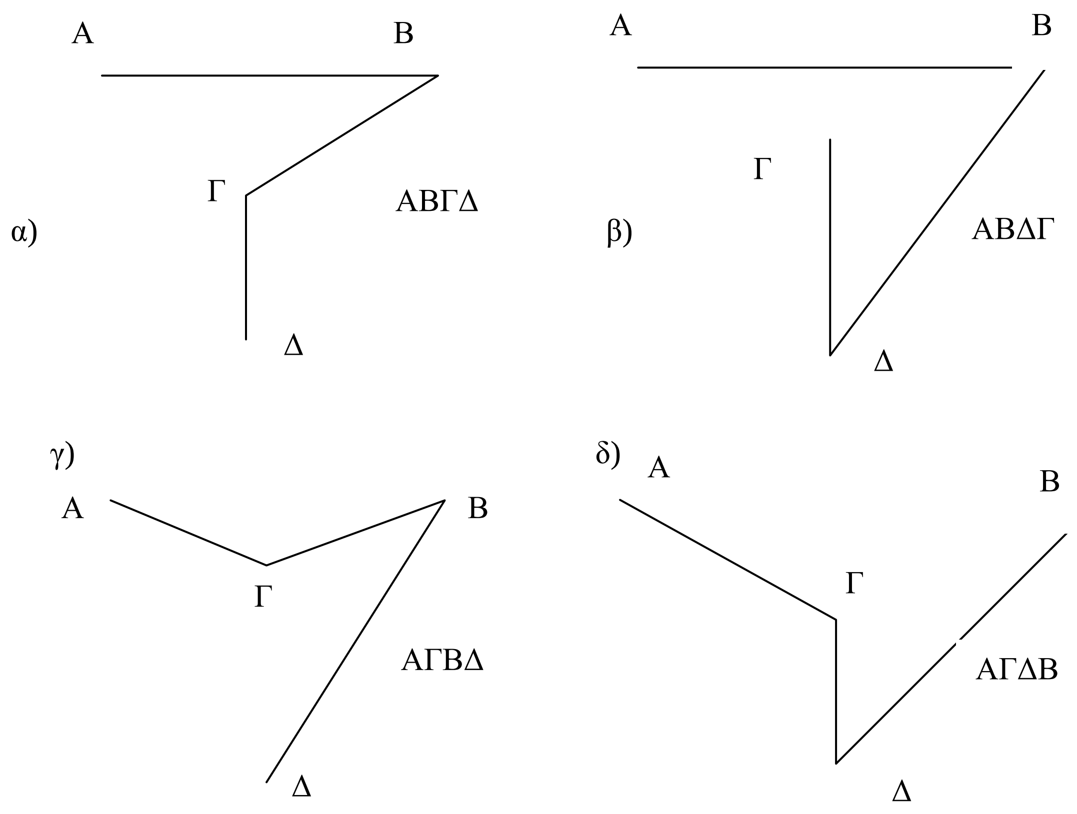
$$\mathrm{A} + 2\mathrm{B} + 4 = \frac{4}{9} \cdot (10^{2n} - 1) + \frac{16}{9} \cdot (10^n - 1) + 4 = \frac{4}{9} \cdot (10^{2n} - 1 + 4 \cdot 10^n - 4 + 9)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot (10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4) = \frac{4}{9}(10^n + 2)^2 = \left[\frac{2}{3}(10^n + 2)\right]^2$$

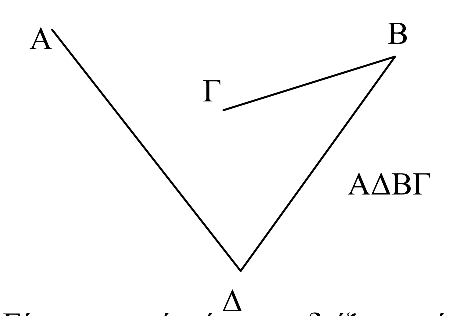
Πρόβλημα 2. Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούνται για 3 μη συνευθειακά σημεία. Αν στο επίπεδο των τριών σημείων ορίσουμε και τέταρτο σημείο θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Ι) Τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Τότε όμως οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ θα τέμνονται, αυτό όμως αντίκειται στην υπόθεση.

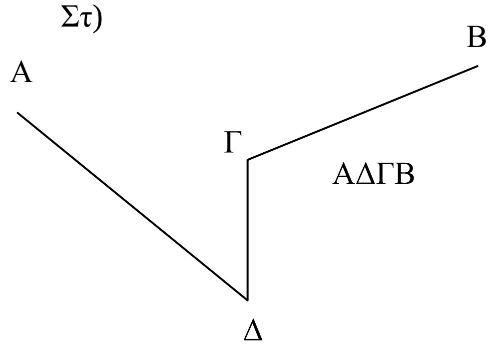
ΙΙ) Τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές μη κυρτού τετραπλεύρου. Τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούνται με όποια σειρά και αν φέρουμε την τεθλασμένη γραμμή που συνδέει τα 4 σημεία.



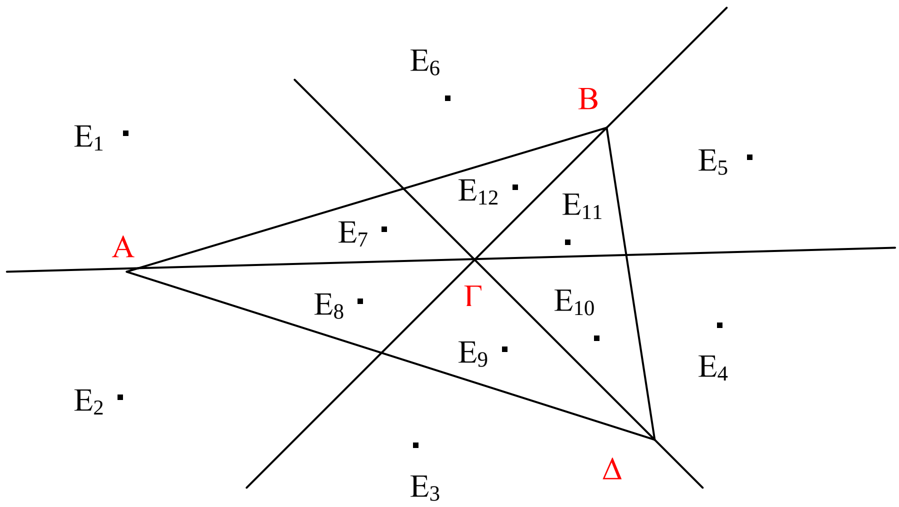
ε)



Στ)



Είναι αρκετό τώρα να δείξουμε ότι αν έχουμε πέντε σημεία στο ίδιο επίπεδο τότε τα τέσσερα θα είναι κορυφές κυρτού τετραπλεύρου οπότε σύμφωνα με την παρατήρηση (Ι) δεν θα ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΔΒ λαμβάνουμε σημείο Γ και φέρουμε τις ευθείες ΑΓ, ΒΓ και ΔΓ



Ένα πέμπτο σημείο Ε μπορεί να ορισθεί σε μια από τις 12 περιοχές που έχει χωρισθεί το επίπεδο του τριγώνου ΑΔΒ. Τότε θα έχουμε τα ακόλουθα 12 κυρτά τετράπλευρα E_1ΑΓΒ, E_2ΔΓΑ, E_3ΔΓΑ, E_4ΒΓΔ, E_5ΒΓΔ, E_6ΑΓΒ, E_7ΑΔΓ, E_8ΓΒΑ, E_9ΔΒΓ, E_{10}ΓΑΔ, E_{11}ΒΑΓ, E_{12}ΓΔΒ. Επομένως το n δεν μπορεί να πάρει μεγαλύτερη τιμή από το 4.

Πρόβλημα 3.

