ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2004 - ΤΕΥΧΟΣ ΚΑ’

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΤΕΥΧΟΣ ΚΑ'

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2004

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΜΑΚΡΙΔΗΣ – ΚΩΣΤΑΣ ΚΑΡΑΜΑΝΟΣ – ΑΝΔΡΕΑΣ ΦΙΛΙΠΠΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ – ΤΕΥΧΟΣ ΚΑ΄
ΕΚΔΟΣΗ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2004

ISSN 1450-2119

ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΩΣΤΑΣ ΚΑΡΑΜΑΝΟΣ
ΤΥΠΩΘΗΚΕ ΣΤΑ ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΑ ΑΛΩΝΕΥΤΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ ΛΤΔ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η $21^{η}$ έκδοση του ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας περιέχει όλους τους διαγωνισμούς της ΚΥΜΕ κατά τη σχολική χρονιά 2003 – 2004 , τους διεθνείς διαγωνισμούς, όλες τις ενιαίες και απολυτήριες εξετάσεις , τις εισαγωγικές εξετάσεις για τα ανώτατα και ανώτερα εκπαιδευτικά ιδρύματα της Κύπρου και της Ελλάδας, εργασίες συναδέλφων Μαθηματικών και θέματα από εκδηλώσεις και συνέδρια.

Στόχος της Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας είναι η καλύτερη ενημέρωση για θέματα Μαθηματικής Παιδείας τόσο των μαθητών όσο και των συναδέλφων Μαθηματικών. Θέλουμε να πιστεύουμε ότι με αυτή την έκδοση επιτυγχάνουμε σ' ένα μεγάλο βαθμό το σκοπό αυτό ο οποίος συμπληρώνεται με τα διάφορα σεμινάρια, συνέδρια και το καλοκαιρινό μαθηματικό σχολείο που η ΚΥΜΕ οργανώνει κάθε χρόνο.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία ενθαρρύνει τους συναδέλφους Μαθηματικούς να στέλνουν εργασίες τους οι οποίες θα είναι χρήσιμες για εκπαιδευτικούς και μαθητές και ανάλογα με το συνολικό όγκο της έκδοσης, να δημοσιεύονται στο επόμενο «Μαθηματικό Βήμα»

Ευχαριστώ όλους τους συναδέλφους οι οποίοι βοηθούν στην προώθηση του Μαθηματικού Βήματος στα σχολεία και τους μαθητές και ειδικότερα όσους βοήθησαν στην έκδοση του τεύχους αυτού.

Δρ Γρηγόρης Μακρίδης

Πρόεδρος
Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας

Δεκέμβριος 2004

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΥΛΙΟ 7

ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΣ 8
ΤΟΥ ΠΡΟΕΔΡΟΥ ΤΗΣ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ,
ΔΡΑ ΓΡΗΓΟΡΗ ΜΑΚΡΙΔΗ ΣΤΙΣ ΤΕΛΕΤΕΣ ΒΡΑΒΕΥΣΗΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ 2004

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΚΥΜΕ 10

ΧΟΡΗΓΟΙ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ 2004 13

ΕΘΝΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2004 14

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «ΖΗΝΩΝ» 15

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ 16

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ 17

MATHEU 18
ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ, ΚΙΝΗΤΡΑ ΚΑΙ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΑΛΕΝΤΩΝ ΣΕ ΕΥΡΩΠΑΪΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ 20

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 26

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΠΡΟΥ 28

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ 31
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ 42
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΧ. ΣΧΟΛΩΝ 52
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (4ωρο)

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΧ. ΣΧΟΛΩΝ 60
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (2ωρο)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠ. ΙΔΡΥΜΑΤΑ 69
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠ. ΙΔΡΥΜΑΤΑ 79
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Για αποφοίτους Τεχνικών Σχολών)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠ. ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.) 89
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Τ.Ε.Ι.

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ 100
Β’ ΚΑΙ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΜΕΣΟΥ 103
Β’ ΚΑΙ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΑΡΝΑΚΑΣ–ΑΜΜΟΧΩΣΤΟΥ 107
Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΦΟΥ 111
Β’ ΚΑΙ Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Γ’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ.. 115

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ... 119

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ 123

1ΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 ½ ΕΤΩΝ 129

2ΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 ½ ΕΤΩΝ 130

3ΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 ½ ΕΤΩΝ 131

1ΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΩΝ 132

2ΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΩΝ 133

3ΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΩΝ 134

8η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΝΕΩΝ JBMO 2004................. 136

21η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ BMO 2004 139

45η ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΙΜΟ 2004..................................... 145

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΤΑΚΤΙΚΑ ΜΕΛΗ 157

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΕΚΤΑΚΤΑ ΜΕΛΗ.. 159

ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΟ ΣΥΜΒΟΥΛΙΟ
ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ
2004 − 2006

Πρόεδρος:	Μακρίδης Γρηγόρης
Αντιπρόεδρος:	Γαγάτσης Αθανάσιος
Γενικός Γραμματέας:	Αντωνίου Σάββας
Ταμίας:	Φιλίππου Ανδρέας
Οργανωτικός Γραμματέας:	Χρυσαφίνης Μιχάλης
Βοηθός Ταμίας:	Ευσταθίου Μάριος
Σύμβουλος:	Ζαμπυρίνης Παντελής
Σύμβουλος:	Καραμάνος Κώστας
Σύμβουλος:	Καραντάνος Δημήτρης
Σύμβουλος:	Παπαγιάννη Όλγα
Σύμβουλος:	Παπαχριστοδούλου Χρίστος
Σύμβουλος:	Παραγυίου Θεόκλητος
Σύμβουλος:	Σαββίδης Ανδρέας
Σύμβουλος:	Συμεού Δώρα
Σύμβουλος:	Χριστοδούλου Αντρούλα

Εξελεγκτική Επιτροπή

Πρόεδρος:	Πέτρου Πέτρος
Σύμβουλος:	Αντωνιάδης Μάριος
Σύμβουλος:	Νικολάου Κατερίνα

ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΣ

ΤΟΥ ΠΡΟΕΔΡΟΥ ΤΗΣ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ,

ΔΡΑ ΓΡΗΓΟΡΗ ΜΑΚΡΙΔΗ ΣΤΙΣ ΤΕΛΕΤΕΣ ΒΡΑΒΕΥΣΗΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ 2004

Είναι τιμή δική μας σήμερα που αυτοί οι μαθητές μας έδωσαν την ευκαιρία να έχουμε μια προσωπική επικοινωνία μαζί τους. Αυτή η ομάδα μαθητών είναι μια ομάδα αυριανών επιστημόνων της Κυπριακής κοινωνίας και το αποτέλεσμα της πνευματικής επένδυσης που έκαναν οι εκπαιδευτικοί μας, εσείς οι γονείς αλλά ιδιαίτερα οι ίδιοι οι μαθητές. Σας διαβεβαιώ ότι αυτοί οι μαθητές θα είναι οι αυριανοί ηγέτες της Κυπριακής Κοινωνίας και Πολιτείας και ο λόγος είναι γιατί απέδειξαν ότι έχουν την ικανότητα να σκέφτονται σωστά και γρήγορα σε ένα τομέα όπως η Μαθηματική Επιστήμη η οποία εξηγεί όλο το φυσικό οικοδόμημα που ζούμε καθημερινά και λειτουργεί ως ο καταλύτης της εξέλιξης τόσο της επιστήμης όσο και της ανθρώπινης ζωής .

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία άρχισε την οργάνωση Μαθηματικών διαγωνισμών από το 1983 τόσο για την αναβάθμιση της Μαθηματικής Επιστήμης και Παιδείας όσο και για την κατάρτιση των Εθνικών Ομάδων που εκπροσωπούν την Κύπρο σε Διεθνείς Διαγωνισμούς. Η οργάνωση όλων των διαγωνισμών σε συνδυασμό με τη Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα έχουν στόχο τη διάχυση της μαθηματικής σκέψης στη μεγαλύτερη δυνατή κλίμακα αλλά και του εντοπισμού των μαθηματικών ταλέντων τα οποία θα μπορούν να εκπροσωπήσουν την Κύπρο στο εξωτερικό.

Η σημαντική διαπίστωση και γεγονός που πρέπει να γίνει βίωμα σε όλους είναι ότι «τα μαθηματικά είναι κλειδί ανάπτυξης και εξέλιξης». Η οποιαδήποτε επένδυση στα μαθηματικά μπορεί να θεωρηθεί μέρος μιας επιτυχημένης πολιτικής μιας πολιτείας.

Η επιβίωση του Κυπριακού λαού στον αυξανόμενο τεχνολογικά $21^{ο}$ αιώνα επιβάλλει αυξημένες ικανότητες αναλυτικής και κριτικής σκέψης για τις οποίες παίζουν πρωταγωνιστικό ρόλο πάντοτε τα μαθηματικά .

Η ευθύνη για αυτή την ανάγκη δεν βρίσκεται μόνο στον εκπαιδευτικό κόσμο και στους μαθηματικούς αλλά βρίσκεται επίσης στην αφύπνιση εσάς των γονιών οι οποίοι έχετε το δικαίωμα να έχετε απαιτήσεις. Μη δεχτείτε ποτέ τις μετριότητες. Πρέπει να έχετε απαιτήσεις από τα παιδιά σας και για τα παιδιά σας.
Ταυτόχρονα οι συνάδελφοι εκπαιδευτικοί πρέπει να έχουν απαιτήσεις για ποιότητα. Τα ταμπού και οι ισοπεδώσεις πρέπει επιτέλους να σταματήσουν. Οι ηγέτες της εκπαίδευσης πρέπει να πολεμούν την ισοπέδωση και να επιλέγουν το καλύτερο και ταυτόχρονα να πράττουν αυτό που πιστεύουν είναι σωστό για το καλό του συνόλου του εκπαιδευτικού συστήματος.

Να ξέρετε ότι η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, με τις περιορισμένες δυνατότητες που έχει θα πολεμήσει για να τεθούν τα Μαθηματικά στις προτεραιότητες του κράτους όπως αυτό καθορίζει και η Ευρωπαϊκή Επιτροπή με πρόσφατες αποφάσεις.

Η Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία προσπαθώντας πάντοτε για την αναβάθμιση και δημιουργία καλύτερων αποτελεσμάτων και επιτυχιών χωρίς να λέμε ότι είναι αυτοσκοπός επιλέγει , σχεδιάζει, εφαρμόζει, αξιολογεί και αναπτύσσει νέες μεθόδους και πρακτικές για ειδική εκπαίδευση των μαθητών μας.

Φέτος εφαρμόζεται ένα νέο σύστημα προετοιμασίας των μαθητών το οποίο τους συγκεντρώνει κάθε Σάββατο από το Φεβρουάριο μέχρι τον Ιούνιο. Οι μαθητές θα περάσουν από τρεις διαγωνισμούς επιλογής επιπρόσθετα του Παγκυπρίου και για επιλογή για την ΙΜΟ για μαθητές λυκείου θα ληφθεί ακόμη υπόψη ο βαθμός την ΒΜΟ. Δηλαδή, λαμβάνοντας υπόψη τον επαρχιακό διαγωνισμό οι μαθητές του Λυκείου θα περάσουν από 6 εξετάσεις για να επιλεγούν ως μέλη της Εθνικής ομάδας για την ΙΜΟ. Ελπίζουμε αυτό σε συνδυασμό με τα εντατικά μαθήματα να δημιουργήσει μια πιο ισχυρή εθνική ομάδα μαθητών για μια καλύτερη εκπροσώπηση της Κύπρου στο εξωτερικό.

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΕΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΚΥΜΕ

IMO 2004 Αθήνα
Η Κυπριακή ομάδα μαζί με τον Πρόεδρο της Ε.Μ.Ε. Νικόλαο Αλεξανδή στο Μέγαρο Μουσικής Αθηνών όπου έγινε η τελετή λήξης της Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας

Ο Σοφοκλής Ζαμπυρίνης μέλος της Κυπριακής Ομάδας στην απονομή των μεταλλίων της IMO 2004 όπου βραβεύτηκε με χάλκινο μετάλλιο

BMO 2004 Βουλγαρία
Η Κυπριακή αποστολή κατά την τελετή λήξης της Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας

HONK KONG 2004
Η Κυπριακή αποστολή κατά την τελετή λήξης

Τελετή έναρξης ΣΤ ′ Παγκύπριου Συνέδριου

Ε΄ Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα

ΧΟΡΗΓΟΙ ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ 2004

ΑΡΧΗ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΥΠΡΟΥ (Α.ΤΗ.Κ.)

ΧΡΥΣΟΣ ΧΟΡΗΓΟΣ

Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα
Καλοκαιρινό Μαθηματικό Σχολείο
Συνέδρια

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

Διεθνείς Διαγωνισμοί Μαθηματικών

ΚΥΠΡΙΑΚΑ ΔΙΥΛΙΣΤΗΡΙΑ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ

Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού Α’ Λυκείου

ΓΛΑΥΚΟΣ ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ

Βραβείο Εθνικών Ομάδων ΒΜΟ – ΙΜΟ

ΜΑΡΙΑ ΑΚΥΛΑ ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΙΔΟΥ

Αθλοθέτης Επαρχιακού Διαγωνισμού Λεμεσού

✞ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΜΟΡΦΑΚΗΣ

Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού ΖΗΝΩΝ

ΚΑΝΙΚΛΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Αθλοθέτης Επαρχιακού Διαγωνισμού Λευκωσίας

ΚΕΟ

Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού Γ΄ Γυμνασίου

ΤΡΑΠΕΖΑ ΚΥΠΡΟΥ

Αθλοθέτης Παγκύπριου Διαγωνισμού Μθηματικών

ΚΛΑΙΛΙΑ ΣΟΥΡΜΕΛΗ – ΣΚΟΤΕΙΝΟΥ

Βραβείο για τη πιο ψηλή βαθμολογία στην ΙΜΟ

ΜΟΝΗ ΚΥΚΚΟΥ – ΤΡΑΠΕΖΑ ΚΥΠΡΟΥ (παράρτημα Πάφου)

Αθλοθέτης Επαρχιακού Διαγωνισμού Πάφου

Σας Ευχαριστούμε!

ΕΘΝΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2004

Διεθνής Ολυμπιάδα Μαθηματικών (IMO)

Αθήνα, 6 – 18 Ιουλίου 2004

Κάτω των 20 ετών:

Μάρκος Χαραλαμπίδης
Αχιλλέας Κρύφτης
Βασίλης Μαληκίδης
Σοφοκλής Ζαμπυρίνης (στρατεύσιμος) **Χάλκινο Μετάλλιο**
Μιχάλης Χριστοφή
Χρίστος Ζαχαρίας (στρατεύσιμος)

Συνοδοί καθηγητές: Ανδρέας Φιλίππου και Θεόκλητος Παραγιού.

Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (JBMO)

Σερβία 11– 18 Ιουνίου 2004.

Κάτω των 15,5 ετών:

Κυριάκος Ασπρομάλλης
Μάριος Ζαχαρία
Αντρέας Κασής
Σοφία Κυριάκου
Λαμπριανή Παπαγεωργίου
Χριστόδουλος Σάββα

Συνοδοί καθηγητές: Ευθύβουλος Λιασίδης και Νίκος Γιασουμής.

Διεθνή Ολυμπιάδα

Χόνγκ-Κόνγκ 15 – 20 Ιουλίου 2004.

Κάτω των 14 ετών:

Μαρκέλα Νεοφύτου

Νικόλας Μαυρέας

Δημήτρης Σκουρουμούνης

Μαρία Πρωτοπαπά

Συνοδοί καθηγητές: Ευθύβουλος Λιασίδης και Όλγα Παπαγιάννη

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «ΖΗΝΩΝ»

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΛΥΚΕΙΟΥ

1ο Βραβείο: Μιχάλης Χριστοφή Χαραλάμπους, Λύκειο Πολεμιδιών Λεμεσού

2ο Βραβείο: Μάρκος Χαραλαμπίδης Ιωάννη, Foley's Grammar School

3ο Βραβείο: Βασίλης Μαληκίδης Γεώργιου, Λανίτειο Λύκειο Α' Λεμεσού

Έπαινος απονέμεται κατά σειρά επιτυχίας στους:

Αχιλλέας Κρύφτης Γεώργιος, Λύκειο Ακρόπολης Λευκωσίας

Χριστόδουλος Χριστοδούλου, Ανδρέας Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου Λεμεσού

Ζωσιμάς Ζωσιμάς Κωνσταντίνος, Λύκειο Αγίου Γεωργίου Λάρνακας

Λουίζα Μιχαήλ Γιώργος, Λύκειο Κύκκου Α' Λευκωσίας

Μάριος Παύλου Γεώργιος, Λύκειο Αγίου Γεωργίου Λάρνακας

Ζαχαρίας Νικολάου Μαρίνος, Λύκειο Πολεμιδιών Λεμεσού

Ελένη Βρυωνίδου Χριστάκης, Λύκειο Αγίας Φυλάξεως Λεμεσού

Δόμνα Φανίδου Χαράλαμπος, Λύκειο Α' Εθνάρχη Μακαρίου Γ' Πάφου

Προκρίθηκαν οι πιο κάτω στρατεύσιμοι:

Σοφοκλής Ζαμπυρίνης Παντελής

Χρίστος Ζαχαρίας Σίμος

Κυριάκος Ματσικάρης Γεώργιος

Χαράλαμπος Βαρνάβα Βαρνάβας

Μιχάλης Χρίστου Μανώλης

Μουρούζης Θεοδόσης Χριστόδουλος

Μαθητές που προκρίνονται για τους διαγωνισμού επιλογής:

Μιχάλης Μοουράο Joseph Menuel, Παγκύπριο Γυμνάσιο Λευκωσίας
Αποστόλης Αρσένης Νίκου, Α' Λύκειο Πάφου
Κωνσταντίνος Βασιάδης Εμμανουήλ, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου Λεμεσού
Στέλλα Βασιλείου Κυριάκου, Λύκειο Αγίου Νεοφύτου Πάφου
Ζήνα Χ''Βασιλείου Μιχάλη, Λανίτειο Λύκειο Α' Λεμεσού
Νικόλας Παναγή Παναγιώτη, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου Λεμεσού
Αναστάσης Κελίρης Παναγιώτη, Παγκύπριο Λύκειο Λάρνακας
Μηνάς Ιακώβου Χαράλαμπου, Λύκειο Αγίου Νεοφύτου Πάφου
Αυγουστίνος Καδής Χριστάκη, Λύκειο Αγίου Γεωργίου Λακατάμιας
Μαρίνος Ευθυμίου Μιχαήλ, Α' Λύκειο Πάφου
Άννα Γιασουμή Κώστα, Λύκειο Εθνομάρτυρα Κυπριανού
Μαρία Παρασκευά Ηλία, Λύκειο Παραλιμνίου

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1ο Βραβείο: Σολέα Αναστασία Λεωνίδα, Λύκειο Απ. Πέτρου και Παύλου, Λεμεσός

2ο Βραβείο: Χρίστου Κωνσταντίνο Ματθαίου, Λύκειο Αγ. Φυλάξεως, Λεμεσός

3ο Βραβείο: Ρωσσίδη Μιχάλη Γεωργίου, Παγκύπριο Λύκειο, Λάρνακα

Έπαινος απονέμεται κατά σειρά επιτυχίας στους:

Χατζηπέτρου Κωνσταντίνο Ευγένιου, Λύκειο Αγ. Ιωάννη, Λεμεσός

Γουώρρεν Μαριάννα Τζών, Λύκειο Αγ. Φύλαξης, Λεμεσός

Κυριάκου Σοφία Θεμιστοκλή, Λύκειο Κύκκου Β΄, Λευκωσία

Ευθυμίου Μαρίνος Μιχάλη, Α΄ Λύκειο , Πάφος

Δράκου Νάνσια Γεωργίου, Λύκειο Αρχ. Μακαρίου Γ΄

Εύφημη μνεία στους παρακάτω:

Χαραλάμπους Χρίστο Γιαννάκη, Α΄ Λύκειο , Πάφος

Καραολίδου Λητώ Χαραλάμπους, Α΄ Λύκειο , Πάφος

Ανθής Ανδρέας Ιωάννη, Α΄ Λύκειο , Πάφος

Όλοι οι πιο πάνω μαθητές έχουν δικαίωμα συμμετοχής στον Παγκύπριο Διαγωνισμό Μαθηματικών «ΖΗΝΩΝ» για το Λύκειο.

Όσοι από τους μαθητές δεν συμπληρώνουν ηλικία 15,5 ετών μέχρι 30 Ιουνίου 2004 δικαιούνται επίσης να λάβουν μέρος στους διαγωνισμούς επιλογής για την Βαλκανιάδα κάτω των 15,5 ετών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΏΝ ΓΙΑ ΤΗ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1ο Βραβείο: Παπαγεωργίου Λαμπριανή Λάμπρου, Περιφερ.Γυμν. Ξυλοτύμπου

2ο και 3ο Βραβείο εξίσου στους:

Λιμνατίτου Υβόνη του Χρίστου, Λανίτειο Γυμνάσιο Λεμεσού

Σάββα Χριστόδουλο Στέλιου, Γυμνάσιο Γερίου

Έπαινος απονέμεται κατά σειρά επιτυχίας στους:

1. Αγαθοκλέους Ελένη Κυριάκου, Γυμνάσιο Ύψωνα
2. Ζαχαρία Μάριο Σίμου, Γυμνάσιο Αγ. Θεοδώρου Πάφου
3. Σταυρινίδη Αλέξανδρο Χριστάκη, Γυμνάσιο Αγ. Θεοδώρου Πάφου
4. Καϊμακλιώτη Ευανθία Γιώργου, Γυμνάσιο Αραδίππου

Εύφημη μνεία κατά σειρά επιτυχίας στους:

1. Ασπρομάλλη Κυριάκο Νίκου, Γυμνάσιο Γεροσκήπου
2. Ξενή Ειρήνη Ξένιου, Γυμνάσιο Σταυρού
3. Χαραλάμπους Άννα Χαράλαμπου, Γυμνάσιο Ξυλοτύμπου
4. Παναγιώτου Φειδία Σταύρου, Γυμνάσιο Ύψωνα
5. Κασής Ανδρέα Κων/νου, Γυμνάσιο Κιτίου
6. Πίτρο Παναγιώτη Ντίνου, Γυμνάσιο Απ. Παύλου, Πάφος
7. Αντωνίου Μαίρη Ελενόδωρου, Γυμνάσιο Φανερωμένης Λάρνακα
8. Χ΄΄Πολυκάρπου Μάριο Πολύκαρπου, Γυμνάσιο Διανέλλου και Θεοδότου

Όλοι οι παραπάνω μαθητές έχουν δικαίωμα συμμετοχής στους διαγωνισμούς επιλογής για την Εθνική Ομάδα που θα εκπροσωπήσει την Κύπρο στη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα για μαθητές κάτω των 15,5 ετών.

MATHEU

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ, ΚΙΝΗΤΡΑ ΚΑΙ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΑΛΕΝΤΩΝ ΣΕ ΕΥΡΩΠΑΪΚΑ ΣΧΟΛΕΙΑ (Identification, Motivation and Support of Mathematical Talets in European Schools)

Δρ Γρηγόρης Μακρίδης, Συντονιστής
Πρόεδρος Κυπριακής Μαθηματικής Εταιρείας
Πρόεδρος Ευρωπαϊκού Συνδέσμου Συντονιστών ERASMUS
Διευθυντής Διοίκησης Εισδοχής Φοιτητών, Intercollege

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Σε πολλά Ευρωπαϊκά σχολεία το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών είναι σχεδιασμένο να εξυπηρετεί τις ανάγκες του μέσου μαθητή ή του μαθητή με ειδικές ανάγκες, δίχως να παρέχεται η δυνατότητα να αναγνωρίζονται και να καλλιεργούνται οι δεξιότητες των εν δυνάμει ταλαντούχων μαθητών.
Ο σκοπός του παρόντος προγράμματος είναι να αναπτύξει μεθόδους και εκπαιδευτικά εργαλεία τα οποία θα βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς να εντοπίζουν και να ενθαρρύνουν μαθητές ταλαντούχους στα μαθηματικά, καθώς και να ενισχύσουν την απρόσκοπτη ανάπτυξή τους μέσα στα πλαίσια της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Το πρόγραμμα προσδοκά να συγκεντρώσει όλο το υπάρχον δυναμικό και να καταρτίσει ένα πλέγμα μέσω του οποίου οι κατά τόπους Εθνικές Μαθηματικές Εταιρείες και τα Πανεπιστήμια να προσέλθουν ως αρωγοί του προγράμματος. Επίσης προσδοκάτε η χρήση νέων τεχνολογιών για την ενίσχυση, την διάδοση και σταθεροποίηση των δομών συνεργασίας που θα αναπτυχθούν.

Οι κύριες δραστηριότητες του προγράμματος θα είναι:

(1) Η ανάλυση της προσαρμοστικότητας των υπαρχουσών αναλυτικών προγραμμάτων στα Ευρωπαϊκά σχολεία, ιδίως των κρατών που συμμετέχουν στο πρόγραμμα, με επίκεντρο την μέριμνα που παρέχεται στους ταλαντούχους μαθητές,

(2) Την ανάλυση των μεθόδων και εργαλείων που χρησιμοποιούνται στις Ευρωπαϊκές χώρες για την αναγνώριση, τα παρεχόμενα κίνητρα και την υποστήριξη μαθητών ταλαντούχων στα μαθηματικά.

(3) Τον σχεδιασμό μεθόδων και εργαλείων για τον εντοπισμό των εν δυνάμει ταλαντούχων μαθητών τόσο της Πρωτοβάθμιας όσο και της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Επίσης, στην επιμόρφωση εκπαιδευτικών οι οποίοι με τη σειρά τους θα είναι σε θέση να δημιουργούν τις συνθήκες ώστε να έχουν οι μαθητές τη δυνατότητα να εκδηλώσουν το

«ταλέντο» τους στα μαθηματικά (με την έννοια ταλέντο εννοούμε την δεξιότητά τους να αντιμετωπίζουν και να επιλύουν προβληματικές καταστάσεις, αλλά και να αντιλαμβάνονται τον ρόλο της θεωρητικής σκέψης).

(4) Τον σχεδιασμό ειδικών παιδαγωγικών μεθόδων και διδακτικού υλικού για την ανάπτυξη και προαγωγή ταλαντούχων μαθητών στα Ευρωπαϊκά σχολεία.

(5) Την ανάπτυξη μεθόδων/λύσεων καθώς και ένα πρόγραμμα για βελτίωση των απόψεων των Κυβερνήσεων, Πανεπιστημίων και Ιδρυμάτων για παροχή υποτροφιών και υποστήριξης, ώστε να παραμένουν στην Ευρώπη οι μαθηματικά μυαλά.

(6) Την ανάπτυξη ειδικών ιστοσελίδων αφιερωμένων στους σκοπούς του προγράμματος, οι οποίες θα βοηθήσουν στην μακροχρόνια επιβίωση των στόχων του.

Με την ολοκλήρωση του σχεδίου θα παραδοθούν:

(i) Ένα Ευρωπαϊκό εγχειρίδιο με μεθόδους και εργαλεία για τον εντοπισμό, την παροχή κινήτρων και την υποστήριξη μαθητών με ταλέντο στα μαθηματικά,
(ii) Πληροφοριακό υλικό για Κυβερνήσεις, Πανεπιστήμια και Ιδρύματα,
(iii) Πρόγραμμα για Επιμορφωτικά μαθήματα για το εκπαιδευτικό προσωπικό της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, ώστε να τους καθιστούν ικανούς να εντοπίζουν και να καλλιεργούν μαθητές με ταλέντο στα μαθηματικά.

Το πρόγραμμα θα βοηθήσει την «εισροή εγκεφάλων» στην Ευρωπαϊκή Ένωση και θα συνδράμει στην επίτευξη των στόχων του Ευρωπαϊκού Συμβουλίου, όπως διατυπώθηκε στις 12 Φεβρουαρίου 2001 στη Στοκχόλμη, να θεσπίσει τα μαθηματικά ως ένα από τα πρωτεύοντα μαθήματα.

Το πρόγραμμα συντονίζεται από το INTERCOLLEGE σε συνεργασία με τα ακόλουθα πανεπιστήμια:
Βουλγαρία (ACADEMY OF SCIENCES)
Κύπρος (UNIVERSITY OF CYPRUS)
Τσεχία (CHARLES UNIVERSITY)
Γερμανία (UNIVERSITY DUISBURG-ESSEN)
Ελλάδα (UNIVERSITY OF CRETE)
Ιταλία (UNIVERSITY OF PALERMO)
Ρουμανία (NORTH UNIVERSITY)
Ουγγαρία (UNIVERSITY OF MISKOLC)

Περισσότερες πληροφορίες για το σχέδιο που άρχισε τον Οκτώβρη του 2003 μπορείτε να μελετήσετε στην ιστοσελίδα www.matheu.org ή επικοινωνήστε με τη γραμματεία του προγράμματος στο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο michael.e@intercollege.ac.cy

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

$$\psi=\frac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\alpha},\qquad \psi=\frac{\ln(\alpha-\chi)}{\alpha-\chi},\qquad \psi=\frac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta}$$

Χαράλαμπος Λουγκρίδης

Μαθηματικός

Στο άρθρο που ακολουθεί θα δούμε το πεδίο ορισμού των πιο πάνω συναρτήσεων και στη συνέχεια θα βρούμε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτές τους, παραθέτοντας παραδείγματα για την κάθε περίπτωση.

1. Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) της μορφής: $\psi=\dfrac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\alpha}$ είναι το $(\alpha,+\infty)$

β) της μορφής: $\psi=\dfrac{\ln(\alpha-\chi)}{\alpha-\chi}$ είναι το $(-\infty,\alpha)$

γ) της μορφής: $\psi=\dfrac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta}$ με $\beta<\alpha$ είναι το (α,∞)

δ) της μορφής: $\psi=\dfrac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta}$ με $\beta>\alpha$ είναι το $(\alpha,\beta)\cup(\beta,+\infty)$

2. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τα πιο κάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 1.
Όλες οι πιο πάνω συναρτήσεις έχουν οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi=0$.

<u>Απόδειξη</u>

α) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\alpha}=\frac{+\infty}{+\infty}=(\alpha\pi\rho o\sigma\delta)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\chi-\alpha}}{1}=\frac{1}{+\infty}=0,$$

άρα η $\psi=0$ είναι Ο.Α. της καμπύλης στην περιοχή του $+\infty$.

β) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(\alpha-\chi)}{\alpha-\chi}=\frac{+\infty}{+\infty}=(\alpha\pi\rho o\sigma\delta)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\alpha-\chi}=\frac{1}{+\infty}=0,$$

άρα η $\psi = 0$ είναι Ο.Α. της καμπύλης στην περιοχή του $-\infty$.

γ) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta} = \frac{+\infty}{+\infty} = (\alpha\pi\rho o\sigma\delta) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\chi-\alpha} = \frac{1}{+\infty} = 0,$$

άρα η $\psi = 0$ είναι Ο.Α. της καμπύλης στην περιοχή του $+\infty$.

Θεώρημα 2.

Όλες οι πιο πάνω συναρτήσεις έχουν κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $\chi = \alpha$, την τιμή δηλαδή του χ για την οποία μηδενίζεται η υπολογαριθμική ποσότητα.

Απόδειξη

α) $$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\alpha} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

άρα η $\chi = \alpha$ είναι Κ.Α. προς τα κάτω.

Παράδειγμα:

Η $\psi = \dfrac{\ln(\chi-2)}{\chi-2}$ έχει πεδίο ορισμού $(2,+\infty)$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi = 2$. Η γραφική παράσταση της ψ πλησιάζει την ευθεία $\chi = 2$ από τα δεξιά της.

β) $$\lim_{x\to\alpha^-} \frac{\ln(\alpha-\chi)}{\alpha-\chi} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty,$$

άρα η $\chi = \alpha$ είναι Κ.Α. προς τα κάτω.

Παράδειγμα:

Η $\psi = \dfrac{\ln(3-\chi)}{3-\chi}$ έχει Π.Ο το $(-\infty,3)$ και Κ.Α. την ευθεία $\chi = 3$. Η γραφική παράσταση της ψ πλησιάζει την ευθεία $\chi = 3$ από τα αριστερά της.

Θεώρημα 3.

Οι συναρτήσεις της μορφής $\psi = \dfrac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta}$ με $\alpha \neq \beta$ έχουν επί πλέον κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi = \beta$ μόνο αν $\beta - \alpha \neq 1$.

i) Αν **$\boldsymbol{\beta < \alpha}$** τότε το Π.Ο. της ψ είναι το $(\alpha,+\infty)$. Ισχύει $\alpha - \beta > 0$ και επομένως:

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta} = \frac{\ln 0^+}{\alpha-\beta} = \frac{-\infty}{\alpha-\beta} = -\infty$$

άρα η $\chi = \alpha$ είναι Κ.Α. της ψ προς τα κάτω.

Παραδείγματα

1. Η $\psi = \dfrac{\ln(\chi-3)}{\chi-1}$ έχει πεδίο ορισμού $(3,+\infty)$ και Κ.Α. την ευθεία $\chi=3$. Το διάγραμμα της ψ πλησιάζει την ευθεία $\chi=3$ από τα δεξιά της.

2. Η $\psi = \dfrac{\ln(\chi+2)}{\chi+5}$ έχει πεδίο ορισμού $(-2,+\infty)$ και Κ.Α. την ευθεία $\chi=-2$. Το διάγραμμα της ψ πλησιάζει την ευθεία $\chi=-2$ από τα δεξιά της.

3. Η $\psi = \dfrac{\ln(\chi-5)}{\chi+1}$ έχει πεδίο ορισμού $(5,+\infty)$ και Κ.Α. την ευθεία $\chi=5$.

ii) Αν **$\beta > \alpha$** τότε το πεδίο ορισμού της ψ είναι $(\alpha,\beta)\cup(\beta,+\infty)$ οπότε, εκτός από τη $\chi=\alpha$ που είναι Κ.Α. είναι δυνατό και η $\chi=\beta$ να είναι Κ.Α.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

α) Αν $\beta-\alpha=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\beta^-} \frac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta} = \frac{\ln(\beta-\alpha)}{0^-} = \frac{\ln 1^-}{0^-} = \frac{0^-}{0^-} = (\alpha\pi\rho o\sigma\delta) = \lim_{x\to\beta^-} \frac{1}{\chi-\alpha} = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

Επίσης βρίσκουμε ότι: $\lim\limits_{x\to\beta^-} \dfrac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta} = \dfrac{0^+}{0^+} = \cdots = 1$

Οι δυο αυτές σχέσεις μας λέγουν ότι η $\chi=\beta$ δεν είναι Κ. Α. της ψ.

Παραδείγματα

1. Η $\psi = \dfrac{\ln(\chi-2)}{\chi-3}$ με πεδίο ορισμού $(2,3)\cup(3,+\infty)$ έχει Κ.Α. μόνο την ευθεία $\chi=2$. Η $\chi=3$ δεν είναι Κ.Α., γιατί $\beta-\alpha=3-2=1$.
2. Η $\psi = \dfrac{\ln(\chi+5)}{\chi+4}$ με πεδίο ορισμού $(-5,-4)\cup(-4,+\infty)$ έχει Κ.Α. μόνο την ευθεία $\chi=-5$. Η $\chi=-4$ δεν είναι Κ.Α., γιατί $\beta-\alpha=-4-(-5)=1$

β) Αν $0\langle\beta-\alpha\langle 1$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to\beta^-} \frac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta} = \frac{\ln(\beta-\alpha)}{0^-} = \frac{-|\gamma|}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\beta^+} \frac{\ln(\chi-\alpha)}{\chi-\beta} = \frac{\ln(\beta-\alpha)}{0^+} = \frac{-|\gamma|}{0^+} = -\infty$$

Άρα η $\chi=\beta$ είναι Κ.Α. προς τα πάνω από αριστερά και προς τα κάτω από δεξιά.

Παράδειγμα: Η $\psi = \dfrac{\ln\left(\chi - \frac{5}{3}\right)}{\chi - 2}$ με πεδίο ορισμού $\left(\frac{5}{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)$ έχει Κ.Α. την ευθεία $\chi = \frac{5}{3}$ (το διάγραμμα της ψ την πλησιάζει προς τα πάνω και από δεξιά της) και την ευθεία $\chi = 2$, γιατί $\beta - \alpha = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} < 1$. Στην περίπτωση αυτή το διάγραμμα της ψ την πλησιάζει προς τα κάτω από αριστερά της και προς τα πάνω από δεξιά της.

γ) Αν $\beta - \alpha \rangle 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \to \beta^-} \frac{\ln(\chi - \alpha)}{\chi - \beta} = \frac{\ln(\beta - \alpha)}{0^-} = \frac{|\gamma|}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to \beta^+} \frac{\ln(\chi - \alpha)}{\chi - \beta} = \frac{\ln(\beta - \alpha)}{0^+} = \frac{|\gamma|}{0^+} = +\infty$$

Άρα η $\chi = \beta$ είναι Κ.Α. προς τα κάτω από αριστερά και προς τα πάνω από δεξιά.

Παράδειγμα: Η $\psi = \dfrac{\ln\left(\chi - \frac{1}{3}\right)}{\chi - 2}$ με πεδίο ορισμού $\left(\frac{1}{3}, 2\right) \cup (2, +\infty)$ έχει Κ.Α. την ευθεία $\chi = \frac{1}{3}$ και την ευθεία $\chi = 2$. Η γραφική παράσταση της ψ προσεγγίζει την ευθεία $\chi = 2$ προς τα κάτω από αριστερά και προς τα πάνω από δεξιά.

Β΄ Μέρος

Θεώρημα 4. Οι συναρτήσεις της μορφής $\psi = \dfrac{\ln(\alpha\chi + \beta)}{\gamma\chi + \delta}$ έχουν οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi = 0$ και κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Στην περίπτωση που ισχύει: $\beta = 1 + \frac{\alpha\delta}{\gamma}$ τότε και η ευθεία $\chi = -\frac{\delta}{\gamma}$ είναι Κ.Α.

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού:

α) Αν $\alpha \rangle 0$ και $\gamma \rangle 0$ τότε πρέπει: $\alpha\chi + \beta \rangle 0$ και $\gamma\chi + \delta \neq 0$, $\Rightarrow$ $\chi > -\frac{\beta}{\alpha}$, $\chi \neq -\frac{\delta}{\gamma}$

Αν $-\frac{\delta}{\gamma} > -\frac{\beta}{\alpha}$ τότε το πεδίο ορισμού της ψ είναι: $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\delta}{\gamma}\right) \cup \left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$

Εξετάζοντας για οριζόντια ασύμπτωτη, βρίσκουμε:

$\lim\limits_{x\to\infty}\psi = \dfrac{1}{\gamma\left(\alpha\chi+\beta\right)}=0$, οπότε η $\psi=0$ είναι Ο.Α.

Για κατακόρυφες ασύμπτωτες με:

$$\chi\to\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{+},\ \chi\to\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)^{-} \text{ και } \chi\to\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)^{+}$$

βρίσκουμε για την πρώτη περίπτωση δηλαδή για:

$$\chi\to\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{+},\quad \lim\psi=\frac{\ln 0^{+}}{\dfrac{-\beta\gamma}{\alpha}+\delta}=\frac{-\infty}{\dfrac{-\beta\gamma}{\alpha}+\delta}=+\infty \quad \text{ή} \quad -\infty$$

οπότε η ευθεία $\chi=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ είναι Κ.Α.

Για τη δεύτερη περίπτωση, δηλ. για $\chi\to\left(-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^{-}$ βρίσκουμε:

$\lim\psi=\dfrac{\ln\left(-\dfrac{\alpha\delta}{\gamma}+\beta\right)}{0^{-}}=\pm\infty$ αν $-\dfrac{\alpha\delta}{\gamma}+\beta\neq 1$, οπότε η ευθεία $\chi=-\dfrac{\delta}{\gamma}$ είναι Κ.Α.,

ή $\lim\psi=\dfrac{\ln\left(-\dfrac{\alpha\delta}{\gamma}+\beta\right)}{0^{-}}=\dfrac{0}{0}$ αν $-\dfrac{\alpha\delta}{\gamma}+\beta=1$, οπότε η ευθεία $\chi=-\dfrac{\delta}{\gamma}$ δεν είναι Κ.Α.

Στην τρίτη περίπτωση, δηλ. για $\chi\to\left(-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)^{-}$ και πάλιν η ευθεία $\chi=-\dfrac{\delta}{\gamma}$ είναι Κ.Α όταν $\lim\psi=\pm\infty$.

β) Ανάλογα εργαζόμαστε στις περιπτώσεις που τα α και γ είναι **ομόσημοι αρνητικοί** αριθμοί ή **είναι ετερόσημοι**.

Καταλήγουμε έτσι ότι η συνάρτηση $\psi=\dfrac{\ln\left(\alpha\chi+\beta\right)}{\gamma\chi+\delta}$ με πεδίο ορισμού $\left(-\dfrac{\beta}{\alpha},-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)\cup\left(-\dfrac{\delta}{\gamma},+\infty\right)$ έχει μια μόνο Κ.Α., τη $\chi=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ αν ισχύει $\beta=1+\dfrac{\alpha\delta}{\gamma}$ (1).

Στην περίπτωση που $\beta\neq 1+\dfrac{\alpha\delta}{\gamma}$, τότε η ψ έχει ακόμη μια Κ.Α. την ευθεία $\chi=-\dfrac{\delta}{\gamma}$.

<u>Παραδείγματα</u>

1. Για α=4, β=7, γ=2, δ=3 ισχύει η πιο πάνω συνθήκη (1) άρα η συνάρτηση:

$\psi = \dfrac{\ln(4\chi+7)}{2\chi+3}$ έχει **μια μόνο** Κ.Α. ασύμπτωτη, τη $\chi = -\dfrac{7}{4}$, διότι $7 = 1 + \dfrac{4\cdot 3}{2}$.

Παρόμοια ισχύουν για τις συναρτήσεις:

α) $\psi = \dfrac{\ln(2\chi-3)}{3\chi-6}$, β) $\psi = \dfrac{\ln(-2\chi-3)}{4\chi+8}$

Οι ευθείες $\chi = \dfrac{3}{2}$ και $\chi = -\dfrac{3}{2}$ είναι Κ.Α, ενώ οι ευθείες $\chi = 2$ και $\chi = -2$

αντίστοιχα δεν είναι Κ.Α.

2. Η $\psi = \dfrac{\ln(3\chi-7)}{3\chi-15}$ με πεδίο ορισμού $\left(\dfrac{7}{3},5\right)\cup(5,+\infty)$

έχει Κ.Α. τις ευθείες $\chi = \dfrac{7}{3}$ και $\chi = 5$, διότι $-7 \neq 1 + \dfrac{3\cdot(-15)}{3}$.

3. Η $\psi = \dfrac{\ln(-2\chi+5)}{3\chi-6}$ με Π.Ο. $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},2\right)$

έχει Κ.Α. μόνο τη $\chi = \dfrac{5}{2}$.

4. Η $\psi = \dfrac{\ln(-4\chi+9)}{-5\chi+1}$ με Π.Ο. το $\left(-\infty,\dfrac{1}{5}\right)\cup\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{9}{4}\right)$

έχει Κ.Α. τις ευθείες $\chi = \dfrac{1}{5}$, $\chi = \dfrac{9}{4}$.

5. Η $\psi = \dfrac{\ln(-4\chi+9)}{-5\chi-2}$ με Π.Ο. $\left(-\infty,\dfrac{-2}{5},\right)\cup\left(\dfrac{-2}{5},\dfrac{9}{4}\right)$

έχει Κ.Α. τις ευθείες $\chi = -\dfrac{2}{5}$ και $\chi = \dfrac{9}{4}$.