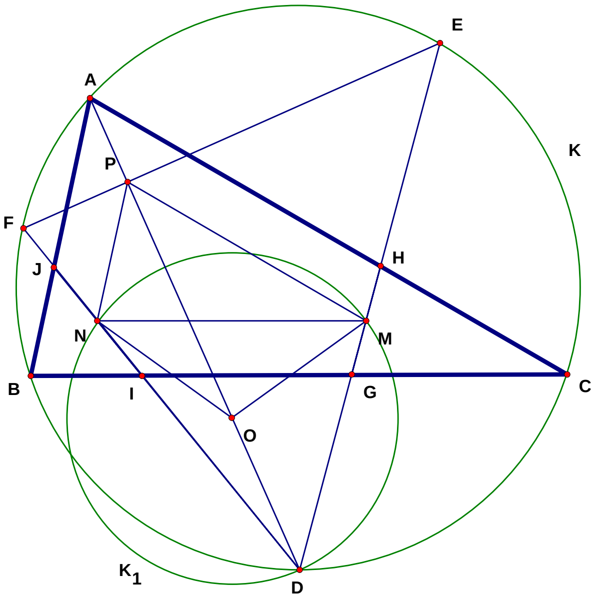
Στη λύση $(BD), (\hat{A})$....... φανερώνει το μέτρο του τόξου ή της γωνίας ….

α) Έχουμε $(BD) = (DC) = (\hat{A}),\ (CE) = (EA) = (\hat{B}),\ (AF) = (FB) = (\hat{C}) \Rightarrow$

$$(\widehat{EDF}) = \frac{1}{2}\cdot(\hat{B}+\hat{C}) = \frac{1}{2}(180-\hat{A}) = 90-(\frac{\hat{A}}{2})\ \ (\widehat{FED}) = 90-(\frac{\hat{B}}{2}),\ \ (\widehat{DFE}) = 90-\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$$

Επίσης $\widehat{EHA} = \widehat{HDA} + \widehat{HAD}$. (εξωτερική γωνιά του τριγώνου ADH).

$\Rightarrow (\widehat{EHA}) = \frac{1}{2}\cdot(AE+CD) = \frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{1}{2}(BD+CE) = (\widehat{CZE})$. Άρα το τρίγωνο CHZ είναι ισοσκελές . ($CH = CZ$)



Εφ΄όσον CF διχοτόμος της γωνιάς C το μέσο M της HZ βρίσκεται πάνω στη CF. Είναι δε $CM \perp HZ$. Άρα $(\widehat{EMF}) = 90°$. Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο θα Έχουμε $(\widehat{FNE}) = 90^0$. Έτσι τα σημεία E, F, N, M βρίσκονται πάνω σε κύκλο Κ, με διάμετρο EF. Άρα $(\widehat{DNM}) = (\widehat{DEF}) = 90^0 - (\frac{\hat{B}}{2})$ και $(\widehat{DMN}) = (\widehat{DFE}) = 90^0 - (\frac{\hat{C}}{2})$ (εξωτερικές γωνιές του εγγεγραμμένου $EFNM$)

β) Έχουμε $AB \cap EF = K$ και $AC \cap EF = L$. Όπως προηγουμένως στο μέρος (α) θα έχουμε: $(\widehat{APK}) = (\widehat{APL}) = 90^0$ και $(\widehat{FPN}) = 90^0 - (\frac{\hat{A}}{2})$, $(\widehat{EPM}) = 90^0 - (\frac{A}{2})$. Άλλα $(\widehat{AKP}) = (\widehat{ALP}) = 90 - (\frac{\hat{A}}{2})$. Έτσι ΑΓ//ΡΜ και ΑΒ//ΡΝ άρα $(\widehat{MPN}) = (\widehat{BAC}) = (\hat{A})$.

Το τρίγωνο DMN είναι οξυγώνιο και έτσι το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου περί αυτό κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό του. $(\widehat{MDN}) = 90^0 - (\frac{\hat{A}}{2}) \Rightarrow (\widehat{MON}) = 180^0 - (\hat{A})$ άρα $(\widehat{MON}) + (\widehat{MPN}) = 180°$. Επομένως το τετράπλευρο $OMPN$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Πρόβλημα 4.

Έχουμε

$$(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{y^2+1}{2} \Rightarrow \frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{1+x^2}{1+z^2+\frac{1+y^2}{2}}$$

Άρα $\dfrac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \dfrac{1+y^2}{1+x^2+\dfrac{1+z^2}{2}} \Rightarrow \dfrac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \dfrac{1+z^2}{1+y^2+\dfrac{1+x^2}{2}}$.

Θέτουμε $a=1+x^2$, $\beta=1+y^2$, $\gamma=1+z^2$ και η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$$\frac{\alpha}{\gamma+\dfrac{\beta}{2}}+\frac{\beta}{\alpha+\dfrac{\gamma}{2}}+\frac{\gamma}{\beta+\dfrac{\alpha}{2}} \geq 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2\gamma+\beta}+\frac{\beta}{2\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{2\beta+\alpha} \geq 1 \ldots (1) \quad \alpha,\beta,\gamma>0$$

Θέτουμε Α = 2γ + β, Β = 2α + γ, Γ = 2β + α.

Τότε $\alpha=\dfrac{\Gamma+4\mathrm{B}-2\mathrm{A}}{9}$, $\beta=\dfrac{\mathrm{A}+4\Gamma-2\mathrm{B}}{9}$, $\gamma=\dfrac{\mathrm{B}+4\mathrm{A}-2\Gamma}{9}$ και η (1) γίνεται:

$$\frac{\Gamma+4\mathrm{B}-2\mathrm{A}}{\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{A}+4\Gamma-2\mathrm{B}}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{B}+4\mathrm{A}-2\Gamma}{\Gamma} \geq 9 \Rightarrow \frac{\Gamma}{\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}+4\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}+\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right) \geq 15,$$

Αλλά $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma>0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}+\dfrac{\mathrm{B}}{\Gamma}+\dfrac{\Gamma}{\mathrm{A}} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{A.B.}\Gamma}{\mathrm{B.}\Gamma\mathrm{.A}}}=3$, (Α.Μ ≥ Γ.Μ)

$$\Rightarrow \frac{\Gamma}{\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}+4\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}+\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right) \geq 3+12=15$$

$$\frac{\Gamma+4\mathrm{B}-2\mathrm{A}}{\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{A}+4\Gamma-2\mathrm{B}}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{B}+4\mathrm{A}-2\Gamma}{\Gamma} \geq 9 \Rightarrow \frac{\Gamma}{\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}+4\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}+\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right) \geq 15$$

Αλλά, $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma>0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}+\dfrac{\mathrm{B}}{\Gamma}+\dfrac{\Gamma}{\mathrm{A}} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{A.B.}\Gamma}{\mathrm{B.}\Gamma\mathrm{.A}}}=3$, (Α.Μ ≥ Γ.Μ)

$$\Rightarrow \frac{\Gamma}{\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}+4\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}+\frac{\Gamma}{\mathrm{B}}+\frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right) \geq 3+12=15$$

20η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ (BMO)

ΤΙΡΑΝΑ, ΑΛΒΑΝΙΑ

Μάιος 2003 Χρόνος: 4 ½ Ώρες

Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Θεόκλητος Παραγυιού

<u>Να λυθούν και τα τέσσερα προβλήματα.</u>

Πρόβλημα 1. Υπάρχει σύνολο Β με στοιχεία 4004 διαφορετικούς θετικούς ακεραίους τέτοιο ώστε για κάθε υποσύνολο Α του Β με 2003 στοιχεία, το άθροισμα των στοιχείων του Α να μην διαιρείται από τον αριθμό 2003;

Πρόβλημα 2. Έστω ABC τρίγωνο με $\left(AB\right)\neq\left(AC\right)$και έστω D το σημείο που η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC στο A τέμνει την ευθεία BC.Εάν E,F τα σημεία των μεσοκαθέτων των τμημάτων AB ,AC αντίστοιχα ,έτσι ώστε BE και CF να είναι κάθετες στο BC,να αποδείξετε ότι τα σημεία D,E,F είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: Q \to R$ για τις οποίες ισχύει:

(i) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)\cdot f(y) - x - y + x\cdot y$, για κάθε $x, y \in Q$.

(ii) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$, για κάθε $x \in Q$.

(iii) $f(1)+1\rangle 0$.

Πρόβλημα 4. Έστω m,n σχετικά πρώτοι περιττοί ακέραιοι αριθμοί .Ένα ορθογώνιο ABCD με (AB)=m και (AD)=n διαμερίζεται σε $m\cdot n$ μοναδιαία τετράγωνα. Ορίζουμε με $A_1, A_{2,} A_3, ..., A_k$ τα διαδοχικά σημεία τομής της διαγωνίου AC με τις πλευρές των μοναδιαίων τετραγώνων $\left(A_1 \equiv A, A_k \equiv C\right)$. Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{j=1}^{k-1}\left(-1\right)^{j+1}\left(A_j A_{J+1}\right) = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m\cdot n}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Υπάρχει σύνολο Β με στοιχεία 4004 διαφορετικούς θετικούς ακεραίους τέτοιο ώστε για κάθε υποσύνολο Α του Β με 2003 στοιχεία, το άθροισμα των στοιχείων του Α να μην διαιρείται από τον αριθμό 2003;

ΛΥΣΗ.

Η απάντηση είναι ότι υπάρχει Έστω C να είναι ένα σύνολο με στοιχεία 2002 διακριτούς ακεραίους καθένας από τους οποίους είναι ισότιμος 1mod2003, δηλαδή για κάθε $n \in C$, $n \equiv 1(\bmod 2003)$, και έστω D να είναι ένα σύνολο με στοιχεία 2002 διακριτούς ακεραίους καθένας από τους οποίους είναι ισότιμος 2mod2003, δηλαδή για κάθε $n \in D$, $n \equiv 2(\bmod 2003)$. Ορίζουμε $B = C \cup D$ και θεωρούμε ένα υποσύνολο Α του Β με 2003 στοιχεία. Έστω ότι το σύνολο $A \cap D$ έχει k στοιχεία ,$1 \le k \le 2002$. Τότε το σύνολο $A \cap C$ έχει 2003-k στοιχεία. Το άθροισμα των ακεραίων στο Α είναι:

$S \equiv 2k + 2003 - k\left(\bmod 2003\right) \equiv 2003 + k\left(\bmod 2003\right) \neq 0\left(\bmod 2003\right)$ και άρα το S δεν είναι διαιρετό με το 2003.

Πρόβλημα 2. Έστω ABC τρίγωνο με $\left(AB\right) \neq \left(AC\right)$ και έστω D το σημείο που η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC στο A τέμνει την ευθεία BC.Εάν E,F τα σημεία των μεσοκαθέτων των τμημάτων AB ,AC αντίστοιχα ,έτσι ώστε BE και CF να είναι κάθετες στο BC,να αποδείξετε ότι τα σημεία D,E,F είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ.

Τα τρίγωνα DBE και DCF είναι και τα δύο ορθογώνια και επομένως είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι αυτά είναι όμοια ή ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε την αναλογία:

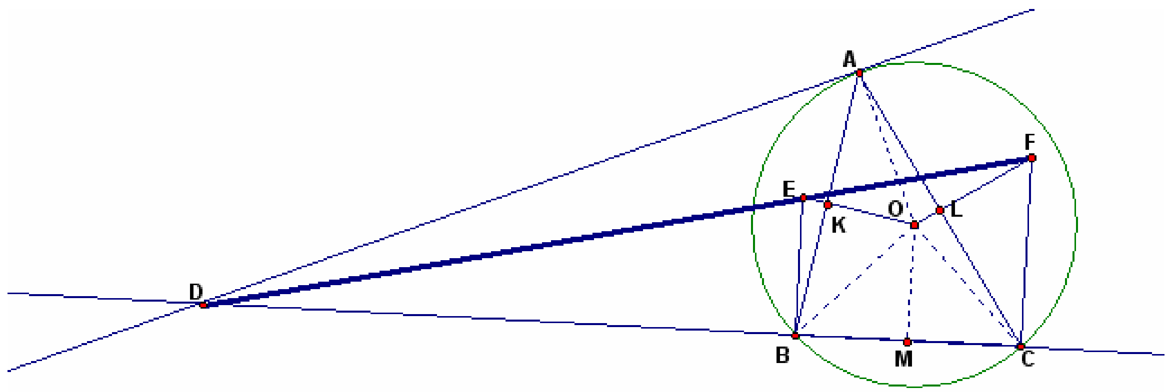
$$\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{CF} \quad (1)$$

Αφού AD είναι η εφαπτομένη προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC έχουμε $\angle DAB = \angle ACB$ και άρα τα τρίγωνα DAB και DCA είναι όμοια. Άρα έχουμε:

$$\frac{DB}{DA} = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{c^2}{b^2}, (2)$$

όπου $AB = c$ και $AC = b$. Έστω το μέσο M της πλευράς BC.Τότε από το ορθογώνιο τραπέζιο EBMO έχουμε ότι: $\angle BEK = 180^\circ - \angle EOM = \angle KBM = \angle ABC = \angle B$.Όμοια βρίσκουμε ότι: $\angle OFC = \angle C$. Από τα τρίγωνα BEK και CLF έχουμε $BE \cos B = \frac{c}{2}$

$, CF\cos C=\dfrac{b}{2}$ και άρα $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{\cos C}{\cos B}$ (3). Από τα τρίγωνα OBK και OCL έχουμε: $R\cos B=\dfrac{b}{2}, R\cos C=\dfrac{c}{2}$ και $\dfrac{\cos C}{\cos B}=\dfrac{c}{b}(4)$. Από (3) και (4) βρίσκουμε: $\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{c}{b}=\dfrac{c^2}{b^2}$ (5) .Από (2) και (5) αποδεικνύεται η (1) και άρα τα σημεία D, E, F είναι συνευθειακά.



Πρόβλημα 3. Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f:Q\to R$ για τις οποίες ισχύει:

(i) $f(x+y)-yf(x)-xf(y)=f(x)\cdot f(y)-x-y+x\cdot y$, για κάθε $x,y\in Q$.

(ii) $f(x)=2f(x+1)+2+x$, για κάθε $x\in Q$.

(iii) $f(1)+1\rangle 0$.

ΛΥΣΗ

Η συνθήκη (1) γράφεται : $f(x+y)+x+y=\left[f(x)+x\right]\left[f(y)+y\right]$ (4)

Για $x=y=\dfrac{x}{2}$ στην (4) έχουμε : $f(x)+x=\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{x}{2}\right]^2\geq 0 \quad \forall x\in Q$.

Άρα $f(x)+x\geq 0$ και για $x=1$ στην τελευταία έχουμε: $f(1)+1\geq 0$ όμως από την (3) $f(1)+1>0$ και άρα $f(x)+x>0 \quad \forall x\in Q$.

Από την (2) για $x=0$ έχουμε : $f(0)=2f(1)+2$ (5).

Η (1) για $x=1, y=0$ γίνεται: $f(1)+1=\left[f(1)+1\right]\cdot f(0)$ και λόγω της (5)

Έχουμε: $f(1)+1=2\left[f(1)+1\right]^2 \Rightarrow \left[f(1)+1\right]\left[2f(1)+1\right]=0$ και λόγω της (3) έπεται ότι $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ και από την (2) για $x=0 \Rightarrow f(0)=1$.

Παρατηρούμε ότι η (4) για $y=x$ έχουμε : $f(2x)+2x=\left[f(x)+x\right]^2$

Θα αποδείξουμε ότι επαγωγικά ισχύει: $f(nx)+nx=\left[f(x)+x\right]^n$ (6) $\forall x\in Q$ και $\forall n\in N$.

Πράγματι:
$f\left[(n+1)x\right]+\left(n+1\right)x=f(nx+x)+nx+x=\left[f\left(nx\right)+nx\right]\left[f(x)+x\right]=\left[f(x)+x\right]^{n+1}$, $\forall n\in N$.