Γ ε ν ι κ ά: Για τη συνάρτηση $\psi = \dfrac{\ln(\alpha\chi+\beta)}{\gamma\chi+\delta}$ διαπιστώνουμε ότι:

α) Αν για $\chi = \tau$ μηδενίζεται η υπολογαριθμική ποσότητα τότε η ευθεία $\chi = \tau$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

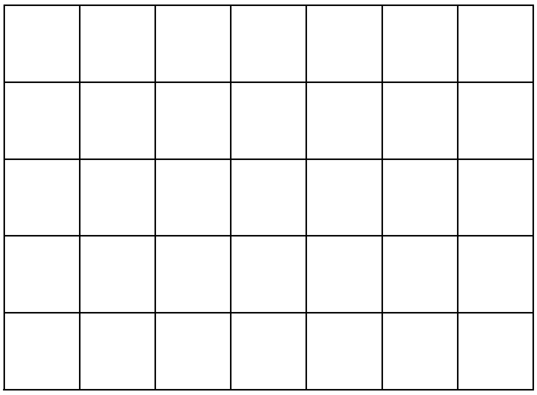
β) Αν για $\chi = \rho$ μηδενίζεται ο παρονομαστής της συνάρτησης ψ και συγχρόνως η υπολογαριθμική ποσότητα γίνεται ίση με τη μονάδα τότε η ευθεία $\chi = \rho$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ΜΙΑ ΑΠΛΗ ΛΥΣΗ ΣΕ ΕΝΑ (ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΑ) ΑΠΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Μιχάλης Κολοσσιάτης
Μαθηματικός

Πρόβλημα:

Στον πιο κάτω m x n πίνακα, ξεκινώντας από το πάνω αριστερά τετράγωνο, θέλουμε να καταλήξουμε στο κάτω δεξιά τετράγωνο, περνώντας από κάθε τετράγωνο ακριβώς μια φορά, κινούμενοι μόνο οριζόντια ή κάθετα από τετράγωνο σε τετράγωνο.



Λύση:

Λόγω του ότι μπορούμε να κινηθούμε μόνο οριζόντια ή κάθετα, μπορούμε να αναλύσουμε την κίνηση σε οριζόντιες και κάθετες κινήσεις ενός βήματος.

Οριζόντιες κινήσεις:

Συνολικά θα έχουμε $n - 1 + 2k$ κινήσεις ($k \in N$), επειδή στο τέλος θέλουμε να είμαστε στο ακρινό δεξιό τετράγωνο, άρα οριζοντίως πρέπει να κάνουμε $n - 1$ βήματα (αφού ξεκινάμε από το ακρινό αριστερό τετράγωνο) και όσα βήματα κάνουμε προς τα αριστερά, άλλα τόσα βήματα πρέπει να κάνουμε και προς τα δεξιά.

Κάθετες κινήσεις:

Όπως πριν, συνολικά θα έχουμε m-1+2λ (λ ϵ N).

Άρα, συνολικά θα έχουμε:

$$m + n + 2(k + \lambda - 1) = m + n + 2t, \quad t = k + \lambda - 1, \ t \in N.$$

Από την άλλη, αφού πρέπει να περάσουμε από κάθε τετράγωνο ακριβώς μια φορά και αφού ξεκινάμε ήδη από κάποιο τετράγωνο, ο συνολικός αριθμός κινήσεων θα είναι $m \cdot n - 1$.

Τότε:

1. Αν m και n: άρτιοι, τότε $m + n + 2t$: άρτιος ενώ $mn - 1$: περιττός.
   Άρα το πιο πάνω πρόβλημα δεν έχει λύση.

2. Αν m ή/και n : περιττοί, τότε πιθανόν να υπάρχει λύση.

Πράγματι, αν κινηθούμε με τέτοιο τρόπο ώστε να σαρώνουμε μια-μια τις οριζόντιες ή τις κάθετες γραμμές, ανάλογα με το αν οι στήλες ή οι γραμμές είναι περιττές στον αριθμό. Μάλιστα, εκτός των περιπτώσεων 1xn, nx1, 2x3 και 3x2, η λύση δεν είναι μοναδική.

<u>Γενίκευση:</u>

Αν έχουμε το ίδιο πρόβλημα όπως πριν, με τη γενίκευση να ξεκινήσουμε από το ένα γωνιακό τετράγωνο και να καταλήξουμε στο απέναντι γωνιακό τετράγωνο. Τα αποτελέσματα θα είναι τα ίδια.

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΑ ΗΜΕΡΟΛΟΓΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΥΠΡΟΥ

ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2005

Ιωάννης Φάκας

Μαθηματικός

ΕΠΟΧΕΣ ΤΟΥ ΕΤΟΥΣ

1. Ο Ήλιος ευρίσκεται στο περίγειο στις 2 Ιανουαρίου στις 03ω. Αρχή του έτους.
2. Ο Ήλιος ευρίσκεται στο απόγειο στις 5 Ιουλίου και ώρα 07ω. Μέσον του έτους.
3. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Κριό την 20ην Μαρτίου εις τις 14ω 33λ. Αρχή του Έαρος.
4. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Καρκίνο την 21ην Ιουνίου εις τις 08ω 46λ. Αρχή του Θέρους.
5. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Ζυγό στις 23 Σεπτεμβρίου εις τις 00ω 23λ. Αρχή του Φθινοπώρου.
6. Ο Ήλιος εισέρχεται εις τον Αιγόκερω την 21ην Δεκεμβρίου εις τις 20ω 35λ. Αρχή του Χειμώνα.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

ΕΚΛΕΙΨΕΙΣ ΚΑΤΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2005

Το έτος 2005 υπάρχουν 4 εκλείψεις, 2 του Ηλίου και 2 της Σελήνης.

1. Δακτυλιοειδής - Ολική Έκλειψη Ηλίου, 8 - 9 Απριλίου 2005. Αόρατη από την Κύπρο.

Η έκλειψη αυτή θα είναι ορατή από μία περιοχή που ξεκινά από την Νέα Ζηλανδία, Ανταρκτική, διασχίζει το νότιο μέρος του Ειρηνικού Ωκεανού, περιλαμβάνει τη Νότια Αμερική, το νότιο μέρος της Β. Αμερικής και τελειώνει μέσα στον Ατλαντικό Ωκεανό. Η έκλειψη αρχίζει στις 19ω 51λ και τελειώνει στις 01ω και 20λ της 9^{ης} Απριλίου.

2. Έκλειψη Σελήνης εκ της παρασκιάς. 24 Απριλίου 2005. Αόρατη από την Κύπρο.

Η Έκλειψη θα αρχίσει στις 9ω 49,8λ και θα τελειώσει στις 13ω 59,8λ. Κατά τη διάρκεια αυτή, η Σελήνη θα ευρίσκεται κάτω από τον ορίζοντα της Κύπρου. Η έκλειψη θα είναι ορατή σε μία μεγάλη περιοχή γύρω από τον Ειρηνικό Ωκεανό. Μέγεθος της έκλειψης εκ της παρασκιάς 0,892.

3. Δακτυλιοειδής Έκλειψη Ηλίου 3 Οκτωβρίου 2005. Ορατή ως Μερική Έκλειψη από την Κύπρο.
Στοιχεία Έκλειψης για την Κύπρο:

Πρώτη επαφή στις 3 Οκτωβρίου 2005 στις 10ω 31λ.

Μέσον της Έκλειψης στις 11ω 55λ.

Έξοδος του δίσκου της Σελήνης στις 13ω 20λ.

Μέγεθος της έκλειψης 0,508.

4. Μερική Έκλειψη Σελήνης 17 Οκτωβρίου 2005. Αόρατη από την Κύπρο.

Η Έκλειψη θα αρχίσει στις 11ω 52λ και θα τελειώσει στις 16ω 15λ. Θα είναι ορατή στην Αυστραλία, στην Άπω Ανατολή, Δυτική Αμερική και στον Ειρηνικό Ωκεανό.

Μέγεθος της έκλειψης εκ της σκιάς 0,068.

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

Φάσεις της Σελήνης για το έτος 2005

Νέα Σελήνη		Πρώτον Τέταρτον		Πανσέληνος		Τελ. Τέταρτον	
	ημ ω λ		**ημ ω λ**		**ημ ω λ**		**ημ ω λ**
	---------		---------		---------	Ιαν.	03 19 46
Ιαν.	10 14 03	Ιαν.	17 08 57	Ιαν	25 12 32	Φεβ	02 09 27
Φεβ.	09 00 28	Φεβ	16 02 16	Φεβ.	24 06 54	Μαρ	03 19 36
Μαρ.	10 11 10	Μαρ.	17 21 19	Μαρ.	25 22 58	Απρ	02 02 50
Απρ.	08 22 32	Απρ.	16 16 37	Απρ.	24 12 06	Μάης	01 08 24
Μάης	08 10 45	Μάης	16 10 57	Μάης	23 22 18	Μάης	30 13 47
Ιούνης	06 23 55	Ιούνης	15 03 22	Ιούνης	22 06 14	Ιούνης	28 20 23
Ιούλης	06 14 02	Ιούλης	14 17 20	Ιούλης	21 13 00	Ιούλης	28 05 19
Αύγου	05 05 05	Αύγου	13 04 38	Αύγου	19 19 53	Αύγου	26 17 18
Σεπτ	03 20 45	Σεπτ	11 13 37	Σεπτ	18 04 01	Σεπτ	25 08 41
Οκτ	03 12 28	Οκτ	10 21 01	Οκτ	17 14 14	Οκτ	25 03 17
Νιόβ	02 03 25	Νιο	09 03 57	Νιο	16 02 57	Νιόβ	24 00 11
Δεκ	01 17 01	Δεκ	08 11 36	Δεκ	15 18 15	Δεκ	23 21 36
Δεκ	31 05 12		---------		---------		--------

Οι χρόνοι δίδονται σε χειμερινή ώρα Κύπρου.

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2003 – 2004

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Χρόνος: 2 Ώρες και 30 λεπτά

Ιούνιος 2004

ΜΕΡΟΣ Α':

Να απαντήσετε σε 12 μόνο από τις 15 ερωτήσεις.

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int 2e^{4x}dx$

2. (α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο (2,1) και ακτίνα 4.
(β) Να βρείτε τη θέση του σημείου (–1, 5) ως προς τον κύκλο αυτό.

3. Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης:
$$y = x^3 - 3x + 4$$

4. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης: ΟΛΥΜΠΙΣΜΟΣ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν και τελειώνουν με το γράμμα Ο;

5. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία (± 4, 0) και κορυφές τα σημεία (± 5, 0). Να βρείτε τις εξισώσεις των διευθετουσών της έλλειψης αυτής.

6. Αν $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$, να βρείτε τον πίνακα Χ για τον οποίο ισχύει η σχέση $A \cdot X + B = O$, όπου Ο είναι μηδενικός πίνακας.

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $y = \chi - 4$ και την παραβολή $y^2 = 2x$.

8. Αν $x = e^{-t}$ και $y = \eta\mu\, t - \sigma\upsilon\nu\, t$, να δείξετε ότι $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

9. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1^-}[(x-1)\ln(1-x)]$

10. Σε μια εταιρεία η ωριαία αμοιβή των 49 υπαλλήλων δίνεται από τον πιο κάτω πίνακα:

Αμοιβή	£2	£4	£6	£8	£10	£12
Αρ. υπαλλή-λων	16	6	5	8	12	2

Αν $\overline{X}$ είναι ο μέση ωριαία αμοιβή και s είναι η τυπική απόκλιση των αμοιβών αυτών, να υπολογίσετε την τιμή του αριθμού y για τον οποίο ισχύει η σχέση:

$$\frac{y-\overline{X}}{s}=\frac{7}{2}$$

11. Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης του διαγράμματος μιας συνάρτησης. Με βάση τον ορισμό αυτό να δείξετε ότι η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της καμπύλης με εξίσωση $y=\dfrac{x}{x-2}$

12. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που ορίζεται από τις ανισώσεις:

$$y \geq x^3 \quad \text{και} \quad y \leq \sqrt{x}$$

13. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t=\varepsilon\varphi\dfrac{x}{2}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5-4\sigma\upsilon\nu\, x}$

14. Θέλω να σχηματίσω μια αντιπροσωπεία η οποία να αποτελείται από 1 έως 6 άτομα τα οποία θα επιλεγούν από μια ομάδα 10 ατόμων, 8 κοριτσιών και 2 αγοριών. Πρώτα ρίχνω ένα ζάρι για να αποφασίσω πόσα άτομα θα έχει η αντιπροσωπεία και ακολούθως επιλέγω από την ομάδα των 10 ατόμων στην τύχη τόσα άτομα όσα ήταν η ένδειξη του ζαριού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η αντιπροσωπεία να είναι:

(α) τριμελής, ανεξάρτητα από το φύλο των μελών.

(β) διμελής και να αποτελείται μόνο από κορίτσια.

(γ) μονομελής ή διμελής και να αποτελείται μόνο από αγόρια.

15. (α) Αν $F(\kappa)=\dfrac{1}{4\kappa^2-1}$, να δείξετε ότι: $F(\kappa)-F(\kappa-1)=\dfrac{-4}{(4\kappa^2-1)(2\kappa-3)}$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το άθροισμα: $\displaystyle\sum_{\kappa=1}^{10}\frac{-4}{(4\kappa^2-1)(2\kappa-3)}$

ΜΕΡΟΣ Β': Να απαντήσετε σε 4 μόνο από τις 6 ερωτήσεις.
Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{9}x^3(x-4)$

(α) Να βρείτε το πεδίον ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης.

(β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$.

(δ) Σε ξεχωριστούς άξονες να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = |f(x)|$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_2^{e+1} 4x\ln\sqrt{x-1}\,dx$

3. Ένα κομμάτι σύρμα μήκους 40 cm κόβεται σε ένα σημείο και τα δύο κομμάτια σχηματίζουν την περίμετρο ενός τετραγώνου και ενός ισόπλευρου τριγώνου αντίστοιχα. Να βρείτε το μήκος που αντιστοιχεί στην περίμετρο του τριγώνου ώστε το άθροισμα τω εμβαδών των δύο σχημάτων να είναι το ελάχιστο δυνατόν.

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}=0$$

5. Ένα σημείο Τ κινείται έτσι ώστε η απόσταση του από το σημείο Σ(8, 0) να είναι διπλάσια από την απόσταση του από την ευθεία x = 2.

(α) Να δείξετε ότι ο Γ.Τ. του σημείου Τ είναι η υπερβολή $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$

(β) Να βρείτε την εκκεντρότητα e της υπερβολής και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της.

(γ) Αν η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο Α(5, $3\sqrt{3}$) τέμνει τις ασύμπτωτες της στα σημεία Β και Γ και η κάθετη της υπερβολής στο Α τέμνει τους άξονες στα σημεία Δ και Ζ, να δείξετε ότι $\sqrt{3}\cdot\frac{\Delta Z}{B\Gamma}=e$

6. (α) Να δείξετε ότι αν η f(x) είναι συνεχής στο διάστημα [0, α] και παραγωγίσιμη στο (0, α) τότε $\int_0^\alpha f(\alpha-x)dx=\int_0^\alpha f(x)dx$

(β) Με τη χρήση του μετασχηματισμού u = α – x, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι $\int_0^\alpha x\left[f(x)+f(\alpha-x)\right]dx=\alpha\int_0^\alpha f(x)dx$

(γ) Με τη χρήση του πιο πάνω αποτελέσματος, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x]dx$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $\int 2e^{4x}dx=\frac{1}{2}e^{4x}+c$

2. α) $(x-2)^2+(y-1)^2=16 \Rightarrow x^2+y^2-4x-2y-11=0$

β) $(-1)^2+5^2-4(-1)-2\cdot5-11=9>0 \Rightarrow$
το σημείο (–1, 5) είναι εξωτερικό του κύκλου

3. $y=x^3-3x+4 \Rightarrow$ $y'=3x^2-3 \Rightarrow y''=6x$

$y'=0 \Rightarrow x=\pm 1$

Αν $x=1 \Rightarrow y''=6>0 \Rightarrow \min(1, 2)$

Αν $x=-1 \Rightarrow y''=-6<0 \Rightarrow \max(-1, 6)$

4. α) $\dfrac{10!}{2!2!2!} = 453600$ β) $\dfrac{8!}{2!2!} = 10080$

5. $\alpha = 5$ και $\alpha \cdot \varepsilon = 4 \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \beta = \sqrt{\alpha^2(1-\varepsilon^2)} = 3$

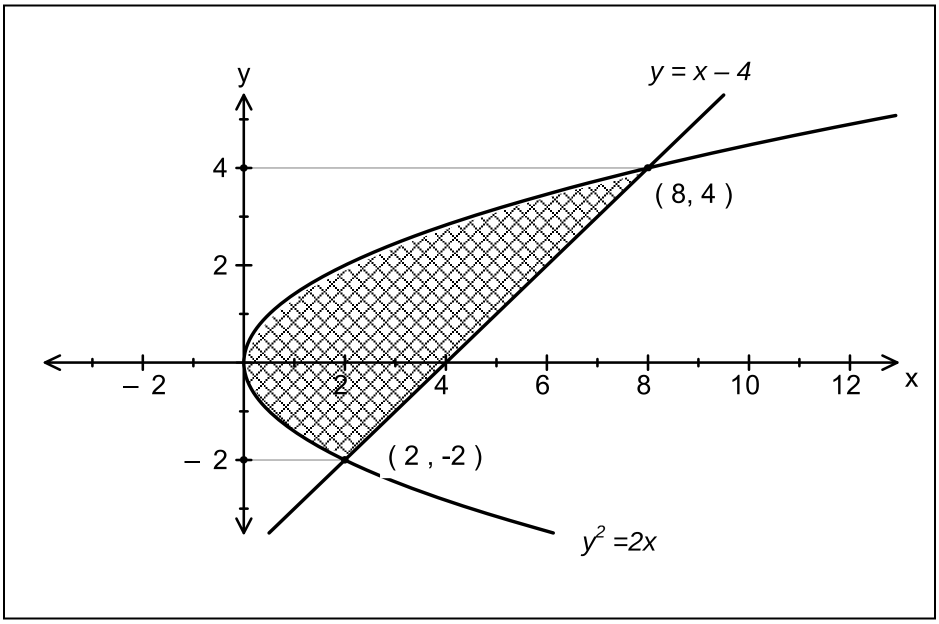
Εξίσωση έλλειψης: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ Διευθετούσες: $x = \pm\dfrac{25}{4}$

6. $A \cdot X + B = O \Rightarrow A \cdot X = -B \Rightarrow X = -A^{-1} \cdot B$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = -A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -6 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

7. Τα σημεία τομής των $y = x - 4$ και $y^2 = 2x$ είναι $(2, -2)$ και $(8, 4)$



$$E = \int_{-2}^{4}(x_2 - x_1)dy = \int_{-2}^{4}\left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right)dy = \left[\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4} = 18 \text{ τ.μ.}$$

8. $x = e^{-t}$ και $y = \eta\mu\, t - \sigma\upsilon\nu\, t \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t}{-e^{-t}} = -e^{t}(\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-e^t(\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t)-e^t(-\eta\mu t+\sigma\upsilon\nu t)}{-e^{-t}}=2e^{2t}\sigma\upsilon\nu t$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=e^{-2t}(2e^{2t}\sigma\upsilon\nu t)+e^{-t}[-e^t(\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t)]+(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)=$$

2συν t – συν t –+ ημt – ημt – συν t = 0

9. $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)\ln(1-x)=0\cdot(-\infty)$ απρ.μορφή $=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{-\infty}{-\infty}=$ απρ.μορφή

κανόνας L' Hôspital $=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{-1}{1-x}}{-\dfrac{1}{(1-x)^2}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0$

10.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$\left(x_i-\overline{X}\right)^2$	$\left(x_i-\overline{X}\right)^2 f_i$
2	16	32	16	256
4	6	24	4	24
6	5	30	0	0
8	8	64	4	32
10	12	120	16	192
12	2	24	36	72
	$\sum f_i=49$	$\sum x_i f_i=294$		$\sum\left(x_i-\overline{X}\right)^2 f_i=576$

Μέση αμοιβή $\overline{X}=\dfrac{294}{49}=$ £6 Τυπική απόκλιση $s=\sqrt{\dfrac{576}{49}}=\dfrac{24}{7}$

$$\frac{y-\overline{X}}{s}=\frac{7}{2}\Rightarrow y=18$$

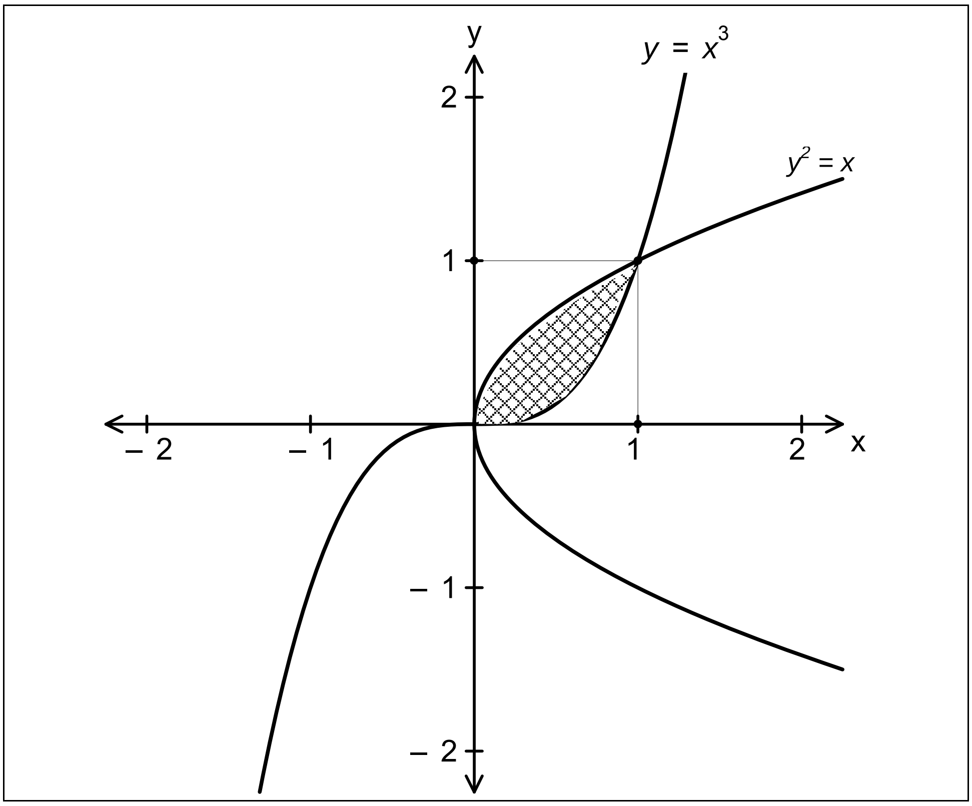
11. Η ευθεία $x=\alpha$ λέγεται ασύμπτωτη του διαγράμματος της συνάρτησης $y=f(x)$ αν ισχύει μια από τις σχέσεις:

i) $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=\infty$ ii) $\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)=\infty$ iii) $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\infty$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{2-2}=\infty$$

Άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\dfrac{x}{x-2}$

12. Τα σημεία τομής των $y = x^3$ και $y^2 = x$ είναι $(0, 0)$ και $(1, 1)$



$$V = \pi\int_0^1 \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \pi\int_0^1 \left(x - x^6\right)dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5\pi}{14} \text{ κ.μ.}$$

13. $t = \text{εφ}\dfrac{x}{2} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2}\text{τεμ}^2\dfrac{x}{2}dx \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{5 - 4\text{συν}x} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 - 4\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2dt}{1+9t^2} = \frac{2}{3}\text{τοξεφ}(3t)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\pi}{9}$$

14. α) $\dfrac{1}{6}$ β) $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{14}{135}$ γ) $\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\binom{2}{1}}{\binom{10}{1}} + \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{1}{27}$

15. $F(\kappa) - F(\kappa-1) = \dfrac{1}{4\kappa^2-1} - \dfrac{1}{4(\kappa-1)^2-1} = \dfrac{-4}{(4\kappa^2-1)(2\kappa-3)}$

$$\sum_1^{10} \frac{-4}{(4\kappa^2-1)(2\kappa-3)} = \sum_1^{10}\left[F(\kappa) - F(\kappa-1)\right] = F(10) - F(0) = \frac{1}{399} - \frac{1}{-1} = \frac{400}{399}$$

ΜΕΡΟΣ Β′

1. $f(x)=\frac{1}{9}x^3(x-4)$

α) Πεδίο ορισμού: R

Σημεία τομής με άξονες: (0, 0) και (4, 0)

$f'(x)=\frac{4}{9}x^2(x-3)$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	–	0	+	
f(x)		↘	0	↘	–3	↗	

Η συνάρτηση είναι αύξουσα για $x\in[3, +\infty)$

Η συνάρτηση είναι φθίνουσα για $x\in(-\infty, 3]$

Η συνάρτηση έχει ελάχιστο στο σημείο (3, – 3)

$f''(x)=\frac{4}{3}x(x-2)$

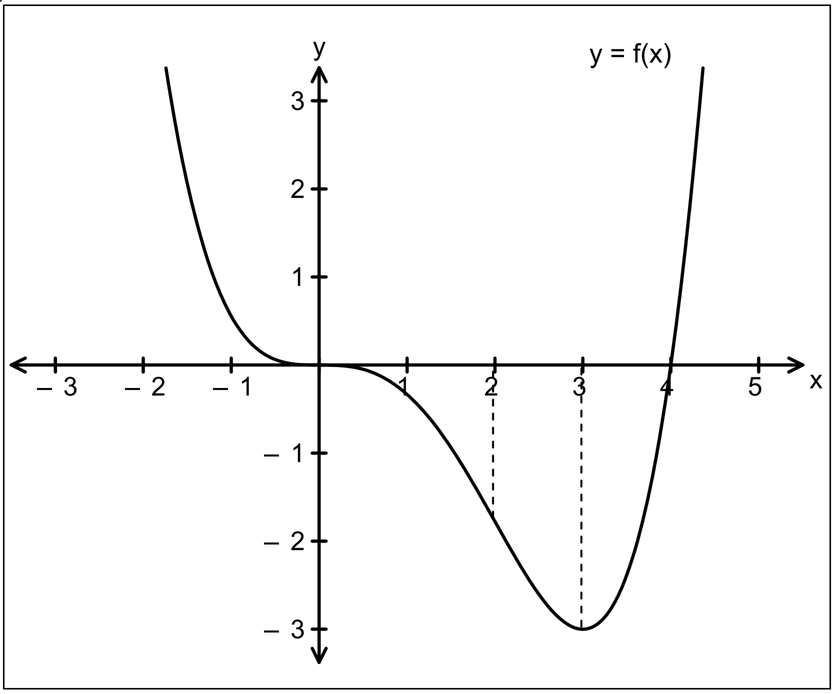
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	–	0	+	
f(x)		$\cup$	0	$\cap$	$-\frac{16}{9}$	$\cup$	

Η συνάρτηση έχει σημεία καμπής στα σημεία (0, 0) και $\left(2,-\frac{16}{9}\right)$

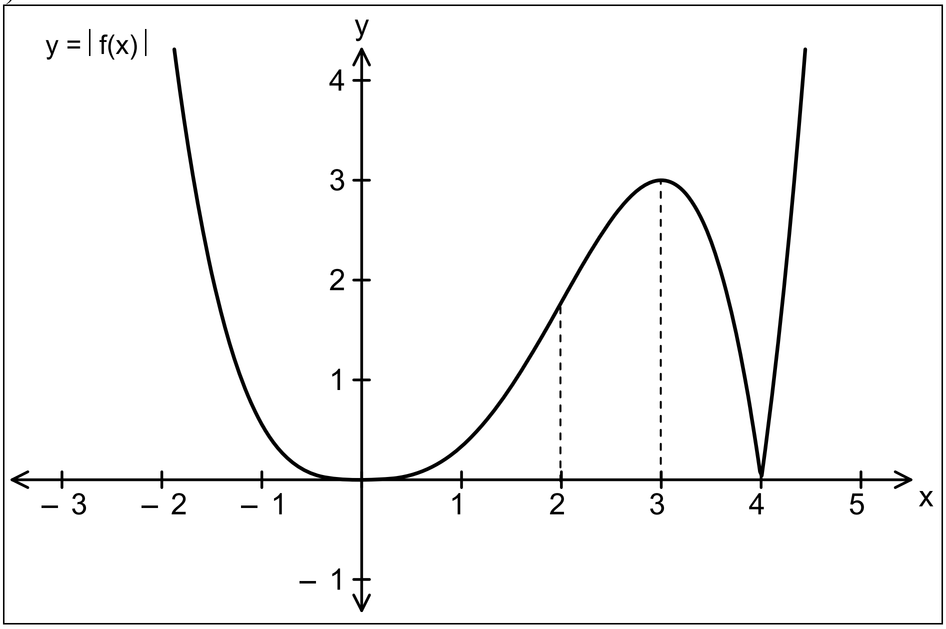
β) Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω για:

$x\in(-\infty, 0]$ και για $x\in[2, +\infty)$

γ)



δ)



2. $$\int_2^{e+1} 4x\ln\sqrt{x-1}\,dx = \int_2^{e+1} 2x\ln(x-1)$$

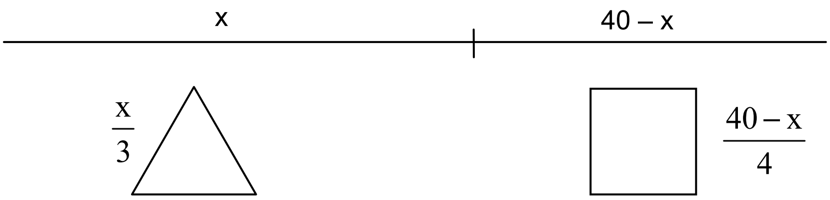
Κατά παράγοντες ολοκλήρωση

Έστω $u = \ln(x–1)$ και $dv = 2xdx \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x-1}$, $v = x^2$

$$\int_2^{e+1} 4x\ln\sqrt{x-1}\,dx = x^2\ln(x-1)\Big|_2^{e+1} - \int_2^{e+1}\frac{x^2}{x-1}dx = (e+1)^2 - \int_2^{e+1}\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$(e+1)^2 - \left[\frac{x^2}{2}+x+\ln(x-1)\right]_2^{e+1} = \frac{e^2+5}{2}$$

3.



$$E = \left(\frac{x}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{40-x}{4}\right)^2 = \frac{9+4\sqrt{3}}{144}x^2 - 5x + 100$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{9+4\sqrt{3}}{72}x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{360}{9+4\sqrt{3}} \approx 22,6\text{cm}$$

$$\frac{d^2E}{dx^2} = \frac{9+4\sqrt{3}}{72} > 0 \ \Rightarrow \text{ έχουμε ελάχιστο}$$

4.

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

Αντικαθιστώ τη στήλη 1 με το άθροισμα όλων των στηλών

$$\begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 4+x & 1+x & 1 & 1 \\ 4+x & 1 & 1+x & 1 \\ 4+x & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

Βγάζω παράγοντα το (4 + x) από την πρώτη στήλη.

$$(4+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

Αφαιρώ την πρώτη γραμμή από κάθε μια από τις υπόλοιπες γραμμές.

$$(4+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Αναπτύσσω κατά την πρώτη στήλη

$$(4+x)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4+x)x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

5. α) Έστω ότι το σημείο T έχει συντεταγμένες (x, y). Η απόσταση του T από την ευθεία $x = 2$ είναι $|x-2|$ και η απόσταση του από το Σ είναι $\sqrt{(x-8)^2+y^2}$

Έχουμε τη σχέση $\sqrt{(x-8)^2+y^2} = 2|x-2| \Rightarrow$

$$\left(\sqrt{(x-8)^2+y^2}\right)^2 = \left(2|x-2|\right)^2 \Rightarrow \quad \sqrt{(x-8)^2+y^2} = 4(x-2)^2 \Rightarrow$$

$$3x^2 - y^2 = 48 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$$

β) $e = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha} = 2$

Εξισώσεις ασυμπτώτων: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{48} = 0 \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{3}\ x$

γ) $A\left(5, 3\sqrt{3}\right)$.

Εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο Α: $5x - \sqrt{3}\ y = 16$

Λύνουμε τα συστήματα: $\left.\begin{matrix} 5x - \sqrt{3}\ y = 16 \\ y = \sqrt{3}\,x \end{matrix}\right\}$ και $\left.\begin{matrix} 5x - \sqrt{3}\ y = 16 \\ y = -\sqrt{3}\,x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

βρίσκουμε τα σημεία $B\left(8,\ 8\sqrt{3}\right)$ και $\Gamma\left(2,\ -2\sqrt{3}\right) \Rightarrow B\Gamma = \sqrt{336}$

Εξίσωση της κάθετης της υπερβολής στο Α: $y - 3\sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{5}(x-5)$

Σημεία τομής της καθέτου με τους άξονες: $\Delta(0,\ 4\sqrt{3})$, $Z(20,\ 0)$ $\Rightarrow$

$\Delta Z = \sqrt{448} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\,\dfrac{\Delta Z}{B\Gamma} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{448}}{\sqrt{336}} = \sqrt{4} = 2 = e$

6. α) Θέτουμε $u = \alpha - x \Rightarrow du = -\,dx$, όταν $x = 0$, $u = \alpha$ και όταν $x = \alpha$, $u = 0$

$$\int_0^\alpha f(\alpha - x)dx = -\int_\alpha^0 f(u)du = +\int_0^\alpha f(u)du = \int_0^\alpha f(x)dx$$

β) Με την ίδια αντικατάσταση όπως στο α) έχουμε:

$$I = \int_0^\alpha x[f(x) + f(\alpha - x)]dx = -\int_\alpha^0 (\alpha - u)[f(\alpha - u) + f(u)]du =$$

$$\int_0^\alpha f(\alpha - u)[f(\alpha - u) + f(u)]du =$$

$$\alpha\int_0^\alpha f(\alpha - u) + f(u)du - \int_0^\alpha u[f(\alpha - u) + f(u)]du =$$

$$\alpha\int_0^\alpha f(\alpha - u)du + \alpha\int_0^\alpha f(u)du - \int_0^\alpha u[f(\alpha - u) + f(u)]du = 2\alpha\int_0^\alpha f(x)dx - I$$

(χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο α) πιο πάνω)

$$\Rightarrow 2I = 2\alpha\int_0^\alpha f(x)dx \Rightarrow I = \alpha\int_0^\alpha f(x)dx$$

γ) Στο πιο πάνω αποτέλεσμα, αν θέσουμε $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ και $f(x) = \eta\mu\, x$ έχουμε:

$$f(\alpha - x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\eta\mu\, x + \sigma\upsilon\nu\, x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu\, x\, dx = \frac{\pi}{2}(-\sigma\upsilon\nu\, x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2003 – 2004

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ Χρόνος: 2 Ώρες και 30 λεπτά

Ιούνιος 2004

<u>ΜΕΡΟΣ Α'</u>

Να απαντήσετε σε 12 μόνο από τις 15 ερωτήσεις.
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης Ε Π Ι Μ Ε Λ Ε Ι Α.

2. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων: 3, 5, 2, 7, 1, 6, 2, 7, 2, 6, 3

3. Να βρείτε το εμβαδόν σφαίρας η οποία έχει όγκο 288π cm^3.

4. Ανθοπώλης διαθέτει 108 τριαντάφυλλα, 192 γαρύφαλλα και 144 κρίνους, και θέλει να φτιάξει ομοιόμορφες ανθοδέσμες. Να βρείτε πόσες το πολύ ομοιόμορφες ανθοδέσμες μπορεί να κάμει και πόσα άνθη από το κάθε είδος θα έχει η κάθε ανθοδέσμη.

5. Κατά τη διάρκεια των εκπτώσεων μια τηλεόραση αξίας 600 λιρών πουλήθηκε προς 462 λίρες. Ποιο το ποσοστό (%) έκπτωσης της;

6. Σ' ένα δείγμα 50 οικογενειών καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών τους όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών (x_i)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός οικογενειών (f_i)	6	14	13	9	5	3

(α) Να βρείτε το ποσοστό (%) των οικογενειών που δεν έχουν παιδιά.

(β) Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ δύο παιδιά;

7. Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με ακμή βάσης 12cm και όγκο $384cm^3$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

8. Αν Α είναι ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου και ισχύει $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{7}{9}$, να βρείτε τις πιθανότητες P(A) και P(A')

9. Η τιμή πώλησης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή μαζί με 15% Φ.Π.Α. είναι 897 λίρες. Να βρείτε την τιμή του ηλεκτρονικού υπολογιστή χωρίς Φ.Π.Α.

10. Να βρείτε πόσους αριθμούς μικρότερους του 300 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 6 , αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη.

11. Ορθό πρίσμα έχει βάση ισόπλευρο τρίγωνο. Αν το ύψος του πρίσματος είναι $9\sqrt{3}$ cm και η περίμετρος της βάσης του 12cm, να βρείτε:

(α) το εμβαδόν της βάσης του πρίσματος,

(β) τον όγκο του πρίσματος.

12. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Να βρείτε το δειγματικό χώρο και στη συνέχεια να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

(α) Α : δύο από τις ενδείξεις να είναι οι ίδιες,

(β) Β : τουλάχιστο μια ένδειξη να είναι κεφαλή.

13. Να λύσετε την εξίσωση: $\binom{\nu}{2}=45$

14. Ο κ. Πέτρος ρωτήθηκε πόσες κότες έχει και απάντησε ως εξής: « Έχω περισσότερες από 400 και λιγότερες από 500. Όταν τις μετρώ ανά 5 ή 8 ή 12 δεν περισσεύει καμιά ».
Να βρείτε πόσες είναι οι κότες του κ. Πέτρου.

15. Ένας μοτοσικλετιστής τρέχει με ταχύτητα 80 km/h σε κατοικημένη περιοχή. Αστυνομικός του κάνει σήμα να σταματήσει αλλά αυτός τον αγνοεί και συνεχίζει με την ίδια ταχύτητα. Τρία λεπτά αργότερα ο αστυνομικός αρχίζει να τον καταδιώκει με ταχύτητα 100 km/h. Σε πόση ώρα θα τον ανακόψει και σε ποια απόσταση από το σημείο ελέγχου;

ΜΕΡΟΣ Β'

Να απαντήσετε σε 4 μόνο από τις 6 ερωτήσεις.
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Ένας μανάβης αγόρασε 260 κιλά μήλα προς 180 σεντ το κιλό και 250 κιλά σταφύλι προς 90 σεντ το κιλό. Πώλησε τα μήλα με ζημιά 15% και το σταφύλι με κέρδος 30%. Να βρείτε το ποσό των χρημάτων που κέρδισε ή ζημίωσε.

2. Τα αποτελέσματα ενός διαγωνίσματος στα Γαλλικά σ' ένα τμήμα Λυκείου φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Βαθμός (x_i)	9	10	12	15	17	20
Αριθμός μαθητών (f_i)	6	2	3	8	6	3

Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{x}$, τη διάμεσο x_δ, την επικρατούσα τιμή x_ε και την τυπική απόκλιση της πιο πάνω κατανομής με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

3. Κάποιος τόκισε με απλό τόκο τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων του στην τράπεζα Α με επιτόκιο 6,5%, το $\frac{1}{4}$ των υπολοίπων χρημάτων στην τράπεζα Β με επιτόκιο 4% και τα χρήματα που του απέμειναν τα τόκισε στην τράπεζα Γ με επιτόκιο 5%. Αν σε δύο χρόνια πήρε και από τις τρεις τράπεζες συνολικό τόκο 5680 λίρες, να βρείτε πόσα χρήματα είχε.

4. Το μέσο ύψος 11 παικτών μιας ομάδας μπάσκετ είναι 195cm.

(α) Για να αυξηθεί το μέσο ύψος της ομάδας ο προπονητής πήρε ακόμη ένα παίκτη με ύψος 207cm. Ποιο είναι το νέο μέσο ύψος της ομάδας;

(β) Αν ο προπονητής θέλει να αυξήσει το μέσο ύψος της αρχικής ομάδας κατά 2cm, ποιο πρέπει να είναι το ύψος του νέου παίκτη που πρέπει να προσλάβει;

5. Ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90°$, $AB = 8\alpha$ cm, $\Gamma\Delta = 11\alpha$ cm και $A\Delta = 4\alpha$ cm, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τη μικρή βάση του. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

6. Σ' ένα χωριό της Κύπρου το 35% των κατοίκων ξέρει να κολυμπά, το 20% ξέρει να ψαρεύει και το 15% ξέρει και να κολυμπά και να ψαρεύει. Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα κάτοικο, ποια η πιθανότητα των ενδεχομένων:

(α) να ξέρει να ψαρεύει ή να κολυμπά,

(β) να ξέρει μόνο να κολυμπά,

(γ) να μη ξέρει ούτε να κολυμπά ούτε να ψαρεύει.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α′:

1. Υπάρχουν συνολικά 9 γράμματα

   Υπάρχουν τρία Ε

   Υπάρχουν δύο Ι

$$\text{Πλήθος αναγραμματισμών} = \frac{9!}{3!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 30240$$

2. α) $\overline{x} = \dfrac{3+5+2+7+1+6+2+7+2+6+3}{11} = \dfrac{44}{11} = 4$

   Η μέση τιμή είναι 4.

   β) 1, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7, 7

   Η διάμεσος είναι 3

   γ) Η παρατήρηση με το μεγαλύτερο πλήθος είναι η 2

   Άρα, η επικρατούσα τιμή είναι η 2.

3. $V = \dfrac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow 288\pi = \dfrac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow R^3 = 216 \Rightarrow R = 6\text{cm}$

   $E = 4\pi R^2 \Rightarrow E = 4\ \pi\ 6^2 \Rightarrow E = 144\pi\ \text{cm}^2$

4.

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 192 & 2 \\ 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$108 = 2^2 \cdot 3^3$ $\quad 192=2^6\cdot 3$ $\quad 144=2^4 3^2$

$\text{ΜΚΔ}(108, 192, 144) = 2^2 \cdot 3 = 12$

Θα γίνουν το πολύ 12 ανθοδέσμες

Η κάθε ανθοδέσμη θα περιέχει:

108 : 12 = 9 τριαντάφυλλα

192 : 12 = 16 γαρύφαλλα

144 : 12= 12 κρίνους

5. Έκπτωση = 600 – 462 = 138 λίρες

Έστω x (%) το ποσοστό έκπτωσης

$$600\frac{x}{100} = 138 \;\Rightarrow\; x = 23\%$$

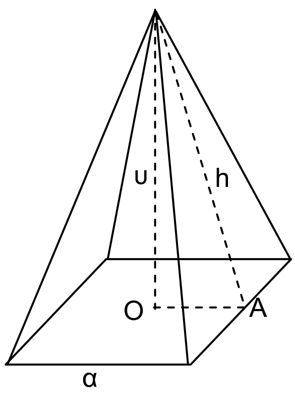
Απ.: Το ποσοστό της έκπτωσης είναι 23%.

6. (α) Έξι οικογένειες δεν έχουν παιδιά.

$\frac{6}{50}\cdot 100 = 12\%$;άρα 12% των οικογενειών δεν έχουν παιδιά

(β) 6 + 14 + 13 = 33 ;άρα 33 οικογένειες έχουν το πολύ 2 παιδιά

7.



$$E_\beta = \alpha^2 \Rightarrow E_\beta = 12^2 \Rightarrow E_\beta = 144\ \text{cm}^2$$

$$V = \frac{E_\beta \cdot \upsilon}{3} \Rightarrow 384 = \frac{144\cdot \upsilon}{3} \Rightarrow \upsilon = 8\text{cm}$$

$$\upsilon^2 + (OA)^2 = h^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = h^2 \Rightarrow h = 10\text{cm}$$

$$E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} \Rightarrow E_\pi = \frac{4\cdot 12\cdot 10}{2} \Rightarrow E_\pi = 240\text{cm}^2$$

$$E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta \Rightarrow E_{o\lambda} = 240 + 144 = 384\ \text{cm}^2$$

Απ.: Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας είναι 384 cm^2.