Η σχέση (6) ισχύει και $n\in Z^-$.Θέτουμε όπου x το $-x$ άρα έχουμε:

$f(-xn)+n(-x)=\left[f(-x)+\left(-x\right)\right]^n$ και για $-n$ έχουμε:

$f(-xn)+n(-x)=\left[f(x)+\left(x\right)\right]^{-n}$ από τις τελευταίες σχέσεις αρκεί να δείξουμε ότι: $\left[f(-x)+\left(-x\right)\right]^n=\left[f(x)+\left(x\right)\right]^{-n}$ (7).

Από την (4) για $y=-x$ έχουμε:

$f(0)=\left[f(x)+x\right]\left[f(-x)+(-x)\right]\Rightarrow f(-x)+(-x)=\left[f(x)+x\right]^{-1}$ και άρα

$\left[f(-x)+\left(-x\right)\right]^n=\left[f(x)+\left(x\right)\right]^{-n}$,επομένως ισχύει $f(nx)+nx=\left[f(x)+x\right]^n$, $\forall n\in Z$.

Για $n=1$ και $x=\dfrac{m}{k}, k\neq 0$ έχουμε: $f\left(\dfrac{m}{k}\right)+\dfrac{m}{k}=\left[f\left(\dfrac{m}{k}\right)+\dfrac{m}{k}\right]$

Άρα $f\left(\dfrac{m}{k}\right)+\dfrac{m}{k}=\left[f\left(m\dfrac{1}{k}\right)+m\dfrac{1}{k}\right]=\left[f\left(\dfrac{1}{k}\right)+\dfrac{1}{k}\right]^m$ (8)

Για $x=\dfrac{1}{n}$ η (6) δίνει: $f(1)+1=\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\right]^n \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}=\left[f(1)+1\right]^{\frac{1}{n}}$ και άρα

$f\left(\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ και τελικά λόγω της (8) έχουμε για $n=k$

$f\left(\dfrac{m}{k}\right)+\dfrac{m}{k}=\left[f\left(m\dfrac{1}{k}\right)+m\dfrac{1}{k}\right]=\left[\dfrac{1}{2}\right]^{\frac{m}{k}}$ άρα $f(x)+x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Rightarrow f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-x$, $\forall x\in Q.$

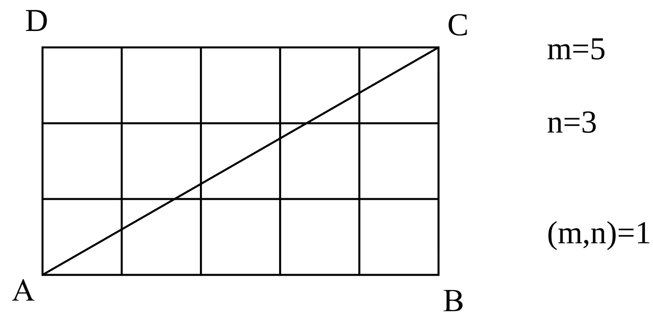
Πρόβλημα 4. Έστω m,n σχετικά πρώτοι περιττοί ακέραιοι αριθμοί .Ένα ορθογώνιο ABCD με (AB)=m και (AD)=n διαμερίζεται σε $m\cdot n$ μοναδιαία τετράγωνα. Ορίζουμε με $A_1, A_{2,} A_3,..., A_k$ τα διαδοχικά σημεία τομής της διαγωνίου AC με τις πλευρές των μοναδιαίων τετραγώνων $\left(A_1\equiv A, A_k\equiv C\right)$. Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\left(A_jA_{J+1}\right)=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m\cdot n}$$

ΛΥΣΗ.

Αφού m και n είναι σχετικά πρώτοι χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m\geq n$.Λέμε ότι ένα τμήμα A_pA_{p+1} είναι ***πρώτου τύπου*** αν τα A_p και

A_{p+1} είναι σημεία τομής της AC με τις κάθετες γραμμές του κιγκλιδώματος .Όταν τα A_p ή A_{p+1} είναι σημεία τομής της AC με οριζόντια γραμμή του κιγκλιδώματος λέμε ότι το τμήμα A_pA_{p+1} είναι ***δευτέρου τύπου.***



Υπάρχουν m-1 σημεία τομής της AC με τις κάθετες γραμμές του κιγκλιδώματος. Αφού (m,n)=1 όλα αυτά τα σημεία είναι διακριτά και άρα η AC διαμερίζεται σε m+n-1 τμήματα. Αφού ο πρώτος όρος του αθροίσματος έχει πρόσημο + και ο m+n-1 είναι περιττός οι θετικοί όροι είναι ένας περισσότεροι από τους αρνητικούς .Παρατηρούμε ότι αν A_p είναι σημείο τομής του AC με οριζόντια γραμμή του κιγκλιδώματος τότε τα τμήματα $A_{p-1}A_p$ και A_pA_{p+1} είναι του δεύτερου τύπου και αυτά έχουν αντίθετα πρόσημα .

Επομένως τα τμήματα του πρώτου τύπου που έχουν πρόσημο +είναι ένα περισσότερα από τα τμήματα του πρώτου τύπου που έχουν πρόσημο -.

Άρα τα τμήματα του πρώτου τύπου συνεισφέρουν στο άθροισμα ακριβώς το μήκος ενός τέτοιου τμήματος το οποίο ισούται με $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$.

Για σταθερά $k=1,2,...,n-1$ γράφουμε $km=t_kn+r_k$,όπου $0<n_k<n.$ Τότε τα σημεία τομής της AC με την οριζόντια γραμμή αριθμού k (δεν μετράμε την AB) έχουν συντεταγμένες $\left(t_k+\frac{\sqrt{k}}{n},k\right)$ στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το A και θετικούς ημιάξονες τις ημιευθείες που περιέχουν τα AB και AD.Το σημείο αυτό είναι το σημείο με αριθμό $s=k+t_k-1.$ Αυτό δείχνει ότι όταν ο $k+t_k$ είναι άρτιος τότε το $A_{s-1}A_s$ έχει πρόσημο – και το A_sA_{s+1} έχει πρόσημο + και για τον ίδιο λόγο όταν ο $k+t_k$ είναι περιττός τότε το $A_{s-1}A_s$ έχει πρόσημο + και το A_sA_{s+1} έχει πρόσημο -.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν ο r_k είναι άρτιος και ο $k+t_k$ είναι άρτιος ενώ αν ο r_k είναι περιττός και ο $k+t_k$ είναι περιττός. Πράγματι ,αν ο k είναι άρτιος τότε ο t_kn+r_k είναι άρτιος το οποίο σημαίνει ότι οι αριθμοί r_k και t_k είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί .Αν ο k είναι περιττός τότε ο t_kn+r_k είναι περιττός το οποίο σημαίνει ότι αν ο αριθμός r_k είναι άρτιος τότε ο t_k είναι περιττός ενώ αν ο αριθμός r_k είναι περιττός τότε ο t_k είναι άρτιος .Και στις δύο περιπτώσεις οι αριθμοί r_k και $k+t_k$ είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί .

Από την άλλη μεριά αφού $pm\equiv qm(\bmod n)$ ισχύει $p\equiv q\left(\bmod n\right)$,ο r_k διατρέχει όλα τα υπόλοιπα modn. Επομένως όταν ο r_k είναι άρτιος τότε

$$-A_{s-1}A_s+A_sA_{s+1}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\left(\frac{r_k+\left(n-r_k\right)}{n}\right)$$

και όταν ο r_k είναι περιττός τότε $+A_{s-1}A_s-A_sA_{s+1}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\left(\frac{r_k-\left(n-r_k\right)}{n}\right)$

Άρα έχουμε: $$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}A_jA_{J+1}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\left(1+\sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-4s}{n}+\sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{4s-2-n}{n}+\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}.$$

Η Κυπριακή αποστολή στη Βαλκανική Ολυμπιάδα Μαθηματικών που έγινε στην Αλβανία τον Μάιο του 2003.

ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

I.M.O. 2003 - Τόκιο, Ιαπωνία

Ιούλιος 2003

Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Θεόκλητος Παραγυιού

Προβλήματα Πρώτης Ημέρας

Να λυθούν και τα τρία προβλήματα. Χρόνος: 4 ½ Ώρες

Πρόβλημα 1. Έστω A ένα υποσύνολο του συνόλου $S=\{1,2,...,1000000\}$ που περιέχει ακριβώς 101 στοιχεία .Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $t_1,t_2,...,t_{100}$ στο S τέτοιοι ώστε τα σύνολα

$A_j=\{x+t_j\ /\ x\in A\}$,για $j=1,2,...,100$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους .

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b) για τα οποία ο αριθμός $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ είναι θετικός ακέραιος .

Πρόβλημα 3. Δίνεται ένα κυρτό εξάγωνο στο οποίο οποιεσδήποτε δύο απέναντι πλευρές του έχουν την ακόλουθη ιδιότητα: Η απόσταση μεταξύ των μέσων των πλευρών αυτών ισούται με $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ επί το άθροισμα των μηκών τους. Να αποδείξετε ότι όλες οι γωνίες του εξαγώνου είναι ίσες. (Ένα κυρτό εξάγωνο ABCDEF έχει τρία ζεύγη απέναντι πλευρών: AB και DE,BC και EF, CD και FA)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Έστω A ένα υποσύνολο του συνόλου $S=\{1,2,...,1000000\}$ που περιέχει ακριβώς 101 στοιχεία .Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $t_1,t_2,...,t_{100}$ στο S τέτοιοι ώστε τα σύνολα $A_j=\{x+t_j\ /\ x\in A\}$,για $j=1,2,...,100$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους .

Λύση

Θεωρούμε το σύνολο $D=\{x-y/x,y\in A\}$. Υπάρχουν το πολύ 101·100+1=10101 στοιχεία στο D. Δύο σύνολα $A+t_i$ και $A+t_j$ έχουν μη κενή τομή αν και μόνο αν t_i-t_j ανήκει στο D. Άρα χρειάζεται να διαλέξουμε τα 100 στοιχεία με τέτοιο τρόπο ώστε η διαφορά τους να μη ανήκει στο D. Τώρα εκλέγουμε τα στοιχεία αυτά με επαγωγή. Διαλέγω ένα στοιχείο τυχαία. Υποθέτουμε ότι k στοιχεία , $k\le 99$,είναι ήδη διαλεγμένα. Ένα στοιχείο x το οποίο έχει ήδη επιλεγεί μας εμποδίζει να διαλέξουμε κάθε στοιχείο από το σύνολο $x+D$. Επομένως μετά από k στοιχεία που έχουμε διαλέξει το πολύ $10101k\le 999999$ στοιχεία δεν μπορούν να επιλεγούν. Άρα μπορούμε να εκλέξουμε ένα στοιχείο περισσότερο.

Σημείωση. Το μέγεθος $|S|=10^6$ δεν έχει ιδιαίτερη σημασία.

Γενίκευση προβλήματος. Αν A είναι ένα υποσύνολο με k στοιχεία του $S=\{1,2,...,n\}$ και m είναι ένας θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $n>(m-1)\left(\binom{k}{2}+1\right)$ τότε υπάρχουν $t_1,t_2,...,t_m\in S$ τέτοιοι ώστε τα σύνολα $A_j=\{x+t_j/x\in A\}$,για $j=1,2,...,m$ να είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους .

Λύση

Θεωρούμε το σύνολο $B=\{|x-y|x,y\in A\}$. Παρατηρούμε ότι $|B|\le\binom{k}{2}+1$.

Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι υπάρχουν $t_1,...,t_m\in S$ τέτοια ώστε $|t_i-t_j|\notin B$ για κάθε διαφορετικά i και j. Θα διαλέξουμε τα $t_1,...,t_m$ επαγωγικά . Διαλέγουμε 1 ως t_1 ,και θεωρούμε το σύνολο $C_1=S\setminus(B+t_1)$. Επομένως έχουμε:

$$|C_1|\ge n-\left(\binom{k}{2}+1\right)>(m-2)\left(\binom{k}{2}+1\right).$$

Για $1\le i<m$, υποθέτουμε ότι $t_1,...,t_i$ και C_i είναι ήδη ορισμένα και ότι $|C_i|>(m-i-1)\left(\binom{k}{2}+1\right)\ge 0$. Διαλέγουμε το ελάχιστο στοιχείο μέσα στο C_i ως t_{i+1} και θεωρούμε το σύνολο $C_{i+1}=C_i\setminus(B+t_{i+1})$.

Τότε $|C_{i+1}|\ge|C_i|-\left(\binom{k}{2}+1\right)>(m-i-2)\left(\binom{k}{2}+1\right)\ge 0$.

Είναι φανερό ότι τα $t_1,...,t_m \in S$ ικανοποιούν την συνθήκη που θέλουμε.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b) για τα οποία ο

αριθμός $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ είναι θετικός ακέραιος.

Λύση 1

Έστω ότι (a,β) είναι ένα ζευγάρι θετικών ακεραίων που ικανοποιούν την συνθήκη.

Επειδή $k=\dfrac{a^2}{(2ab^2-b^3+1)}>0$,έχουμε $2ab^2-b^3+1>0 \Rightarrow a>\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{2b^2}$ και άρα

$a \geq \dfrac{b}{2}$.

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο ,συμπεραίνουμε ότι για $k \geq 1$,ή $a^2 \geq b^2(2a-b)+1$ δηλαδή $a^2 > b^2(2a-b) \geq 0$. Άρα $a>b$ ή $2a=b$. (*)

Τώρα θεωρούμε τις δύο λύσεις a_1, a_2 της εξίσωσης $a^2-2kb^2a+k(b^3-1)=0$

για σταθερούς k και b ,και υποθέτουμε ότι ένας από αυτούς είναι ακέραιος .Τότε και ο άλλος είναι επίσης ακέραιος επειδή $a_1+a_2=2kb^2$.Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_1 \geq a_2$ και έχουμε $a_1 \geq kb^2>0$.Άρα ,αφού $a_1 \cdot a_2 = k(b^3-1)$, παίρνουμε

$$0 \leq a_2 = \frac{k(b^3-1)}{a_1} \leq \frac{k(b^3-1)}{kb^2} < b \quad (1)$$

Από τις (1) και (*) ,συμπεραίνουμε ότι $a_2=0$ ή $a_2=\dfrac{b}{2}$ (στην τελευταία περίπτωση το b είναι άρτιος). Αν $a_2=0$,τότε $b^3-1=0$ και άρα $a_1=2k, b=1$. Αν $a_2=\dfrac{b}{2}$, τότε $k=\dfrac{b^2}{4}$ και $a_1=\dfrac{b^4}{2}-\dfrac{b}{2}$. Επομένως οι μόνες δυνατότητες είναι : $(a,b)=(2l,1)$ ή $(l,2l)$ ή $(8l^4-l,2l)$ για κάποιο θετικό ακέραιο l. Όλα αυτά τα ζευγάρια ικανοποιούν την δοσμένη συνθήκη.

__*Σημείωση*__ Ένας διαφορετικός τρόπος να δούμε την (*) είναι ο ακόλουθος Σταθεροποιούμε το $\alpha \geq 1$ και θεωρούμε την συνάρτηση $f_\alpha(b)=2ab^2-b^3+1$.Τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{4a}{3}\right]$ και φθίνουσα στο $\left[\dfrac{4a}{3},\infty\right)$. Έχουμε:

$f_\alpha(a)=a^3+1>a^2$, $f_\alpha(2a-1)=4a^2-4a+2>a^2$, $f_\alpha(2a+1)=-4a^2-4a<0$.