8. $$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{P(A)}{1\text{-}P(A)} = \frac{7}{9} \Rightarrow 9P(A) = 7[1 - P(A)] = 7 - 7P(A) \Rightarrow$$

$$16P(A) = 7 \Rightarrow P(A) = \frac{7}{16} \;\Rightarrow\; P(A') = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

9. Έστω x η τιμή πώλησης του Η.Υ., χωρίς ΦΠΑ

$$x+\frac{15}{100}x=897 \Rightarrow 100x+15x=100\cdot 897 \Rightarrow 115x=89700 \Rightarrow x=780 \text{ λίρες}$$

Απ. Η τιμή πώλησης του Η.Υ. χωρίς ΦΠΑ είναι 780 λίρες

10.

Μονοψήφιοι: 0, 1, 2, 3, 4, 6 — 6

Διψήφιοι:

Δεκάδες	Μονάδες
5	5

$5\cdot 5 = 25$

Τριψήφιοι:

Εκατοντάδες	Δεκάδες	Μονάδες
2	5	4

$2\cdot 5\cdot 4 = 40$

$6 + 25 + 40 = 71$

Απ.: Μπορούμε να σχηματίσουμε 71 αριθμούς μικρότερους του 300 χωρίς επανάληψη ψηφίου.

11. α) Περίμετρος = 3α

Πλευρά βάσης α = 12 : 3 = 4 cm

$$E_\beta=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow E_\beta=\frac{4^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

β) $V = E_\beta\, \upsilon \Rightarrow V=4\sqrt{3}\cdot 9\sqrt{3} \Rightarrow V=108\,\text{cm}^3$

12. Κ: κεφαλή Γ: γράμματα

Δειγματικός χώρος: Ω = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

α) Α= {ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΚΚ, ΚΓΚ, ΚΚΓ}

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

β) Β= {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ}

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{7}{8}$$

13. $$\binom{\nu}{2}=45 \Rightarrow \frac{\nu!}{2!(\nu-2)!}=45 \Rightarrow \frac{\cancel{(\nu-2)!}(\nu-1)\nu}{\cancel{(\nu-2)!}2!}=45 \Rightarrow \nu^2-\nu=90 \Rightarrow$$

$\nu^2 - \nu - 90 = 0 \Rightarrow (\nu - 10)(\nu + 9) = 0 \Rightarrow \nu - 10 = 0 \Rightarrow \nu = 10$

$\nu + 9 = 0 \Rightarrow \nu = -9$ απορρίπτεται.

14.

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 5 \\ 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΕΚΠ}(5,8,12) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Το πολλαπλάσιο του 120 μεταξύ του 400 και του 500 είναι το 480
Απ.: Ο κ. Πέτρος έχει 480 κότες

15. Έστω ότι θα τον ανακόψει σε x ώρες από τη στιγμή που ο αστυνομικός αρχίζει την καταδίωξη.

Στα 3 λεπτά ο μοτοσικλετιστής θα καλύψει $\frac{3}{60} \cdot 80\text{ km}$

Σε x ώρες ο μοτοσικλετιστής θα καλύψει 80x km.
Σε x ώρες ο αστυνομικός θα καλύψει 100x km.

$100x = 80x + 4 \Rightarrow 100x - 80x = 4 \Rightarrow 20x = 4 \Rightarrow$

$x = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ της ώρας = 12 λεπτά

Ο αστυνομικός θα καλύψει $100 \cdot \frac{1}{5} = 20\text{ km}$.

Απ.: Ο αστυνομικός θα τον ανακόψει σε 12 λεπτά από τη στιγμή που άρχισε τη καταδίωξη και σε απόσταση 20 km από το σημείο ελέγχου.

ΜΕΡΟΣ Β'

1. Μήλα: 260 · 180 = 46800 σεντ

Σταφύλι: 250 · 90 = 22500 σεντ

Πλήρωσε: 468 + 225 = 693 λίρες

Είσπραξε από μήλα: $468 - 468 \cdot \frac{15}{100} = 468 - 70{,}20 = 397{,}80$ λίρες

Είσπραξε από σταφύλι: $225 + 225 \cdot \frac{30}{100} = 225 + 67{,}50 = 292{,}50$ λίρες

Συνολική είσπραξη: 397,80 + 292,50 = 690,30 λίρες

Ζημίωσε : 693,00 – 690,30 = 2,70 λίρες

2. α)

Βαθμός (x_i)	**Αρ. Μαθητών (f_i)**	**$f_i x_i$**	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
9	6	54	$(-5)^2$	6·25 = 150
10	2	20	$(-4)^2$	2·16 = 32
12	3	36	$(-2)^2$	3·4 = 12
15	8	120	1^2	8·1 = 8
17	6	102	3^2	6·9 = 54
20	3	60	6^2	3·36 = 108
	28	**392**		**364**

$$\overline{x} = \frac{9\cdot 6+10\cdot 2+12\cdot 3+15\cdot 8+17\cdot 9+20\cdot 3}{28} = \frac{392}{28} \Rightarrow \overline{x} = 14$$

Τυπική απόκλιση: $\sigma = \sqrt{\dfrac{364}{28}} \Rightarrow \sigma = 3,61$

β) Η διάμεσος είναι η μέση τιμή του $14^{ου}$ και $15^{ου}$ βαθμού όταν αυτοί είναι τοποθετημένοι σε αύξουσα σειρά.

Υπάρχει 6 φορές το 9	6
Υπάρχει 2 φορές το 10	6 + 2 = 8
Υπάρχει 3 φορές το 12	8 + 3 = 11
Υπάρχει 8 φορές το 15	

Άρα ο $14^{ος}$ είναι το 15 και ο $15^{ος}$ είναι το 15

Η διάμεσος είναι: $x_\delta = \dfrac{15+15}{2} = 15$

γ) Επικρατούσα τιμή είναι ο βαθμός με τη μεγαλύτερη συχνότητα, δηλ. το 15

3. Έστω ότι είχε x λίρες.

Τόκος από τη τράπεζα Α: $T_1 = \dfrac{\frac{2}{3}x\cdot(6,5)\cdot 2}{100} = \dfrac{26x}{300}$

Τόκος από τη τράπεζα Β: $T_2 = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x\cdot 4\cdot 2}{100} = \dfrac{2x}{300}$

Τόκος από τη τράπεζα Γ: $T_3 = \dfrac{\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)x\cdot 5\cdot 2}{100} = \dfrac{x}{40}$

$\dfrac{26x}{300}+\dfrac{2x}{300}+\dfrac{x}{40} = 5680 \Rightarrow$ 50x + 4x + 15x = 3408000 $\Rightarrow$

71x = 3408000 $\Rightarrow$ x = 48000 λίρες

4. α) Το άθροισμα των υψών των 11 παικτών είναι 11·195 = 2145

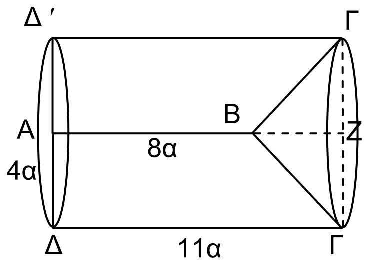
Το άθροισμα των υψών των 12 παικτών είναι 2145 + 207 = 2352

Το νέο μέσο ύψος είναι: $\dfrac{2352}{12} = 196$ cm

β) Έστω ότι το ύψος του νέου παίκτη που θα προσλάβει είναι x

$$\frac{2145+x}{12} = 197 \Rightarrow 2145+x = 2364 \Rightarrow x = 219\text{cm}$$

5.



$(ΒΓ) = 11α – 8α = 3α$ cm

$(ΒΓ)^2 = (ΒΖ)^2 + (ΖΓ)^2$

$(ΒΓ)^2 = 9α^2 + 16α^2 = 25α^2$

$(ΒΓ) = 5α$ cm

$Ε_{ολ} = Ε_{ΑΔ} + Ε_{ΔΓ} + Ε_{ΓΒ}$

$Ε_{ΑΔ} = π\, r^2 = π\, (ΑΔ)^2 = π\, (4α)^2 = 16πα^2$ cm^2

$Ε_{ΔΓ} = 2πRh = 2π\, (ΑΔ)(ΓΔ) = 2π(4α)(11α) = 88πα^2$ cm^2

$Ε_{ΒΓ} = 2πRλ = π\, (ΑΔ)(ΒΓ) = π(4α)(5α) = 20πα^2$ cm^2

$Ε_{ολ} = 16πα^2 + 88πα^2 + 20πα^2 = 124πα^2$ cm^2

$$V = V_{κυλ} - V_{κων} \Rightarrow V = πR^2h - \frac{πR^2υ}{3} \Rightarrow V = \frac{πR^2}{3}(3h - υ) \Rightarrow$$

$$V = \frac{π(ΑΔ)^2}{3}[(3(ΔΓ) - (ΒΖ)] \Rightarrow V = \frac{π(4α)^2}{3}[(3(11α) - 3α] \Rightarrow$$

$$V = π16α^2 \cdot 10α \Rightarrow V = 160πα^3 \text{ cm}^3$$

6. Κ: ″ ξέρει να κολυμπά ″

Ψ: ″ ξέρει να ψαρεύει ″

$$P(Κ) = \frac{35}{100}, \; P(Ψ) = \frac{20}{100} \Rightarrow P(Κ \cap Ψ) = \frac{15}{100}$$

α) $P(Κ \cup Ψ) = P(Κ) + P(Ψ) - P(Κ \cap Ψ)$

$$P(Κ \cup Ψ) = \frac{35}{100} + \frac{20}{100} - \frac{15}{100}$$

$$P(Κ \cup Ψ) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

β) $P(K \cap \Psi') = P(K) - P(K \cap \Psi)$

$$P(K \cap \Psi') = \frac{35}{100} - \frac{15}{100} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

γ) $P(K' \cap \Psi') = P[(K \cup \Psi)'] = 1 - P(K \cup \Psi)$

$$P(K' \cap \Psi') = 1 - \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$P(K' \cap \Psi') = \frac{3}{5}$$

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2003 – 2004

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (4ωρο)

Χρόνος: 2 Ώρες και 30 λεπτά Ιούνιος 2004

<u>ΜΕΡΟΣ Α':</u> Να απαντήσετε σε 12 μόνο από τις 15 ερωτήσεις.
Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Κύβος έχει ακμή 3cm. Να υπολογίσετε τον όγκο και το ολικό του εμβαδόν.

2. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ xy &= 4 \end{aligned}$$

3. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης : $\eta\mu 2x = \frac{1}{2}$

4. Η μέση τιμή οκτώ αριθμών είναι 15. Οι έξι από αυτούς είναι: 9, 12, 13, 15, 17 και 18. Να υπολογίσετε τους άλλους δύο αν ο ένας είναι κατά 4 μεγαλύτερος από τον άλλο.

5. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του.

6. Να υπολογίσετε πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορώ να σχηματίσω με τα ψηφία 1, 2, 3, 4 και 5 αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη του ιδίου ψηφίου στον ίδιο αριθμό. Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι;

7. Κώνος έχει ύψος 8cm και περίμετρο βάσης 12π cm. Να υπολογίσετε την ακτίνα, τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της συνάρτησης για τα οποία $f'(x) = 0$.

9. Κάποιος αγόρασε μια μοτοσικλέτα και τη μεταπώλησε προς £2400 ζημιώνοντας έτσι 20% πάνω στην τιμή που την αγόρασε. Να υπολογίσετε την τιμή στην οποία την αγόρασε.

10. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = 4cm, ΑΓ = 6cm και τη γωνία $\widehat{A} = 60°$. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ και το εμβαδόν του τριγώνου.

11. Να βρείτε τον αριθμό των διαφορετικών αναγραμματισμών της λέξης ΕΙΡΗΝΗ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν και τελειώνουν με Η;

12. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y = \dfrac{2x-3}{3x+4}$

13. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \left(3x + \dfrac{5}{x} - 1\right) dx$

14. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου και:

$P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B') = \dfrac{3}{4}$ και $P(A \cap B) = \dfrac{1}{12}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες

α) $P(B)$, β) $P(A \cup B)$ γ) $P(B|A)$.

15. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 + 1$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

<u>ΜΕΡΟΣ Β':</u> Να απαντήσετε σε 4 μόνο από τις 6 ερωτήσεις.
Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

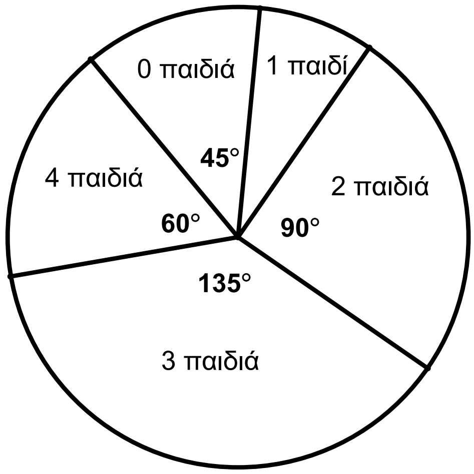
1. Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης συν$(3x - 60°) = \dfrac{1}{2}$ οι οποίες βρίσκονται στο διάστημα $0° \leq x \leq 180°$.

2. Το κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών 120 οικογενειών.

(α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των οικογενειών με 2 παιδιά.

(β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των οικογενειών με τουλάχιστον 3 παιδιά.

(γ) Αν πάρω ένα παιδί στην τύχη, να υπολογίσετε την πιθανότητα αυτός να προέρχεται από οικογένεια με ακριβώς 3 παιδιά.



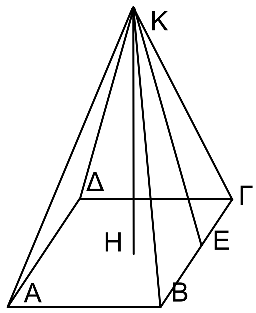
3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με κορυφή Κ και βάση τετράγωνο ΑΒΓΔ, η οποία έχει παράπλευρη ακμή ΚΓ = 10cm και ακμή βάσης ΔΓ = 12 cm. Να υπολογίσετε:

α) το παράπλευρο ύψος ΚΕ της πυραμίδας,

β) το ύψος ΚΗ της πυραμίδας,

γ) το ολικό εμβαδόν της πυραμίδας και

δ) τον όγκο της πυραμίδας.



4. Εταιρεία θέλει να προμηθευτεί με 20 ντεπόζιτα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου από λαμαρίνα μπογιατισμένη με ειδική μπογιά (εσωτερικά και εξωτερικά). Τα ντεπόζιτα θα είναι ανοιχτά στο πάνω μέρος και θα έχουν ύψος 1m και βάση με διαστάσεις 1m Χ 2m. Κάποιος θέλει να υποβάλει προσφορά για την κατασκευή των ντεπόζιτων αυτών και υπολογίζει ότι: η λαμαρίνα πωλείται προς £5/m^2, τα έξοδα κατασκευής του κάθε ντεπόζιτου είναι £50 και το μπογιάτισμα κοστίζει £3/m^2. Ο ίδιος θέλει να έχει κέρδος 30% στο σύνολο του κόστους και στην προσφορά θα πρέπει να προσθέσει Φόρο Προστιθέμενης Αξίας (ΦΠΑ) προς 15% στο σύνολο κόστους και κέρδους. Να υπολογίσετε το συνολικό ποσό της προσφοράς.

5. Θέλω να σχηματίσω μια 4μελή ομάδα επιλέγοντας τα μέλη της από 12 κορίτσια και 8 αγόρια. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορώ να το κάνω αν στην ομάδα

(α) μπορεί να συμμετάσχει οποιοδήποτε από τα 20 άτομα.

(β) πρέπει να περιλαμβάνονται 2 αγόρια και 2 κορίτσια.

(γ) πρέπει να περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένα αγόρι και τουλάχιστον ένα κορίτσι.

6. Αν $y = e^{2x}$ ημ3x να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$

Γωνία	Ημίτονο	Συνημίτονο	Εφαπτομένη
30°	0,500	0,866	0,577
60°	0,866	0,500	1,732

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $V = \alpha^3$, $\alpha = 3cm \Rightarrow V = 27cm^3$

   $E = 6\alpha^3 \Rightarrow E = 54cm^3$

2. $\left.\begin{aligned} x - y = 3 \\ xy = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(3 + y) = 4 \Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1$ ή $y = -4$

   Όταν $y = 1 \Rightarrow x = 4$ και όταν $y = -4 \Rightarrow x = -1$

   Λύσεις (–1, –4) και (4, 1)

3. ημ2x $= \frac{1}{2}$ = ημ30° $\Rightarrow 2x = 360°K + 180° - 30°$, $K \in Z$

   $x = 180°K + 15°$ ή $x = 180°K + 75°$, $K \in Z$

4. Άθροισμα των 6 αριθμών: 84

   $\frac{84 + x + x + 4}{8} = 15 \Rightarrow 88 + 2x = 120 \Rightarrow x = 16$

   Ο ένας αριθμός είναι ο 16 και ο άλλος ο 20

5. $g = -2$, $f = -1$, $c = -4 \Rightarrow$

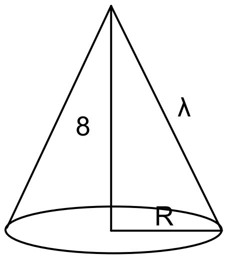
   Κέντρο: (2, 1)

   Ακτίνα: $\sqrt{4 + 4 + 1} = 3$

6. Αριθμός τριψήφιων αριθμών: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

   Αριθμός άρτιων τριψήφιων αριθμών: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$

7.



$2\pi R = 12\pi \Rightarrow R = 6$ cm

$\lambda^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow \lambda = 10$ cm

$V = \dfrac{\pi R^2 \upsilon}{3} \Rightarrow V = 96\pi\,\text{cm}^3$

$E_{o\lambda} = \pi R(R + \lambda) \Rightarrow E_{o\lambda} = \pi 6(6 + 10) = 96\pi$ cm^2

8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$

$f(0) = 4$ και $f(1) = 3 \Rightarrow$ Τα ζητούμενα σημεία: $(0, 4)$ και $(1, 3)$

9.

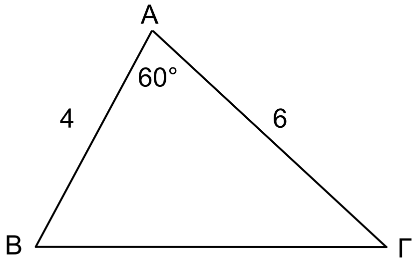
Αγορά	Πώληση
100	80
x	2400

$\dfrac{100}{x} = \dfrac{80}{2400} \Rightarrow 80x = 240000 \Rightarrow x = 3000$

Αρχική τιμή: £3000

10. $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB\cdot A\Gamma$ συν$60° = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\dfrac{1}{2} = 28 \Rightarrow$

$B\Gamma = \sqrt{28}$ cm



$E = \dfrac{1}{2} AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu 60°$

$E = \dfrac{1}{2} 4 \cdot 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm^2

11. α) $\dfrac{6!}{2!} = 360$ β) $4! = 24$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(3x+4) - 3(2x-3)}{(3x+4)^2} = \dfrac{17}{(3x+4)^2}$

13. $\displaystyle\int \left(3x + \frac{5}{x} - 1\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 5\ln|x| - x + C$

14. $P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

15. $E = \int_1^3 (x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_1^3 = \left(\frac{23}{3} + 3\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{32}{3}$

<u>ΜΕΡΟΣ Β′</u>

1. $συν(3x - 60°) = \frac{1}{2} = συν60° \Rightarrow 3x - 60° = 360°K \pm 60°\ ,\ K \in Z \Rightarrow$

$x = 120°K$ ή $x = 120°K + 40°\ ,\ K \in Z$

Λύσεις στο διάστημα $0° \le x \le 180°$

$K = 0 \Rightarrow x = 0°\ ,\ 40°$

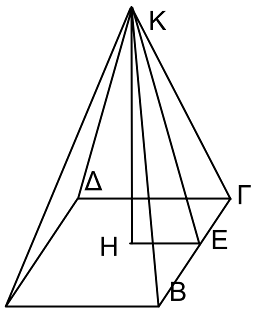
$K = 1 \Rightarrow x = 120°\ ,\ 160°$

2. α) Αριθμός οικογενειών με 2 παιδιά: $\frac{90°}{360°} \cdot 120 = 30$

β) Αριθμός οικογενειών με τουλάχιστον 3 παιδιά: $\frac{135° + 60°}{360°} \cdot 120 = 65$

γ) Ζητούμενη πιθανότητα: $\frac{135°}{360°} = \frac{3}{8}$

3.



$K\Gamma = 10$ cm

$\Delta\Gamma = 12$ cm

$HE = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = 6\,\text{cm}$

$KE^2 = K\Gamma^2 - E\Gamma^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow KE = 8\text{cm}$

$KH^2 = KE^2 - HE^2 = 64 - 36 = 28 \Rightarrow KH = \sqrt{28}$ cm

$E_{ολ} = 144 + \dfrac{48\cdot 8}{2} = 336\,\text{cm}^2$

$V = \dfrac{E_\beta \cdot \upsilon}{3} \Rightarrow V = \dfrac{144\sqrt{28}}{3} = 96\sqrt{7} \approx 254\text{cm}^3$

4. Εμβαδόν εξωτερικής επιφάνειας ντεποζίτου: 8 m^2

Εμβαδόν εσωτερικής επιφάνειας ντεποζίτου: 8 m^2

Κόστος λαμαρίνας: 20x8x5 = £ 800

Κόστος κατασκευής: 20x50 = £1000

Μπογιάτισμα 20x16x3 = £ 960

Σύνολο κόστους: £2760

Κέρδος 30% των 2760 = £828

Φ.Π.Α. 15% του συνόλου (2760 + 828) = £538,20

Συνολικό ποσό προσφοράς: 2760 + 828 + 538,20 = £4162,20

5. α) $\binom{20}{4} = 4845$

β) $\binom{12}{2}\binom{8}{2} = 1848$

γ) $\binom{12}{1}\binom{8}{3} + \binom{12}{2}\binom{8}{2} + \binom{12}{3}\binom{8}{1} = 672 + 1848 + 1760 = 4280$

6. $y = e^{2x}\eta\mu 3x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2e^{2x}\eta\mu 3x + 3e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5e^{2x}\eta\mu 3x + 12e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y =$$

$$(-5e^{2x}\eta\mu 3x + 12e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x) - 4(2e^{2x}\eta\mu 3x + 3e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x) + 13e^{2x}\eta\mu 3x =$$

$$e^{2x}[-5\eta\mu 3x + 12\sigma\upsilon\nu 3x - 8\eta\mu 3x - 12\sigma\upsilon\nu 3x + 13\eta\mu 3x] = 0$$

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2003 – 2004

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (2ωρο)

Χρόνος: 2 Ώρες και 30 λεπτά Ιούνιος 2004

<u>ΜΕΡΟΣ Α':</u> Να απαντήσετε σε 12 μόνο από τις 15 ερωτήσεις.
Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας σε λίρες είναι 800, 950, 600, 700, 1200, 800, 700, 1400, 1000, 800. Να βρείτε τη μέση τιμή των μισθών.

2. Αυτοκίνητο αξίας 12000 λιρών πωλήθηκε 9360 λίρες. Να βρείτε πόσο τοις εκατόν (%) ήταν η έκπτωση.

3. Ένας υπάλληλος ξοδεύει το 23% του μισθού του σε ενοίκιο και του μένουν 693 λίρες. Ποιος είναι ο μισθός του;

4. Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

   Α : "η ένδειξη που παρουσιάζεται είναι άρτιος αριθμός ",

   Β : "η ένδειξη που παρουσιάζεται είναι αριθμός μεγαλύτερος του 3".

   (α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο,

   (β) Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(A)$, $P(B)$, και $P(A \cap B)$.

5. Κώνος έχει ακτίνα βάσης 6 cm και ύψος 10 cm. Να βρείτε τον όγκο του.

6. Κύβος έχει ολική επιφάνεια 384 cm^2. Να βρείτε :

   (α) Την ακμή του κύβου.

   (β) Τον όγκο του κύβου.

7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 6 cm και ύψος 4 cm. Να βρείτε:

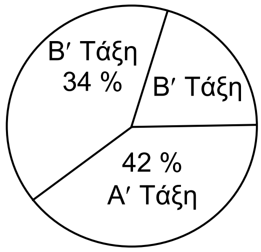
   (α) Το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας,

   (β) Τον όγκο της πυραμίδας.

8. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ x^2 + 2y &= 17 \end{aligned}$$

9. Το διπλανό κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τον αριθμό των μαθητών κατά τάξη σε ένα Γυμνάσιο. Αν οι μαθητές της Α' τάξης είναι 273, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της Γ' τάξης.



10. Έμπορος πώλησε εμπορεύματα με κέρδος 25% πάνω στην αξία τους και εισέπραξε 17500 λίρες. Ποια ήταν η αξία των εμπορευμάτων;

11. Ορθό πρίσμα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 9 cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 10 cm, να βρείτε:

(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος,

(β) Τον όγκο του πρίσματος.

12. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με:

$P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(B') = \dfrac{11}{20}$ και $P(A \cup B) = \dfrac{3}{5}$

Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A')$, $P(A \cap B)$ και $P(A \cap B')$.

13. Ο Πέτρος έχει τριπλάσια ηλικία από τον αδελφό του Γιάννη. Η αδελφή τους Μαρία είναι 7 χρονών. Να βρείτε την ηλικία του Πέτρου και του Γιάννη, αν ο μέσος όρος των ηλικιών των τριών αδελφών είναι 5.

14. Κώνος έχει ακτίνα βάσης 6 cm και ύψος 8 cm. Να βρείτε:

(α) Το εμβαδόν της βάσης.

(β) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας,

(γ) Τον όγκο του κώνου.

15. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 10 cm και εμβαδόν ολικής επιφάνειας 360 cm^2. Να βρείτε:

(α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας,

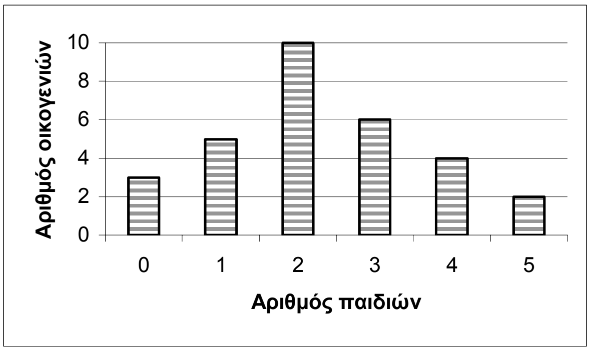
(β) Το ύψος της πυραμίδας,

(γ) Τον όγκο της πυραμίδας.

ΜΕΡΟΣ Β': Να απαντήσετε σε 4 μόνο από τις 6 ερωτήσεις.
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το ραβδόγραμμα που παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών σε ένα δείγμα 30 οικογενειών.

(α) Πόσες οικογένειες έχουν 2 παιδιά;
(β) Να βρείτε πόσο τοις εκατόν (%) των οικογενειών δεν έχουν παιδιά,
(γ) Να βρείτε πόσο τοις εκατόν (%) των οικογενειών έχουν 2 ή λιγότερα παιδιά,
(δ) Να βρείτε τη μέση τιμή της κατανομής.



2. Κύλινδρος έχει ύψος 8 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 48π cm^2.

Να βρείτε:

(α) Την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου.

(β) Τον όγκο του κυλίνδρου.

3. Η διαφορά δύο αριθμών είναι 2. Το γινόμενο τους είναι κατά 7μεγαλύτερο από το άθροισμα τους. Να βρείτε τους αριθμούς.

4. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποια η πιθανότητα :

(α) Να παρουσιαστεί ακριβώς μια φορά η ένδειξη κορώνα

(β) Να παρουσιαστεί τουλάχιστον μια φορά η ένδειξη γράμματα.

(γ) Να μη παρουσιαστεί καμιά φορά η ένδειξη γράμματα.

5. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με (ΑΒ) = 8 cm και (ΑΔ) = 5 cm περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ΑΒ. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.

6. Οικόπεδο σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου έχει πλάτος 24 m και μήκος 30 m. Θέλουμε να το περιφράξουμε με συρματόπλεγμα ύψους 2 m. Το συρματόπλεγμα στοιχίζει 2 λίρες το τετραγωνικό μέτρο, χωρίς Φόρο Προστιθέμενης Αξίας (Φ.Π.Α.). Να βρείτε το συνολικό κόστος του συρματοπλέγματος, αν θα πληρωθεί 15% Φόρος Προστιθέμενης Αξίας (Φ.Π.Α.).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α′:

1.
$$\overline{x} = \frac{800+950+600+700+1200+800+700+1400+1000+800}{10}$$
$$\overline{x} = \frac{8950}{10} = 895$$

Απ.: Η μέση τιμή των μισθών είναι 895 λίρες

2. Έκπτωση = 12000 – 9360 = 2640 λίρες

Έστω x η επί τοις εκατόν έκπτωση

Αξία	Έκπτωση
12000	2640
100	x

$$\Rightarrow \frac{12000}{100} = \frac{2640}{x} \Rightarrow x = \frac{2640}{120} \Rightarrow x = 22$$

Απ.: Η έκπτωση ήταν 22%

3. Το ποσό που μένει αντιπροσωπεύει το 100 – 23 = 77 %

Έστω x ο μισθός του υπαλλήλου

$$x \cdot \frac{77}{100} = 693 \Rightarrow x = \frac{693 \cdot 100}{77} \Rightarrow x = 900$$

Απ.: Ο μισθός του υπαλλήλου είναι 900 λίρες

4. α) Δειγματικός χώρος: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

β) $A = \{2, 4, 6\}$ άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$B = \{4, 5, 6\}$ άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{4, 6\}$ άρα $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

5. $V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi 6^2 10}{3} = \frac{360\pi}{3} \Rightarrow V = 120\pi \text{ cm}^3$

Απ.: Ο όγκος του κώνου είναι 120π cm^3

6. α) $E_{ολ} = 6α^2 \Rightarrow 384 = 6α^2 \Rightarrow α^2 = 64 \Rightarrow α = 8$ cm

Απ.: Η ακμή του κύβου είναι 8 cm

β) $V = α^3 \Rightarrow V = 8^3 \Rightarrow V = 512\ cm^3$

Απ.: Ο όγκος του κύβου είναι 512 cm^3

7. α) $E_β = α^2 \Rightarrow E_β = 6^2 \Rightarrow E_β = 36\ cm^2$

Απ.: Το εμβαδόν της βάσης είναι 36 cm^2

β) $V = \dfrac{E_β υ}{3} \Rightarrow V = \dfrac{36 \cdot 4}{3} \Rightarrow V = 48\ cm^3$

Απ.: Ο όγκος της πυραμίδας είναι 48 cm^3

8. $x + y = 7 \quad \Rightarrow y = 7 - x$

$x^2 + 2y = 17$

$x^2 + 2(7 - x) = 17 \Rightarrow x^2 + 14 - 2x - 17 = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$(x - 3)(x + 1) = 0 \quad$ ή $\quad x_{1,2} = \dfrac{-β \pm \sqrt{β^2 - 4αγ}}{2α} \Rightarrow$

$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 7 - x_1 \Rightarrow y_1 = 7 - 3 \Rightarrow y_1 = 4$

$x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = 7 - x_2 \Rightarrow y_2 = 7 - (-1) \Rightarrow y_2 = 8$

Λύσεις: (α) $(x_1, y_1) = (3, 4)$

(β) $(x_2, y_2) = (-1, 8)$

9. Το ποσοστό των μαθητών της Γ ′ τάξης είναι 100 –(34 + 42) = 24%

42%	273
24%	x

$\Rightarrow \dfrac{42}{24} = \dfrac{273}{x} \Rightarrow x = \dfrac{273 \cdot 24}{42} \Rightarrow x = 156$

Απ.: Οι μαθητές της Γ ′ τάξης είναι: 156

10. Έστω x η αξία των εμπορευμάτων

100	125
x	17500

$\Rightarrow \dfrac{100}{x} = \dfrac{125}{17500} \Rightarrow x = \dfrac{17500 \cdot 100}{125} \Rightarrow x = 14000$

Απ.: Η αξία των εμπορευμάτων ήταν 14000 λίρες

11. α) $E_{ολ} = 2(αβ + βγ + αγ) \Rightarrow E_{ολ} = 2(9\cdot9 + 9\cdot10 + 9\cdot10 \Rightarrow E_{ολ} = 522cm^2$

β) $V = E_β\cdot υ \Rightarrow V = 81\cdot10 \Rightarrow V = 810\ cm^3$

12. $P(B) = 1 - P(B') \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{11}{20} \Rightarrow P(B) = \frac{9}{20}$

$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow P(A') = \frac{3}{4}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{8}{20} - \frac{3}{5} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

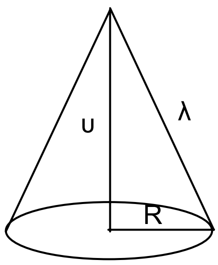
$P(A \cap B') = P(A \cup B) - P(B) = \frac{3}{5} - \frac{9}{20} \Rightarrow P(A \cap B') = \frac{3}{20}$

13. Έστω x η ηλικία του Γιάννη
3x θα είναι η ηλικία του Πέτρου

$\frac{x + 3x + 7}{3} = 5 \Rightarrow 4x + 7 = 15 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

Απ.: Ο Γιάννης είναι 2 χρόνων και ο Πέτρος 6 χρόνων.

14.



$λ^2 = R^2 + υ^2 \Rightarrow λ^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow λ^2 = 100$

$λ = 10cm$

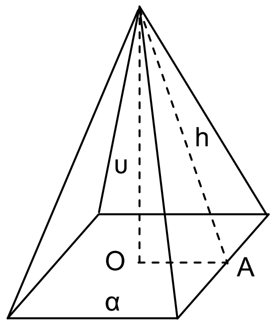
$E_κ = πRλ \Rightarrow E_κ = π\cdot6\cdot10 \Rightarrow E_κ = 60π\ cm^2$

$V = \frac{πR^2υ}{3} \Rightarrow V = \frac{π6^28}{3} \Rightarrow V = 96π\ cm^3$

15. α) $E_β = α^2 \Rightarrow E_β = 10^2 \Rightarrow E_β = 100\ cm^2$

$E_{ολ} = E_β + E_π \Rightarrow E_π = E_{ολ} - E_β \Rightarrow E_π = 360 - 100 \Rightarrow E_π = 260cm^2$

β)



$$E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} \Rightarrow 260 = \frac{4 \cdot 10 \cdot h}{2} \Rightarrow h = 13\,\text{cm}$$

$$\upsilon^2 + (OA)^2 = h^2 \Rightarrow \upsilon^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon = 12\ \text{cm}$$

γ) $V = \frac{E_\beta \upsilon}{3} \Rightarrow V = \frac{100 \cdot 12}{3} \Rightarrow V = 400\ \text{cm}^3$

<u>ΜΕΡΟΣ Β′:</u>

1. α) Δέκα οικογένειες έχουν 2 παιδιά.

β) Τρεις οικογένειες δεν έχουν παιδιά.

$$\frac{3}{30} \cdot 100 = 10\%$$

10% των οικογενειών δεν έχουν παιδιά.

γ) Τρεις οικογένειες δεν έχουν παιδιά.

Πέντε οικογένειες έχουν 1 παιδί.

Δέκα οικογένειες έχουν 2 παιδιά.

3 + 5 + 10 = 18

18 οικογένειες έχουν 2 ή λιγότερα παιδιά.

$$\frac{18}{30} \cdot 100 = 60\%$$

60% των οικογενειών έχουν 2 ή λιγότερα παιδιά.

δ)

Αριθμός παιδιών	0	1	2	3	4	5
Αριθμός οικογενιών	3	5	10	6	4	2

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{30} \Rightarrow \overline{x} = 2{,}3$$

Η μέση τιμή της κατανομής είναι 2,3

2. α) $E_\kappa = 2\pi R\upsilon \Rightarrow 48\pi = 2\pi R \cdot 8 \Rightarrow R = \frac{48\pi}{16\pi} \Rightarrow R = 3\text{cm}$

Η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι 3cm β) $V = \pi R^2 \cdot \upsilon \Rightarrow V = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 \Rightarrow V = 72\pi \text{ cm}^3$

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $72\pi \text{ cm}^3$

3. Έστω x και y οι δυο αριθμοί.

$x - y = 2$
$xy = x + y + 7$

$$x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2$$
$$xy = x + y + 7 \Rightarrow (y + 2)y = y + 2 + y + 7 \Rightarrow$$
$$y^2 + 2y = 2y + 9 \Rightarrow$$
$$y^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$
$$(y - 3)(y + 3) = 0 \Rightarrow$$
$$y - 3 = 0 \quad ή \quad y + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 = 3 \quad ή \quad y_2 = -3$$

$$y_1 = 3 \Rightarrow x_1 = y_1 + 2 = 3 + 2 \Rightarrow x_1 = 5$$
$$y_2 = -3 \Rightarrow x_2 = y_2 + 2 = -3 + 2 \Rightarrow x_2 = -1$$

Απ.: Οι αριθμοί είναι α) 5 και 3 ή
β) –1 και –3

4. Κ : κορώνα
Γ : γράμματα

Δειγματικός χώρος: Ω = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

α) Δ = {ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ}

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(\Delta) = \frac{3}{8}$$

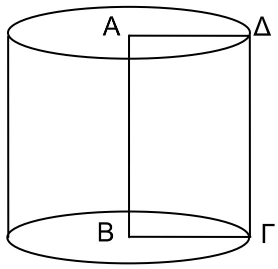
β) Ε = {ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(\Delta) = \frac{7}{8}$$

γ) Ζ = {ΚΚΚ}

$$P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(\Delta) = \frac{1}{8}$$

5.



α) Εμβαδόν βάσης $E_\beta = \pi R^2$

$E_\beta = \pi(A\Delta)^2 = \pi 5^2 \Rightarrow E_\beta = 25\pi\ cm^2$

Εμβαδόν κυρτής επιφάνειας:

$E_\kappa = 2\pi R \cdot \upsilon = 2\pi(A\Delta)(AB) \Rightarrow$

$E_\kappa = 2\pi 5 \cdot 8 \Rightarrow E_\kappa = 80\pi\ cm^2$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας: $E_{o\lambda} = E_\kappa + 2E_\beta \Rightarrow E_{o\lambda} = 80\pi + 2\cdot 25\pi \Rightarrow E_{o\lambda} = 80\pi\ cm^2$

β) Όγκος $V = \pi R^2 \cdot \upsilon \Rightarrow V = \pi 5^2 \cdot 8 \Rightarrow V = 200\pi\ cm^3$

6. Περίμετρος = 2(24 + 30) = 108 m

Εμβαδόν συρματοπλέγματος = 108 · 2 = 216 m^2

Αξία συρματοπλέγματος χωρίς Φ.Π.Α. = 216·2 = 432 λίρες

$$\Phi.\Pi.A. = \frac{15}{100} \cdot 432 \Rightarrow \Phi.\Pi.A. = 64,80 \text{ λίρες}$$

Συνολικό κόστος του συρματοπλέγματος:

432 + 68,80 = 496,80 λίρες.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Ιούνιος 2004

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Χρόνος 3 ώρες

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:
   $x = t^2 - 2$ και $y = \frac{t^3}{3} - t$, $t > 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $t = 3$.

2. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   Να δείξετε ότι $A^2 = A$ και να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$ για την οποία ισχύει η σχέση $A^{11} + \lambda I = B$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2x2.

3. Μεταξύ 200 μαθητών οι 120 έχουν καλό βαθμό στα Μαθηματικά, οι 160 έχουν καλό βαθμό στα Ελληνικά και οι 100 έχουν καλό βαθμό και στα δύο μαθήματα. Αν επιλέξω ένα μαθητή στην τύχη να υπολογίσετε την πιθανότητα να έχει καλό βαθμό:
   α) τουλάχιστον στο ένα από τα δύο μαθήματα.
   β) στα Ελληνικά αλλά όχι στα Μαθηματικά.
   γ) στα Ελληνικά δεδομένου ότι δεν έχει καλό βαθμό στα Μαθηματικά.

4. Αν η μέση τιμή των διαδοχικών ακέραιων αριθμών $1, 2, 3, 4, \ldots, \nu$ είναι 4 να βρείτε:
   α) το ν.
   β) την τυπική απόκλιση σ της κατανομής των αριθμών αυτών.

5. Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία 2, 3, 4, 5, 8 αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου; Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς περιέχουν το ψηφίο 3 και όχι το 5;

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(1, -2)$ ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$.

7. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{5dx}{(x+1)(4x^2+1)}$

8. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των y, του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = x^2 + 1$, την εφαπτομένη της στο σημείο (2,5) και τον άξονα των y.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha} - \alpha x + 10$, $x > 0$ και $0 < \alpha < 1$. Να δείξετε ότι η f(x) έχει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$ και να το χαρακτηρίσετε.

10. Δίνονται τα σταθερά σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(-\alpha,0)$, $\alpha > 0$ και το μεταβλητό σημείο $M(x,y)$. Να βρείτε την εξίσωση του σχήματος πάνω στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του M για τον οποίο το γινόμενο των κλίσεων των ευθειών MA και MB ισούται με κ, $\kappa \neq 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ το σημείο M κινείται πάνω σε έλλειψη.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τις εξισώσεις των ασυμπτώτων, τις συντεταγμένες των τοπικών ακροτάτων, τα σημεία τομής με τους άξονες και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2}$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = e + 2$.

2. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$, $\alpha > 0$ με εστία Ε και Μ τυχαίο σημείο της διαφορετικό από το O(0,0). Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι η ΒΕ είναι η μεσοκάθετη του ΑΜ.

β) Αν Ζ είναι το σημείο του άξονα x'x για το οποίο ΑΕ = ΕΖ, να δείξετε ότι η ΖΜ είναι η κάθετη της παραβολής στο σημείο Μ.

γ) Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x'x που τέμνει την ευθεία ΟΜ στο σημείο Ρ. Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου Ρ.

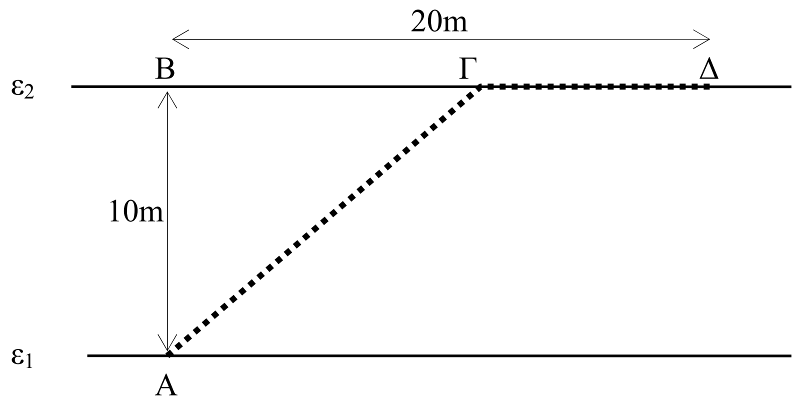
3. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και παίρνουμε ν σημεία $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$ πάνω στην ε_1 και $\nu+1$ σημεία $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{\nu+1}$ πάνω στην ε_2.

   α) Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων που έχουν κορυφές τρία από τα πιο πάνω σημεία.

   β) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα τρίγωνο από τα πιο πάνω, ποια η πιθανότητα το τρίγωνο αυτό να έχει δύο κορυφές στην ε_2;

   γ) Αν η προηγούμενη πιθανότητα είναι $\frac{10}{19}$ να βρείτε το ν.