Άρα αν $b\geq a$ και $\dfrac{a^2}{f_a(b)}$ είναι ένας θετικός αριθμός ακέραιος ,τότε $b=2a$. Αν

$a\leq b\leq\dfrac{4a}{3}$, τότε $f_a(b)\geq f_a(a)>a^2$, και άρα $\dfrac{a^2}{f_a(b)}$ δεν είναι ακέραιος ,άτοπο, και

αν $b>\dfrac{4a}{3}$, τότε (i) Αν $b\geq 2a+1$,τότε $f_a(b)\leq f_a(2a+1)<0$ άτοπο. (ii) Αν

$b\leq 2a-1$,τότε $f_a(b)\geq f_a(2a-1)>a^2$ και άρα $\dfrac{a^2}{f_a(b)}$ δεν είναι ακέραιος, άτοπο.

Λύση 2

Αν $k=\dfrac{a^2}{\left(2ab^2-b^3+1\right)}>0$ τότε $\alpha^2-2\alpha\beta^2k=-\beta^3k+k$. Συμπληρώνοντας τέλεια τετράγωνα έχουμε:

$$\alpha^2-2\alpha\beta^2k+\beta^4k^2=\beta^4k^2-2\beta^2k\frac{\beta}{2}+\frac{\beta^2}{4}+k-\frac{\beta^2}{4}\Rightarrow\left(\alpha-\beta^2k\right)^2=\left(\beta^2k-\frac{\beta}{2}\right)^2+k-\frac{\beta^2}{4}$$

πολλαπλασιάζοντας με το 4 την τελευταία έχουμε:

$\left(2a-2\beta^2k\right)^2=\left(2\beta^2k-\beta\right)^2+4k-\beta^2\,(1)$. Θέτουμε $2\alpha-2\beta^2k=m^2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

<u>Περίπτωση 1η</u> Αν $4k-\beta^2=0\Rightarrow 2a-2\beta^2k=\pm\left(2\beta^2k-\beta\right)$

<u>Περίπτωση 1α</u> $2a-2\beta^2k=\beta-2\beta^2k\Rightarrow\boxed{\beta=2\alpha}$

<u>Περίπτωση 1β</u> $2a-2\beta^2k=2\beta^2k-\beta\Rightarrow 2\alpha=4\beta^2k-\beta$. Από την

$4k-\beta^2=0$ έχουμε ότι το β είναι άρτιος αριθμός έστω $\beta=2n$ και άρα $\boxed{a=8n^4-n}$

<u>Περίπτωση 2η</u> $4k-\beta^2>0$ άρα από την (1) έχουμε $m\geq 2\beta^2k-\beta+1$ και

$$\begin{aligned}
&4k-\beta^2=m^2-\left(2\beta^2k-\beta\right)^2\geq\left(2\beta^2k-\beta+1\right)^2-\left(2\beta^2k-\beta\right)^2\\
&=\left(2\beta^2k-\beta+1+2\beta^2k-\beta\right)\left(2\beta^2k-\beta+1-2\beta^2k+\beta\right)\geq\\
&2\left(2\beta^2k-\beta\right)+1\Leftrightarrow 4k\left(\beta^2-1\right)+\left(\beta-1\right)^2\leq 0\Rightarrow\boxed{\beta=1}
\end{aligned}$$

άρα $\boxed{\alpha = 2l}$.

Περίπτωση 3η $4k-\beta^2<0$, τότε $m \le 2\beta^2 k-\beta+1$ και

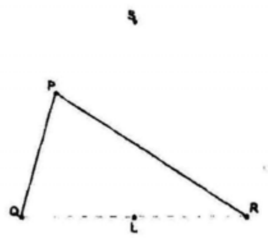
$$4k-\beta^2 = m^2-\left(2\beta^2 k-\beta\right)^2 \le \left(2\beta^2 k-\beta+1\right)^2-\left(2\beta^2 k-\beta\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4k-\beta^2 \le -2\left(2\beta^2 k-\beta\right)+1$$

Η τελευταία ανισότητα δεν έχει λύση αν την θεωρήσουμε ως δευτεροβάθμια ως προς β.

Πρόβλημα 3. Δίνεται ένα κυρτό εξάγωνο στο οποίο οποιεσδήποτε δύο απέναντι πλευρές του έχουν την ακόλουθη ιδιότητα: Η απόσταση μεταξύ των μέσων των πλευρών αυτών ισούται με $\frac{\sqrt{3}}{2}$ επί το άθροισμα των μηκών τους. Να αποδείξετε ότι όλες οι γωνίες του εξαγώνου είναι ίσες. (Ένα κυρτό εξάγωνο ABCDEF έχει τρία ζεύγη απέναντι πλευρών: AB και DE,BC και EF, CD και FA)

Λύση 1

Πρώτα θα αποδείξουμε ένα Λήμμα.

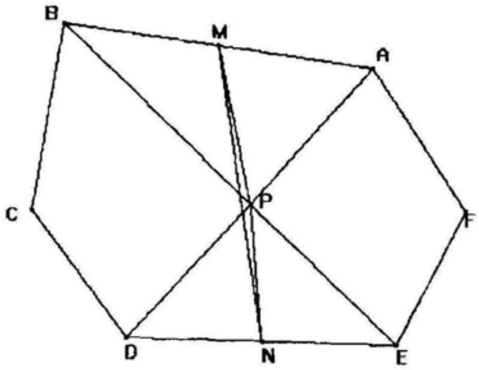


Λήμμα: Θεωρούμε ένα τρίγωνο PQR με $\angle QPR \ge 60^o$. Έστω L να είναι το μέσο του QR. Τότε $PL \le \frac{\sqrt{3}QR}{2}$,με το ίσον να ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο PQR είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη:

Έστω S να είναι το σημείο στο οποίο το τρίγωνο QRS να είναι ισόπλευρο ,όπου τα σημεία P και S να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία QR. Τότε το σημείο P βρίσκεται μέσα στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου QRS .Όμως το P βρίσκεται μέσα στον κύκλο με κέντρο το L και ακτίνα $\frac{\sqrt{3}QR}{2}$.Άρα ισχύει $PL \le \frac{\sqrt{3}QR}{2}$,με το ίσον να ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο PQR είναι ισόπλευρο.

Οι κύριες διαγώνιοι του κυρτού εξαγώνου σχηματίζουν ένα τρίγωνο αν και το τρίγωνο μπορεί να εκφυλιστεί. Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε δύο από τις τρεις αυτές διαγώνιες που να σχηματίζουν γωνία μεγαλύτερη ή ίση με 60^o. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας ,μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι διαγώνιες AD και BE του δοσμένου εξαγώνου ABCDEF ικανοποιεί την ανίσωση $\angle APB \geq 60^o$, όπου P είναι το σημείο τομής των διαγωνίων. Τότε χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα έχουμε: $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq PM + PN \geq MN$ όπου M και N είναι τα μέσα των AB και DE αντίστοιχα. Αφού από την υπόθεση ισχύει η ισότητα συμπεραίνουμε από το Λήμμα ότι τα τρίγωνα ABP και DEF είναι ισόπλευρα.



Άρα η διαγώνιος CF σχηματίζει γωνία μεγαλύτερη ή ίση με 60^o με μία από τις διαγώνιες AD και BE. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\angle AQF \geq 60^o$ όπου Q είναι η τομή των AD και CF. Όμοια μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα τρίγωνα AQF και CQD είναι ισόπλευρα. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\angle BRC = 60^o$,όπου R είναι η τομή των BE και CF. Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα όπως παραπάνω για τρίτη φορά συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα BCR και EFR είναι ισόπλευρα. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη.