4.



Στο σχήμα, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες όχθες ποταμού πλάτους $AB = 10m$. Εργοστάσιο βρίσκεται στο σημείο A της ε_1 ενώ στο σημείο Δ της ε_2, με $B\Delta = 20m$, βρίσκεται ηλεκτροπαραγωγός σταθμός ο οποίος θα πρέπει να ενωθεί με το εργοστάσιο μέσω καλωδίου. Μέρος του καλωδίου θα είναι υποβρύχιο (απόσταση $A\Gamma$) και μέρος υπόγειο (απόσταση $\Gamma\Delta$). Το κόστος της υποβρύχιας καλωδίωσης είναι £5/m και της υπόγειας καλωδίωσης είναι £3/m. Να βρείτε την απόσταση $B\Gamma = x$ ώστε το συνολικό κόστος της καλωδίωσης να είναι το ελάχιστο δυνατόν και να βρείτε το ελάχιστο κόστος.

5. α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} x^3 \ln x = 0$

   β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $f(x) = \int_x^1 t^2 (\ln t)^2 \, dt$

   γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $\frac{dx}{dt} = 2t,\ \frac{dy}{dt} = t^2 - 1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{t^2-1}{2t} \quad \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{9-1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Αν $t = 3 \Rightarrow x = 7$ και $y = 6 \Rightarrow$ εξ. Εφαπτομένης $y - 6 = \frac{4}{3}(x-7) \Rightarrow$

$3y - 18 = 4x - 28 \Rightarrow 4x - 3y - 10 = 0$

2. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-6 & 18-12 \\ -3+2 & -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = A$

$A^{11} + \lambda \cdot I = B \Rightarrow (A^2)^5 \cdot A + \lambda \cdot I = B \Rightarrow A^6 + \lambda \cdot I = B \Rightarrow (A^2)^3 + \lambda \cdot I = B \Rightarrow$

$A^3 + \lambda \cdot I = B \Rightarrow A^2 \cdot A + \lambda \cdot I = B \Rightarrow A \cdot A + \lambda \cdot I = B \Rightarrow A^2 + \lambda \cdot I = B \Rightarrow$

$A + \lambda \cdot I = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3+\lambda = 5 \\ -2+\lambda = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda = 2$

3. $P(M) = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}, \quad P(E) = \frac{160}{200} = \frac{4}{5}, \quad P(M \cap E) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$

(α) $P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) = \frac{12}{20} + \frac{16}{20} - \frac{10}{20} = \frac{9}{20}$

(β) $P(E \cap M') = P(E) - P(E \cap M) = \frac{16}{20} - \frac{10}{20} = \frac{3}{10}$

(γ) $P(E / M') = \frac{P(E \cap M')}{P(M')} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$

4. (α) $\bar{x} = \frac{1+2+3+\cdots+\nu}{\nu} = 4 \Rightarrow \frac{\cancel{\nu}(\nu+1)}{2\cancel{\nu}} = 4 \Rightarrow \nu + 1 = 8 \Rightarrow \nu = 7$

(β) $\sigma = \sqrt{\frac{(1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + \cdots + (7-4)^2}{7}} =$

$\sqrt{\frac{9+4+1+0+1+4+9}{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = 2$

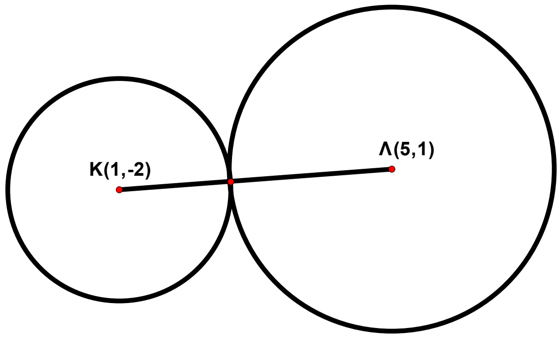
5. (α) $\Delta_3^5 = \dfrac{5!}{2!} = 60$

(β) $\dbinom{3}{2} \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18$

6. Κέντρο κύκλου Λ(5,1) , $R^2 = 5^2 + 1^2 - 17 = 9 \Rightarrow R_1 = 3$

$K\Lambda = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2} = R_1 + R_2 \Rightarrow 5 = 3 + R_2 \Rightarrow R_2 = 2$

$\Rightarrow$ εξ. Κύκλου: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$



7. $$\frac{5}{(x+1)(4x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{4x^2+1} \quad \Rightarrow$$

$A(4x^2 + 1) + (Bx + \Gamma)(x + 1) = 5$

Αν $x = -1 \Rightarrow A \cdot 5 = 5 \Rightarrow A = 1$

Αν $x = 0 \Rightarrow A \cdot 1 + \Gamma = 5 \Rightarrow 1 + \Gamma = 5 \Rightarrow \Gamma = 4$

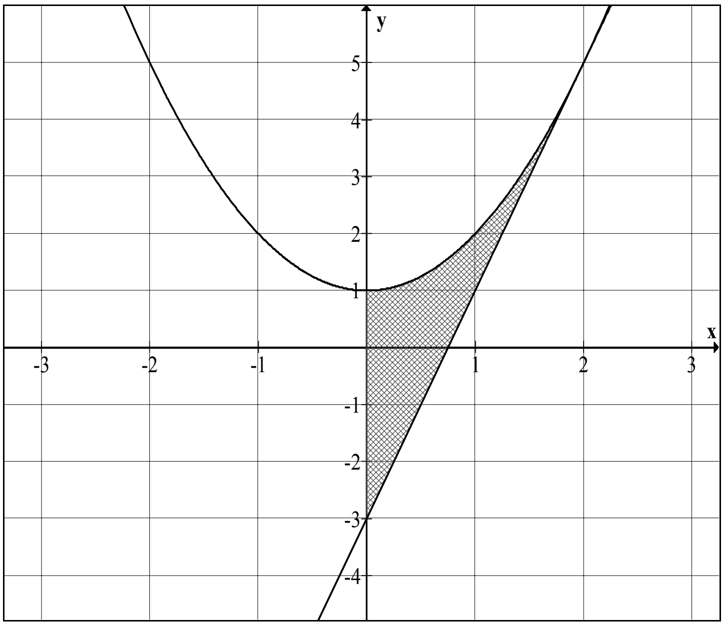
Αν $x = 1 \Rightarrow A \cdot 5 + 2B + 2\Gamma = 5 \Rightarrow 5 + 2B + 8 = 5 \Rightarrow B = -4 \Rightarrow$

$$\int \frac{5dx}{(x+1)(4x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-4x+4}{4x^2+1} \right) dx =$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx - 4\int \frac{x}{4x^2+1} dx + 4\int \frac{dx}{4x^2+1} =$$

$$\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(4x^2+1) + 2\text{τοξεφ}(2x) + c$$

8.



$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = 4$$

Εξ. Εφαπτομένης:

$y - 5 = 4(x - 2) \Rightarrow$

$y = 4x - 3$

$$V = V_\kappa - \pi \int_1^5 (y-1)dy =$$

$$\frac{32\pi}{3} - \pi\left[\frac{(y-1)^2}{2}\right]_1^5 =$$

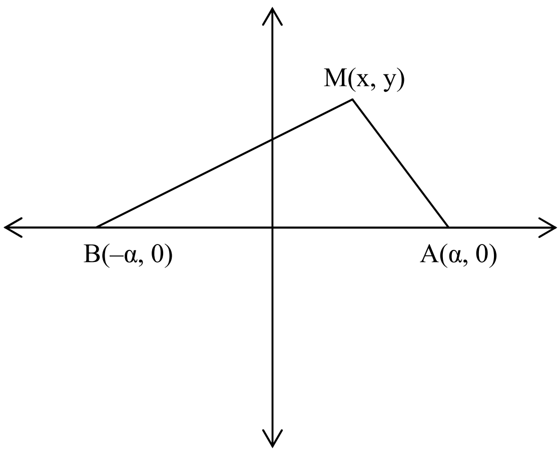
$$\frac{32\pi}{3} - 8\pi = \frac{8\pi}{3} \quad \text{κ.μ.}$$

9.

$$\left.\begin{aligned} f'(\chi) &= \alpha\chi^{\alpha-1} - \alpha \\ f'(\chi) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha\left(x^{\alpha-1} - 1\right) = 0 \Rightarrow x^{\alpha-1} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ διότι } \alpha - 1 \neq 0$$

$$\left.\begin{aligned} f''(\chi) = \alpha(\alpha-1)\chi^{\alpha-2} \Rightarrow f''(1) &= \alpha(\alpha-1) \\ 0 < \alpha &< 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f''(1) < 0 \Rightarrow \max$$

10.



$$\left.\begin{aligned} \lambda_{MA} &= \frac{y}{x-\alpha} \\ \lambda_{MB} &= \frac{y}{x+\alpha} \\ \lambda_{MA} \cdot \lambda_{MB} &= \kappa \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x-\alpha} \cdot \frac{y}{x+\alpha} = \kappa$$

$$\Rightarrow y^2 = \kappa(x^2 - \alpha^2) \Rightarrow \kappa x^2 - y^2 = \kappa\alpha^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\kappa\alpha^2} = 1$$

Αν $\kappa < 0$ και $\kappa \neq -1$ τότε το Μ κινείται πάνω σε έλλειψη.

<u>ΜΕΡΟΣ Β′</u>

1. $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x-2}$, $x \in R-\{2\}$

Αν $x=0 \Rightarrow y=-\dfrac{9}{2}$, $\left(0,-\dfrac{9}{2}\right)$

Αν $y=0 \Rightarrow x=3$, (3, 0)

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{x^2-4x+12-9}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1, x=3$$

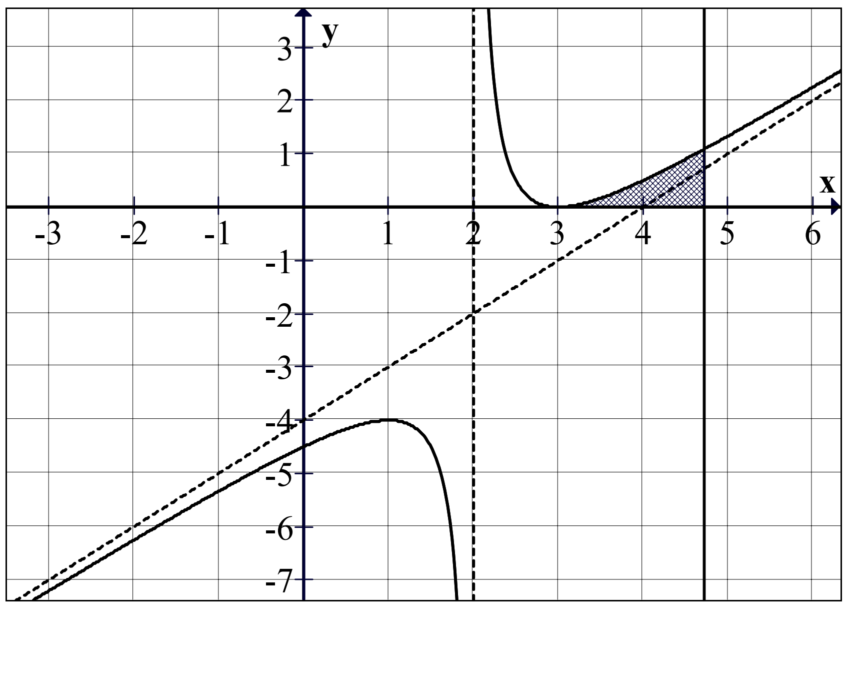
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y′		+	0	–	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	
			max (1,–4)		min (3,0)		

$\lim\limits_{x\to 2^+} y=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \Rightarrow$

$x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

$f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{x-2} \Rightarrow f(x)=x-4+\dfrac{1}{x-2} \Rightarrow$

$y=x-4$ πλάγια ασύμπτωτη.

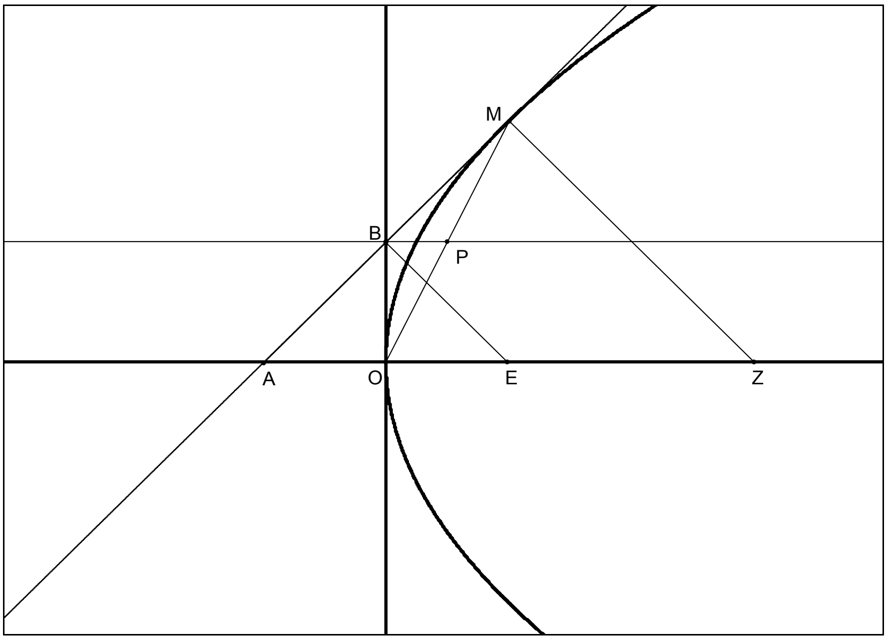


$$E=\int_{3}^{e+2}\left(x-4+\frac{1}{x-2}\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}-4x+\ln|x-2|\right|_{3}^{e+2}=$$

$$\frac{(e+2)^2}{2}-4(e+2)+\ln e-\left(\frac{9}{2}-12+\ln 1\right)=$$

$$\frac{(e+2)^2}{2}-4e-8+1-\frac{9}{2}+12=\frac{(e+2)^2}{2}-4e+\frac{1}{2}=\frac{e^2-4e+5}{2}$$

2.



(α) $M(\alpha t^2, 2\alpha t)$, $y^2=4\alpha x\Rightarrow 2yy'=4^{\alpha}\Rightarrow y'=\dfrac{2\alpha}{y}\Rightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}=\dfrac{2\alpha}{2\alpha t}=\dfrac{1}{t}$

Εξ. Εφαπτομένης: $y-2\alpha t=\dfrac{1}{t}\left(x-\alpha t^2\right)\Rightarrow ty-x=\alpha t^2$

Αν $y=0\Rightarrow\chi=\alpha t^2\Rightarrow A(-\alpha t^2, 0)$

Αν $\chi=0\Rightarrow y=\alpha t\Rightarrow B(0, \alpha t)$

Συντεταγμένες μέσου ΑΜ $\begin{cases}x=\dfrac{\alpha t^2-\alpha t^2}{2}=0\\[2mm] y=\dfrac{2\alpha t+0}{2}=\alpha t\end{cases}$ $\Rightarrow$ ίδιες με τις συντεταγμένες του Β

$$\lambda_{EB}=\frac{\alpha t}{-\alpha}=-t\Rightarrow\lambda_{EB}\cdot\lambda_{AM}=-1\Rightarrow EB\perp AM$$

(β) $\left.\begin{matrix}AE=EZ\\ AB=BM\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}BE\,//\,MZ\\ BE\perp AM\end{matrix}\right\}\Rightarrow MZ\perp AM$

(γ) $$\left.\begin{matrix}OM\\BP\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}y=\dfrac{2\alpha t}{\alpha t^2}\chi\\ y=\alpha t\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\chi=\dfrac{\alpha t^2}{2}\\ y=\dfrac{2\chi}{t}\end{matrix}\right\}\Rightarrow y^2=2\alpha\chi$$

3. (α) $$N(\Omega)=\binom{\nu}{2}(\nu+1)+\binom{\nu+1}{2}\cdot\nu=\frac{\nu!}{2!(\nu-2)!}(\nu+1)+\frac{(\nu+1)!}{2!(\nu-1)!}\cdot\nu=$$

$$\frac{\nu(\nu-1)(\nu+1)}{2!}+\frac{(\nu+1)\nu^2}{2!}=\frac{\nu(\nu+1)}{2}\left[(\nu-1)+\nu\right]=\frac{(2\nu-1)\nu(\nu+1)}{2}$$

(β) $$P(A)=\frac{\binom{\nu+1}{2}\cancel{\nu}}{\dfrac{\cancel{\nu}(2\nu-1)(\nu+1)}{2}}=\frac{\dfrac{(\nu+1)!}{2!(\nu-1)!}\cdot 2}{(2\nu-1)(\nu+1)}=\frac{(\nu+1)\nu}{(2\nu-1)(\nu+1)}=\frac{\nu}{2\nu-1}$$

(γ) $$\frac{\nu}{2\nu-1}=\frac{10}{19}\Rightarrow 19\nu=20\nu-10\Rightarrow \nu=10$$

4. $A\Gamma=\sqrt{100+x^2}$, $0\le x\le 20$, $\Gamma\Delta=20-x$

$$K(x)=5\sqrt{100+x^2}+3(20-x)$$

$$\frac{dK}{dx}=5\frac{2x}{2\sqrt{100+x^2}}+3\cdot(-1)=\frac{5x}{\sqrt{100+x^2}}-3=0\Rightarrow \frac{5x}{\sqrt{100+x^2}}=3\Rightarrow$$

$$25x^2=9(100+x^2)\Rightarrow 16x^2=900\Rightarrow x^2=\frac{900}{16}\Rightarrow x=\frac{30}{4}$$

$$\frac{d^2K}{dx^2}=\frac{5\sqrt{100+x^2}-5x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{100+x^2}}}{100+x^2}=\frac{5\left(100+x^2\right)-5x^2}{\left(100+x^2\right)\sqrt{100+x^2}}=$$

$$\frac{500}{\left(100+x^2\right)\sqrt{100+x^2}}>0 \text{ για όλες τις τιμές του } x$$

άρα αν $x=\frac{30}{4}$ τότε έχω ελάχιστο.

Ελάχιστο κόστος : $K\left(\frac{30}{4}\right)=£100$

Για $x=0,\ K(0)=50+60=£110$ Για $x=0,\ K(0)=5\sqrt{500}=50\sqrt{5}\approx £14,80$

5. (α) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln x = 0\cdot \ln 0 = 0\cdot(-\infty)$ απροσδιόριστη μορφή $=$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ Α.Μ.} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3}{2} = 0$$

(β) $$\int_x^1 t^2(\ln t)^2\,dt = \int_x^1 (\ln t)^2\, d\left(\frac{t^3}{3}\right) = \frac{t^3}{3}(\ln t)^2\Big]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^3}{3}\cdot 2\ln t\cdot\frac{1}{t}\,dt =$$

$$\frac{t^3}{3}(\ln t)^2\Big]_x^1 - \frac{2}{3}\int_x^1 t^2\cdot\ln t\,dt = \frac{t^3}{3}(\ln t)^2\Big]_x^1 - \frac{2}{3}\int_x^1 \ln t\, d\left(\frac{t^3}{3}\right) =$$

$$\frac{t^3}{3}(\ln t)^2\Big]_x^1 - \frac{2}{3}\left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_x^1 + \frac{2}{3}\int_x^1 \frac{t^3}{3}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \frac{t^3}{3}(\ln t)^2\Big]_x^1 - \frac{2}{3}\left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_x^1 + \frac{2}{9}\int_x^1 t^2\,dt =$$

$$\left[\frac{t^3}{3}(\ln t)^2 - \frac{2}{9}t^3\ln t + \frac{2}{27}t^3\right]_x^1 = \frac{2}{27} - \frac{x^3}{3}(\ln t)^2 + \frac{2}{9}x^3\ln x - \frac{2}{27}x^3$$

(γ) $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{27} - \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 + \frac{2}{9}x^3\ln x - \frac{2}{27}x^3\right) = \frac{2}{27}$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{9}x^3\ln x\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{27}x^3\right) = 0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{3}(\ln x)^2 = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{\frac{3}{x^3}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{απροσδιόριστη μορφή} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2(\ln x)\frac{1}{x}}{-\frac{9}{x^4}} = -\frac{2}{9}\lim_{x\to 0^+}(x^3\ln x) = 0$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Ιούνιος 2004

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Για αποφοίτους Τεχνικών Σχολών) Χρόνος 3 ώρες

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = 5ημθ$ και $y = 3συνθ$. $0 < θ < \frac{π}{2}$. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$

2. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης Τ Α Υ Τ Ο Τ Η Τ Α. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από Τ και τελειώνουν σε Α;

3. Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = τοξεφ\frac{1}{4} + τοξεφ\frac{3}{5}$

4. Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων της σειράς :
$$1 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 7 \cdot 7 + \cdots$$

5. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του ιδίου δειγματικού χώρου και $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$ και $P(A / B')$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ(5,2) και εφάπτεται της ευθείας $3y = 4x + 1$.

7. Αν για τον 2x2 πίνακα Α ισχύει $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, να βρείτε τον πίνακα A^6 και να δείξετε ότι $A^{-1} = A^5$.

8. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα.

Βαθμός x_i	Αρ. μαθητών f_i
12	3
13	5
14	8
15	4
16	2
17	1

(α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής αυτής με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

(β) Αν επιλεγεί τυχαία ένας μαθητής από το τμήμα αυτό , να βρείτε την πιθανότητα να έχει βαθμό τουλάχιστον 15.

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη: $y^2 = 4x$, τις ευθείες $x = 1$ και $x = 4$.

10. (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha > \beta$,

κορυφές : $(0, \pm 2)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι η $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

(β) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των y , του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από το διάγραμμα της πιο πάνω έλλειψης , τον κύκλο $4x^2 + y^2 = 4$ και τον άξονα των x.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 2}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τις συντεταγμένες των σημείων τομής με τους άξονες, τις συντεταγμένες των ακροτάτων, τις εξισώσεις των ασύμπτωτων και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int e^x \cdot \text{συν}2x\, dx$

3. Σε ένα σχολείο το 40% των παιδιών είναι αγόρια και το υπόλοιπο ποσοστό είναι κορίτσια. Στο τέλος της σχολικής χρονιάς βραβεύτηκε το 10% των αγοριών και το 20% των κοριτσιών. Παίρνουμε τυχαία ένα παιδί του σχολείου.
   (α) Ποια η πιθανότητα το παιδί που επιλέγηκε να έχει βραβευτεί;
   (β) Δεδομένου ότι το παιδί βραβεύτηκε, ποια η πιθανότητα να είναι κορίτσι;

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -x^2 + 4$, $x \in R$ και η ευθεία (ε): $y = \alpha$, όπου α πραγματικός αριθμός με $0 < \alpha < 4$.

   (α) Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία (ε),

   (β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων συναρτήσει του α.

   (γ) Να υπολογίσετε την τιμή του α για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ γίνεται μέγιστο καθώς και την μέγιστη τιμή του εμβαδού.

5. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $xy = 1$ και σημείο της $A\left(t, \frac{1}{t}\right)$, $t > 0$.

   (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης και της κάθετης της καμπύλης στο Α είναι $t^2 y + x = 2t$ και $t^3 x - t y = t^4 - 1$ αντίστοιχα.

   (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ στα οποία η εφαπτόμενη και η κάθετη της καμπύλης στο σημείο Α τέμνουν τον άξονα των x αντίστοιχα.

   (γ) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου Κ του κύκλου που περνά από τα σημεία Α , Β και Γ είναι $\left(\frac{3t^4 - 1}{2t^3}, 0\right)$

   (δ) Προεκτείνουμε την ευθεία ΑΚ προς το μέρος του Κ και στην προέκτασή της παίρνουμε σημείο Τ τέτοιο ώστε (ΚΤ) = (ΚΑ). Να βρείτε την εξίσωση του σχήματος πάνω στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του Τ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. $\frac{dy}{d\theta} = -3\eta\mu\theta$, $\frac{dx}{d\theta} = 5\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3\eta\mu\theta}{5\sigma\upsilon\nu\theta} = -\frac{3}{5}\varepsilon\varphi\theta$

2. $\frac{9!}{4!2!} = 7560, \quad \frac{7!}{3!} = 840$

3.
$$\left.\begin{array}{l} \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{4} = \alpha \Rightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{4},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{3}{5} = \beta \Rightarrow \varepsilon\varphi\beta = \frac{3}{5},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \alpha + \beta < \pi$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{\frac{17}{20}}{\frac{17}{20}} = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha+\beta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha + \beta < \pi \\ \alpha + \beta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{1}{4} + \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4}$$

4. $1, 4, 7, \cdots$ Α.Π. $\Rightarrow \alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)3 = 3\nu - 2$
$3, 5, 7, \cdots$ Α.Π. $\Rightarrow \beta_\nu = 3 + (\nu - 1)2 = 2\nu + 1$

$$\Rightarrow 1\cdot 3 + 4\cdot 5 + 7\cdot 7 + \cdots + (3\nu-2)(2\nu+1) = \sum_{\kappa=1}^{\nu}(3\kappa-2)(2\kappa+1) =$$

$$6\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa - \sum_{\kappa=1}^{\nu}2 = 6\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - \frac{\nu(\nu+1)}{2} - 2\nu =$$

$$\frac{\nu}{2}[2(\nu+1)(2\nu+1) - \nu - 1 - 4] = \frac{\nu}{2}(4\nu^2 + 5\nu - 3)$$

5. $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

$$P(A/B') = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A\cap B)}{1 - P(B)} \Rightarrow P(A/B') = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A\cap B)$ άρα ανεξάρτητα ενδεχόμενα

6. $R = \dfrac{|4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{15}{5} = 3$

εξ. κύκλου: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 20 = 0$

7. $A^6 = A^3 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^6 = I \Rightarrow A^5 \cdot A = I \Rightarrow A^5 \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} \Rightarrow A^5 = A^{-1}$

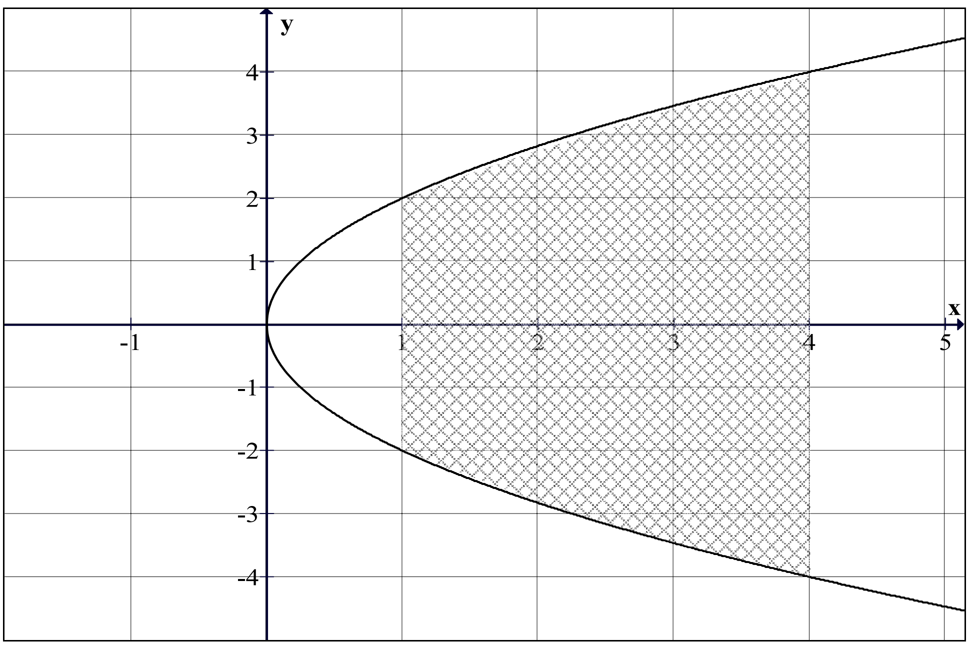
8.

x_i	f_i	$x_i.f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
12	3	36	4	12
13	5	65	1	5
14	8	112	0	0
15	4	60	1	4
16	2	32	4	8
17	1	17	9	9
	23	322		38

α) $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{322}{23} = 14$ $\quad\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\dfrac{38}{23}} = \sqrt{1,65} = 1,29$

β) $A = \{x_i > 14\} \Rightarrow P(A) = \dfrac{4+2+1}{23} = \dfrac{7}{23}$

9.

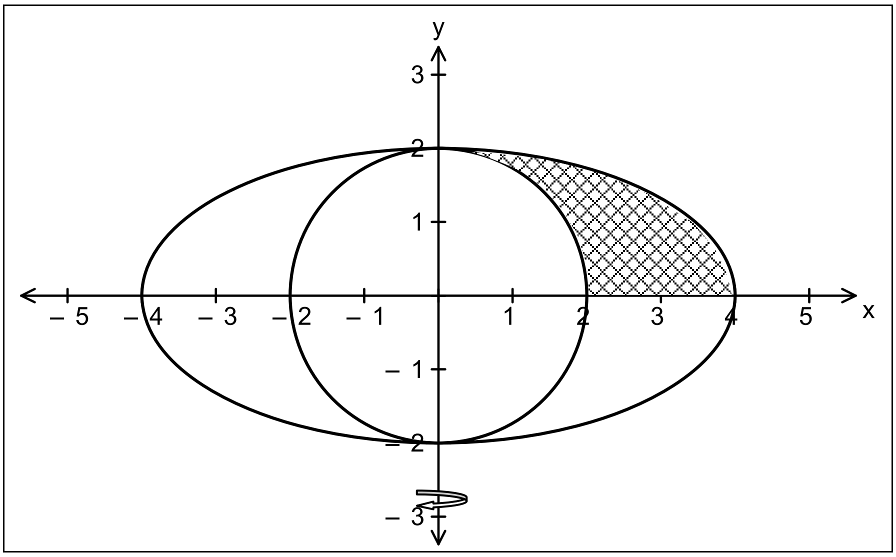


$$E = 2\int_1^4 2\sqrt{x}\,dx = \left[4\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{8}{3}(8-1) = \frac{56}{3} \text{ τ.μ.}$$

10. α) $\gamma = \alpha\cdot\varepsilon$ και $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow \alpha^2\varepsilon^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = \alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha^2 \Rightarrow 4 = \frac{1}{4}\alpha^2 \Rightarrow$

$\alpha^2 = 16 \Rightarrow$ εξ. έλλειψης: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

β)



$$V = \pi\int_{y_1}^{y_2}\left(x_{\varepsilon\lambda\lambda}^2 - x_{\kappa\upsilon\kappa}^2\right)dy = \pi\int_0^2\left[16\left(1 - \frac{y^2}{4}\right) - \left(4 - y^2\right)\right]dy =$$

$$\pi\int_0^2\left(12 - 3y^2\right)dy = \pi\left[12y - y^3\right]_0^2 = \pi(24-8) = 16\pi \text{ κ.μ.}$$

ΜΕΡΟΣ Β′

1. $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 2} = \frac{x+2}{(x-2)(x+1)}$ πεδίο ορισμού: $x \in R,\ x \neq -1, x \neq 2$

Τομές με τους άξονες: $x = 0 \Rightarrow y = -1 \quad (0, -1)$

$y = 0 \Rightarrow x = -2 \quad (-2, 0)$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) = \frac{x^2 - x - 2 - (2x-1)(x+2)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-x^2 - 4x}{(x^2 - x - 2)^2} \\ f'(x) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -x(x+4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		-1		0		$+2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

$\min\left(-4,-\frac{1}{9}\right)$ max (0,–1)

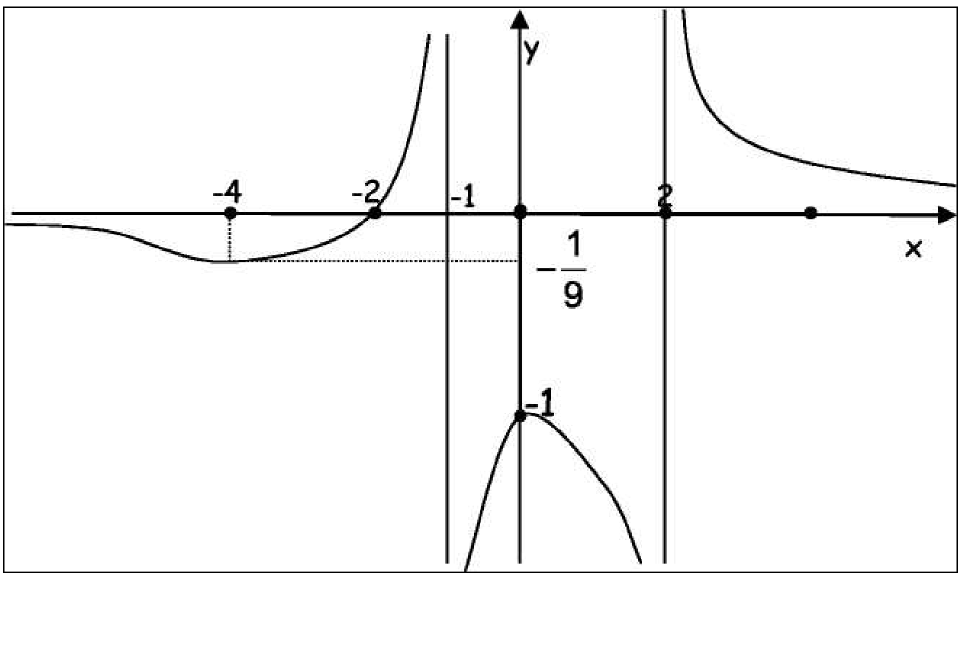
Ασύμπτωτες:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2-x-2}=\dfrac{\infty}{\infty-\infty}\ \text{Απρ.Μορφή}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{\infty}=0^+\\[2ex] \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x^2-x-2}=\dfrac{-\infty}{\infty}\text{Απρ.Μορφή}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{-\infty}=0^-\end{array}\right\}\Rightarrow y=0$$

$y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x+2}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{4}{0^+\cdot 3}=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+2}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{4}{0^-\cdot 3}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=0\ \text{ κατακόρυφη ασύμπτωτη}$$

Με τον ίδιο τρόπο $x = -1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη



2.

$$\int e^x \sigma\upsilon\nu 2x\,dx = \qquad \begin{cases} u = \sigma\upsilon\nu 2x \Rightarrow du = -2\eta\mu 2xd \\ dv = e^x \Rightarrow du = 2\sigma\upsilon\nu 2xdx \end{cases}$$

$$= e^x\sigma\upsilon\nu 2x + 2\int e^x \eta\mu 2x\,dx \qquad \begin{cases} u = \eta\mu 2x \Rightarrow du = 2\sigma\upsilon\nu 2xd \\ dv = e^x \Rightarrow du = 2\sigma\upsilon\nu 2xdx \end{cases}$$

$$= e^x\sigma\upsilon\nu 2x + 2\left[e^x\eta\mu 2x - 2\int e^x\sigma\upsilon\nu 2x\,dx\right] = e^x\sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x\eta\mu 2x - 4\int e^x\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$$

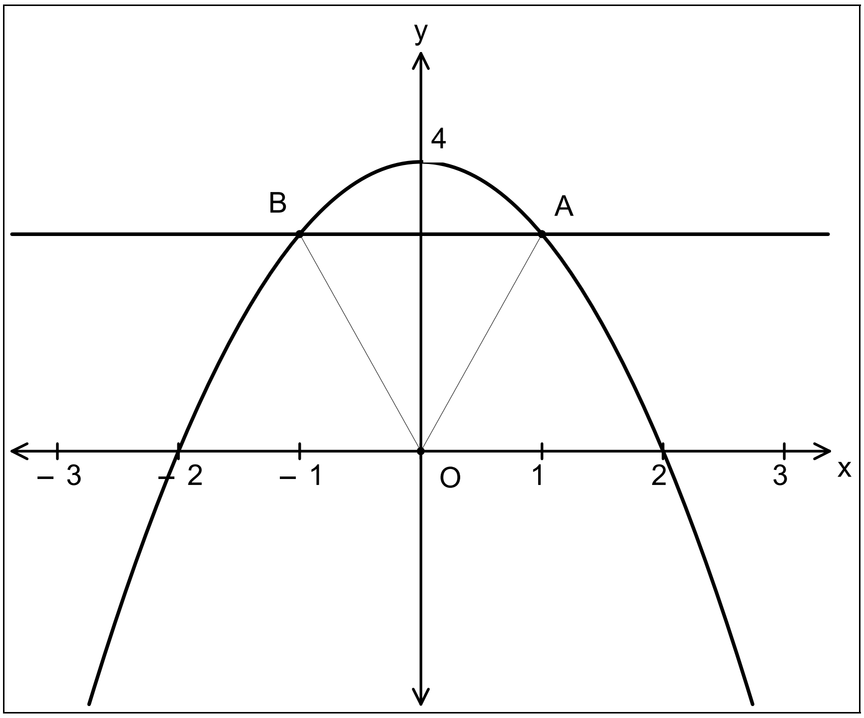
$$\Rightarrow 5\int e^x\sigma\upsilon\nu 2x\,dx = e^x\sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x\eta\mu 2x + c$$

$$\Rightarrow \int e^x\sigma\upsilon\nu 2x\,dx = \frac{1}{5}\left[e^x\sigma\upsilon\nu 2x + 2e^x\eta\mu 2x + c\right]$$

3. α) $P(B) = P(A \cap B) + P(K \cap B) = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{6}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{16}{100}$

β) $P(K/B) = \dfrac{P(K \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{16}{100}} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

4.



$$\left.\begin{aligned} y &= -x^2+4 \\ y &= \alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = -x^2+4 \Rightarrow x^2 = 4-\alpha \Rightarrow x = \pm\sqrt{4-\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$A\left(\sqrt{4-\alpha},\alpha\right) \quad \text{και} \quad B\left(-\sqrt{4-\alpha},\alpha\right)$$

$$E = \frac{1}{2}\alpha\left(2\sqrt{4-\alpha}\right) = \alpha\sqrt{4-\alpha} \qquad E_{\mu\varepsilon\gamma} \text{ όταν } \frac{dE}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{dE}{d\alpha} = \sqrt{4-\alpha} + \alpha\left(\frac{-1}{2\sqrt{4-\alpha}}\right) = \frac{2(4-\alpha)-\alpha}{2\sqrt{4-\alpha}} = \frac{8-3\alpha}{2\sqrt{4-\alpha}} = 0 \Rightarrow 8-3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{8}{3}$$

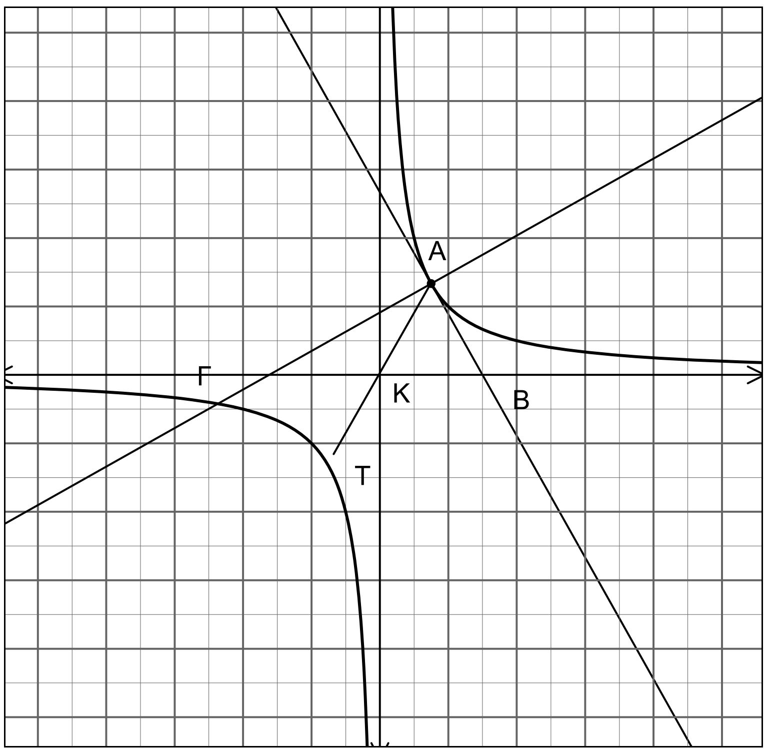
$$E_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{8}{3}\sqrt{4-\frac{8}{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9} \text{ τ.μ.}$$

5. α) $y + x\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{\frac{1}{t}}{t} = \frac{1}{t^2} \quad \Rightarrow \lambda_{\kappa\alpha\theta} = t^2$$

εξ. εφαπτομένης: $y - \dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{t^2}(x-t) \Rightarrow t^2y + x = 2t$

εξ. κάθετης: $y - \dfrac{1}{t} = t^2(x-t) \Rightarrow t^3x + ty = t^4 - 1$



β) Αν $y = 0$ (στην εφαπτομένη) $\Rightarrow x = 2t \Rightarrow B(2t,0)$

Αν $y = 0$ (στην κάθετη) $\Rightarrow \; x = \dfrac{t^4 - 1}{t^3} \;\Rightarrow\; \Gamma\left(\dfrac{t^4 - 1}{t^3}, 0\right)$

γ) Η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου διότι $B\widehat{A}\Gamma$ ορθή γωνία, άρα το μέσο του ΒΓ είναι το κέντρο του κύκλου.

$$x_\kappa = \frac{2t + \dfrac{t^4 - 1}{t^3}}{2} = \frac{3t^4 - 1}{2t^3},$$

$$y_\kappa = 0 \;\Rightarrow K\left(\frac{3t^4 - 1}{2t^3}, 0\right)$$

δ) $x_\kappa = \dfrac{x_A + x_T}{2} \Rightarrow \dfrac{3t^4 - 1}{2t^3} = \dfrac{t + x_T}{2} \Rightarrow x_T = 2t - \dfrac{1}{t^3}$

$$y_\kappa = \frac{y_A + y_T}{2} \Rightarrow 0 = \frac{\dfrac{1}{t} + y_T}{2} \Rightarrow y_T = -\frac{1}{t}$$

$$\left.\begin{aligned} x_T &= 2t - \frac{1}{t^3} \\ y_T &= -\frac{1}{t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2t - \frac{1}{t^3} \\ t &= -\frac{1}{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -\frac{2}{y} + y^3 \Rightarrow$$

$$y^4 - xy = 2$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ (Τ.Ε.Ι.)

Ιούνιος 2004

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Τ.Ε.Ι. Χρόνος: 2,5 Ώρες

Από τις 16 ασκήσεις να λύσετε ΜΟΝΟ τις 10.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Σημείωση: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
β) Χορηγείται τυπολόγιο Μαθηματικών.

1. α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha} = \varepsilon\varphi 3\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha$

   β) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\varepsilon\varphi^2 2\chi - 3 = 0$

2. α) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης : $\eta\mu(2\chi+60^o) = \sigma\upsilon\nu(90^o + \chi)$
   που βρίσκονται στο διάστημα $[0^o , 360°)$

   β) Αν $0^o < \alpha < 90^o$ και ισχύει $5\eta\mu^2\alpha + 3\sigma\upsilon\nu\alpha - 5 = 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

3. Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2 (\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu^2 (\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 2\beta = 1$

4. α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ.

   β) Να βρείτε πόσοι από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) αρχίζουν με το γράμμα Ε και τελειώνουν με το γράμμα Ε.

   γ) Να βρείτε πόσοι από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) έχουν τα δύο Σ συνεχόμενα.

5. Τρία κορίτσια και δύο αγόρια πρόκειται να καθίσουν σε ένα παγκάκι.
   Να βρείτε :
   α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

   β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν τα αγόρια πρέπει να κάθονται σε συνεχόμενες θέσεις.

   γ) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν τα αγόρια πρέπει να κάθονται σε συνεχόμενες θέσεις και τα κορίτσια να κάθονται επίσης σε συνεχόμενες θέσεις.

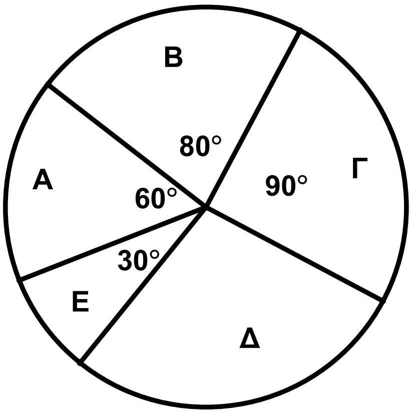
6. Από μια ομάδα 5 ανδρών και 3 γυναικών θα επιλεγεί μια επιτροπή τεσσάρων ατόμων. Να βρείτε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:

   Α : Στην επιτροπή συμμετέχουν 3 γυναίκες.

   Β : Στην επιτροπή συμμετέχουν 2 γυναίκες και 2 άνδρες.

   Γ : Στην επιτροπή συμμετέχει τουλάχιστον 1 γυναίκα .

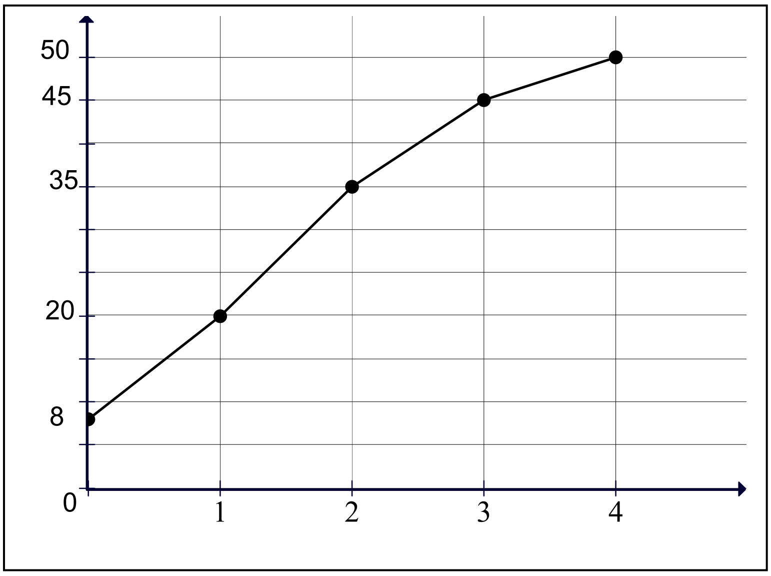
7. Το διπλανό κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών ενός Γυμνασίου στο μάθημα των Μαθηματικών για το πρώτο τρίμηνο. Ο αριθμός των μαθητών που πήραν βαθμό Δ είναι 200.



   α) Να βρείτε:
   i) Τον αριθμό όλων των μαθητών του Γυμνασίου.
   ii) Τον αριθμό των μαθητών που πήραν βαθμό Α.

   β) Αφού κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων , να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.

8. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων για τον αριθμό των παιδιών των 50 οικογενειών ενός χωριού.



   α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

   β) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

   γ) Να βρείτε πόσες οικογένειες έχουν 2 παιδιά.

   δ) Να βρείτε πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 2 παιδιά.

   ε) Να βρείτε το επί τοις εκατόν ποσοστό (%) των οικογενειών που έχουν 3 παιδιά.

9. α) Σε ένα τμήμα ενός Λυκείου υπάρχουν 12 κορίτσια και 10 αγόρια . Η μέση τιμή των βαθμών του τμήματος σε ένα διαγώνισμα των Μαθηματικών είναι 15. Αν η μέση τιμή των βαθμών των κοριτσιών είναι 16 , να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών των αγοριών.

   β) Δίνονται οι αριθμοί $\chi, \psi, 10, 11$ με $\chi < \psi < 10$. Αν η διάμεσος των τεσσάρων αριθμών είναι 9 και η μέση τιμή τους είναι ψ, να βρείτε :
   i) Τους αριθμούς χ και ψ.
   ii) Την τυπική τους απόκλιση, δίνοντας την απάντησή σας με δύο δεκαδικά ψηφία.

10. Ο όγκος ενός κύβου είναι $64m^3$. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 4m και πλάτος 3m. Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι διπλάσιο του εμβαδού της ολικής επιφάνειας του κύβου, να βρείτε:

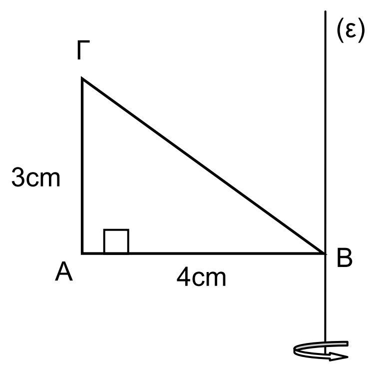
   α) Το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου,

   β) Τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

11. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο $V = 48cm^3$ και το ύψος της είναι ίσο με τα $\frac{2}{3}$ της πλευράς της βάσης της . Να βρείτε :
   α) Το μήκος της πλευράς της βάσης της πυραμίδας.
   β) Το μήκος του ύψους της πυραμίδας.
   γ) Το εμβαδόν της βάσης της πυραμίδας.
   δ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

12. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο $(\hat{A} = 90°)$ $(AB) = 4cm$, $(A\Gamma) = 3cm$ και η ευθεία (ε) είναι κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο σημείο Β .
   Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από την ευθεία (ε).

   Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



13. Αν Ε είναι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου , R η ακτίνα του , υ το ύψος του και V ο όγκος του , να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{R \cdot \upsilon \cdot E}{2(R+\upsilon)} = V$$

14. Να βρείτε τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

α) $\int \left(\frac{1}{9} - \sqrt{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx$, $x > 0$

β) $\int 2 \cdot \eta\mu 5\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 3\chi \, d\chi$

γ) $\int \eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^3\chi \, d\chi$

15. Δίνεται η καμπύλη (κ) με εξίσωση $\psi = 4\chi - \chi^2$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της καμπύλης (κ) με τους άξονες των συντεταγμένων.

β) Να βρείτε το ακρότατο της καμπύλης και να το χαρακτηρίσετε (μέγιστο ή ελάχιστο).

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της καμπύλης (κ).

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη (κ), τον άξονα των χ και τις ευθείες $\chi = 1$ και $\chi = 3$.

16. Δίνεται η καμπύλη (κ) με εξίσωση $\psi = \chi^2 - 3\chi + 2$ και το σημείο Α(3,2).

α) Να δείξετε ότι το σημείο Α βρίσκεται πάνω στην καμπύλη (κ).

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (κ) στο σημείο Α .

γ) Η εφαπτόμενη και η κάθετη της καμπύλης (κ) στο σημείο Α τέμνουν τον άξονα των χ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}=\dfrac{2\eta\mu\dfrac{2\alpha+4\alpha}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{4\alpha-2\alpha}{2}}{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\alpha+4\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\alpha-4\alpha}{2}}=$

$\dfrac{2\eta\mu 3\alpha\cdot\eta\mu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 3\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi 3\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha$

β) $\varepsilon\varphi^2 2\chi-3=0 \Rightarrow \varepsilon\varphi^2 2\chi=3 \Rightarrow \varepsilon\varphi 2\chi=\pm\sqrt{3}$

ι) $\varepsilon\varphi 2\chi=\sqrt{3}\Rightarrow \varepsilon\varphi 2\chi=\varepsilon\varphi 60°\Rightarrow 2\chi=180°\kappa+30°$

$\chi=90°\kappa+30°$, $\kappa=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

ιι) $\varepsilon\varphi 2\chi=-\sqrt{3}\Rightarrow \varepsilon\varphi 2\chi=\varepsilon\varphi(-60°)\Rightarrow 2\chi=180°\kappa-60°$

$\chi=90°\kappa-30°$, $\kappa=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

2. α) $\eta\mu(2\chi+60^o)=\sigma\upsilon\nu(90^o+\chi) \Rightarrow \eta\mu(2\chi+60^o)=-\eta\mu\chi\Rightarrow$
$\eta\mu(2\chi+60^o)=\eta\mu(-\chi)$

ι) $2\chi+60°=360°\kappa-\chi \Rightarrow 3\chi=360°\kappa-60° \Rightarrow$

$\chi=120°\kappa-20°$, $\kappa\in Z$

$\kappa=1\Rightarrow\chi=100°$

$\kappa=2\Rightarrow\chi=220°$

$\kappa=3\Rightarrow\chi=340°$

ιι) $2\chi+60°=360°\kappa+180°+\chi \Rightarrow \chi=360°\kappa+120° \Rightarrow$
$\kappa=0\Rightarrow\chi=120°$

β) $5\eta\mu^2\alpha+3\sigma\upsilon\nu\alpha-5=0 \Rightarrow 5(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)+3\sigma\upsilon\nu\alpha-5=0$

$5-5\sigma\upsilon\nu^2\alpha+3\sigma\upsilon\nu\alpha-5=0\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha(5\sigma\upsilon\nu\alpha-3)=0$

$\sigma\upsilon\nu\alpha=0$ απορρίπτεται διότι $0°<\alpha<90°$

$5\sigma\upsilon\nu\alpha=3\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha\dfrac{3}{5} \Rightarrow \eta\mu\alpha=+\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5}$

$A=\eta\mu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$

$=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5}+2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-1=\dfrac{24}{25}+2\cdot\dfrac{9}{25}-1=\dfrac{17}{25}$

3. $συν^2(α+β) + συν^2(α-β) - συν2α \cdot συν2β =$

$$\frac{1+συν2(α+β)}{2}+\frac{1+συν2(α-β)}{2}-\frac{2\cdot συν2α\cdot συν2β}{2}=$$

$$\frac{1+συν2(α+β)+1+συν2(α-β)-2\cdot συν2α\cdot συν2β}{2}=$$

$$\frac{2+συν2(α+β)+συν2(α-β)-\left[συν(2α+2β)+συν(2α-2β)\right]}{2}=$$

$$\frac{2+\cancel{συν2(α+β)}+\cancel{συν2(α-β)}-\cancel{συν(2α+2β)}-\cancel{συν(2α-2β)}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

4. α) $\frac{9!}{3!2!}=30240$ β) $\frac{7!}{2!}=2520$ γ) $\frac{8!}{3!}=6720$

5. α) $5! = 120$ β) $4!\,2! = 48$ γ) $3!2!2! = 24$

6. $N(Ω)=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!4!}=70$

$N(A)=\binom{3}{3}\binom{5}{1}=5 \qquad \Rightarrow P(A)=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$

$N(B)=\binom{3}{2}\binom{5}{2}=3\cdot\frac{5!}{2!3!}=30 \qquad \Rightarrow P(B)=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$

$N(Γ)=\binom{3}{1}\binom{5}{3}+\binom{3}{2}\binom{5}{2}+\binom{3}{3}\binom{5}{1}=65 \qquad \Rightarrow P(Γ)=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$

7. α) ι) Η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο βαθμό Δ είναι:

$100° \quad 200$

$360° \quad χ$

$$χ=\frac{200\cdot 360}{100}=720 \text{ μαθητές}$$

ιι) Βαθμός Α: $\frac{60°}{360°}\cdot 720=120$ μαθητές

Βαθμός Β: $\frac{80°}{360°}\cdot 720=160$ μαθητές

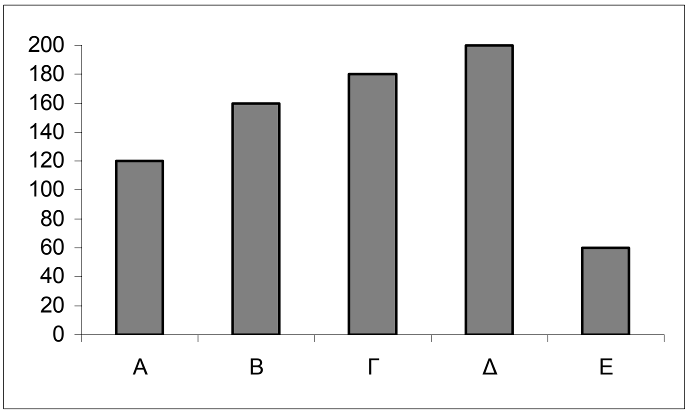
Βαθμός Γ: $\frac{90°}{360°}\cdot 720=180$ μαθητές

Βαθμός Δ: $\dfrac{100°}{360°}\cdot 720 = 200$ μαθητές

Βαθμός Ε: $\dfrac{30°}{360°}\cdot 720 = 60$ μαθητές

β)

Βαθμός	**f_i**
Α	120
Β	160
Γ	180
Δ	200
Ε	60



8. α)

Αριθμός παιδιών χ_i	**Αριθμός οικογενειών f_i**
0	8
1	12
2	15
3	10
4	5
	$\Sigma f_i = 50$

β)

γ) 15 οικογένειες έχουν από 2 παιδιά

δ) 35 οικογένειες έχουν το πολύ από 2 παιδιά

ε) $\frac{10}{50}\cdot 100 = 20\%$ έχουν από 3 παιδιά

9. α) Έστω χ η μέση τιμή των βαθμών των αγοριών

$$\frac{12\cdot 16+10\chi}{22}=15 \Rightarrow 10\chi + 192 = 330 \Rightarrow 10\chi = 138 \Rightarrow$$

$$\chi = 13{,}8$$

β) ι) $\chi_\delta = 9 \Rightarrow \frac{\psi+10}{2} = 9 \Rightarrow \psi = 8$

$$\bar{\chi} = \psi \Rightarrow \frac{\chi+8+10+11}{4} = 8 \Rightarrow \chi + 29 = 32 \Rightarrow \chi = 3$$

ιι) $\sigma = \sqrt{\frac{(3-8)^2+(8-8)^2+(10-8)^2+(11-8)^2}{4}} =$

$$\sigma = \sqrt{\frac{25+0+4+9}{4}} = \sqrt{\frac{38}{4}} = 3{,}08$$

10. α) Έστω χ η ακμή του κύβου, τότε:

$\chi^3 = 64 \Rightarrow \chi = 4$ m

$E_{\kappa\upsilon\beta} = 6\chi^2 \Rightarrow E_{\kappa\upsilon\beta} = 6\cdot 4^2 \Rightarrow E_{\kappa\upsilon\beta} = 96\ m^2$

Έστω γ το ύψος του παραλληλεπιπέδου

$E_{o\rho\theta.\ \pi\alpha\rho.} = 2E_{\kappa\upsilon\beta} \Rightarrow 2(3\cdot 4 + 3\gamma + 4\gamma) = 2\cdot 96 \Rightarrow$

$7\gamma + 12 = 96 \Rightarrow$

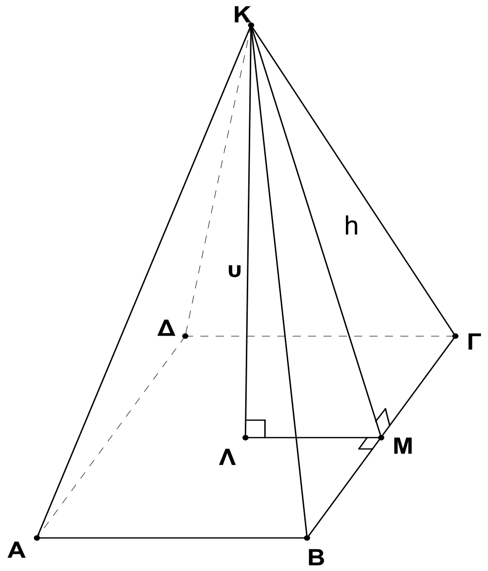
$\gamma = 12$ m

β) $V = \alpha\beta\gamma \Rightarrow$

$V = 3\cdot 4\cdot 12 \Rightarrow$

$V = 144\ m^3$

11.



α) $\Rightarrow \frac{1}{3}\alpha^2\upsilon = 48 \Rightarrow \frac{1}{3}\alpha^2\frac{2}{3}\alpha = 48 \Rightarrow$

$\alpha^3 = 216 \Rightarrow \alpha = 6\text{cm}$

β) $\upsilon = \frac{2}{3}\cdot 6 \Rightarrow \upsilon = 4\text{cm}$

γ) $E_\beta = \alpha^2 \Rightarrow E_\beta = 36\ \text{cm}^2$

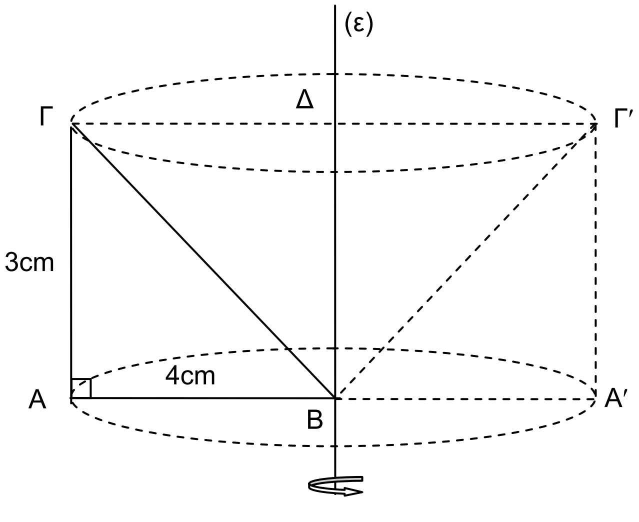
δ) Από το τρίγωνο ΚΛΜ: $h^2 = \upsilon^2 + (\Lambda M)^2$

$h^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow h = 5\ \text{cm}$

$E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta = \frac{4\alpha h}{2} + E_\beta \Rightarrow$

$E_{o\lambda} = 12\cdot 5 + 36 \Rightarrow E_{o\lambda} = 96\text{cm}^2$

12.



Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2 = 9 + 16 \Rightarrow (B\Gamma) = 5$ cm

$E_{AB} = \pi\ (AB)^2 = \pi \cdot 4^2 \Rightarrow E_{AB} = 16\pi\ \text{cm}^2$

$E_{A\Gamma} = 2\pi\ (AB)(A\Gamma) = 2\pi\cdot 4\cdot 3 \Rightarrow E_{A\Gamma} = 24\pi\ \text{cm}^2$

$E_{B\Gamma} = 2\pi\ (\Gamma\Delta)(B\Gamma) = 2\pi\cdot 4\cdot 5 \Rightarrow E_{B\Gamma} = 20\pi\ \text{cm}^2$

$E_{o\lambda} = 16\pi + 24\pi + 20\pi = 60\pi\ \text{cm}^2$

$V_{Z\eta\tau} = V_{\kappa\upsilon\kappa} - V_{\kappa\omega\nu}$

$V_{\kappa\upsilon\kappa} = \pi(AB)^2(A\Gamma) = \pi\ 4^2 \cdot 3 \Rightarrow V_{\kappa\upsilon\kappa} = 48\pi\ \text{cm}^3$

$V_{\kappa\omega\nu} = \frac{1}{3}\pi(\Gamma\Delta)^2(\Delta B) = \frac{1}{3}\pi\cdot 16\cdot 3 \Rightarrow V_{\kappa\omega\nu} = 16\pi\ \text{cm}^3$

$V_{Z\eta\tau} = 48\pi - 16\pi \Rightarrow V_{Z\eta\tau} = 32\pi\ \text{cm}^3$

13. $\dfrac{R\cdot\upsilon\cdot E}{2(R+\upsilon)}=\dfrac{R\cdot\upsilon(2\pi R^2+2\pi R\upsilon)}{2(R+\upsilon)}=\dfrac{R\cdot\upsilon\cancel{2}\pi R\,\cancel{(R+\upsilon)}}{\cancel{2}\,\cancel{(R+\upsilon)}}=\pi R^2\upsilon=V$

14. α) $\int\left(\dfrac{1}{9}-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)dx=\int\dfrac{1}{9}dx-\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-3}dx=\dfrac{x}{9}-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{x^{-2}}{-2}+c$

$=\dfrac{x}{9}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-\dfrac{1}{2x^2}+c$

β) $\int 2\eta\mu5\chi\cdot\sigma\upsilon\nu3\chi\,d\chi=\int\left[\eta\mu(5\chi+3\chi)+\eta\mu(5\chi-3\chi)\right]d\chi=$

$\int(\eta\mu8\chi+\eta\mu2\chi)\,d\chi=-\dfrac{1}{8}\sigma\upsilon\nu8\chi-\dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu2\chi+c$

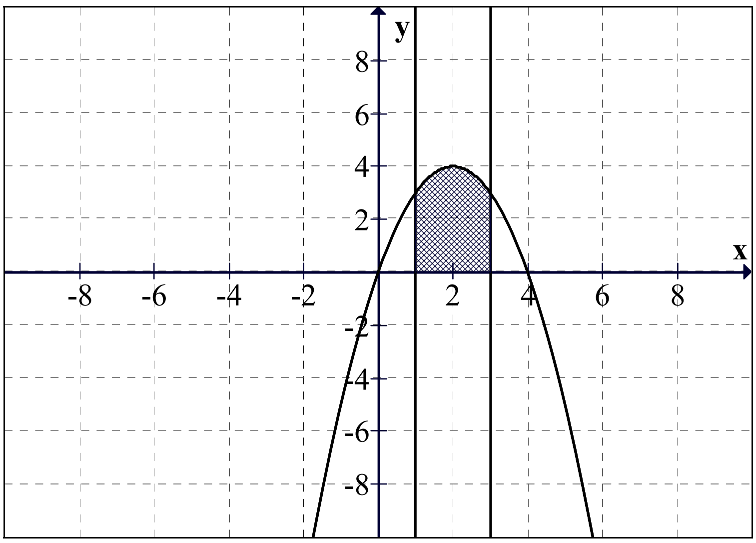
γ) $\int\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu^3\chi\,d\chi=\int\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=\int\eta\mu^2\chi(1-\eta\mu^2\chi)\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=$

$\int\eta\mu^2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi-\int\eta\mu^4\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\chi\,d\chi=\dfrac{\eta\mu^3\chi}{3}-\dfrac{\eta\mu^5\chi}{5}+c$

15. α) Για $\chi=0\Rightarrow\psi=0$
Για $\psi=0\Rightarrow4\chi-\chi^2=0\Rightarrow\chi(4-\chi)=0\Rightarrow\chi=0\,,\ \chi=4$
Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι: (0,0) και (4,0)

β) $\psi'=4-2\chi\,,\ \psi'=0\Rightarrow\chi=2$
$\psi''=-2<0\Rightarrow(2,4)$ μέγιστο

γ)



δ) $E=\int_1^3(4x-x^2)dx=\left[2x^2-\dfrac{x^3}{3}\right]_1^3=(18-9)-\left(2-\dfrac{1}{3}\right)=7+\dfrac{1}{3}=\dfrac{22}{3}$ τ.μ.

16. α) Για $\chi = 3 \Rightarrow \psi = 3^2 - 3\cdot 3 + 2 = 2 \Rightarrow$ Α(3,2) ανήκει στην (κ)

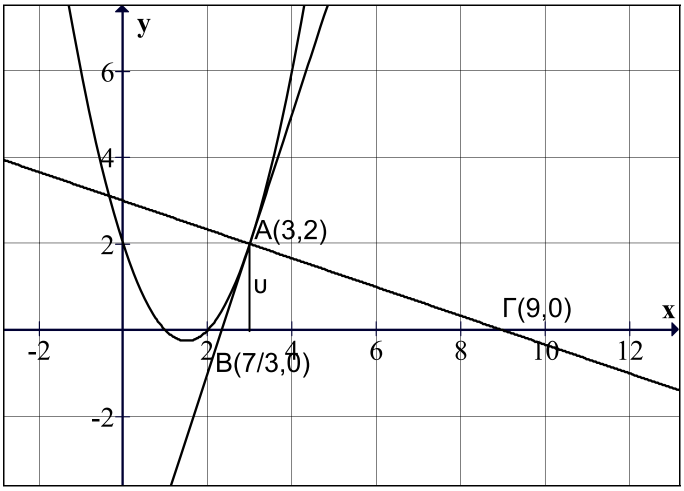
β) $\psi' = 2\chi - 3 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = 2\cdot 3 - 3 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = 3$

εξ. εφαπτομένης: $\psi - 2 = 3(\chi - 3) \Rightarrow 3\chi - \psi = 7$

$\lambda_{\kappa\alpha\theta} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ εξ. κάθετης: $\psi - 2 = -\frac{1}{3}(\chi - 3) \Rightarrow \chi + 3\psi = 9$

γ) $\left.\begin{array}{r} 3\chi - \psi = 7 \\ \psi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi = \frac{7}{3} \Rightarrow B\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ $\quad\quad$ $\left.\begin{array}{r} \chi + 3\psi = 9 \\ \psi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \chi = 9 \Rightarrow \Gamma(9,0)$

$(\mathrm{B}\Gamma) = 9 - \frac{7}{3} = \frac{20}{3}$ μονάδες



$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}(\mathrm{B}\Gamma)\upsilon$

$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{3}\cdot 2$

$E_{AB\Gamma} = \frac{20}{3}$ τ.μ.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ

Β' ΚΑΙ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

" Ιάκωβος Πατάτσος "

Νοέμβριος 2003 *Διάρκεια: 3 ώρες*

Επιμέλεια: Σάββας Ιωαννίδης – Νικόλας Γιασουμής

ΟΔΗΓΙΕΣ:

Να λύσετε και τις πέντε ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίδονται οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ), $R \neq \rho$, $K\Lambda > R + \rho$. Φέρουμε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες ΑΒ, ΓΔ και την κοινή εσωτερική εφαπτομένη ΕΖ, η οποία τέμνει, όταν προεκταθεί τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες στα Θ και Η αντίστοιχα.(Α, Ε, $\Gamma \in$ (Κ, R) και Β, Ζ, $\Delta \in$ (Λ, ρ)). Να δείξετε ότι ΘΕ = ΖΗ.

2. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$), αν γνωρίζουμε ότι είναι φυσικοί αριθμοί και ότι η αριθμητική τιμή του γινομένου των καθέτων πλευρών του ισούται με την αριθμητική τιμή του τριπλασίου της περιμέτρου του. (Υπάρχουν περισσότερες από μία περιπτώσεις και πρέπει να βρεθούν όλες).

3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g με $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$

   και $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \mathbb{R}^*$ με $\beta(\alpha+\beta)f^4(x) + \alpha(\alpha+\beta)g^4(x) = \alpha\beta$

   Να αποδειχτεί ότι:

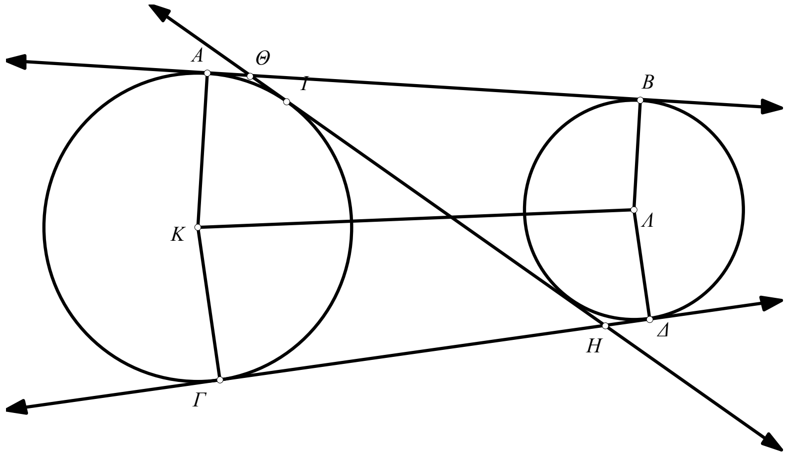
   (α) $\dfrac{f^8(x)}{\alpha^3} + \dfrac{g^8(x)}{\beta^3} = \dfrac{1}{(\alpha+\beta)^3}$ (β) $|\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

4. Από τα μέσα των πλευρών ενός οξυγωνίου τριγώνου φέρουμε κάθετες προς τις δύο άλλες πλευρές αυτού. Να δείξετε ότι το εμβαδό του εξαγώνου, που σχηματίζεται από αυτές τις κάθετες, ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου.

5. Δίδονται οι θετικοί αριθμοί κ, λ και μ όπου κανένας από αυτούς δεν είναι πολλαπλάσιο του 5. Να δείξετε ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $\kappa^2 - \lambda^2, \lambda^2 - \mu^2, \mu^2 - \kappa^2$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1.



ΑΒ = ΓΔ (1) (ύψη των ορθογωνίων τραπεζίων ΑΚΛΒ και ΚΓΔΛ που είναι ίσα)

Τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται σε κύκλο από σημείο εκτός κύκλου ισούνται και έτσι θα έχουμε:

ΑΒ = ΑΘ + ΘΒ

= ΘΕ + ΘΒ

= ΘΕ + (ΘΕ +ΕΖ) $\Rightarrow$ ΑΒ = 2ΘΕ + ΕΖ (2)

Με όμοιο τρόπο

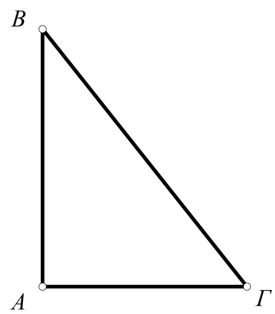
ΓΔ = ΓΗ + ΗΔ

= ΗΕ + ΗΖ

= (ΗΖ + ΖΕ) +ΗΖ $\Rightarrow$ ΓΔ = 2ΗΖ + ΕΖ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) $\Rightarrow$ 2ΘΕ + ΕΖ = 2ΗΖ + ΕΖ $\Rightarrow$ ΘΕ = ΗΖ

2. $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{N},\ \ \alpha^2=\beta^2+\gamma^2\ \ \text{και}\ \beta\gamma=3(\alpha+\beta+\gamma)$



$$\alpha^2=(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma\Rightarrow$$

$$\alpha^2=\left[\left(\alpha+\beta+\gamma\right)-\alpha\right]^2-6\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\Rightarrow$$

$$\alpha^2=\left(\alpha+\beta+\gamma\right)^2-2\alpha\left(\alpha+\beta+\gamma\right)+\alpha^2-6\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha+\beta+\gamma-2\alpha-6)=0\Rightarrow$$

$$\beta+\gamma-\alpha-6=0\Rightarrow\alpha=\beta+\gamma-6\ \ (1)$$

Αλλά $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2\Rightarrow\beta^2+\gamma^2=(\beta+\gamma-6)^2$

$$\Rightarrow\beta^2+\gamma^2=\beta^2+\gamma^2+3\beta+2\beta\gamma-12\beta-12\gamma$$

$$\Rightarrow\beta\gamma-6\beta-6\gamma+18=0$$

$$\Rightarrow\beta\gamma-6\beta-6\gamma+36=18$$

$$\Rightarrow\beta\gamma-6\beta-6\gamma+36=18$$

$$\Rightarrow\beta(\gamma-6)-6(\gamma-6)=18\Rightarrow(\gamma-6)(\beta-6)=18\ \ \Rightarrow$$

(α) γ – 6 = 18 και β – 6 = 1 $\Rightarrow$ γ = 24, β = 7 και α =25 ή β = 24, γ = 7 και α = 25

(β) γ – 6 = 9 και β – 6 = 2 $\Rightarrow$ γ = 15, β = 8 και α = 17 ή β = 15, γ = 8 και α = 17

(γ) γ – 6 = 6 και β – 6 = 3 $\Rightarrow$ γ = 12, β = 9 και α = 15 ή β = 12, γ = 9 και α = 15

3. (α) Από την $\beta(\alpha+\beta)f^4(x)+\alpha(\alpha+\beta)g^4(x)=\alpha\beta$ έχουμε:

$$\frac{f^4(x)}{\alpha}+\frac{g^4(x)}{\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^4x}{\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu^4x}{\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu^4x}{\alpha}+\frac{(1-\eta\mu^2x)^2}{\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta\eta\mu^4x+\alpha(1-2\eta\mu^2x+\eta\mu^4x)}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\alpha+\beta)\eta\mu^4x-2\alpha\eta\mu^2x+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2\eta\mu^4x-2\alpha(\alpha+\beta)\eta\mu^2x+\alpha(\alpha+\beta)=\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2\eta\mu^4x-2\alpha(\alpha+\beta)\eta\mu^2x+\alpha^2+\alpha\beta=\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\left[(\alpha+\beta)\eta\mu^2x-\alpha\right]^2=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\eta\mu^2x=\alpha \Leftrightarrow \eta\mu^2x=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

οπότε και $\sigma\upsilon\nu^2x=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$.

Τότε: $f^8(x)=\dfrac{\alpha^4}{(\alpha+\beta)^4} \Leftrightarrow \dfrac{f^8(x)}{\alpha^3}=\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)^4}$ και

$g^8(x)=\dfrac{\beta^4}{(\alpha+\beta)^4} \Leftrightarrow \dfrac{f^8(x)}{\beta^3}=\dfrac{\beta}{(\alpha+\beta)^4}$ άρα

$$\frac{f^8(x)}{\alpha^3}+\frac{g^8(x)}{\beta^3}=\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)^4}+\frac{\beta}{(\alpha+\beta)^4}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^4}=\frac{1}{(\alpha+\beta)^3}$$

(β) $|\alpha f(x)+\beta g(x)|\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \Leftrightarrow \left[|\alpha f(x)+\beta g(x)|\right]^2\le\left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right]^2$

$$\Leftrightarrow (\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x)^2\le\alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2\eta\mu^2x+2\alpha\beta+\beta^2\sigma\upsilon\nu^2x\le\alpha^2+\beta^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2(\eta\mu^2x-1)+2\alpha\beta\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\beta^2(\sigma\upsilon\nu^2x-1)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2(1-\eta\mu^2x)+2\alpha\beta\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\beta^2(1-\sigma\upsilon\nu^2x)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\sigma\upsilon\nu^2x-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x+\beta\eta\mu^2x\ge 0 \Leftrightarrow (\alpha\sigma\upsilon\nu x-\beta\eta\mu x)^2\ge 0$$

που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha\sigma\upsilon\nu x=\beta\eta\mu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\dfrac{\alpha}{\beta}$

4. Από τα μέσα των πλευρών ενός οξυγωνίου τριγώνου φέρουμε κάθετες προς τις δύο άλλες πλευρές αυτού. Να δείξετε ότι το εμβαδό του εξαγώνου, που σχηματίζεται από αυτές τις κάθετες, ισούται με το μισό του εμβαδού του τριγώνου.

5. Δίδονται οι θετικοί αριθμοί κ, λ και μ όπου κανένας από αυτούς δεν είναι πολλαπλάσιο του 5. Να δείξετε ότι τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $\kappa^2-\lambda^2, \lambda^2-\mu^2, \mu^2-\kappa^2$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΕΜΕΣΟΥ

Β' ΚΑΙ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

" Ανδρέας Βλάμης "

Νοέμβριος 2003 *Διάρκεια: 3 ώρες*

Επιμέλεια: Θεόκλητος Παραγιού - Μάριος Ευσταθίου

1. Δίνεται κύκλος (O,R) και μία διάμετρος του ΑΒ. Έστω Γ σημείο του κύκλου τέτοιο ώστε $ΑΓ=\frac{R}{2}$.Η κάθετη από το Γ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΒ στο Δ και τον κύκλο στο σημείο Ζ. Αν η παράλληλη από το Γ προς την ΑΒ τέμνει τον κύκλο στο Ε και την ΖΒ στο Ρ ,να αποδείξετε ότι:

   (α) Τα σημεία Ζ,Ο και Ε είναι συνευθειακά. (β) $\frac{ΑΔ}{ΟΔ}=\frac{1}{7}$

   (γ) $(ΟΕΒ)=\frac{1}{4}(ΖΕΡ)$, όπου $(ΟΕΒ)$ και $(ΖΕΡ)$ τα εμβαδά των τρ. ΟΕΒ και ΖΕΡ.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ που ικανοποιεί τις σχέσεις :

   (α) $f(1)=5$

   (β) $f(x+y)-f(x)=kxy+2y^2$, $\forall x,y\in R$ και k σταθερός αριθμός ανεξάρτητος από τα x,y. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης και να προσδιορίσετε την σταθερά k.

3. Να δείξετε ότι αν η εξίσωση $\beta x^2-\alpha(\beta+1)x+\alpha^2+\beta^2-2\beta+1=0$, $\alpha,\beta\in Q$ με $x\neq\alpha$ έχει ρητές ρίζες τότε ισχύει $\alpha^2-4\beta=k^2$, $k\in Q$.(Q το σύνολο των ρητών)

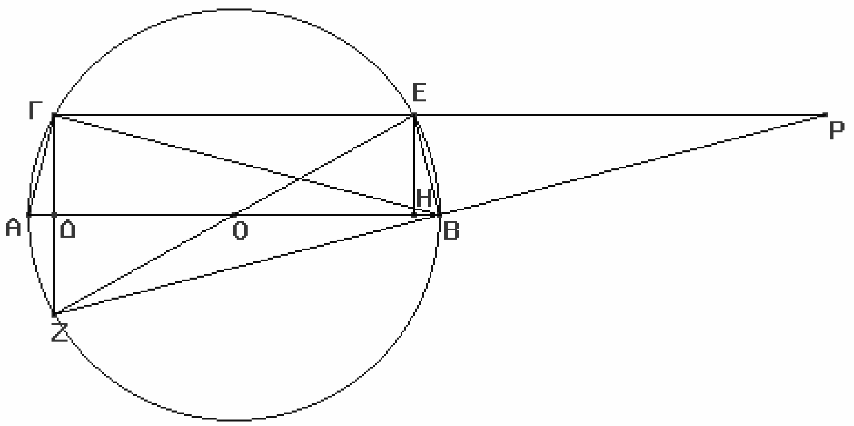
4. Μια ομάδα ποδοσφαίρου για να προετοιμαστεί για το πρωτάθλημα παίζει μερικά 30λεπτα παιχνίδια εξάσκησης σε 77 μέρες .Ο προπονητής θέλει να παίζει τουλάχιστον ένα παιχνίδι την ημέρα αλλά δεν θέλει να παίξει η ομάδα περισσότερα από 132 παιχνίδια συνολικά . Να δείξετε ότι όπως και να προγραμματίσει τα παιχνίδια ο προπονητής ,υπάρχει μια περίοδος από συνεχόμενες ημέρες κατά την οποία η ομάδα παίζει ακριβώς 21 παιχνίδια.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}\langle 90^o\right)$.Με πλευρά βάσης την ΒΓ ,κατασκευάζουμε εκτός του τριγώνου ισοσκελές τρίγωνο ΒΓΔ με $B\hat{\Gamma}\Delta=\Gamma\hat{B}\Delta=\hat{A}$ (τα σημεία Α και Δ βρίσκονται στα διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζονται από την ΒΓ).Αν Ε ,Ζ και Ν είναι τα σημεία τομής των καθέτων από το Δ προς τις πλευρές ΑΒ , ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

   (α) Το ΕΖΝΔ είναι παραλληλόγραμμο και (β) $AZ\perp EN$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1.



(α) Επειδή ΓΕ παράλληλη προς την ΑΒ και $\Gamma\Delta \perp AB$ τότε $\Delta\hat{\Gamma}E = 90°$ άρα ΖΕ διάμετρος και επομένως Ζ, Ο και Ε συνευθειακά σημεία.

(β) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι όμοια και άρα ισχύει:

$$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma^2 = AB \cdot A\Delta \Rightarrow \frac{R^2}{4} = 2R \cdot A\Delta \Rightarrow A\Delta = \frac{R}{8}$$

και άρα $\frac{A\Delta}{\Delta O} = \frac{1}{7}$

(γ) $(OEB) = \frac{1}{2}(EH)\cdot(OB) = \frac{1}{2}(\Gamma\Delta)\cdot R$ **(1)** και

$(ZEP) = \frac{1}{2}(PE)\cdot(\Gamma Z) = \frac{1}{2}(PE)\cdot 2(\Gamma\Delta) = (PE)\cdot(\Gamma\Delta)$ **(2)**

επειδή Ο μέσο του ΖΕ και ΟΒ παράλληλη με την ΓΡ έχουμε ότι Β μέσον του ΖΡ και

άρα $(PE) = 2\cdot(OB) = 2R$ **(3)** .

Από τις (1) ,(2) και (3) έχουμε ότι: $(OEB) = \frac{1}{4}(ZEP)$.

2. Για $x = 0$ έχουμε $f(y) - f(0) = 2y^2 \Rightarrow f(y) = f(0) + 2y^2$ (1)

για $y = 1$ έχουμε $f(1) = f(0) + 2 \Rightarrow 5 = f(0) + 2 \Rightarrow f(0) = 3$ (2)

Άρα από τις (1) και (2) έχουμε $f(y) = 3 + 2y^2 \quad \forall y \in R$ και επομένως

$f(x) = 3 + 2x^2 \quad \forall x \in R$.

Τώρα

$f(x+y) - f(x) = kxy + 2y^2 \Rightarrow 3 + 2(x+y)^2 - 3 - 2x^2 = kxy + 2y^2 \Rightarrow k = 4.$

3. Επειδή η εξίσωση έχει ρητές ρίζες η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Άρα

$$\Delta = \alpha^2(\beta+1)^2 - 4\beta\left(\alpha^2+\beta^2-2\beta+1\right) = \rho^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\left(\beta^2+2\beta+1\right) - 4\beta\alpha^2 - 4\beta^3 + 8\beta^2 - 4\beta = \rho^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\left(\beta^2-2\beta+1\right) - 4\beta\left(\beta^2-2\beta+1\right) = \rho^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2(\beta-1)^2 - 4\beta(\beta-1)^2 = \rho^2$$

$$\Leftrightarrow (\beta-1)^2\left(\alpha^2-4\beta\right) = \rho^2 (1)$$

Είναι όμως $\beta \neq 1$,γιατί αν $\beta = 1$ θα έχουμε:

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

άτοπο γιατί από την υπόθεση $x \neq \alpha$ άρα η (1) μας δίνει:

$$\alpha^2 - 4\beta = \left(\frac{\rho}{\beta-1}\right)^2 = k^2, k \in Q .$$

4. Έστω α_i ο συνολικός αριθμός παιχνιδιών που παίζει η ομάδα μέχρι την i μέρα.

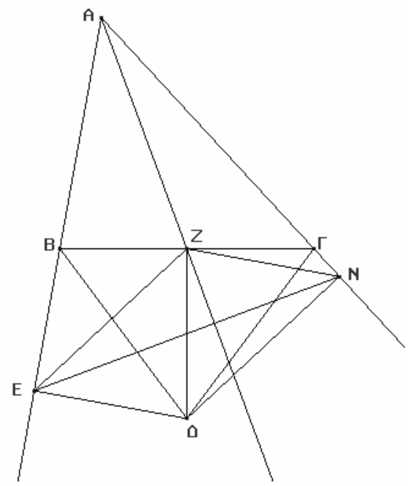
Τότε η ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{77}$ είναι μια αύξουσα μονότονη ακολουθία με $\alpha_1 \geq 1$ και $\alpha_{77} \leq 132$.

Θεωρούμε την ακολουθία $\alpha_1 + 21,\ \alpha_2 + 21, ..., \alpha_{77} + 21$ η οποία είναι επίσης μονότονα αύξουσα με $\alpha_{77} + 21 \leq 153$.

Αφού οι τιμές των 154 αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{77}, \alpha_1 + 21, \alpha_2 + 21, ..., \alpha_{77} + 21$ κυμαίνονται από το 1 μέχρι και το 153 δύο από αυτές θα πρέπει να είναι ίδιες .

Επιπλέον επειδή και οι δύο ακολουθίες είναι μονότονα αύξουσες έχουμε ότι :
$\alpha_i = \alpha_j + 21$ για κάποια α_i και α_j.