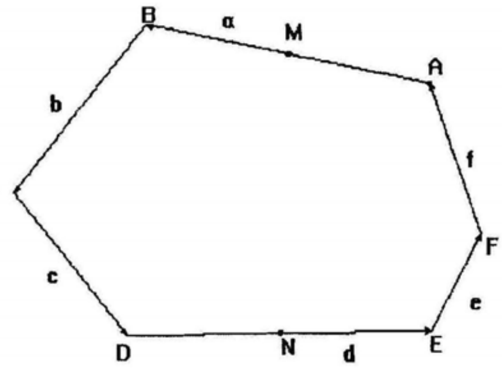
Λύση 2

Έστω ABCDEF να είναι το δεδομένο εξάγωνο και έστω $a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{BC}, \ldots, f = \overrightarrow{FA}$

Έστω M και N να είναι τα μέσα των πλευρών AB και DE , αντίστοιχα. Έχουμε

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}a + b + c + \frac{1}{2}d \quad \text{και} \quad \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}a - f - e - \frac{1}{2}d.$$

Άρα $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(b + c - e - f)$ (1)



Από την δεδομένη ιδιότητα έχουμε $\overline{MN}=\frac{\sqrt{3}}{2}(|a|+|d|)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}|a-d|$ (2)

Θέτουμε: $x=a-d, y=c-f, z=e-b$. Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\left|\overline{MN}\right|=\frac{1}{2}|e-z+y+f-e-f|\geq\frac{\sqrt{3}}{2}|x|\Rightarrow|y-z|\geq\sqrt{3}|x|,\quad(3)$$

Όμοια $|z-x|\geq\sqrt{3}|y|$ (4), $|x-y|\geq\sqrt{3}|z|$ (5)

Έχουμε $(3)\Rightarrow|y|^2-2y\cdot z+|z|^2\geq 3|x|^2$

$(4)\Rightarrow|z|^2-2z\cdot x+|x|^2\geq 3|y|^2$

$(5)\Rightarrow|x|^2-2x\cdot y+|y|^2\geq 3|z|^2$

Προσθέτοντας τις τρεις τελευταίες ανισότητες έχουμε:

$-|x|^2-|y|^2-|z|^2-2y\cdot z-2z\cdot x-2x\cdot y\geq 0\Leftrightarrow-|x+y+z|^2\geq 0$.Άρα $x+y+z=0$ και οι ισότητες διατηρούνται μέσα στις παραπάνω ανισότητες .Επομένως συμπεραίνουμε ότι: $x+y+z=0$,

$|y-z|=\sqrt{3}|x|$, $a//d//x$, $|z-x|=\sqrt{3}|y|$, $c//f//y$, $|x-y|=\sqrt{3}|z|$, $e//b//z$

Υποθέτουμε ότι PQR είναι τρίγωνο τέτοιο ώστε $\overline{PQ}=x, \overline{QR}=y, \overline{RP}=z$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\angle QPR\geq 60^o$ χωρίς βλάβη της γενικότητας .Έστω L να είναι το μέσον του QR τότε $PL = \frac{|z-x|}{2} = \frac{\sqrt{3}|y|}{2} = \frac{\sqrt{3}QR}{2}$.Αυτό δείχνει ότι το τρίγωνο PQR είναι ισόπλευρο από το Λήμμα της προηγούμενης λύσης .

Άρα έχουμε: $\angle ABC = \angle BCD = ... = \angle FAB = 120^o$.

Σημείωση

Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα πλήρη χαρακτηρισμό των εξαγώνων με αυτή την ιδιότητα .

Αυτά μπορούμε να τα κατασκευάσουμε από ένα ισόπλευρο τρίγωνο κόβοντας τις γωνίες του στο ίδιο ύψος .

Η Κυπριακή αποστολή στη Διεθνή Ολυμπιάδα Μαθηματικών (IMO) που έγινε στην Ιαπωνία τον Ιούλιο του 2003.

ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

IMO 2003 - Τόκιο, Ιαπωνία

Ιούλιος 2003

<u>Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Θεόκλητος Παραγυιού</u>

Προβλήματα Δεύτερης Ημέρας

Τόκιο, 14 Ιουλίου 2003

Να λυθούν και τα τρία προβλήματα. Χρόνος: 4 ½ Ώρες

Πρόβλημα 4. Έστω ABCD εγγεγραμμένο τετράπλευρο. Έστω P,Q και R να είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο D προς τις ευθείες BC ,CA και AB αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $PQ = QR$ αν και μόνο αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\angle ABC$ και $\angle ADC$ τέμνονται πάνω στην AC.

Πρόβλημα 5. Έστω n να είναι ένα θετικός ακέραιος και $x_1, x_2, ..., x_n$ να είναι πραγματικοί αριθμοί με $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$.

(α) Αποδείξτε ότι: $\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$.

(β) Δείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι μια αριθμητική πρόοδος.

Πρόβλημα 6. Έστω p να είναι πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας πρώτος αριθμός q τέτοιος ώστε για κάθε ακέραιο n , ο αριθμός $n^p - p$ δεν διαιρείται με το q.

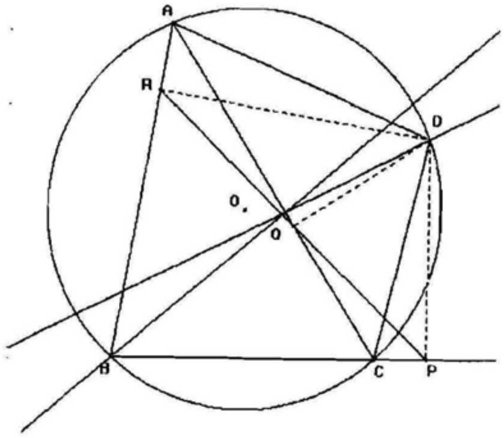
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 4. Έστω ABCD εγγεγραμμένο τετράπλευρο. Έστω P,Q και R να είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο D προς τις ευθείες BC ,CA και AB αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $PQ = QR$ αν και μόνο αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\angle ABC$ και $\angle ADC$ τέμνονται πάνω στην AC.

<u>Λύση</u> Είναι γνωστό ότι τα σημεία P,Q,R είναι συνευθειακά (από το Θεώρημα του Simson's). Επιπλέον ,αφού οι γωνίες $\angle DPC$ και $\angle DQC$ είναι ορθές ,τα σημεία D,P,Q,C είναι ομοκυκλικά και άρα $\angle DCA = \angle DPQ = \angle DPR$. Όμοια αφού τα σημεία D,Q,R,A είναι ομοκυκλικά έχουμε $\angle DAC = \angle DRP$. Άρα τα τρίγωνα DCA και DPR είναι όμοια ή $\triangle DCA \sim \triangle DPR$. Ομοίως παίρνουμε ότι $\triangle DAB \sim \triangle DQP$ και $\triangle DBC \sim \triangle DRQ$. Τότε από τις ομοιότητες έχουμε : $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DR}{DP} = \dfrac{DB \cdot \dfrac{QR}{BC}}{DB \cdot \dfrac{PQ}{BA}} = \dfrac{QR}{PQ} \cdot \dfrac{BA}{BC}$

Επομένως PQ=QR αν και μόνο αν $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC}$ (3).

Τώρα αν M το σημείο τομής της διχοτόμου της $\angle ABC$ με την AC έχουμε: $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{BA}{BC}$ (1) και αν M' το σημείο τομής της διχοτόμου της $\angle ADC$ με την AC έχουμε: $\dfrac{AM'}{M'C} = \dfrac{DA}{DC}$ (2). Από (1) ,(2) και (3) έχουμε ότι τα M και M' συμπίπτουν. Άρα αυτό συμπληρώνει την απόδειξη.



Λύση 2

Υποθέτουμε ότι οι διχοτόμοι των $\angle ABC$ και $\angle ADC$ τέμνουν την AC στα L και M αντίστοιχα .Αφού $\dfrac{AL}{CL} = \dfrac{AB}{CB}$ και $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{AD}{CD}$, οι διχοτόμοι της ερώτησης τέμνονται πάνω στην AC αν και μόνο αν $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = CB \cdot AD$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$AB \cdot CD = CB \cdot AD$ είναι ισοδύναμο με το $PQ = QR$.