5.



(α) Επειδή τα τετράπλευρα ΒΖΔΕ και ΖΓΝΔ είναι εγγράψιμα έχουμε:

$\angle \Gamma B\Delta = \angle ZE\Delta$ και $\angle B\Gamma\Delta = \angle ZN\Delta$ και επειδή $\angle \Gamma B\Delta = \angle B\Gamma\Delta$ έχουμε ότι:

$\angle ZE\Delta = \angle ZN\Delta$ (1)

Τώρα

$$\angle EZN = \angle EZ\Delta + \angle \Delta ZN$$
$$\Rightarrow \angle EZN = 180^o - (\angle AB\Gamma + \angle \Gamma B\Delta) + 180^o - (\angle B\Gamma\Delta + \angle A\Gamma B)$$
$$\Rightarrow \angle EZN = 360^o - (\angle AB\Gamma + \angle A\Gamma B + 2\angle BA\Gamma)$$
$$\Rightarrow \angle EZN = \angle AB\Gamma + \angle A\Gamma B$$
$$\Rightarrow \angle EZN = \angle E\Delta Z + \angle Z\Delta N$$
$$\Rightarrow \angle EZN = \angle E\Delta N \quad (2)$$

Από (1) και (2) ΕΔΝΖ είναι παραλληλόγραμμο.

(β) Επειδή $EZ // \Delta N$ και $\Delta N \perp A\Gamma$ έπεται ότι $EZ \perp A\Gamma$

Όμοια $ZN \perp AB$. Άρα το σημείο Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΕΝ, και επομένως $AZ \perp EN$.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΛΑΡΝΑΚΑΣ – ΑΜΜΟΧΩΣΤΟΥ Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

«ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΚΥΠΡΙΑΝΟΥ»

Νοέμβριος 2003 *Διάρκεια: 3 ώρες*

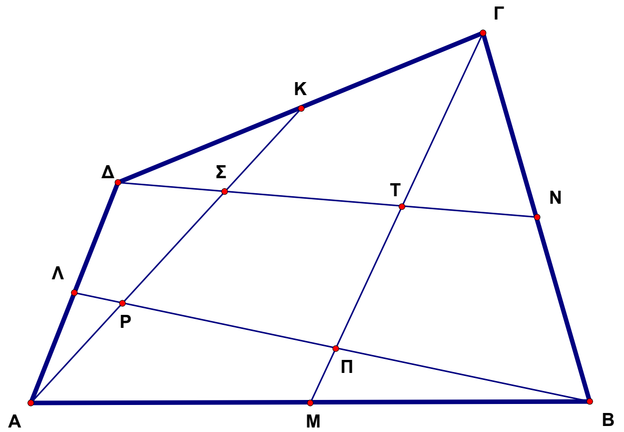
Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Ανδρέας Σαββίδης

Πρόβλημα 1. Αν α, β, γ, χ, ψ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha^3+\alpha x+\psi=0,\ \ \beta^3+\beta x+\psi=0,\ \ \gamma^3+\gamma x+\psi=0$$

Αν $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ και α, β, $\gamma\neq 0$ τότε $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, και Μ, Ν, Κ, Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Το τετράπλευρο ΠΡΣΤ είναι το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα σημεία τομής των ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ και ΔΝ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΠΡΣΤ εάν το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι 3500 και τα εμβαδά των τετραπλεύρων ΑΜΠΡ και ΓΚΣΤ είναι 576 και 397 αντίστοιχα.



Πρόβλημα 3. (α) Αν $\eta\mu^{2003}x+\sigma\upsilon\nu^{2003}x=1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$$

(β) Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στο εσωτερικό του τριγώνου, έτσι ώστε $ΑΕ=3$, $ΓΕ=5$ και $ΔΕ=4$. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΒΕ.

Πρόβλημα 4. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ ισχύει $ΒΓ=3ΑΒ$. Αν Ε, Ζ είναι σημεία της πλευράς ΒΓ ώστε ΒΕ = ΕΖ = ΖΓ. Να δείξετε ότι: $\widehat{ΔΒΓ}+\widehat{ΔΕΓ}=\widehat{ΔΖΓ}$.

Πρόβλημα 5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{A}>90^\circ$, ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α, ***h*** το ύψος στην πλευρά ΒΓ και ***κ*** το ύψος στην πλευρά ΑΓ. Να δείξετε ότι $\alpha+h>\beta+\kappa$.

<u>Προτεινόμενες Λύσεις</u>

<u>Πρόβλημα 1.</u> Αν α, β, γ, χ, ψ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha^3 + \alpha x + \psi = 0\,,\;\; \beta^3 + \beta x + \psi = 0\,,\;\; \gamma^3 + \gamma x + \psi = 0$$

Αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ και α, β, $\gamma \neq 0$ τότε $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Λύση

$$\left.\begin{aligned}\alpha^3 + \alpha x + \psi = 0\\ \beta^3 + \beta x + \psi = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow (\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right) + (\alpha-\beta)\chi = 0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Rightarrow} \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = -x \;\; (1)$$

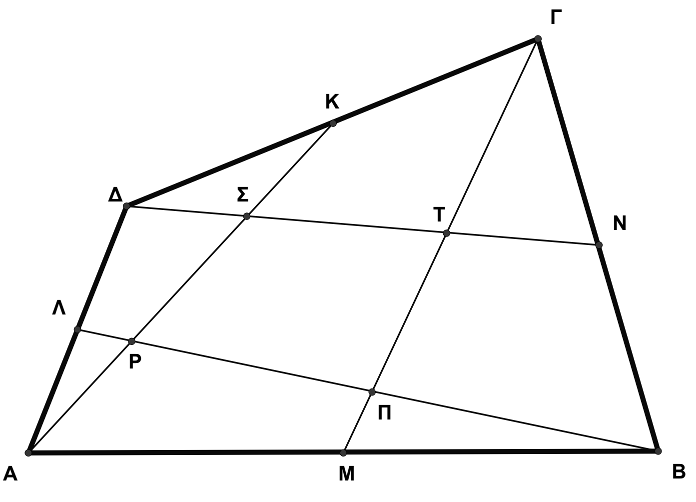
$$\left.\begin{aligned}\beta^2 + \beta x + \psi = 0\\ \gamma^3 + \gamma x + \psi = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow (\beta-\gamma)\left(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2\right) + (\beta-\gamma)\chi = 0 \overset{\beta\neq\gamma}{\Rightarrow} \beta^2+\beta\gamma+\gamma^2 = -x \;\; (2)$$

$$(1)\wedge(2) \Rightarrow \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = \beta^2+\beta\gamma+\gamma^2 \Rightarrow \alpha^2-\gamma^2+\alpha\beta-\beta\gamma = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma+\beta) = 0 \overset{\alpha\neq\gamma}{\Rightarrow} \alpha+\beta+\gamma = 0$$

<u>Πρόβλημα 2.</u> Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, και Μ, Ν, Κ, Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Το τετράπλευρο ΠΡΣΤ είναι το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα σημεία τομής των ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ και ΔΝ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΠΡΣΤ εάν το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι 3500 και τα εμβαδά των τετραπλεύρων ΑΜΠΡ και ΓΚΣΤ είναι 576 και 397 αντίστοιχα.

Λύση



Φέρουμε την ευθεία ΑΓ.

Μ μέσο του ΑΒ, Κ μέσο του ΓΔ άρα $(\overset{\Delta}{\text{ΑΓΚ}}) = \frac{1}{2}(\overset{\Delta}{\text{ΑΓΔ}})$ και $(\overset{\Delta}{\text{ΓΑΜ}}) = \frac{1}{2}(\overset{\Delta}{\text{ΓΑΒ}})$

$(ΑΜΓΚ) = (ΑΓΚ) + (ΑΓΜ) = \frac{1}{2}(ΑΓΔ) + (ΓΑΒ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ)$

$(ΠΡΣΤ) = (ΑΜΓΚ) – (ΑΡΠΜ) – (ΓΚΣΤ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ) – (ΑΡΠΜ) – (ΓΚΣΤ) =$

$\frac{1}{2}\cdot 3500 – 576 – 397 = 777$

<u>Πρόβλημα 3.</u> (α) Αν $ημ^{2003}x + συν^{2003}x = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = ημx + συνx$$

(β) Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στο εσωτερικό του τριγώνου, έτσι ώστε $AE = 3$, $ΓΕ = 5$ και $ΔΕ = 4$. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΒΕ.

Λύση:

(α) $ημ^{2003}χ + συν^{2003}χ = 1 \Rightarrow ημ^{2003}χ + συν^{2003}χ = ημ^2χ + συν^2χ \Rightarrow$

$ημ^2χ\,(ημ^{2001}χ – 1) + συν^2χ\,(συν^{2001}χ – 1) = 0.$ **(1)**

Ισχύει: $ημ^2χ \geq 0$, $συν^2χ \geq 0$, $ημ^{2001}χ – 1 \leq 0$, $συν^{2001}χ – 1 \leq 0$,

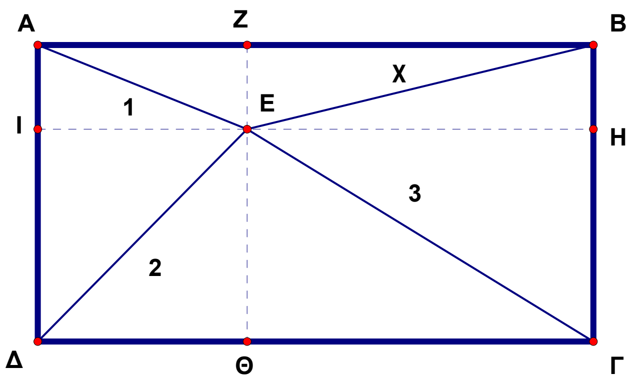
δηλ. $ημ^2χ\,(ημ^{2001}χ – 1) \leq 0$

$\Rightarrow ημχ = 0$ ή $ημχ = 1$ **και** $συνχ = 0$ ή $συνχ = 1$ $\Rightarrow ημχ + συνχ = 1$

(β) Φέρουμε τις ευθείες ΙΗ και ΖΘ $\Rightarrow$

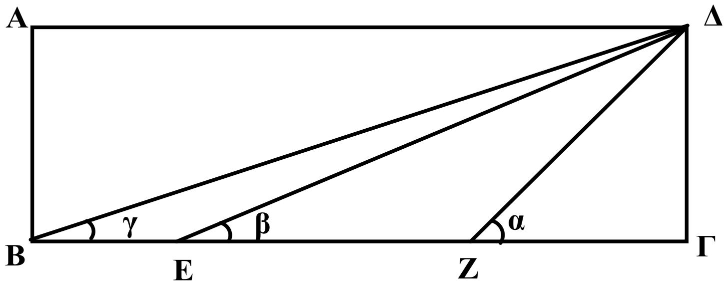
$ΒΕ^2 + ΔΕ^2 = ΖΒ^2 + ΖΕ^2 + ΔΘ^2 + ΔΘ^2\ ΕΘ^2 = ΘΓ^2 + ΖΕ^2 + ΑΖ^2 + ΕΘ^2 =$

$ΕΓ^2 + ΑΕ^2 \Rightarrow ΒΕ^2 + 4^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow ΒΕ^2 = 18 \Rightarrow ΒΕ = 3\sqrt{2}$



Πρόβλημα 4. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ ισχύει $ΒΓ = 3ΑΒ$. Αν Ε, Ζ είναι σημεία της πλευράς ΒΓ ώστε ΒΕ = ΕΖ = ΖΓ. Να δείξετε ότι: $\widehat{ΔΒΓ} + \widehat{ΔΕΓ} = \widehat{ΔΖΓ}$.

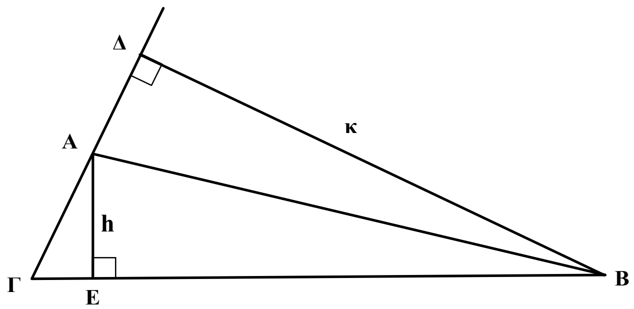
Λύση



$εφα=1,\ \ εφβ=\dfrac{1}{2},\ \ εφγ=\dfrac{1}{3} \Rightarrow\ εφ(β+γ) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1 = εφα$, άρα $\hat{α} = \hat{β} + \hat{γ}$. ή

$\overset{\Delta}{ΔΒΕ} \approx \overset{\Delta}{ΕΔΖ}$, διότι $ΒΔ = \sqrt{10}$, $ΒΖ = 2$, $ΖΔ = \sqrt{2}$, $ΕΔ = \sqrt{5}$, $ΔΖ = \sqrt{2}$, $ΕΖ = 1$ δηλ. πλευρές ανάλογες με λόγο $\sqrt{2}$ οπότε $\widehat{ΕΔΖ} = \hat{Γ}$. Στο τρίγωνο ΕΔΖ η γωνία α είναι εξωτερική $\Rightarrow\ \hat{α} = \hat{β} + \hat{γ}$.

Πρόβλημα 5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\widehat{Α} > 90°$, ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α, ***h*** το ύψος στην πλευρά ΒΓ και ***κ*** το ύψος στην πλευρά ΑΓ. Να δείξετε ότι $a + h > β + κ$.



$\overset{\Delta}{ΑΓΕ} \approx \overset{\Delta}{ΒΔΓ}$, Ορθογώνια, κοινή γωνιά $Γ \Rightarrow \dfrac{ΑΓ}{ΒΓ} = \dfrac{ΑΕ}{ΒΔ} \Rightarrow \dfrac{β}{α} = \dfrac{h}{κ} \Rightarrow 2αh = 2βκ$ (1)

$β^2 + κ^2 < ΓΔ^2 + κ^2 = α^2 < α^2 + h^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} β^2 + κ^2 + 2βκ < α^2 + h^2 + 2αh \Rightarrow$

$(β+κ)^2 < (α+h)^2 \Rightarrow β + κ < α + h$

ή $\left(\overset{\Delta}{ΓΔΒ}\right) \Rightarrow ημ\hat{Γ} = \dfrac{κ}{α} \Rightarrow κ = α\,ημ\hat{Γ}$ (1), $\left(\overset{\Delta}{ΓΑΕ}\right) \Rightarrow ημ\hat{Γ} = \dfrac{h}{β} \Rightarrow h = β\,ημ\hat{Γ}$ (2)

$α > β \Rightarrow α - β > 0 \Rightarrow (α-β)ημ\hat{Γ} > α - β \Rightarrow α\,ημΓ - βημΓ > α - β \overset{(1)\wedge(2)}{\Rightarrow}$

$κ - h > α - β \Rightarrow \boxed{κ + β < α + h}$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΦΟΥ
Β' ΚΑΙ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

" ΑΝΔΡΕΑΣ ΧΑΤΖΗΘΕΟΡΗΣ "

Νοέμβριος 2003 *Διάρκεια: 3 ώρες*

Επιμέλεια: Ε. Λιασίδης – Π. Ζαμπυρίνης

ΟΔΗΓΙΕΣ:
Να λύσετε και τις πέντε ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Να βρείτε τις πραγματικές ρίζες της εξίσωσης: $(\chi^2 - \chi + 1)(\chi^2 - \chi + 2) = 56$

   β) Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R^+$ να δείξετε ότι:
   $$\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\delta}+\frac{\beta}{\gamma+\delta+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}>1$$

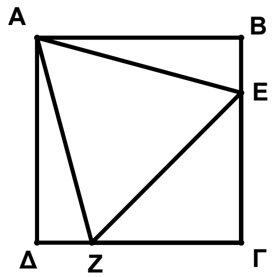
2. α) Αν $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ να δείξετε ότι $\dfrac{1}{3}y \le y \le 3$

   β) Αν $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq 0$ και οι εξισώσεις $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ και $\beta\chi^2 + \alpha\chi + \gamma = 0$ έχουν κοινή ρίζα, να δείξετε ότι $\alpha + \beta + \gamma = 0$

3. α)
   ΤοΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το ΑΕΖ ισόπλευρο τρίγωνο.

   Να δείξετε ότι:

   Εμβ(ΑΒΕ) + Εμβ(ΑΔΖ) = Εμβ(ΕΓΖ)



   β) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ =15° και $\widehat{B}$ =30°.
   Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ να βρείτε τη γωνία $A\widehat{\Gamma}M$

4. α) Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$ =90° και εφΒ = 3εφΓ να βρείτε τη γωνιά $\widehat{B}$.

   β) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνω τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ και παίρνω αντίστοιχα ΒΒ' = ΑΒ, ΓΓ' = ΒΓ, ΔΔ' = ΓΔ και ΑΑ' =ΔΑ. Αν το εμβαδό του ΑΒΓΔ είναι $7m^2$ να βρείτε το εμβαδό του Α'Β'Γ'Δ'.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Πάνω στη ΒΓ παίρνω τα σημεία Δ και Ε ώστε $B\widehat{A}\Delta = \Gamma\widehat{A}E$. Να αποδείξετε ότι οι προβολές του Δ πάνω στις ΑΒ και ΑΓ και οι προβολές του Ε πάνω στις ΑΒ και ΑΓ βρίσκονται πάνω σε κύκλο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. α) Έστω $\chi^2 - \chi + 1 = \omega \Rightarrow \chi^2 - \chi + 2 = \omega + 1$ και $\omega(\omega + 1) = 56$

$\omega = 7$ ή $\omega = -8$ διότι $56 = 7\cdot 8$ ή $56 = (-7)\cdot(-8)$

$\chi^2 - \chi + 1 = 7 \Rightarrow \chi^2 - \chi - 6 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\chi = 3}$ και $\boldsymbol{\chi = -2}$

ή $\chi^2 - \chi + 1 = -8 \Rightarrow \chi^2 - \chi + 9 = 0$ Αδύνατη.

β) $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma+\delta} > \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ ομοίως $\dfrac{\beta}{\gamma+\delta+\alpha} > \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ κλπ

Άρα

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\delta}+\frac{\beta}{\gamma+\delta+\alpha}+\frac{\gamma}{\delta+\alpha+\beta}+\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma} >$$

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}+\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=1$$

2. α) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} \Rightarrow x^2y + 2xy + 4y - x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow$

$(y - 1)x^2 + 2(y + 1)x + 4(y - 1) = 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ (πρέπει $\Delta \geq 0$) $\Rightarrow 4(y + 1)^2 - 16(y - 1)^2 \geq 0$

$(y + 1)^2 - 4(y - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (y + 1 + 2y - 2)(y + 1 - 2y + 2) \geq 0 \Rightarrow$

$(3y - 1)(- y + 3) \geq 0$

	⅓		3	
−		+		−

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \leq y \leq 3$

β) Έστω ρ η κοινή ρίζα. $\Rightarrow$

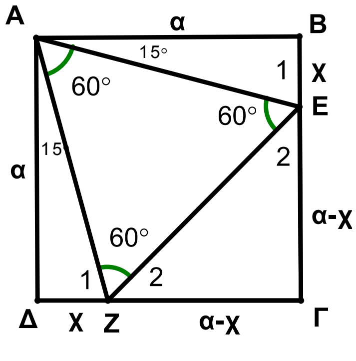
$\left.\begin{matrix} \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \\ \beta\rho^2 + \alpha\rho + \gamma = 0 \end{matrix}\right\}$ Αφαιρώ $\Rightarrow (\alpha - \beta)\rho^2 + (\beta - \alpha)\rho = 0 \Rightarrow$

$\rho(\alpha - \beta)(\rho - 1) = 0$ όμως $\rho \neq 0$ αλλιώς $\gamma = 0$, άτοπο και $\alpha \neq \beta$

άρα $\rho = 1 \Rightarrow \alpha\cdot 1^2 + \beta\cdot 1 + \gamma = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 0}$

3. α)Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ είναι ίσα διότι:

$$\left.\begin{matrix} AE = AZ \\ AB = A\Delta = \alpha \\ \widehat{\Delta} = \widehat{B} = 90^\circ \end{matrix}\right\} \overset{\Pi-\Pi-O\rho}{\Rightarrow} A\overset{\Delta}{B}E = A\overset{\Delta}{\Delta}Z \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15^\circ \\ BE = AZ = \chi \end{cases}$$



$\widehat{E}_1 = \widehat{Z}_1 = 75^\circ \Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{Z}_2 = 45^\circ \Rightarrow E\Gamma = Z\Gamma = \alpha - \chi$

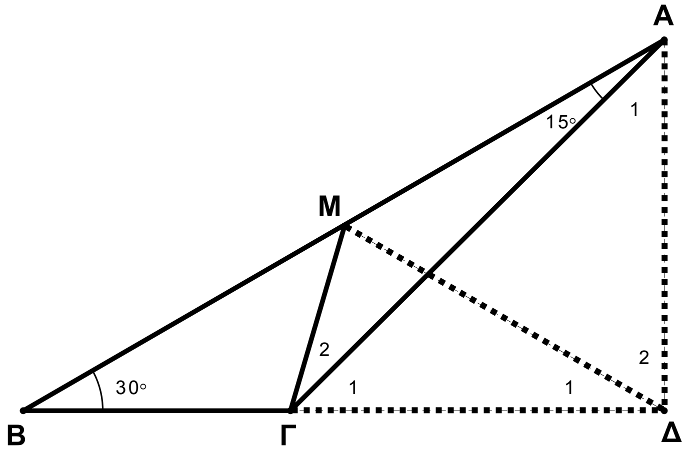
$\Rightarrow \alpha^2 + \chi^2 = AE^2 = ZE^2 = 2(\alpha - \chi)^2$

$\Rightarrow \alpha^2 + \chi^2 = 2(\alpha - \chi)^2 \Rightarrow \alpha^2 + \chi^2 = 2\alpha^2 + 2\chi^2 - 4\alpha\chi$

$\Rightarrow 4\alpha\chi = \alpha^2 + \chi^2$

$$\left.\begin{aligned} &E_{(ABE)} + E_{(A\Delta Z)} = \frac{\alpha\chi}{2} + \frac{\alpha\chi}{2} = \alpha\chi \\ &E_{(ZE\Gamma)} = \frac{(\alpha-\chi)^2}{2} = \frac{\alpha^2+\chi^2-2\alpha\chi}{2} = \frac{4\alpha\chi-2\alpha\chi}{2} = \alpha\chi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{E_{(ABE)} + E_{(A\Delta Z)} = E_{(ZE\Gamma)}}$$

β)



Φέρνουμε $A\Delta \perp B\Gamma \Rightarrow$

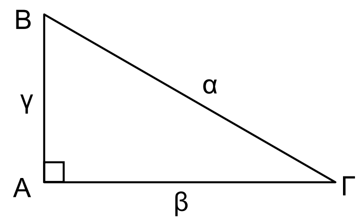
$\overset{\Delta}{AB\Delta}$ ορθογώνιο στο $\Delta \Rightarrow M\widehat{A}\Delta = 60° \Rightarrow \widehat{A}_1 = 60° - 15° \Rightarrow \widehat{A}_1 = 45° \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{\Gamma}_1 = 90° - 45° = 45° \Rightarrow A\Delta = \Gamma\Delta \text{ και } A\Delta = \frac{AB}{2} = AM \\ &M\Delta \text{ διάμεσος } \overset{\Delta}{AB\Delta} \Rightarrow M\Delta = \frac{AB}{2} = AM \end{aligned}\right\} A\Delta = AM = M\Delta \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\Delta}{A\Delta M} \text{ ισόπλευρο} \\ &\overset{\Delta}{\Gamma\Delta M} \text{ ισοσκελές} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{\Delta}_2 = 60° \Rightarrow \widehat{\Delta}_1 = 30° \Rightarrow M\widehat{\Gamma}\Delta = (180° - 30°) : 2 \Rightarrow$$

$M\widehat{\Gamma}\Delta = 75° \Rightarrow \widehat{\Gamma}_2 = 75° - \widehat{\Gamma}_1 \Rightarrow \widehat{\Gamma}_2 = 75° - 45° \Rightarrow \mathbf{\widehat{\Gamma}_2 = 30°}$

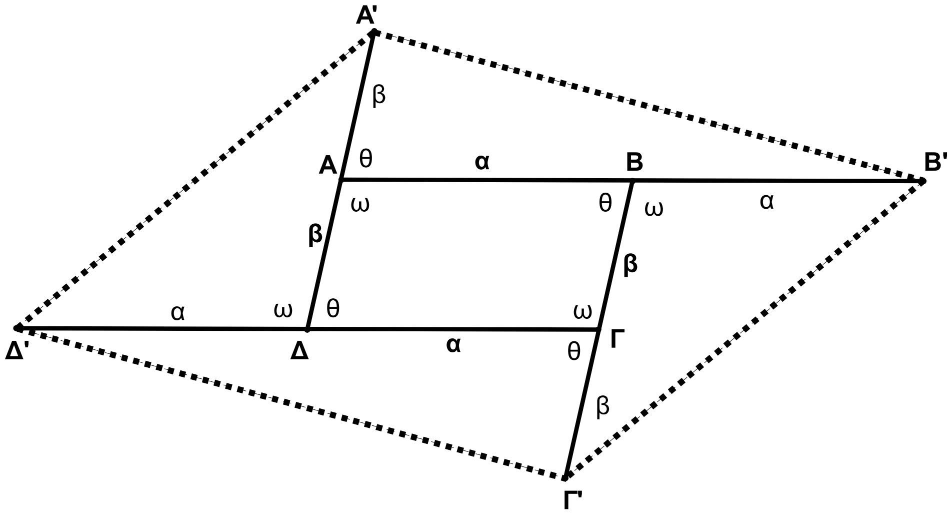
4. α) $\varepsilon\varphi B = 3\varepsilon\varphi\Gamma \Rightarrow$



$$\frac{\beta}{\gamma} = 3\frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \beta^2 = 3\gamma^2 \Rightarrow \beta = \sqrt{3}\,\gamma \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}\,\cancel{\gamma}}{\cancel{\gamma}} = \sqrt{3} \Rightarrow \mathbf{\widehat{B} = 60°}$$

β)



$$\widehat{\omega}+\hat{\theta}=180° \Rightarrow \eta\mu\omega=\eta\mu\theta=\chi$$

$$E_{A'AB'}=\frac{1}{2}(AA')(AB')\eta\mu\theta=\frac{1}{2}\beta 2\alpha\chi=\alpha\beta\chi$$

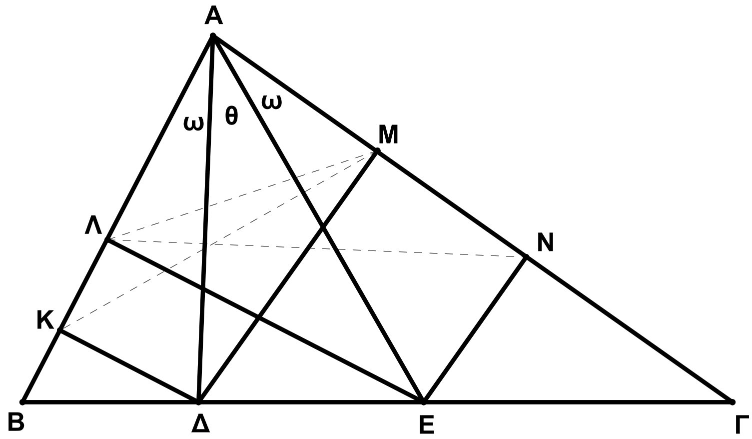
$$E_{B'B\Gamma'}=\frac{1}{2}(BB')(B\Gamma')\eta\mu\omega=\frac{1}{2}\alpha 2\beta\chi=\alpha\beta\chi$$ Ομοίως είναι

$$E_{\Gamma'\Gamma\Delta'}=\alpha\beta\chi \quad \text{και} \quad E_{A'\Delta\Delta'}=\alpha\beta\chi$$

$$E_{\#AB\Gamma\Delta}=2\cdot\frac{1}{2}\Delta\Gamma\cdot\Delta A\cdot\eta\mu\theta=\alpha\beta\chi$$

$$E_{A'B'\Gamma'\Delta'}=5\cdot\alpha\beta\chi \Rightarrow E_{A'B'\Gamma'\Delta'}=5\cdot E_{\#AB\Gamma\Delta} \Rightarrow E_{A'B'\Gamma'\Delta'}=5\cdot 7 \Rightarrow \mathbf{E_{A'B'\Gamma'\Delta'}=35m^2}$$

5.



Αρκεί να αποδειχθεί ότι $\Lambda\widehat{K}M=M\widehat{N}\Lambda$

$\widehat{K}=\widehat{M}=90° \Rightarrow AK\Delta M$ εγγράψιμο $\Rightarrow \Delta\widehat{K}M=\Delta\widehat{A}M=\hat{\theta}+\widehat{\omega}$

$\Rightarrow \Lambda\widehat{K}M=90°-(\hat{\theta}+\widehat{\omega})$ **(1)**

$\widehat{\Lambda}=\widehat{N}=90° \Rightarrow \Lambda ANE$ εγγράψιμο $\Rightarrow \Lambda\widehat{N}E=\Lambda\widehat{A}E=\hat{\theta}+\widehat{\omega}$

$\Rightarrow \Lambda\widehat{N}M=90°-(\hat{\theta}+\widehat{\omega})$ **(2)**

Από (1) και (2) $\Rightarrow \Lambda\widehat{K}M=M\widehat{N}\Lambda \Rightarrow K\Lambda MN$ εγγράψιμο

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

«ΕΥΑΓΟΡΑΣ ΠΑΛΛΗΚΑΡΙΔΗΣ»

Δεκέμβριος 2003 *Διάρκεια: 3 ώρες*

Επιμέλεια: Μάριος Ευσταθίου – Παντελής Ζαμπυρίνης

ΟΔΗΓΙΕΣ:
Να λύσετε και τις πέντε ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) Αν $\chi = 4\alpha + 4$ και $\psi = \alpha^2 + 2\alpha - 3$ να δείξετε ότι η παράσταση $\chi^2 + \psi^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.

β) Αν $\dfrac{\chi}{\alpha-\beta} = \dfrac{\psi}{\beta-\gamma} = \dfrac{\omega}{2\gamma-2\alpha}$ $\quad \alpha \neq \beta,\ \alpha \neq \gamma$ και $\beta \neq \gamma$

Να δειχθεί ότι: $\chi(2\chi + \omega) - \psi(\omega + 2\psi) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) Να μετασχηματιστούν σε γινόμενα οι παραστάσεις:

ι) $\chi^4 - 7\chi^2 + 9$ και ιι) $\alpha^5 + \alpha + 1$

β) Αν $\alpha + \beta = 3$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$\alpha^2(\beta + 1) + \beta^2(\alpha + 1) + \alpha^3 + \beta^3 + 8\alpha\beta$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Δίνεται σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\widehat{A} = 80°$. Φέρουμε τις διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου που τέμνονται στο Δ.
Να υπολογίσετε τη γωνία $B\widehat{\Delta}\Gamma$.

β) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 60°$. Αν ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ του τριγώνου να δειχθεί ότι η γωνία $A\widehat{\Delta}\Gamma$, είναι διπλάσια της $A\widehat{\Delta}B$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με (ΒΓ) = 10cm και (ΑΒ) = 12cm. Από το μέσο Ζ της ΑΔ φέρουμε κάθετη στη ΒΖ που τέμνει την ΓΔ στο Ε. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΒΖΕ.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρεθούν τρεις θετικοί ακέραιοι Α, Β, Γ τέτοιοι ώστε:

$$A + B + \Gamma = 51$$
$$A > 3\Gamma$$
$$2\Gamma > B \quad \text{και}$$
$$2B > A$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

α) $x^2 + y^2 = (4\alpha + 4)^2 + (\alpha^2 + 2\alpha - 3)^2 =$
$16\alpha^2 + 32^{\alpha} + 16 + \alpha^4 + 4\alpha^2 + 9 + 4\alpha^3 - 6\alpha^2 - 12\alpha =$
$\alpha^4+4\alpha^3+14\alpha^2 +20\alpha+25 =(\alpha^2+2\alpha+5)^2$

β) $\dfrac{\chi}{\alpha-\beta} = \dfrac{y}{\beta-\gamma} = \dfrac{\omega}{2\gamma-2\alpha} = \dfrac{x+y}{(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)} \Rightarrow \dfrac{x+y}{\alpha-\gamma} = \dfrac{\omega}{2(\gamma-\alpha)} \Rightarrow$
$\omega = -2(x + y)$ (1)
$x(2x + \omega) - y(\omega + 2y) = 2x^2 + x\omega - y\omega - 2y^2 = 2(x - y)(x + y) + \omega(x - y) =$
$(x - y)(2x + 2y + \omega) = 0$ λόγω της (1)

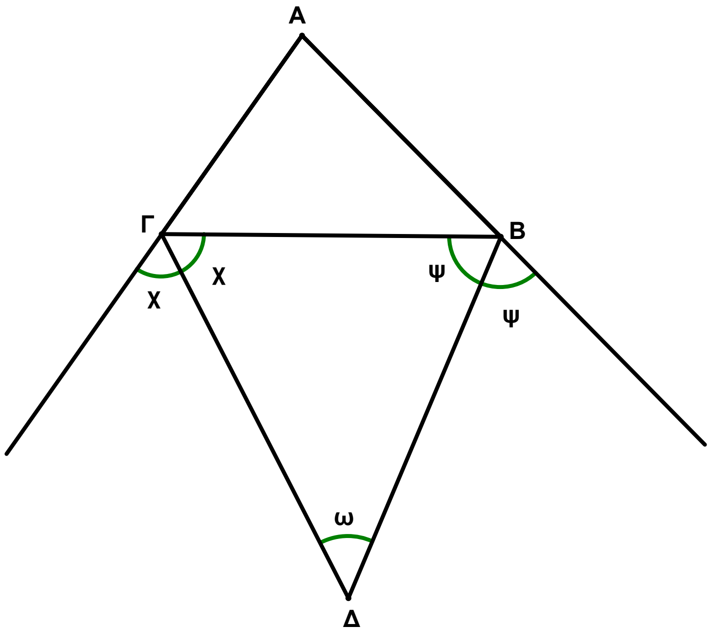
ΑΣΚΗΣΗ 2

α) ι) $x^4 - 7x^2 + 9 = x^4 - 6x^2 + 9 - x^2 = (x^2 - 3)^2 - x^2 = (x^2 - 3 - x)(x^2 - 3 + x)$
ιι) $\alpha^5 + \alpha + 1 = \alpha^5 - \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \alpha^2(\alpha^3 - 1) + \alpha^2 + \alpha + 1 =$
$\alpha^2(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) = (\alpha^2 + \alpha +1)(\alpha^3 - \alpha^2 + 1)$

β) $\alpha^2(\beta +1) + \beta^2(\alpha +1) + \alpha^3 + \beta^3 +8\alpha\beta = \alpha^2\beta + \alpha^2 + \beta^2\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^3 +8\alpha\beta =$
$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + \alpha^3 + \beta^3 + 6\alpha\beta =$
$(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + 6\alpha\beta =$
$9 + 3\alpha\beta + 3\alpha^2 + 3\beta^2 - 3\alpha\beta + 6\alpha\beta = 9 + 3(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) =$
$9 + 3(\alpha + \beta)^2 = 36$

ΑΣΚΗΣΗ 3

α)

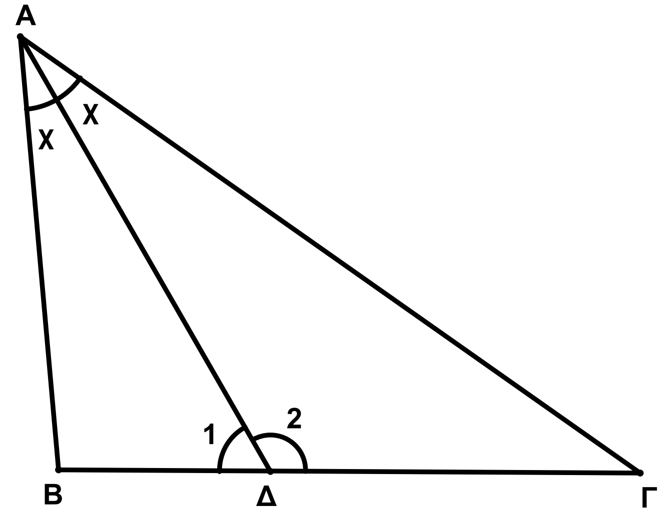


$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180° \Rightarrow \hat{B}+\hat{\Gamma}=180°-80° \Rightarrow \hat{B}+\hat{\Gamma}=100° \ \textbf{(1)}$$

$$2\chi+\hat{\Gamma}+2\psi+\hat{B}=360° \Rightarrow 2(\chi+\psi)+\hat{B}+\hat{\Gamma}=360° \overset{(1)}{\Rightarrow} \chi+\psi=130° \ \textbf{(2)}$$

$$\chi+\psi+\omega=180° \Rightarrow \chi+\psi+B\hat{\Delta}\Gamma=180° \overset{(2)}{\Rightarrow} \mathbf{B\hat{\Delta}\Gamma = 50°}$$

β)



$\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Gamma} + \chi$ (Εξωτερική γωνία) (1)

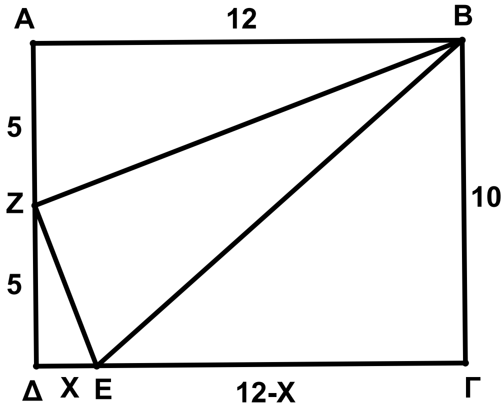
$\widehat{\Delta}_2 = \widehat{B} + \chi$ (Εξωτερική γωνία) (2)

$\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180°$ (3)

$(1)\Lambda(2) \Rightarrow \widehat{\Delta}_2 - \widehat{\Delta}_1 = \widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 60°$ (4)

$(3)\Lambda(4) \Rightarrow 2\widehat{\Delta}_2 = 240° \Rightarrow \widehat{\Delta}_2 = 120° \Rightarrow \widehat{\Delta}_1 = 60° \Rightarrow \boldsymbol{\widehat{\Delta}_2 = 2\widehat{\Delta}_1}$

ΑΣΚΗΣΗ 4



Έστω ΔΕ=x τότε ΓΕ=12 – x

Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΔΕΖ έχουμε:

$(BZ)^2 = (AB)^2 + (AZ)^2 \Rightarrow$

$(BZ)^2 = 144 + 25 = 169$

$(EZ)^2 = x^2 + (\Delta Z)^2 = x^2 + 5^2 \Rightarrow$

$(EZ)^2 = x^2 + 25$ **(1)**

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΕ:

$(BE)^2 = (\Gamma B)^2 + (E\Gamma)^2 \Rightarrow$

$(BE)^2 = (10)^2 + (12 - x)^2$ **(2)**

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΕ:

$(BE)^2 = (ZB)^2 + (EZ)^2$ **(3)**

$(1)\Lambda(2)\Lambda(3) \Rightarrow 10^2 + (12 - x)^2 = 169 + x^2 + 25 \Rightarrow$

$100 + 144 - 24x + x^2 = 169 + x^2 + 25 \Rightarrow 24x = 50 \Rightarrow x = \frac{25}{12}$ cm.

$(ZE)^2 = x^2 + 25 = \frac{625}{144} + 25 = \frac{4225}{144} \Rightarrow (ZE) = \frac{65}{12}$ cm

$$E_{BZE} = \frac{(ZE)(ZB)}{2} = \frac{\frac{65 \cdot 13}{12}}{2} = \frac{845}{24}\,\text{cm}^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 51 \Rightarrow 3\Gamma + \frac{\mathrm{A}}{2} + \Gamma < 51 \Rightarrow$$

$$3\Gamma + \frac{3\Gamma}{2} + \Gamma < 51 \Rightarrow 11\Gamma < 102 \quad \Rightarrow \Gamma < \frac{102}{11} \quad \textbf{(1)}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 51 \Rightarrow 2\mathrm{B} + \mathrm{B} + \Gamma > 51 \;\Rightarrow\; 6\Gamma + \Gamma > 51 \Rightarrow\; \Gamma > \frac{51}{7} \quad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις (1)Λ(2) και δεδομένου ότι Γ ακέραιος το $\Gamma = 8$ ή $\Gamma = 9$

Αν **Γ = 8** τότε $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 43 \Rightarrow \mathrm{A} + \frac{\mathrm{A}}{2} < 43 \Rightarrow \mathrm{A} < \frac{86}{3} = 28\frac{2}{3}$ **(3)**

Ακόμη $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 43 \Rightarrow \mathrm{A} + 2\Gamma > 43 \Rightarrow \mathrm{A} > 43 - 16 = 27$ **(4)**

Από τις (3)Λ(4) $\Rightarrow$ **Α = 28** οπότε $\mathrm{B} = 51 - 28 - 8 \Rightarrow$ **Β = 15**

Αν $\Gamma = 9$ τότε $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 42 \Rightarrow \mathrm{A} + \frac{\mathrm{A}}{2} < 42 \Rightarrow \mathrm{A} < \frac{84}{3} = 28$ **(5)**

Ακόμη $\mathrm{A} > 3\Gamma \Rightarrow \mathrm{A} > 27$ **(6)**

Από τις (5)Λ(6) είναι φανερό πως δεν υπάρχει άλλη λύση.

Άρα οι αριθμοί είναι: Α = 28, Β = 15 και Γ = 8

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

"ΠΕΤΡΑΚΗΣ ΓΙΑΛΛΟΥΡΟΣ"

Δεκέμβριος 2003 *Διάρκεια: 3 ώρες*

Επιμέλεια: Χρ. Παπαχριστοδούλου – Ο. Παπαγιάννη

ΟΔΗΓΙΕΣ:
Να λύσετε και τις πέντε ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Η συνάρτηση $\psi = f(\chi)$, $\chi \in R$, $\psi \in R$ ικανοποιεί τη σχέση
$$3\,f(\chi) - 2\,f(1-\chi) \equiv \alpha\chi + \beta,\ \ \forall \chi \in R.$$
Αν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$ να αποδειχτεί ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -2$.
Στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(\chi) \equiv \chi$, $\forall \chi \in R$.

2. Μέσα στο τετράγωνο ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΖ. Αν οι πλευρές ΑΕ και ΓΖ τέμνονται στο Η, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Η, Δ είναι συνευθειακά.

3. (α) Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90°$) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε και Ζ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ και Μ το μέσο της ΕΖ να αποδείξετε ότι $M\Delta = \frac{1}{4}B\Gamma$.

   (β) Αν $\nu \in N$ να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu} < \frac{1}{2\sqrt{\nu}}$.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στη προέκταση της ΓΒ παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η διαφορά των αποστάσεων του Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου είναι σταθερή (ανεξάρτητη από τη θέση του Μ).

5. Να βρείτε ένα τετραψήφιο ακέραιο αριθμό αν γνωρίζετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο και έχει τα δυο πρώτα ψηφία ίσα και τα δυο τελευταία ψηφία επίσης ίσα.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ</u>

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

$y = f(x) \qquad\qquad 3f(x) - 2f(1-x) \equiv \alpha x + \beta$

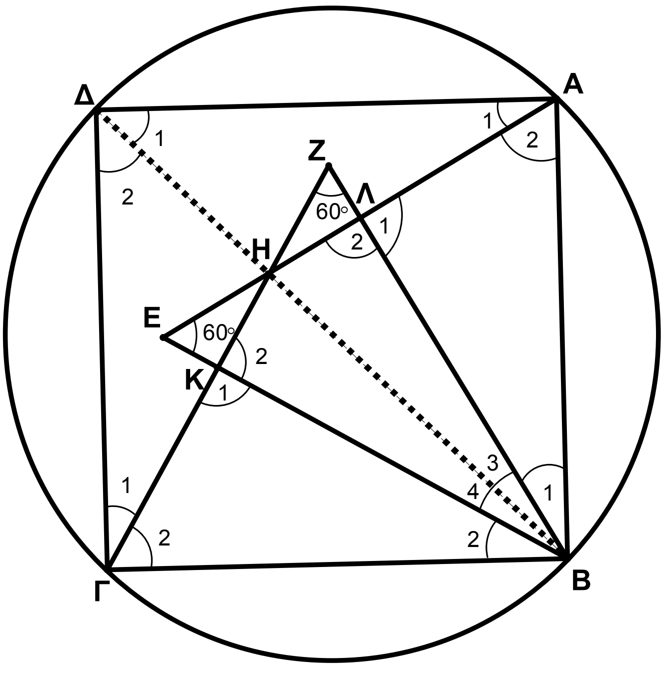
$f(0) = 0 \Rightarrow \quad 3f(0) - 2f(1) = \beta$
$\boldsymbol{\beta = -2}$

$f(1) = 1 \Rightarrow \quad 3f(1) - 2f(0) = \alpha + \beta$
$3 = \alpha + \beta \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 5}$

$3f(x) - 2f(1-x) = 5x - 2 \qquad (1)$
$3f(1-x) - 2f(x) = 5(1-x) - 2$
$3f(1-x) - 2f(x) = 3 - 5x \qquad (2)$

$$\begin{array}{ll|ll} (1) & 3f(x)-2f(1-x)=5x-2 & 3 & \Rightarrow 9f(x)-\cancel{6f(1-x)}=15x\cancel{-6} \\ (2) & 3f(1-x)-2f(x)=3-5x & 2 & \Rightarrow \cancel{6f(1-x)}-4f(x)=\cancel{6}-10x \\ \hline & & & 5f(x)=5x \Rightarrow \mathbf{f(x)=5} \end{array}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2</u>



$$\overset{\Delta}{B\Gamma Z}, \overset{\Delta}{AB E} : \text{ισόπλευρα} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{A}_2 = 60^\circ \\ \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 30^\circ \\ AB = B\Gamma \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{AB\Lambda} = \overset{\Delta}{B\Gamma K} \Rightarrow \mathbf{KB = \Lambda B}$$

Ενώνω το ΗΒ

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{B\Lambda H}$, $\overset{\Delta}{BHK}$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}_2 = 60^\circ \\ \widehat{B}_1 = 30^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{\Lambda}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{\Lambda}_2 = 90^\circ$$, με τον ίδιο τρόπο $\widehat{K}_2 = 90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{K}_2 = \widehat{\Lambda}_2 = 90^\circ \\ HB: \text{κοινή πλευρά} \\ KB = \Lambda B\end{array}\right\} \overset{\Pi-\Pi-O\rho}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{B\Lambda H} = \overset{\Delta}{BHK} \Rightarrow \widehat{B}_3 = \widehat{B}_4$$

$\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{B}_3 = \widehat{B}_2 + \widehat{B}_4 = 45^\circ \Rightarrow$ **ΗΒ: Διαγώνιος τετραγώνου ΑΒΓΔ (1)**

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABH}$, $\overset{\Delta}{B\Gamma H}$

$$\left.\begin{array}{l}BH: \text{κοινή πλευρά} \\ \widehat{B}_1 + \widehat{B}_3 = \widehat{B}_2 + \widehat{B}_4 = 45^\circ \\ AB = B\Gamma\end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABH} = \overset{\Delta}{BH\Gamma} \Rightarrow AH = \Gamma H$$

Ενώνω το ΔΗ

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Delta H}$, $\overset{\Delta}{\Delta H\Gamma}$

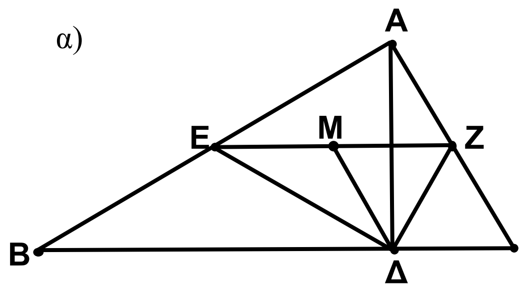
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 30^\circ \\ \Delta H: \text{κοινή πλευρά} \\ AH = \Gamma H\end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{A\Delta H} = \overset{\Delta}{\Delta H\Gamma} \Rightarrow \widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 45^\circ \Rightarrow$$

ΗΔ: Διαγώνιος τετραγώνου ΑΒΓΔ (2)

(1) και (2) $\Rightarrow$ Δ, Η, Β συνευθειακά.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3</u>

α)



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AB\Delta}: \widehat{\Delta} = 90^\circ \\ \Delta E: \text{διάμεσος}\end{array}\right\} E\Delta = EA \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}: \widehat{\Delta} = 90^\circ \\ \Delta Z: \text{διάμεσος}\end{array}\right\} \Delta Z = AZ \quad (2)$$

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AEZ}$, $\overset{\Delta}{E\Delta Z}$

$$\left.\begin{array}{l}EZ: \text{κοινή πλευρά} \\ EA = E\Delta \;\; (1) \\ AZ = \Delta Z \;\; (2)\end{array}\right\} \overset{\Pi-\Pi-\Pi}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{AEZ} = \overset{\Delta}{E\Delta Z} \Rightarrow E\widehat{\Delta}Z = 90^\circ$$

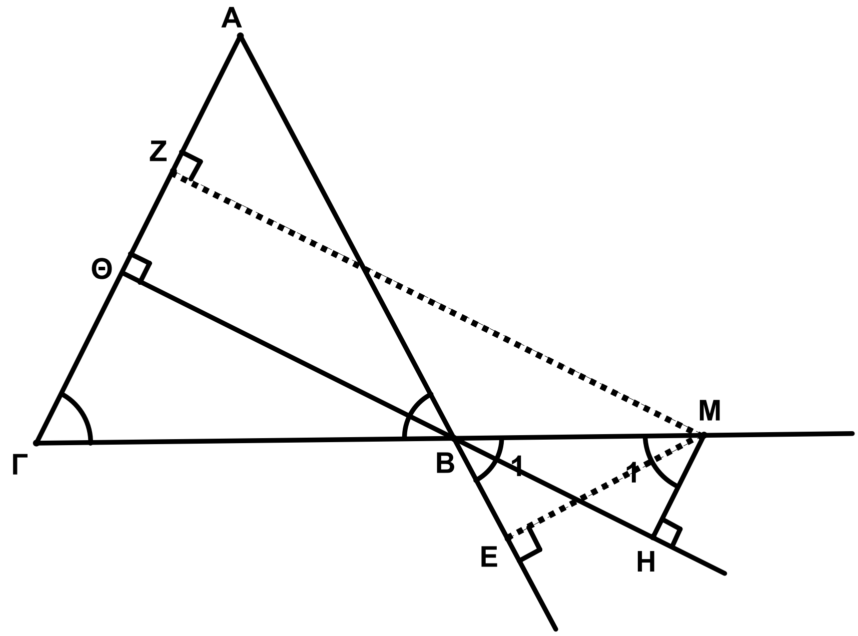
Στο τρίγωνο ΑΒΓ : Ε μέσο ΑΒ, Ζ μέσο ΑΓ $\Rightarrow \text{ΕΖ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2}$ (3)

Στο τρίγωνο ΕΖΔ : $\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ} = 90°$, ΜΔ διάμεσος $\Rightarrow \text{ΜΔ} = \dfrac{\text{ΕΖ}}{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \text{ΜΔ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{4}$

(β) $$\frac{(\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu})(\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu})}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}} = \frac{(\sqrt{\nu+1})^2-(\sqrt{\nu})^2}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}} < \frac{1}{\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{\nu}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4



Φέρω την $\text{ΒΘ} \perp \text{ΑΓ}$ και $\text{ΜΗ} \perp \text{ΒΘ}$.

Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{ΒΜΗ}}$, $\overset{\Delta}{\text{ΒΜΕ}}$

$$\left.\begin{array}{r} \hat{\text{Η}} = \hat{\Theta} = 90° \Rightarrow \text{ΜΗ} // \text{ΑΓ} \Rightarrow \widehat{\text{Μ}_1} = \hat{\Gamma} \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{\Gamma} = \hat{\text{Β}}_1 \text{ (ΑΒΓ Ισοσκελές)} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{\text{Μ}_1} = \hat{\text{Β}}_1 \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΒΜ : κοινή πλευρά} \\ \widehat{\text{Μ}_1} = \hat{\text{Β}}_1 \\ \hat{\text{Η}} = \hat{\text{Ε}} = 90° \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\text{Ορ}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{\text{ΒΜΗ}} = \overset{\Delta}{\text{ΒΜΕ}} \Rightarrow \text{ΒΗ} = \text{ΜΕ}$$

Το ΖΜΗΘ είναι ορθογώνιο (ΖΜ // ΘΗ, ΖΘ // ΜΗ, $\hat{\text{Ζ}} = 90°$) $\Rightarrow$

ΖΜ = ΘΗ = ΘΒ + ΒΗ $\Rightarrow$ ΘΒ = ΖΜ – ΒΗ $\Rightarrow$

ΖΜ – ΜΕ = ΒΘ = $\boldsymbol{\upsilon_\beta}$ **= σταθερό.**

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

“ ΖΗΝΩΝ ”

Ιανουάριος 2004 — *Διάρκεια: 3 ώρες*

Επιμέλεια: Α. Σχοινής – Σ. Αντωνίου – Σ. Ιωαννίδης

ΟΔΗΓΙΕΣ:
Να λύσετε και τις πέντε ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Σε σημείο Α μιας περιφέρειας κύκλου (K, R) φέρουμε εφαπτομένη. Πάνω σ’αυτή λαμβάνουμε τμήμα ΑΒ = 2R. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας ΑΚΒ η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Γ. Να δείξετε ότι το τμήμα ΑΓ είναι ίσο με τη πλευρά κανονικού δεκαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R).

2. Αν ΒΔ και ΓΕ είναι τα ύψη οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι: $(ΒΓ)^2 = (ΑΓ)(ΓΔ) + (ΑΒ)(ΒΕ)$.

3. Δίδονται οι φυσικοί αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύει $\dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2+\beta^2}$
   Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ δεν μπορεί να είναι πρώτος.

4. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί κ για τους οποίους το σύστημα των πιο κάτω ανισοτήτων με αγνώστους $\chi, \psi, \omega \in R$ έχει μια πραγματική λύση.
$$25 + 2\chi^2 \le 13\psi + 10\omega - \kappa$$
$$25 + 3\psi^2 \le 6\omega + 10\chi$$
$$25 + 4\omega^2 \le 6\chi + 5\psi + \kappa$$

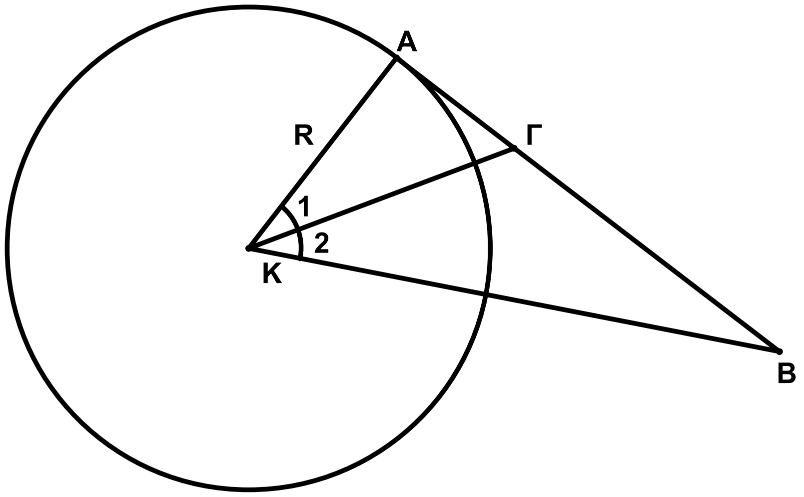
5. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f(n): N \mapsto R^+$ αν ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

   α) $f(4) = 4$

   β) $\dfrac{1}{f(1)\cdot f(2)} + \dfrac{1}{f(2)\cdot f(3)} + \ldots + \dfrac{1}{f(n)\cdot f(n+1)} = \dfrac{f(n)}{f(n+1)}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

1.



(α)

Στον κύκλο (Κ, R) η ΑΒ είναι εφαπτομένη και ΑΒ = 2R. Η ΚΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΚΒ.

$\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2$

$(KB)^2 = (KA)^2 + (AB)^2 \Rightarrow (KB)^2 = R^2 + 4R^2 \Rightarrow (KB)^2 = 5R^2 \Rightarrow (KB) = R\sqrt{5}$

Θέτουμε **ΑΓ = x** $\Rightarrow$ ΒΓ = 2R – x

Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{AKB}$ εφαρμόζουμε το θεώρημα των διχοτόμων:

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{AK}{KB} \Rightarrow \frac{x}{2R - x} = \frac{R}{R\sqrt{5}} \Rightarrow x\sqrt{5} = 2R - x \Rightarrow x\left(1 + \sqrt{5}\right) = 2R \Rightarrow$$

$$x = \frac{2R}{(\sqrt{5} + 1)} \Rightarrow x = \frac{2R(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} \Rightarrow x = \frac{2R(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} \Rightarrow \mathbf{x = \frac{R\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}}$$

(β)

$\Delta E = \lambda_{10} \Rightarrow \Delta\widehat{K}E = 36° \Rightarrow$

$\lambda_{10}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot συν36° \Rightarrow$

$\lambda_{10}^2 = 2R^2(1 - συν36°)$ **(1)**

Θέτουμε θ = 36° $\Rightarrow$ 2θ + 3θ = 180° $\Rightarrow$ 2θ = 180° – 3θ

$\Rightarrow$ συν2θ = συν(180° – 3θ)

$\Rightarrow$ συν2θ = – συν3θ

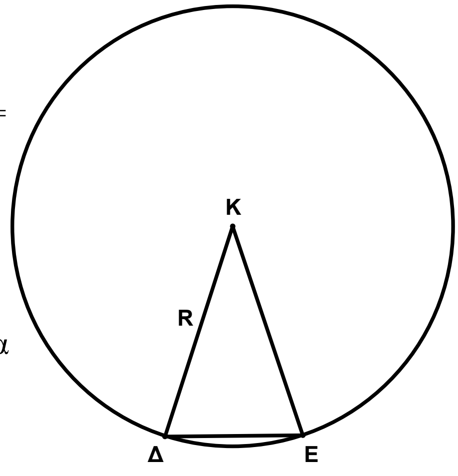
$\Rightarrow 2συν^2θ - 1 = -(4συν^3θ - 3συνθ)$

$\Rightarrow 4συν^3θ + 2συν^2θ - 3συνθ - 1 = 0$

Η συνθ = – 1 είναι προφανής λύση η οποία απορρίπτεται, άρα 0 < συνθ < 1

Έτσι $(συνθ + 1)(4συν^2θ - 2συνθ - 1) = 0$

$\Rightarrow 4συν^2θ - 2συνθ - 1 = 0$



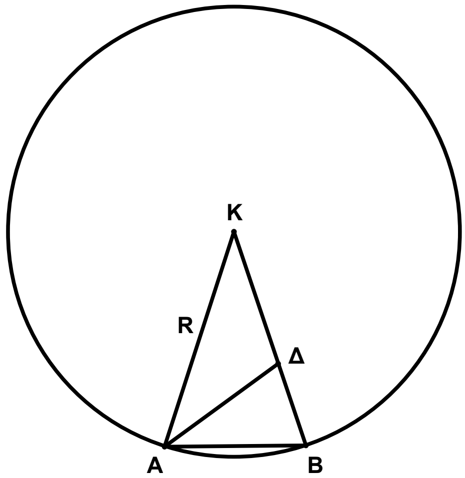
$$\Rightarrow συνθ = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{8} \Rightarrow συνθ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Από τη σχέση **(1)** προκύπτει $\lambda_{10}^2 = 2R^2\left(1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right) = 2R^2\left(\dfrac{4-1+\sqrt{5}}{4}\right)$

$$\lambda_{10}^2 = \frac{R^2}{4}\left(6-2\sqrt{5}\right) = \frac{R^2}{4}\left(5-2\sqrt{5}+1\right) = \frac{R^2}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

Από τα εξαγόμενα της (α) και (β) προκύπτει το ζητούμενο.

Ένας άλλος τρόπος εύρεσης της λ_{10}:



$AB = \lambda_{10} \Rightarrow A\widehat{K}B = 36° \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 72°$

$A\Delta$: διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$. Τότε θα είναι $\Delta\widehat{A}B = \Delta\widehat{A}K = 36° = A\widehat{K}B$ και

$A\widehat{\Delta}B = 72° = A\widehat{B}\Delta$

άρα $AB = A\Delta = K\Delta = \lambda_{10}$

Στο $\overset{\Delta}{ABK}$ εφαρμόζουμε το θεώρημα των διχοτόμων, έτσι είναι:

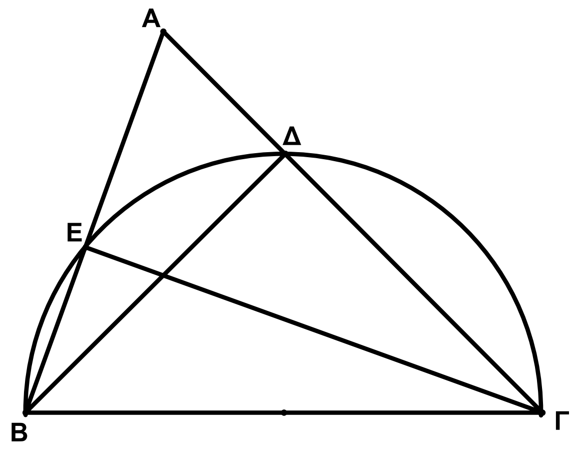
$$\frac{K\Delta}{\Delta B} = \frac{KA}{AB} \Rightarrow \frac{\lambda_{10}}{R-\lambda_{10}} = \frac{R}{\lambda_{10}}$$

$\Rightarrow R(R-\lambda_{10}) = \lambda_{10}^2$

$\Rightarrow \lambda_{10}^2 + R\cdot\lambda_{10} - R^2 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2+4R^2}}{2} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_{10} = \frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}}$$

2.



Τα σημεία Δ και Ε βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ υπό ορθή γωνία, επομένως θα βρίσκονται πάνω σε κύκλο με διάμετρο ΒΓ.

Έχουμε κατά σειρά τα εξής:

$$\begin{aligned}(B\Gamma)^2 &= (B\Delta)^2 + (\Delta\Gamma)^2 \\ &= (AB)^2 - (A\Delta)^2 + (\Delta\Gamma)^2 \\ &= (AB)^2 - [(A\Gamma)-(\Delta\Gamma)]^2 + (\Delta\Gamma)^2 \\ &= (AB)^2 - (A\Gamma)^2 + 2(A\Gamma)(\Gamma\Delta) - \cancel{(\Delta\Gamma)^2} + \cancel{(\Delta\Gamma)^2}\end{aligned}$$

$$=(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{A\Gamma})^2+(\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{\Gamma\Delta})+(\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{\Gamma\Delta})$$
$$=(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{A\Gamma})+[(\mathrm{A\Gamma})-(\mathrm{\Gamma\Delta})]+(\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{\Gamma\Delta})$$
$$=(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{A\Gamma})[(\mathrm{A\Gamma})-(\mathrm{\Gamma\Delta})]+(\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{\Gamma\Delta})$$
$$=(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{A\Delta})+(\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{\Gamma\Delta})$$
$$=(\mathrm{AB})^2-(\mathrm{AB})(\mathrm{AE})+(\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{\Gamma\Delta}) \quad \{\text{Δύναμη σημείου Α ως προς κύκλο}\}$$
$$=(\mathrm{AB})[(\mathrm{AB})-(\mathrm{AE})]+(\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{\Gamma\Delta}) \Rightarrow$$
$$\mathbf{(B\Gamma)^2=(AB)(BE)+(A\Gamma)(\Gamma\Delta)}$$

3. $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2+\beta^2} \Rightarrow \alpha\gamma^2+\alpha\beta^2-\gamma\alpha^2-\gamma\beta^2=0 \Rightarrow$

$\beta^2(\alpha-\gamma)-\alpha\gamma(\alpha-\gamma)=0 \Rightarrow (\alpha-\gamma)(\beta^2-\alpha\gamma)=0$

επειδή $\alpha\neq\gamma \Rightarrow \beta^2=\alpha\gamma$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2-\beta^2=\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2-\beta^2=(\alpha+\gamma)^2-\beta^2$$
$$=(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\gamma+\beta)$$

Επειδή $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{N}$ και $\alpha\neq\gamma \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2>3$

Άρα για να είναι ο αριθμός $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ πρώτος αριθμός θα πρέπει να ισχύει μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(I) $\alpha+\gamma-\beta=1$ και $\alpha+\gamma+\beta=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(II) $\alpha+\gamma-\beta=1$ και $\alpha+\gamma+\beta=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

Η περίπτωση (I) μας δίνει $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha-\gamma-\beta=0 \Rightarrow$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha-2\gamma+1=0 \Rightarrow (\alpha-1)^2+(\gamma-1)^2+\beta^2=1 \Rightarrow$

$\alpha=\gamma=1$ και $\beta=1$ άτοπο αφού $\alpha\neq\gamma$

Η περίπτωση (II) απορρίπτεται διότι $\alpha+\beta+\gamma>0$ ενώ $-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)<0$

Άρα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ δεν μπορεί να είναι πρώτος αριθμός.

4. Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρις ανισότητες θα έχουμε κατά σειρά τα εξής:

$$75+2\chi^2+3\psi^2+4\omega^2\leq 16\chi+18\psi+16\omega$$
$$\Rightarrow 2\chi^2-16\chi+3\psi^2-18\psi+4\omega^2-16\omega+75\leq 0$$
$$\Rightarrow 2(\chi^2-8\chi)+3(\psi^2-6\omega)+4(\omega^2-4\omega)+75\leq 0$$
$$\Rightarrow 2[(\chi-4)^2-16]+3[(\psi-3)^2-9]+4[(\omega-2)^2-4]+75\leq 0$$
$$\Rightarrow 2(\chi-4)^2-32+3(\psi-3)^2-27+4(\omega-2)^2-16+75\leq 0$$
$$\Rightarrow 2(\chi-4)^2+3(\psi-3)^2+4(\omega-2)^2\leq 0$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει προφανώς μόνο για τις τιμές $\chi=4$, $\psi=3$ και $\omega=2$

Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές αυτές στις δοθείσες ανισότητες θα έχουμε:

$$57\leq 59-\kappa, \quad 52\leq 52, \quad 49\leq 39+\kappa$$

Άρα έχομε από την πρώτη ανισότητα $\kappa\leq 2$ και από την τρίτη ανισότητα $\kappa\geq 2$

Επομένως η τιμή $\kappa=2$ είναι η μοναδική για την οποία το αρχικό σύστημα έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

5. Για ν = 1 είναι:

$$\frac{1}{f(1)f(2)}=\frac{f(1)}{f(2)}\Rightarrow f^2(1)=1\Rightarrow f(1)=1$$

Για ν = 2 είναι:

$$\frac{1}{f(1)f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}=\frac{f(2)}{f(3)}\Rightarrow\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}=\frac{f(2)}{f(3)}\Rightarrow f(3)+1=f^2(2)\ \ \mathbf{(1)}$$

Για ν = 3 είναι:

$$\frac{1}{f(1)f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}+\frac{1}{f(3)f(4)}=\frac{f(3)}{f(4)}\Rightarrow\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}+\frac{1}{4\cdot f(3)}=\frac{f(3)}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{f(3)+1}{f(2)f(3)}+\frac{1}{4\cdot f(3)}=\frac{f(3)}{4}\overset{\text{από(1)}}{\Rightarrow}\frac{f^2(2)}{f(2)f(3)}+\frac{1}{4\cdot f(3)}=\frac{f(3)}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{f(2)}{f(3)}+\frac{1}{4\cdot f(3)}=\frac{f(3)}{4}\Rightarrow 4\cdot f(2)+1=f^2(3)\ \ \mathbf{(2)}$$

Από (1) και (2) $\Rightarrow 4f(2) + 1 = [f^2(2) – 1]^2 \Rightarrow f^4(2) – 2 f^2(2) – 4f(2) = 0 \Rightarrow$
$f(2)[f^3(2) – 2 f(2) – 4] = 0$
Αλλά $f(n) \in R^+ \Rightarrow f(2) > 0 \Rightarrow f^3(2) – 2f(2) – 4 = 0 \Rightarrow$ **f(2) = 2**
Από τη σχέση (2) έχομε $f^2(3) = 9 \Rightarrow$ **f(3) = 3**

Έχομε λοιπόν: f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3 και f(4) = 4
Παρατηρούμε ότι αν δεχθούμε ότι f(κ) = κ και αποδείξουμε ότι f(κ+1) = κ + 1
τότε θα ισχύει f(n) = n $\forall$ $n \in N$
Έτσι

$$\frac{1}{f(1)f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(\kappa)f(\kappa+1)}=\frac{f(\kappa)}{f(\kappa+1)}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(\kappa-1)\kappa}+\frac{1}{\kappa f(\kappa+1)}=\frac{\kappa}{f(\kappa+1)}$$

Έχομε

$$\frac{1}{(\kappa-1)\kappa}\equiv\frac{A}{\kappa-1}+\frac{B}{\kappa}\Rightarrow 1\equiv A\kappa+B(\kappa-1)$$

$\kappa = 0 \Rightarrow B = -1$
$\kappa = 1 \Rightarrow A = 1$ άρα

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa f(\kappa+1)}=\frac{\kappa}{f(\kappa+1)}\Rightarrow$$

$$1-\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa f(\kappa+1)}=\frac{\kappa}{f(\kappa+1)}\Rightarrow$$

$\kappa f(\kappa+1) – f(\kappa+1) + 1 = \kappa^2 \Rightarrow (\kappa – 1) f(\kappa+1) = (\kappa – 1)(\kappa +1) \Rightarrow$
$f(\kappa+1) = \kappa + 1 \Rightarrow$

f(n) = n $\forall$ n$\in$N

ΑΣΚΗΣΗ 5

$$A = 1000\chi + 100\chi + 10\psi + \psi = 1100\chi + 11\psi = 11(100\chi + \psi) =$$
$$11(99\chi + \chi + \psi) = 11(9\cdot 11\chi + \chi + \psi) \quad (1)$$

Α τέλειο τετράγωνο $\Rightarrow 9\cdot 11\chi + \chi + \psi = 11\lambda \Rightarrow \chi + \psi = 11\mu$ (2)

χ, ψ μονοψήφιοι $\Rightarrow$ $\chi + \psi \leq 18$ (3)

(2) και (3) $\Rightarrow \chi + \psi = 11$

(1) $A = 11(9\cdot 11\chi + 11) = 11\cdot 11\,(9\chi + 1) = 11^2\,(9\chi + 1)$

$\chi = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ και $9\chi + 1 =$ τέλειο τετράγωνο.

$\chi = 1 \Rightarrow 9 + 1 = 10$
$\chi = 2 \Rightarrow 18 + 1 = 19$
$\chi = 3 \Rightarrow 27 + 1 = 28$
$\chi = 4 \Rightarrow 36 + 1 = 37$
$\chi = 5 \Rightarrow 45 + 1 = 46$
$\chi = 6 \Rightarrow 54 + 1 = 55$
$\chi = 7 \Rightarrow 63 + 1 = 64$ $\Rightarrow$τέλειο τετράγωνο
$\chi = 8 \Rightarrow 72 + 1 = 73$
$\chi = 9 \Rightarrow 81 + 1 = 82$

Άρα $\chi = 7$ και $\psi = 4$ και ο αριθμός είναι το $1144 = 11^2 \cdot 64 = 88^2$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

1ΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 ½ ΕΤΩΝ

Φεβρουάριος 2004 *Χρόνος: 4½ Ώρες*

Επιμέλεια: Γρ. Μακρίδης – Π. Πέτρου – Μ. Αντωνιάδης

Θέμα 1:

α) Σε ημικύκλιο με διάμετρο 26cm, υπάρχουν δύο παράλληλες χορδές με μήκη 24cm και 10 cm. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των δύο παραλλήλων χορδών.

β) Δίνεται κύκλος (Ο,R) και εσωτερικό σημείο του Σ. Φέρουμε κάθετες χορδές ΑΣΒ και ΓΣΔ (Α,Β,Γ,Δ σημεία του κύκλου). Να δείξετε ότι $ΑΒ^2 + ΓΔ^2$ είναι σταθερό.

Θέμα 2:

Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$Α = x^3 + y^3 + \omega^3$$

αν γνωρίζετε ότι:

$$x + y + \omega = x^2, \quad y + \omega = \frac{2x^2}{3} \text{ και } \omega - y = 2 \text{ αν } x \neq 0 .$$

Θέμα 3:

Αν α,β,γ,δ > 0 και α > β, γ > δ να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha\gamma} - \frac{1}{\alpha^2\gamma^2} > \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Θέμα 4:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Πάνω στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΒΕ=ΓΔ. Αν Μ είναι το μέσο του ΕΔ και Ν το μέσο του ΒΓ να αποδείξετε ότι η ΜΝ είναι παράλληλη προς τη διχοτόμο της γωνίας ΒΑΓ.

Θέμα 5:

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς α,β,γ που ικανοποιούν την ανισότητα $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 > \alpha\beta + 3\beta + 2\gamma$.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

2^{ΟΣ} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 ½ ΕΤΩΝ

Φεβρουάριος 2004 *Χρόνος: 4½ Ώρες*

Επιμέλεια: Γρ. Μακρίδης – Π. Πέτρου – Μ. Αντωνιάδης

Θέμα 1:

Αν $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2\nu-1}{2\nu}$ και $B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2\nu}{2\nu+1}$ να δείξετε ότι:

α) $A\cdot B = \frac{1}{2\nu+1}$ β) $A < B$ γ) $A < \frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}$

Θέμα 2:

Για τους πραγματικούς αριθμούς **x** και **y** ισχύει η σχέση:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 46 = 0$. Να δείξετε ότι $x > y$.

Θέμα 3:

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Φέρουμε 3 παράλληλες μεταξύ τους ευθείες και έτσι ώστε η κάθε μια από αυτές να διέρχεται από μία από τις κορυφές Β, Γ και Δ. Αν η απόσταση της μεσαίας παράλληλης ευθείας από τις άλλες δύο παράλληλες είναι 5 και 7 μονάδες αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου.

Θέμα 4:

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΑΔ. Πάνω στην πλευρά ΔΓ του και στην προέκταση της ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε . $ΔΕ = ΔΖ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}$

Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΕ περνά από το μέσο της διαγωνίου ΑΓ του τραπεζίου.

Θέμα 5:

Στο διπλανό μαγικό τετράγωνο οι a,b,c,d,e,f,g,h,i είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Στο μαγικό αυτό τετράγωνο ισχύει ότι το γινόμενο των τριών αριθμών κάθε σειράς ή κάθε στήλης ή κάθε διαγωνίου είναι σταθερό και ίσο με τον αριθμό Κ. Να βρείτε τον αριθμό Κ αν γνωρίζετε ότι είναι μεταξύ του 10000 και του 12000.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

3^{ΟΣ} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 ½ ΕΤΩΝ

Μάρτιος 2004 *Χρόνος: 4½ Ώρες*

Επιμέλεια: Γρ. Μακρίδης – Π. Πέτρου – Μ. Αντωνιάδης

Θέμα 1:

Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $1997^{3^n}+1$ διαιρείται από το 3^{n+3} για κάθε φυσικό αριθμό n.

Θέμα 2:

Έστω f(x) γραμμική συνάρτηση ώστε f(0) = – 5 και f(f(0))= – 15. Να βρεθούν όλες οι τιμές του λ για τις οποίες οι λύσεις της ανίσωσης f(x)·f(λ – x) > 0 έχουν διαφορά 2.

Θέμα 3:

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΒΓ σε σημείο Δ ώστε ΓΔ = ΑΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΔ στο Ε, να αποδειχθεί ότι η περιφέρεια που έχει κέντρο το Α και ακτίνα την ΑΕ, χωρίζεται από την ΒΕ σε δύο τόξα από τα οποία το ένα είναι τριπλάσιο του άλλου.

Θέμα 4:

Να βρεθεί το άθροισμα όλων των θετικών ακεραίων αριθμών των οποίων το τετράγωνο είναι τετραψήφιος αριθμός πολλαπλάσιος του 48.

Θέμα 5:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Α΄, Β΄, Γ΄ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ. Προεκτείνουμε την Β΄Γ΄ προς το μέρος του Γ΄ στο σημείο Δ ώστε Β΄Γ΄ = Γ΄Δ

α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΔΑ΄ έχει τις πλευρές του ίσες μία προς μία με τις διάμεσους του τριγώνου ΑΒΓ (να δείξετε τη σωστή αντιστοίχηση).

β) Να δείξετε ότι οι διάμεσοι του τριγώνου ΑΔΑ΄ είναι ίσες με τα $\frac{3}{4}$ αντιστοίχων πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ (να δείξετε τη σωστή αντιστοίχηση).

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

1^{ΟΣ} ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΩΝ

Φεβρουάριος 2004 *Χρόνος: 4½ Ώρες*

Επιμέλεια: Γρ. Μακρίδης – Π. Πέτρου – Μ. Αντωνιάδης

Θέμα 1:

Οι αριθμοί α,β,γ,δ είναι θετικοί και αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Να δείξετε ότι :

$$\frac{\alpha+\delta}{2} > \sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Θέμα 2:

Να δείξετε ότι το εμβαδόν μιας όψης του κέρματος των 50 σεντ είναι:

$$\mathrm{E} = \frac{\alpha^2}{2}\left(\pi - 7\cdot \varepsilon\phi\frac{\pi}{14}\right)$$

Το κάθε τόξο από τα επτά που περικλείουν το κέρμα σχηματίζεται από κύκλο ακτίνας α που έχει το κέντρο του στην κορυφή που είναι εκ διαμέτρου αντίθετη με το μέσο του τόξου.

Θέμα 3:

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν την ανισότητα: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3 > \alpha\beta+3\beta+2\gamma$.

Θέμα 4:

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (x, y) θετικών ακέραιων αριθμών για τα οποία ισχύει: $(xy-7)^2 = x^2+y^2$.

Θέμα 5:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = α, ΑΓ = β και ΑΒ = γ. Μ είναι το μέσο της ΑΒ και Δ το ίχνος της καθέτου από το Μ επί της ΒΓ. Εάν Ο είναι το περίκεντρο του ΑΒΓ. Να υπολογίσετε την απόσταση του Δ από την ΟΒ (Συναρτήσει των α, β, γ και Ε του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ)

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

$2^{ΟΣ}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΩΝ

Φεβρουάριος 2004 — *Χρόνος: 4½ Ώρες*

Επιμέλεια: Γρ. Μακρίδης – Π. Πέτρου – Μ. Αντωνιάδης

Θέμα 1:

Αν $\frac{xy}{z^2}=\frac{yz}{x^2}=3$ και $\frac{xz}{y^2}=\frac{3}{7}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\frac{x^3+y^3}{z^3}+\frac{y^3+z^3}{x^3}+2}{\frac{4-x-y-z}{2}}$$

Θέμα 2:

Εάν K_1, K_2, K_3 είναι οι προβολές του κέντρου βάρους Ο τριγώνου ΑΒΓ επί των πλευρών του και α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $K_1K_2K_3$ συναρτήσει των α, β, γ και του εμβαδού Ε του τριγώνου ΑΒΓ.

Θέμα 3:

Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν > 1 ισχύει: $\frac{4^\nu}{\nu+1}<\frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2}$

Το $\nu! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\nu$.

Θέμα 4:

Κάθε σύνθετος θετικός ακέραιος αριθμός **n** μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο παραγόντων του με τουλάχιστον δύο τρόπους: ab = cd =n (η ανάλυση του αριθμού ($1\cdot n$) είναι πάντα στη διάθεση μας είτε τη θέλουμε είτε τη χρειαζόμαστε). Να δείξετε ότι για κάθε τέτοια περίπτωση ο αριθμός που προκύπτει από το άθροισμα των τεσσάρων παραγόντων $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ δεν είναι ποτέ πρώτος αριθμός.

Θέμα 5:

Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων εγγράψιμου τετραπλεύρου συναρτήσει των πλευρών του.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

3^ΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΩΝ

Μάρτιος 2004 *Χρόνος: 4½ Ώρες*

Επιμέλεια: Γρ. Μακρίδης – Π. Πέτρου – Μ. Αντωνιάδης

Θέμα 1:

Είναι δυνατό να βρεθούν 100 ευθείες στο επίπεδο που να έχουν ακριβώς 1998 σημεία τομής; Εξηγείστε την απάντησή σας.

Θέμα 2:

Δίνεται η ακολουθία α_n με ακέραιους όρους και με αναδρομικό τύπο:

$$\alpha_{n+2} = \frac{p}{q}\alpha_{n+1} - \alpha_n \quad \forall n \geq 1 \ \ \mu\varepsilon \ \alpha_1 = \alpha \ , \ \alpha_2 = \beta \ , \quad \alpha, \beta \in Z \ \kappa\alpha\iota \ (p,q) = 1$$

Να δείξετε ότι κάθε όρος της ακολουθίας α_n με $n \geq m+1$ διαιρείται από το q^m .

Θέμα 3:

Η λέξη ΜΑΘΗΤΙΚΟ μπορεί να σχηματιστεί επιλέγοντας πορείες μέσα στον πίνακα γραμμάτων παρακάτω. Βήματα προς τα διπλανά γράμματα, οριζόντια, κάθετα ή διαγώνια επιτρέπονται. Παράδειγμα των επιτρεπόμενων βημάτων παρουσιάζεται στο διάγραμμα. Υπολογίστε τον αριθμό όλων των διαφορετικών πορειών οι οποίες σχηματίζουν την λέξη ΜΑΘΗΤΙΚΟ.

Μ	Μ	Μ	Μ	Ο	Ο	Ο	Ο
Μ	Α	Α	Θ	Ι	Κ	Κ	Ο
Μ	Α	Θ	Θ	Ι	Ι	Κ	Ο
Μ	Α	Θ	Η	Τ	Ι	Κ	Ο
Μ	Α	Θ	Η	Τ	Ι	Κ	Ο
Μ	Α	Θ	Θ	Ι	Ι	Κ	Ο
Μ	Α	Α	Θ	Ι	Κ	Κ	Ο
Μ	Μ	Μ	Μ	Ο	Ο	Ο	Ο

Θέμα 4:

Έστω M και N τα μέσα των πλευρών BC και AC του τριγώνου ABC, και BH το ύψος του τριγώνου. Η ευθεία από το M η οποία είναι κάθετη με τη διχοτόμο της $\sphericalangle HMN$, τέμνει την ευθεία AC στο σημείο P ώστε

$$HP = \frac{1}{2}(AB + BC) \text{ και } \sphericalangle HMN = 45^\circ .$$

Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές.

Θέμα 5:

Για κάθε ημερομηνία της χρονιάς 1998 υπολογίζουμε την έκφραση:

$$\eta\mu\varepsilon\rho\alpha^{\mu\eta\nu\alpha\varsigma} - \varepsilon\tau o\varsigma$$

και μετά βρίσκω το μεγαλύτερο εκθέτη του 3 που το διαιρεί.
(για παράδειγμα, 21 Απριλίου έχουμε $21^4 - 1998 = 192483 = 3^3 \cdot 7129$, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3^3 αλλά όχι του 3^4)
Να βρεθούν όλες οι ημερομηνίες για τις οποίες η σχετικός εκθέτης είναι ο μεγαλύτερος.

8η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΝΕΩΝ

JBMO 2004

Σερβία - Μαυροβούνιο, Νόβισαντ, Ιούνιος 2004

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι η ανισότητα $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ισχύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x και y που δεν είναι και οι δύο 0.

Πρόβλημα 2

Έστω ABC ένα ισοσκελές τρίγωνο με AC = BC. M είναι το μέσον της AC και ℓ είναι η ευθεία που περνάει από το C και είναι κάθετη προς την πλευρά AB. Ο κύκλος που περνάει από τα σημεία B, C και M τέμνει την ευθεία ℓ στα σημεία C και Q. Να βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC συναρτήσει του m = CQ.

Πρόβλημα 3

Αν οι θετικοί ακέραιοι x και y είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί 3x + 4y και 4x + 3y είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί x και y είναι και οι δύο πολλαπλάσια του 7.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ένα κυρτό πολύγωνο με n κορυφές, $n \ge 4$. Χωρίζουμε τυχαία το πολύγωνο σε τρίγωνα, που όλες οι κορυφές τους είναι ταυτόχρονα και κορυφές του πολυγώνου, έτσι ώστε ανά δύο να μην έχουν κοινά εσωτερικά σημεία. Χρωματίζουμε με μαύρο χρώμα εκείνα τα τρίγωνα των οποίων δύο πλευρές τους είναι ταυτόχρονα και πλευρές του πολυγώνου, με κόκκινο εκείνα τα τρίγωνα των οποίων μία μόνο πλευρά τους είναι ταυτόχρονα και πλευρά του πολυγώνου και με άσπρο εκείνα τα τρίγωνα των οποίων καμία πλευρά τους δεν είναι και πλευρά του πολυγώνου. Να αποδείξετε ότι τα μαύρα τρίγωνα είναι πάντα περισσότερα κατά δύο από τα άσπρα τρίγωνα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Η προς απόδειξη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad (1)$$

Όμως ισχύουν οι προφανείς ανισότητες:

$$x+y \le \sqrt{2(x^2+y^2)} \quad (2) \qquad\qquad x^2-xy+y^2 > \frac{x^2+y^2}{2} > 0 \quad (3)$$

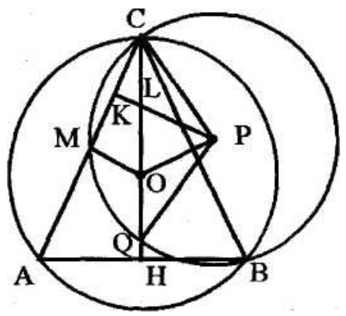
αφού οι x και y δεν είναι και οι δύο 0, από τις οποίες λαμβάνουμε

$$0 < \frac{1}{x^2-xy+y^2} \le \frac{2}{x^2+y^2} \qquad (4)$$

Από τις (2) και (4) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε την αμέσως (1).

Πρόβλημα 2

Έστω P και O τα περίκεντρα των τριγώνων BCM και ABC, αντίστοιχα. Έστω K το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος MC. Επειδή είναι AB=AC, το O βρίσκεται πάνω στο ύψος CH του τριγώνου ABC. Επιπλέον PC=PM ως ακτίνες του ιδίου κύκλου, οπότε θα είναι $PK \perp MC$, αφού η PK είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου PMC. Όμως είναι και $OM \perp AC$, οπότε θα είναι PK // OM και K μέσον του OC και CL=LO.



Έχουμε ακόμη ότι $OP \perp BC$, οπότε $\angle LOP = 90° - \angle BCH = 90° - \frac{\widehat{C}}{2}$. Όμως είναι και

$\angle OLP = \angle CLK = 90° - \frac{\widehat{C}}{2}$, οπότε θα έχουμε $\angle LOP = \angle OLP \Rightarrow PO = PL$.