Επειδή $DP \perp BC, DQ \perp AC, DR \perp AB$, οι κύκλοι με διαμέτρους DC και DA περιέχουν τα ζεύγη των σημείων P,Q και Q,R αντίστοιχα .Από αυτό βλέπουμε ότι η $\angle PDQ$ ισούται με γ ή $180^\circ - \gamma$, όπου $\gamma = \angle ACB$. Όμοια η $\angle QDR$ ισούται με α ή $180^\circ - \alpha$, όπου $\alpha = \angle CAB$. Τότε από τον νόμο των ημίτονων έχουμε $PQ = CD\eta\mu\gamma$ και $QP = AD\eta\mu\alpha$.

Άρα η συνθήκη $PQ = QR$ είναι ισοδύναμη με $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\gamma}$.

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι $\dfrac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\gamma} = \dfrac{CB}{AB}$ πάλι από τον νόμο των ημίτονων. Επομένως $PQ = QR$ αν και μόνο αν $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{CB}{AB} \Rightarrow AB \cdot CD = CB \cdot AD$

Πρόβλημα 5. Έστω n να είναι ένα θετικός ακέραιος και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ να είναι πραγματικοί αριθμοί με $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

(α) Αποδείξτε ότι: $\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right|\right)^2 \le \dfrac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - x_j\right)^2$.

(β) Δείξτε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι μια αριθμητική πρόοδος.

Λύση

(α) Αφού και τα δύο μέλη της ανισότητας είναι αμετάβλητα κάτω από κάθε μεταφορά όλων των x_i μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Έχουμε $\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right| = 2\sum_{i<j}\left(x_j - x_i\right) = 2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\left(\sum_{i,j}^{n}\left|x_i - x_j\right|\right)^2 \le 4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 4\frac{n(n+1)(n-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

Από την άλλη μεριά έχουμε: $\sum_{i,j}^{n}\left(x_i - x_j\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j + n\sum_{j=1}^{n}x_j^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

Επομένως $\left(\sum_{i,j}^{n}\left|x_i - x_j\right|\right)^2 \le \dfrac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j}^{n}\left(x_i - x_j\right)^2$

(β) Αν η ισότητα ισχύει ,τότε $x_i = k(2i-n-1)$ για κάποιο k ,το οποίο σημαίνει ότι $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι μια αριθμητική πρόοδος .

Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι η $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι μια αριθμητική πρόοδος

με διαφορά d. Τότε έχουμε $x_i = \frac{d}{2}(2i-n-1)+\frac{x_1+x_n}{2}$

Μεταφέρουμε τα x_i κατά $-\frac{x_1+x_n}{2}$ για να πάρουμε $x_i = \frac{d}{2}(2i-n-1)$ και $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ από το οποίο ισχύει η ισότητα.

Πρόβλημα 6. Έστω p να είναι πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας πρώτος αριθμός q τέτοιος ώστε για κάθε ακέραιο n , ο αριθμός $n^p - p$ δεν διαιρείται με το q.

Λύση

Αφού $\frac{p^p-1}{p-1} = 1+p+p^2+...+p^{p-1} \equiv p+1\left(\mathrm{mod}\, p^2\right)$ μπορούμε να πάρουμε τον ελάχιστο πρώτο διαιρέτη του $\frac{p^p-1}{p-1}$ ο οποίος δεν είναι ισότιμος με $1 \,\mathrm{mod}\, p^2$. Έστω q ο πρώτος αυτός διαιρέτης . Θα αποδείξουμε ότι αυτός είναι ο πρώτος που θέλουμε με την μέθοδο της <<εις άτοπον απαγωγής>>. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος n τέτοιος ώστε $n^p \equiv p(\mathrm{mod}\, q)$. Τότε έχουμε $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$ γιατί από τον ορισμό του q έχουμε

$\frac{p^p-1}{p-1} = kq, \text{όπου} \quad k \in Z$ άρα $\frac{p^p-1}{p-1} = kq \Rightarrow p^p - 1 = kq\cdot(p-1) \Rightarrow p^p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$

Όμως από την άλλη μεριά από το θεώρημα του Fermat έχουμε $p^{q-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$ επειδή q είναι πρώτος. Αφού p^2 δεν διαιρεί τον $q-1$,έχουμε ότι ο Μ.Κ.Δ των $\left(p^2, q-1\right)$ διαιρεί τον p το οποίο σημαίνει ότι $n^p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$.Άρα έχουμε ότι $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$.Αυτό σημαίνει ότι $1+p+p^2+...+p^{p-1} \equiv p(\mathrm{mod}\, q)$. Όμως από τον ορισμό του q έχουμε ότι $p \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$ το οποίο είναι άτοπο.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy , ***www.cms.org.cy***

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΤΑΚΤΙΚΑ ΜΕΛΗ

(ειδικότητα Μαθηματικών **μόνο**)

Ημερομηνία αίτησης: .... 20.......

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως **τακτικό** μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από τα καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____
(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία:

ΕΠΩΝΥΜΟ: ……………………………………….
ΟΝΟΜΑ: ………………………………………..
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ: …………………………………
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ: ……………19………..
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: ……………… Α.Κ.Α: ………………………….

ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*

B.S. ☐ ΕΤΟΣ: …………… ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ……….....……............………………
M.S. ☐ ΕΤΟΣ: …………… ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ……………………...........……..……
Ph.D. ☐ ΕΤΟΣ: …………… ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ………………….........……………..
Άλλο : ………………………....………………………………………….............………………

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ

Αριθμός και οδός : ………...…………………………………………
Πόλη: …………………………………….. Τ.Τ: …………………
Χωριό: …………………………………….
Τηλέφωνα: ..………………. / ..………………./ ..…………………

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ

Ιδιότητα - Βαθμός : ……………………………………....…………….............……………..
Σχολείο –Ίδρυμα -Υπηρεσία : ………………………...……………............………………..
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα: …...............… Ιδιωτικό Τομέα: …............…..

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ………............……………………………..……………………….

Αριθμός αποδ: …………………………… Εγγραφή: £2 / 4 Ευρώ
Ημερομηνία αποδ: ……………………….. Ετήσια Συνδρομή: £10 / 20 Ευρώ

***Να επισυνάπτουν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας**

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy , ***www.cms.org.cy***

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΕΚΤΑΚΤΑ ΜΕΛΗ

(ειδικότητα **εκτός** Μαθηματικών ή για Φοιτητές)

Ημερομηνία αίτησης: .... 20.......

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως **έκτακτο** μέλος της ΚΥ.Μ.Ε.
Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από τα καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____
(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία:

ΕΠΩΝΥΜΟ: ……………………………………….
ΟΝΟΜΑ: …………………………………………..
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ: ……………………………………
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ: ……………19………..
ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: ……………… Α.Κ.Α: ………………………….

ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*

B.S. ☐ ΕΤΟΣ: ………….. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ………......…….............………………
M.S. ☐ ΕΤΟΣ: ………….. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: …………………….............…….……
Ph.D. ☐ ΕΤΟΣ: ………….. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ……………………............……………..
Άλλο : ……………………….....……………………………………………….............………………

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ

Αριθμός και οδός : …………...…………………………………………
Πόλη: …………………………………….. Τ.Τ: …………………
Χωριό: …………………………………….
Τηλέφωνα: ..………………. / ..………………./ ..……………….

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ

Ιδιότητα - Βαθμός : ……………………………………….....…………….............……………..
Σχολείο –Ίδρυμα -Υπηρεσία : …………………………....…………….............………………..
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα: …..............… Ιδιωτικό Τομέα: …............…...

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ………...............……………………………..………………………

Αριθμός αποδ: …………………………… Εγγραφή: £2 / 4 Ευρώ
Ημερομηνία αποδ: ……………………….. Ετήσια Συνδρομή: £10 / 20 Ευρώ

***Να επισυνάπτουν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας**

20 Χρόνια Προσφοράς και Δημιουργίας στη Μαθηματική Επιστήμη και Παιδεία της Κύπρου

1983 - 2003

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36 , Γραφ. 102, Στρόβολος 2003,
Λευκωσία, Κύπρος
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy , www.cms.org.cy