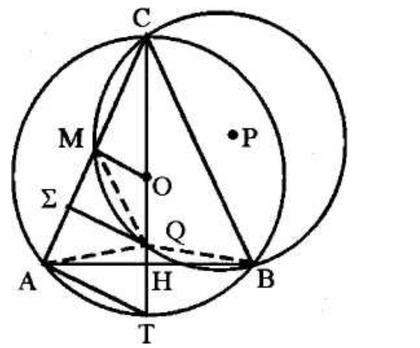
Επίσης θα έχουμε και $180° - \angle LOP = 180° - \angle OLP \Rightarrow \angle CLP = \angle POQ$. Επιπλέον από $PC = PQ \Rightarrow \angle PCL = \angle PQO$. Επομένως τα τρίγωνα CLP και POQ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και CL=OQ.

Άρα έχουμε: $R = CO = 2CL = \frac{2}{3}CQ = \frac{2m}{3}$

Δεύτερος τρόπος

Έστω ότι η προέκταση του ύψους AH τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC στο T. Τότε θα είναι $AT \perp CA$, αφού η CT είναι διάμετρος. Επιπλέον $OM \perp CA$, οπότε το τετράπλευρο OMAT είναι τραπέζιο.

Επειδή η CT είναι μεσοκάθετη της AB θα έχουμε QA = QB. Όμως QB = QM,. αφού η AH είναι και διχοτόμος της γωνίας ACB. Άρα το Q είναι το περίκεντρο του τριγώνου ABM, οπότε η κάθετη από το Q προς την πλευρά AM θα περνάει από το μέσον αυτής, έστω το Σ. Τότε στο τραπέζιο OMAT η QΣ είναι διάμεσος, οπότε QO=QT.



Άρα έχουμε $m = CQ = CO + OQ = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$, δηλαδή είναι $R = \frac{2m}{3}$

Πρόβλημα 3.

Έστω $3x + 4y = m^2$ και $4x + 3y = n^2$ (1)
Τότε $7(x + y) = m^2 + n^2 \Rightarrow 7 \mid m^2 + n^2$ (2)
Θεωρώντας $m = 7k + r$, $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ βρίσκουμε ότι
$m^2 \equiv u(\text{mod } 7)$, $u \in \{0,1,2,4\}$,
$n^2 \equiv u(\text{mod } 7)$, $\upsilon \in \{0,1,2,4\}$. Επομένως έχουμε
$m^2 + n^2 = 0(\text{mod } 7)$, όταν $u = \upsilon = 0$ ή $m^2 + n^2 \equiv w(\text{mod } 7^2)$, $w \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
Όμως από την (2) έχουμε ότι $m^2 + n^2 \equiv 0(\text{mod } 7)$, οπότε θα πρέπει
$u = \upsilon = 0$ και τότε $m^2 + n^2 \equiv 0(\text{mod } 7^2) \Rightarrow 7(x + y) \equiv 0(\text{mod } 7^2)$
$\Rightarrow x + y \equiv 0(\text{mod} 7)$ (3)
Από την (1) έχουμε ακόμη ότι $x - y = n^2 - m^2$ και $n^2 - m^2 \equiv 0(\text{mod } 7^2)$,
αφού $u = \upsilon = 0$, οπότε θα είναι και
$x - y \equiv 0(\text{mod } 7)$ (4)
Από τις (3) και (4) έπεται ότι
$x + y = 7k$, $x - y = 7\ell$, $k \in \mathbb{Z}_+^*$, $\ell \in \mathbb{Z}$, οπότε θα έχουμε
$2x = 7(k + \ell)$, $2y = 7(k - \ell)$.
Επομένως θα έχουμε ότι $7 \mid 2x$ και $7 \mid 2y$, και αφού $(7,2) = 1$,
θα έχουμε ότι $7 \mid x$ και $7 \mid y$.

Πρόβλημα 4.

Συμβολίζουμε με b, r, w τον αριθμό των μαύρων, κόκκινων και άσπρων τριγώνων, αντίστοιχα. Από τον διαμερισμό του κυρτού πολυγώνου σε τρίγωνα που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων αυτών ισούται με το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου, οπότε θα έχουμε

$$b\pi + r\pi + w\pi = (n - 2)\pi \Leftrightarrow b + r + w = n - 2 \quad (1)$$

Επίσης, κάθε πλευρά του πολυγώνου είναι πλευρά και ενός από τα οριζόμενα τρίγωνα. Όμως τα μαύρα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους που είναι και πλευρές του πολυγώνου, ενώ τα κόκκινα τρίγωνα έχουν μόνο μία πλευρά τους που είναι και πλευρά του πολυγώνου. Άρα έχουμε

$$2b + r = n \quad (2)$$

με αφαίρεση της (1) από τη (2) προκύπτει ότι $b - w = 2$.

21η ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

BMO 2004

Μάιος 2004, Πλέβεν – Βουλγαρία

Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Ανδρέας Σαββίδης

Πρόβλημα 1. Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_0, a_1, a_2, \dots$ ικανοποιεί την σχέση

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους m και n, $m \geq n$. Αν $a_1 = 3$ να υπολογίσετε τον a_{2004}.

Πρόβλημα 2. Να βρείτε τους πρώτους αριθμούς x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^y - y^x = xy^2 - 19$.

Πρόβλημα 3. Έστω O ένα εσωτερικό σημείο του οξυγωνίου τριγώνου ABC. Οι κύκλοι με κέντρα τα μέσα των πλευρών του, που διέρχονται από το O, τέμνονται ανά δύο στα σημεία K, L και M, διαφορετικά από το O. Να αποδείξετε ότι το O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου KLM αν και μόνον αν το O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Πρόβλημα 4. Το επίπεδο χωρίζεται σε περιοχές από ένα πεπερασμένο αριθμό ευθειών που ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Δύο περιοχές ονομάζονται ″γειτονικές″ αν η τομή των συνόρων τους είναι είτε ευθύγραμμο τμήμα, είτε ημιευθεία, είτε ευθεία(ένα σημείο δε θεωρείται ευθύγραμμο τμήμα). Ένας ακέραιος αριθμός τοποθετείται σε κάθε περιοχή με τον παρακάτω τρόπο:

(i) το γινόμενο των ακεραίων που τοποθετούνται σε οποιεσδήποτε δύο γειτονικές περιοχές είναι μικρότερο από το άθροισμά τους.

(ii) για κάθε μια από τις δοσμένες ευθείες και καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που αυτή ορίζει, το άθροισμα των ακεραίων που τοποθετούνται σε όλες τις περιοχές που βρίσκονται σε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα ξεχωριστά, είναι ίσο με το μηδέν.

Να αποδείξετε ότι αυτή η τοποθέτηση των ακεραίων είναι δυνατή αν και μόνο αν οι ευθείες δεν είναι όλες παράλληλες.

Διαθέσιμος χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά. Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ικανοποιεί την σχέση

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους m και n, $m \geq n$. Αν $a_1 = 3$ να υπολογίσετε τον a_{2004}.

Α' Λύση. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$m = 0, n = 0 \Rightarrow a_0 = 1$

$n = 0 \Rightarrow a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$

$m = 1 \Rightarrow a_2 = 7$

$m = 2 \Rightarrow a_4 = 21$

$m = 2, n = 1 \Rightarrow a_1 3 = 13$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n = n^2 + n + 1$, το οποίο μπορεί να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή.

- Έστω ότι $n = 1 \Rightarrow a_1 = 3$. Ισχύει.
- Δεχόμαστε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$ δηλ. $a_k = k^2 + k + 1$
- Θα αποδείξουμε ότι ισχύει ότι για $n = k + 1$ δηλ.

$$a_{k+1} = (k+1)^2 + k + 1 + 1 = (k+1)^2 + k + 2$$

- Ισχύει $a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \dfrac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$

για $m = k, n = 0 \;\Rightarrow\; a_k + a_k - k - 1 = \frac{1}{2}\left(a_{2k} + a_0\right) \Rightarrow 4a_k - 2k - 2 = a_{2k} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(k^2 + k + 1) - 2k - 2 = a_{2k} + 1 \Rightarrow a_{2k} = 4k^2 + 2k + 1$

για $k \longrightarrow \frac{k+1}{2} \Rightarrow a_{k+1} = 4\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{k+1}{2}\right) + 1 \Rightarrow a_{k+1} = \left(k+1\right)^2 + (k+1) + 1$

δηλ. η πρόταση ισχυεί για $n = k + 1$, άρα ισχύει $\forall n \in \mathbf{N}$.

Άρα έχουμε: $a_{2004} = 2004^2 + 2005$

Β΄ Λύση. Εάν θέσουμε $m = n$, $a_n \;\; a_{2m} + a_0 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2m})a_0 = 0$

Για $n = 0 \;\; a_m + a_m = \frac{1}{2}\left(a_{2m} + a_0\right) \Rightarrow a_{2m} = 4a_m$ (1)

Εάν $m = n + 2 \;\Rightarrow a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}\left(a_{2n+4} + a_{2n}\right)$ (2)

Από την (1) $\Rightarrow a_{2n+2} = 4a_{n+1}$ και $a_2 = 4a_1 = 4$

$\Rightarrow a_{2n+2} + a_2 = 4a_{n+1} + 4a_1 = 4\left(a_{n+1} + 1\right)$ (3)

Από την (2) και (1) $\Rightarrow a_{2n+2}+a_2=\frac{1}{2}\left(4an+2+4a_n\right)=2a_{n+2}+2a_n$ (4)

Από την (3) και (4) $\Rightarrow\ a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2,\ a_0=0, a_1=1.$

Έχουμε $a_2=4$, $a_3=9$, $a_4=16,...$ υποθέτουμε ότι $a_n=n^2$ και το αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή.

Για $n=0$ και $n=1$ η πρόταση ισχύει.

Έστω ότι ισχύουν οι προτάσεις $a_n=n^2$ και $a_{n+1}=n+1^2$ για $n\geq 0$.

$$a_{n+2}=2(n+1)^2-n^2+2=n^2+4n+4=(n+2)^2.$$

Άρα, $a_{2003}=2003^2=4012009$

Πρόβλημα 2. Να βρείτε τους πρώτους αριθμούς x, y που ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^y-y^x=xy^2-19. \qquad (1)$$

Λύση. Εάν $x=y\ \Rightarrow\ 0=x^3-19\ \Rightarrow\ x^3=19$ αδύνατη ($x\in\mathbb{N}$)

Παίρνουμε και στα δύο μέλη της (1) $mod(y)$ και $mod(x)$ έχουμε

$$x+19\equiv 0(mody) \qquad (2)$$

και $$19-y\equiv 0(modx) \qquad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε $xy/\,(x-y+19)$ (4)

Τώρα έχουμε

$x+y+19\geq|x-y+19|\geq xy \quad\Rightarrow\quad (x-1)(y-1)<20 \quad\Rightarrow\quad |x-y|<19$

$\Rightarrow\quad x-y+19\geq xy \quad\Rightarrow\quad (x+1)(y-1)\leq 18 \quad (5)$

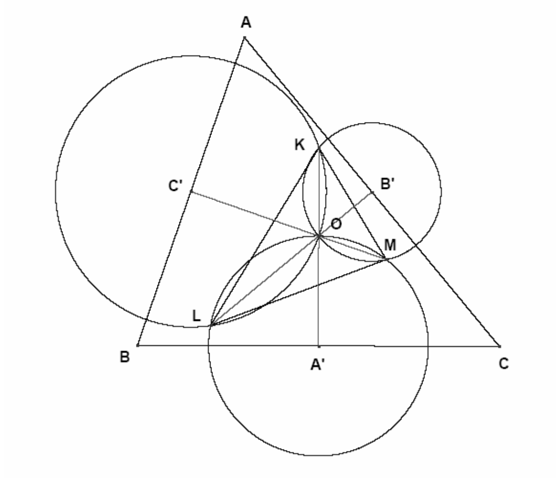
Από την (5) εάν $x\geq 5$ τότε έχουμε $y=2$ ή $y=3$, $x^2-2^x<0$, $x^3-3^x<0$, $xy^2-19>0$.

Άρα οι μοναδικές λύσεις είναι (2,3) και (2,7).

Πρόβλημα 3. Έστω O ένα εσωτερικό σημείο του οξυγωνίου τριγώνου ABC. Οι κύκλοι με κέντρα τα μέσα των πλευρών του, που διέρχονται από το O, τέμνονται ανά δύο στα σημεία K, L και M , διαφορετικά από το O. Να αποδείξετε ότι το O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου KLM αν και μόνον αν το O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Λύση. Έστω A',B',C' είναι τα μέσα των πλευρών BC,CA,AB του τριγώνου ABC αντίστοιχα.

$''\longrightarrow''$ Έστω O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ABC\ \Rightarrow$ το τρίγωνο ABC είναι οξυγώνιο.



Από τις ισότητες:

$$\angle A'C'O = \frac{1}{2}\angle LC'O = \frac{1}{2}\widehat{LO} = \angle LKO, \quad \angle A'B'O = \frac{1}{2}\angle MB'O = \frac{1}{2}\widehat{MO} = \angle MKO$$

$\Rightarrow \angle A'C'O = \angle A'B'O = 90^o - \angle BAC$ άρα έχουμε ότι $\angle LKO = \angle MKO \Rightarrow KO$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle LKM$.

Ανάλογα έχουμε MO είναι διχοτόμος της $\angle LMK$ άρα το σημείο O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου KLM.

$''\longleftarrow''$ Έστω O είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο KLM άρα $\angle LKO = \angle MKO$.

Όπως και πιο πάνω ισχύει $\angle LKO = \angle A'C'O$ και $\angle MKO = \angle A'B'O \Rightarrow$
$\angle A'C'O = \angle A'B'O$.

Ανάλογα έχουμε: $\angle C'A'O = \angle C'B'O$ και $\angle B'A'O = \angle B'C'O$

$\Rightarrow \ \angle C'A'O + \angle A'C'O + \angle B'C'O = \frac{1}{2}180^o = 90^o$

$\Rightarrow A'O \perp BC (B'C' // BC) \Rightarrow A'O \perp BC$.

Ανάλογα $B'O \perp AC \ \Rightarrow \ O$ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Ανάλογα $B'O \perp AC \ \Rightarrow \ O$ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC.

Πρόβλημα 4. Το επίπεδο χωρίζεται σε περιοχές από ένα πεπερασμένο αριθμό ευθειών που ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Δύο περιοχές ονομάζονται ″γειτονικές ″ αν η τομή των συνόρων τους είναι είτε ευθύγραμμο τμήμα, είτε ημιευθεία, είτε ευθεία(ένα σημείο δε θεωρείται ευθύγραμμο τμήμα). Ένας ακέραιος αριθμός τοποθετείται σε κάθε περιοχή με τον παρακάτω τρόπο:

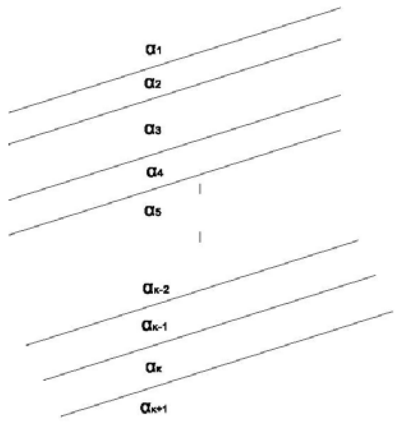
(i) το γινόμενο των ακεραίων που τοποθετούνται σε οποιεσδήποτε δύο γειτονικές περιοχές είναι μικρότερο από το άθροισμά τους.

(ii) για κάθε μια από τις δοσμένες ευθείες και καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που αυτή ορίζει, το άθροισμα των ακεραίων που τοποθετούνται σε όλες τις περιοχές που βρίσκονται σε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα ξεχωριστά, είναι ίσο με το μηδέν.

Να αποδείξετε ότι αυτή η τοποθέτηση των ακεραίων είναι δυνατή αν και μόνο αν οι ευθείες δεν είναι όλες παράλληλες.

Λύση. Εάν όλες οι ευθείες είναι παράλληλες ελέγχουμε ότι όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι με μηδέν και τότε η συνθήκη (i) δεν ισχύει.

Έστω ότι το επίπεδο χωρίζεται σε περιοχές από κ παράλληλες ευθείες.



Από την συνθήκη (ii) ισχύουν:

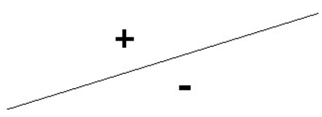
$$a_1 = a_2 + a_3 + ... + a_k + a_{k+1} = 0$$
$$a_1 + a_2 = a_3 + ... + a_k + a_{k+1} = 0$$
$$a_1 + a_2 + a_3 = ... + a_k + a_{k+1} = 0$$
$$\vdots$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = a_k + a_{k+1} = 0$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k = a_{k+1} = 0$$

$\Rightarrow\ a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_k = a_{k+1} = 0\ \Rightarrow$ δεν ισχύει η συνθήκη (i), άρα οι ευθείες δεν μπορεί να είναι παράλληλες.

Εάν υπάρχουν δύο μη παράλληλες ευθείες τότε θα δείξουμε πως θα προσδιορίσουμε τους ζητούμενους αριθμούς.

Αρχικά μπορούμε να τοποθετήσουμε πρόσημα + και -, σε κάθε περιοχή, έτσι ώστε τα πρόσημα στις γειτονικές περιοχές να είναι διαφορετικά, και αυτό αποδεικνύεται ότι ισχύει με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- για $n = 1$ ευθεία έχουμε:



- Υποθέτουμε ότι ισχύει στην περίπτωση κατά την οποία το επίπεδο χωρίζεται σε περιοχές από $n = k$ ευθείες.

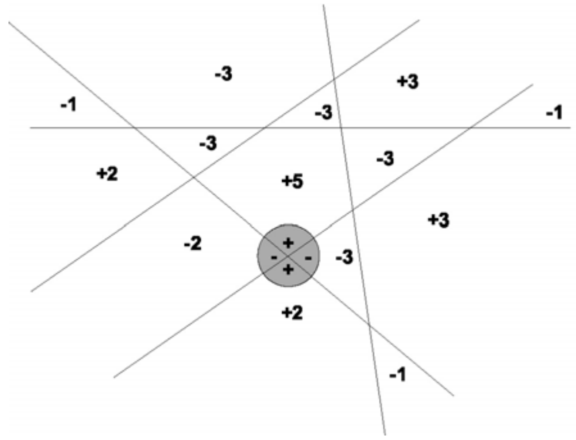
- Για $n = k + 1$ ευθείες θα αλλάξουμε τα πρόσημα σε όλες τις περιοχές που βρίσκονται στην μια πλευρά της ευθείας που έχουμε προσθέσει ($k + 1$ ευθείες) και να κρατήσουμε τα ίδια πρόσημα στην άλλη πλευρά της ευθείας.

Σε κάθε περιοχή τοποθετούμε αριθμούς $s \cdot a$, όπου s είναι ήδη το ορισμένο πρόσημο σε αυτή την περιοχή και a είναι ο αριθμός των ″κορυφών″ στην περιοχή.

Ελέγχουμε ότι οι ζητούμενες συνθήκες ικανοποιούνται.

- Σε κάθε ζεύγος γειτονικών περιοχών έχουμε δύο ακέραιους αριθμούς, π.χ. a και b, έτσι ώστε ο ένας από αυτούς είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός. Έστω $a < 0 < b$. Είναι προφανές ότι $ab \leq< a + b$, δηλαδή ισχύει η πρώτη συνθήκη.

- Σε κάθε σημείο τομής μετρούμε δύο ή τέσσερις φορές (σε 2 ή 4 γωνίες στις γειτονικές περιοχές) με διαφορετικά πρόσημα (+ και – στην περίπτωση των δύο περιοχών και +,+,-,- στην περίπτωση τεσσάρων περιοχών) π.χ.



45η ΔΙΕΘΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

IMO 2004

ΑΘΗΝΑ – ΕΛΛΑΔΑ

Επιμέλεια: Ανδρέας Φιλίππου – Θεόκλητος Παραγιού

Πρώτη Μέρα

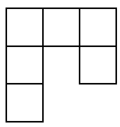
Πρόβλημα 1. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με $AB \neq AC$. Ο κύκλος με διάμετρο την πλευρά BC τέμνει τις πλευρές AB και AC στα σημεία M και N, αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με O το μέσον της πλευράς BC. Οι διχοτόμοι των γωνιών BAC και MON τέμνονται στο σημείο R. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BMR και CNR έχουν ένα κοινό σημείο πάνω στην πλευρά BC.

Πρόβλημα 2. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές τα οποία ικανοποιούν την ισότητα

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2\,P(a+b+c)$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a, b, c που είναι τέτοιοι ώστε $ab+bc+ca=0$.

Πρόβλημα 3. Ορίζουμε ως *άγκιστρο* ένα σχήμα που αποτελείται από έξι μοναδιαία τετράγωνα όπως φαίνεται στο σχήμα



ή οποιοδήποτε από τα σχήματα που προκύπτουν από αυτό με περιστροφή ή συμμετρία ως προς άξονα.

Να προσδιορίσετε όλα τα $m \times n$ ορθογώνια που μπορούν να καλυφθούν με άγκιστρα έτσι ώστε

- το ορθογώνιο να καλύπτεται χωρίς κενά και χωρίς αλληλοεπικαλύψεις μεταξύ των αγκίστρων,
- κανένα μέρος κάποιου άγκιστρου να μην καλύπτει μέρος εκτός του ορθογωνίου.

Διάρκεια εξέτασης: 4 ώρες και 30 λεπτά.

Δεύτερη Μέρα

Πρόβλημα 4. Έστω $n \geq 3$ ένας ακέραιος. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί t_i, t_j, t_k είναι μήκη πλευρών τριγώνου για όλους τους i, j, k με $1 \leq i < j < k \leq n$.

Πρόβλημα 5. Σε ένα κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ η διαγώνιος BD δεν διχοτομεί ούτε τη γωνία ABC ούτε τη γωνία CDA. Ένα σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό του τετραπλεύρου $ABCD$ και ικανοποιεί τις ισότητες

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ και } \angle PDC = \angle BDA.$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν και μόνον αν $AP = CP$.

Πρόβλημα 6. Ένας θετικός ακέραιος ονομάζεται *εναλλάσσων,* αν στη δεκαδική του αναπαράσταση, για κάθε δύο διαδοχικά ψηφία του το ένα είναι άρτιο και το άλλο είναι περιττό. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n που έχουν ένα πολλαπλάσιο το οποίο είναι εναλλάσσων αριθμός.

Διάρκεια εξέτασης : 4 ώρες και 30 λεπτά.

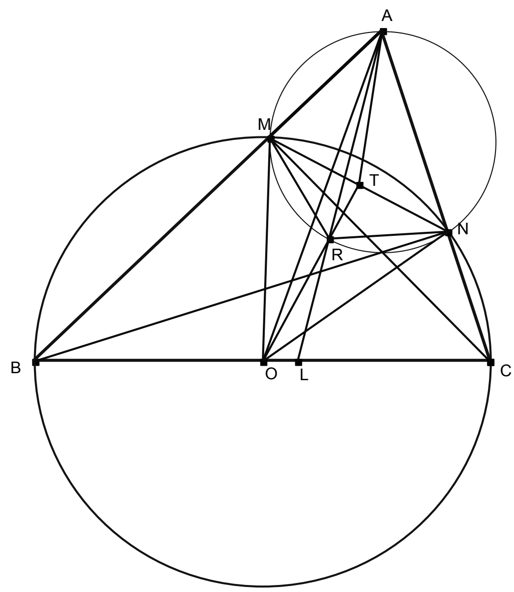
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο με $AB \neq AC$.Ο κύκλος με διάμετρο την πλευρά BC τέμνει τις πλευρές AB και AC στα σημεία M και N αντίστοιχα .Συμβολίζουμε με O το μέσον της πλευράς BC. Οι διχοτόμοι των γωνιών BAC και MON τέμνονται στο σημείο R.Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BMR και CNR έχουν ένα κοινό σημείο πάνω στην πλευρά BC.

***Λύση 1*:.** Αφού OM=ON η διχοτόμος της $\angle MON$ ταυτίζεται με την μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος MN. Άρα στο τρίγωνο AMN η διχοτόμος της γωνίας MAN και η μεσοκάθετη της πλευράς MN τέμνονται στο σημείο R.Τότε είναι καλά γνωστό ότι το R βρίσκεται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.(Στο σημείο αυτό χρειάζεται να σημειώσουμε ότι $AM \neq AN$ αφού από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο BCNM έχουμε:

$$\angle AMN = \angle C \text{ και } \angle ANM = \angle B$$

και από την υπόθεση έχουμε ότι: $\angle B \neq \angle C$).(ΣΧΗΜΑ 1)



ΣΧΗΜΑ 1

Έστω ότι η διχοτόμος της $\angle BAC$ τέμνει την BC στο σημείο L.Θα αποδείξουμε ότι τα τετράπλευρα BLRM και CLRN είναι εγγράψιμα. Πράγματι έχουμε:

$$\angle ARM = \angle ANM \text{ και } \angle ANM = \angle ABC$$

Άρα το τετράπλευρο BLRM είναι εγγράψιμο. Επίσης έχουμε:

$$\angle ARN = \angle AMN \text{ και } \angle ARN = \angle ACB$$

Άρα το τετράπλευρο CLRN είναι εγγράψιμο. Επομένως οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BMR και CNR τέμνονται στο σημείο L πάνω στην BC.

Λύση 2: Έστω T το μέσο του MN. Αφού τα τρίγωνα $\triangle ABC$ και $\triangle ANM$ είναι όμοια, με αντίστοιχες διαμέσους AO και AT ,έχουμε: $\angle BAO = \angle CAT$.

Επομένως η διχοτόμος AR της $\angle BAC$ διχοτομεί και την γωνία $\angle OAT$.Άρα $\frac{RT}{RO} = \frac{AT}{AO}$.

Επιπλέον , χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι AT και AO είναι αντίστοιχα διάμεσοι ό-μοιων τριγώνων έχουμε:

$$\frac{AT}{AO} = \frac{MN}{BC} = \frac{MT}{BO} = \frac{MT}{MO}.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι η MR διχοτομεί την $\angle OMN$.

Επειδή το O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τετράπλευρο BCNM, έχουμε ότι: $\angle BMO = \angle B$.Επίσης από το τετράπλευρο BCNM έχουμε $\angle AMN = \angle C$.

Άρα
$$\begin{aligned}
&\angle BMN = 180^o - \angle C \Rightarrow \\
&\angle B + \angle OMN = 180^o - \angle C \Rightarrow \\
&\angle OMN = 180^o - \angle AMN - \angle ANM \Rightarrow \\
&\angle OMN = \angle A
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$\angle BMR = \angle B + \angle \frac{A}{2} = \angle CLR .$$

Δηλαδή τα B,L,R,M είναι ομοκυκλικά. Ομοίως C,L,R,N είναι ομοκυκλικά. Επομένως οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BMR και CNR τέμνονται στο σημείο L πάνω στην BC.

Πρόβλημα 2. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές τα οποία ικανοποιούν την ισότητα

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς a,b,c που είναι τέτοιοι ώστε $ab+bc+ca=0$.

<u>Λύση:</u> Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ που ικανοποιεί την δεδομένη εξίσωση. Αν $a=b=0$

τότε $ab+bc+ca=0$ για κάθε $c \in R$,άρα έχουμε:

$P(0-0)+P(0-c)+P(c-0)=2P(0+0+c) \Rightarrow P(0)+P(-c)=P(c)$ για κάθε πραγματικό c

Αν θέσουμε $c=0$ παίρνουμε $P(0)=0$ και επομένως $P(-c)=P(c)$ για κάθε $c \in R$.

Επομένως το P είναι άρτιο και πρέπει να είναι της μορφής:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{2n-2} + ... + a_1 x^2 \text{ , με } a_1, ..., a_n \in R .$$

Αν πάρουμε την τριάδα

$$a = uv \quad , \quad b = (1-u)v \ , \quad c = \left(u^2 - u\right)v \quad \text{όπου} \quad u, v \in R$$

παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η εξίσωση $ab+bc+ca=0$.

Πράγματι έχουμε:

$$ab+bc+ca=(a+b)c+ab=v\left(u^2-u\right)v+uv(1-u)v=u^2v^2-uv^2+uv^2-u^2v^2=0$$

Από την εξίσωση $P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$ έχουμε:.

$$P\left[(2u-1)v\right]+P\left[\left(1-u^2\right)v\right]+P\left[\left(u^2-2u\right)v\right]=2P\left[\left(u^2-u+1\right)v\right] \text{ για όλα } u,v\in R.$$

Σταθεροποιώντας το u έχουμε μια πολυωνυμική ταυτότητα ως προς v.Εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων έχουμε:

$$(2u-1)^{2n}+\left(1-u^2\right)^{2n}+\left(u^2-2u\right)^{2n}=2\left(u^2-u+1\right)^{2n}\ \forall u\in R$$

Θέτοντας $u=-2$ στην τελευταία εξίσωση έχουμε:

$5^{2n}+3^{2n}+8^{2n}=2\cdot 7^{2n}$, άρα $8^{2n}<2\cdot 7^{2n}$. Όμως παρατηρούμε ότι ήδη για $n=3$

έχουμε: $8^{2.3}>256000>235298=2\cdot 7^{2.3}$, άρα ισχύει για $n\le 2$ το οποίο σημαίνει ότι

$$P(x)=ax^2+\beta x^4 \text{ για κάποια } a,\beta\in R.$$

Κάθε τέτοιο πολυώνυμο ικανοποιεί την δεδομένη εξίσωση. Για να το επιβεβαιώσουμε αυτό παρατηρούμε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός των λύσεων είναι λύση. Άρα αρκεί να ελέγξουμε το x^2 και το x^4.

Για x^2 έχουμε την απόδειξη από την ταυτότητα
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(a+b+c)^2=-6(ab+bc+ca)$.

Για το x^4 έχουμε έστω $x=a-b, y=b-c, z=c-a$ τότε από την προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε $x^2+y^2+z^2=2(a+b+c)^2$.Επομένως αφού $x+y+z=0$ θα έχουμε:

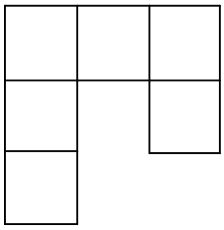
$xy+yz+zx=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)=-(a+b+c)^2$, και υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη έχουμε: $(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)=(a+b+c)^4$,

άρα χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα θα πάρουμε:

$$x^4+y^4+z^4=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left[(xy)^2+(yz)^2+(xz)^2\right]=2(a+b+c)^4.$$

Άρα όλα τα πολυώνυμα είναι $P(x)=ax^2+\beta x^4$ για κάποια $a,\beta\in R.$

Πρόβλημα 3. Ορίζουμε ως *άγκιστρο* ένα σχήμα που αποτελείται από έξι μοναδιαία τετράγωνα όπως φαίνεται στο σχήμα



ή οποιοδήποτε από τα σχήματα που προκύπτουν από αυτό με περιστροφή ή συμμετρία ως προς άξονα.

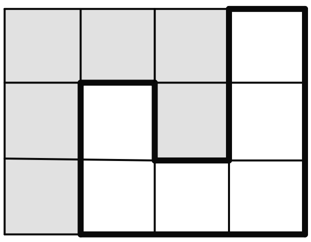
Να προσδιορίσετε όλα τα $m \times n$ ορθογώνια που μπορούν να καλυφθούν με άγκιστρα έτσι ώστε:

- Το ορθογώνιο να καλύπτεται χωρίς κενά και χωρίς αλληλοεπικαλύψεις μεταξύ των αγκίστρων,
- Κανένα μέρος κάποιου άγκιστρου να μην καλύπτει μέρος εκτός του ορθογωνίου.

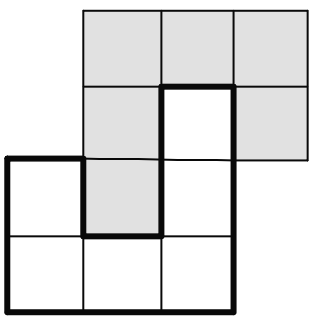
Λύση: Θεωρούμε ένα $m \times n$ ορθογώνιο καλυμμένο με άγκιστρα που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του προβλήματος. Για κάθε άγκιστρο Α υπάρχει μοναδικό άγκιστρο Β που καλύπτει το εσωτερικό μοναδιαίο τετράγωνο του Α με ένα από τα ακρογωνιαία τετράγωνα του. Κατ'αυτό τον τρόπο τα εσωτερικά τετράγωνα των Α και Β αλληλοκαλύπτονται από τα ακρογωνιαία τετράγωνα των Α και Β.

Επομένως σε μία τέτοια κάλυψη του ορθογωνίου όλα τα άγκιστρα είναι ταιριασμένα κατά ζεύγη. Υπάρχουν μόνο δύο δυνατότητες να τοποθετηθεί το Β έτσι ώστε να μη υπερκαλύπτει το Α και να μη παρουσιάζονται κενά.

Στη μια περίπτωση (Σχήμα 1) σχηματίζεται ένα 3×4 ορθογώνιο ,ενώ στην άλλη περίπτωση (Σχήμα 2) σχηματίζεται ένα οκταγωνικό σχήμα με μήκη πλευρών 3,2,1,2,3,2,1,2.



Σχήμα 1



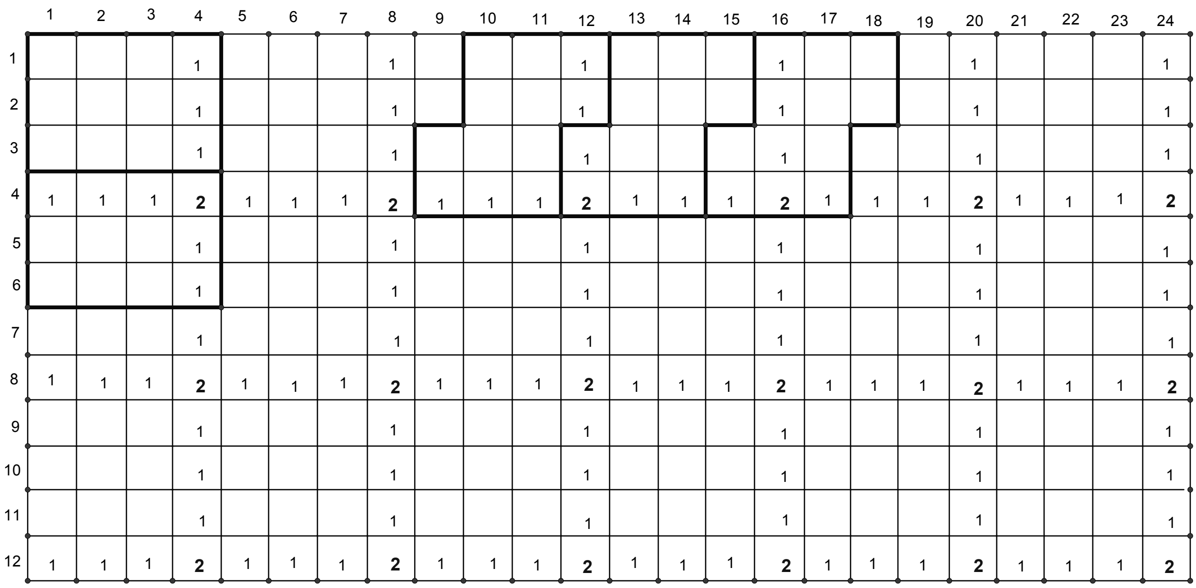
Σχήμα 2

Άρα ένα $m \times n$ ορθογώνιο μπορεί να καλυφθεί με άγκιστρα αν και μόνο αν μπορεί να καλυφθεί με τα 12 μοναδιαία τετράγωνα όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Αν υποθέσουμε ότι μια τέτοια κάλυψη υπάρχει , τότε το mn διαιρείται με το 12. Θα αποδείξουμε ότι ένα από τα m και n διαιρείται με το 4.

Έστω ότι κανένας από τα m και n δεν διαιρείται με το 4 τότε όμως πρέπει τα m και n να είναι άρτιοι αριθμοί γιατί το mn διαιρείται με το 4.

Θεωρούμε ότι το $m \times n$ ορθογώνιο είναι χωρισμένο σε μοναδιαία τετράγωνα με τις γραμμές και τις στήλες αριθμημένες με $i = 1, 2, 3, ..., m$ και $j = 1, 2, 3, ..., n$ αντίστοιχα. Τοποθετούμε τον αριθμό *1* σε κάθε μοναδιαίο τετράγωνο (i, j) για το οποίο ακριβώς ένα από τα i, j διαιρείται με το 4 ,και τον αριθμό *2* στα τετράγωνα (i, j) που το i και j διαιρούνται με το 4. Ενα παράδειγμα ενός 24×12 ορθογωνίου φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3

Αφού ο αριθμός των μοναδιαίων τετραγώνων σε κάθε σειρά και στήλη είναι άρτιος ,το άθροισμα όλων των αριθμών που θα αναγράφονται στα τετράγωνα είναι άρτιος. Τώρα είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ένα 3×4 ορθογώνιο πάντα καλύπτεται με αριθμημένα τετράγωνα οι αριθμοί των οποίων έχουν άθροισμα 3 ή 7.Το άλλο σχήμα των 12 μοναδιαίων τετραγώνων (Σχήμα 2) καλύπτεται με αριθμημένα τετράγωνα οι αριθμοί των οποίων έχουν άθροισμα 5 ή 7.Άρα ,ο συνολικός αριθμός των σχημάτων που αποτελούνται από 12 μοναδιαία τετράγωνα είναι άρτιος. Αλλά τότε το γινόμενο mn διαιρείται με το 24 άρα και με το 8 σε αντίθεση με την υπόθεση ότι m και n δεν διαιρούνται με το 4.

Επισημαίνουμε επίσης ότι ούτε το m ούτε το n μπορούν να πάρουν τις τιμές 1,2 ή 5 (γιατί κάθε προσπάθεια τοποθέτησης των σχημάτων που αποτελούνται από 12 μοναδιαία τετράγωνα (Σχήμα 1 ,Σχήμα 2) κατά μήκος πλευράς 1,2 ή 5 αποτυγχάνει). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να είναι μια τέτοια τοποθέτηση εφικτή πρέπει ένα από τα m και n να είναι διαιρετό με το 3 ,ένα να είναι διαιρετό με το 4 και $m, n \notin \{1, 2, 5\}$.

Αντίστροφα ,αν αυτές οι προϋποθέσεις ικανοποιούνται η πλακόστρωση είναι δυνατή (χρησιμοποιώντας 3x4 ορθογώνια σ'αυτήν).Αυτό προκύπτει αμέσως αν $3/m$ και $4/n$ (ή αντίστροφα).

Έστω ότι το m διαιρείται με το 12 και $n \notin \{1, 2, 5\}$ (ή αντίστροφα).Τότε το n μπορεί να παρασταθεί ως άθροισμα μερικών 3αριών και μερικών 4αριών.Αρα το ορθογώνιο μπορεί να χωριστεί σε *m*x3 και *m*x4 ορθογώνια τα οποία είναι εύκολο να καλυφθούν μόνο με 3x4 ορθογώνια πάλι.

ΣΧΟΛΙΟ: Δίνεται μια ακόμη απόδειξη ότι ένα από τα *m* και *n* είναι διαιρετό με το 4 (το ουσιαστικό μέρος της απόδειξης).

Αυτό εξαρτάται από τον τρόπο που ένα οποιοδήποτε "πλακάκι" 12 μοναδιαίων τετραγώνων (οποιουδήποτε τύπου) τοποθετείται πάνω σε ένα τετραγωνισμένο επίπεδο. Ακριβώς μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις συμβαίνει:

- Το "πλακάκι" έχει 4 στήλες ,καθεμιά έχει μήκος 3,και 3 ή 4 σειρές ,καθεμιά μήκους 2 ή 4.
- Το "πλακάκι" έχει 4 σειρές ,καθεμιά έχει μήκος 3,και 3 ή 4 στήλες καθεμιά μήκους 2 ή 4.

Υποθέτουμε ότι η "πλακόστρωση" είναι δυνατή .Τότε το γινόμενο *mn* είναι διαιρετό με το 12.Εαν ο αριθμός των "πλακακιών" είναι άρτιος ,τότε το *mn* είναι διαιρετό με το 24 και ένα από τα *m* και *n* είναι διαιρετό με το 4.

Έστω ότι υπάρχει περιττός αριθμός "πλακακιών".Τότε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις πραγματοποιείται άρτιο αριθμό φορών π.χ η πρώτη περίπτωση.

Χρωματίζουμε με μαύρο χρώμα κάθε $4^{η}$ στήλη. Κάθε "πλακάκι" καλύπτει 3 μαύρα μοναδιαία τετράγωνα και κάθε "πλακάκι" της δεύτερης περίπτωσης καλύπτει ζυγό αριθμό μαύρων τετραγώνων. Επομένως ο συνολικός αριθμός των μαύρων τετραγώνων είναι περιττός ,το οποίο σημαίνει ότι το μήκος κάθε στήλης είναι περιττό. Άρα το μήκος κάθε σειράς πρέπει να διαιρείται με το 4.

Πρόβλημα 4. Έστω $n \geq 3$ είναι ένας ακέραιος και $t_1, t_2, ..., t_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + ... + t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_n} \right)$

Να δείξετε ότι t_i, t_j, t_k είναι μήκη πλευρών ενός τριγώνου για όλα τα i, j, k με $1 \leq i < j < k \leq n$

Λύση: Λόγω συμμετρίας είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $t_1 < t_2 + t_3$.Πρώτα έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} = n + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) = n + t_1 \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) + \frac{1}{t_1}(t_2 + t_3) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq j \leq n \\ (i,j) \neq (1,2),(1,3)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right)$$

Από την AM-GM ανισότητα,

$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \geq \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}$, $t_2 + t_3 \geq 2\sqrt{t_2 t_3}$ και $\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \geq 2$ για κάθε i, j .

Επομένως , θέτοντας $a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} > 0$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση, παίρνουμε:

$$n^2+1>\sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} \geq n+2\frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}}+2\frac{\sqrt{t_2 t_3}}{t_1}+2\left[\binom{n}{2}-2\right]=2a+\frac{2}{a}+n^2-4.$$

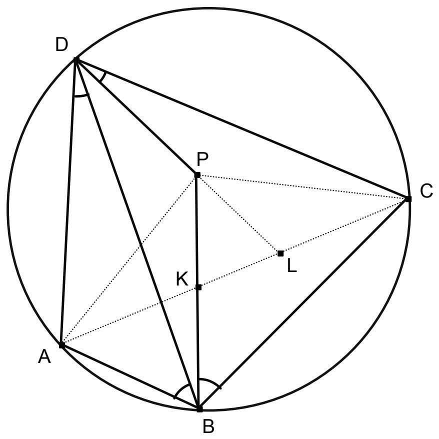
Άρα $2a+\frac{2}{a}-5<0$ το οποίο σημαίνει $\frac{1}{2}<a=\frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}}<2$. Άρα $t_1<2\sqrt{t_2 t_3}$ και αν εφαρμόσουμε ακόμη μια φορά την AM-GM ανισότητα έχουμε $t_1<2\sqrt{t_2 t_3}\leq t_2+t_3$

Δηλαδή αυτό το οποίο θέλουμε.

Πρόβλημα 5. Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ABCD η διαγώνιος BD δεν διχοτομεί ούτε τη γωνία ABC ούτε τη γωνία CDA.Ένα σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό του τετραπλεύρου ABCD και ικανοποιεί τις ισότητες $\angle PBC=\angle DBA$ και $\angle PDC=\angle BDA$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABCD είναι εγγράψιμο σε κύκλο ,αν και μόνον αν $AP=CP$.

<u>Λύση</u>: Αφού P είναι εσωτερικό σημείο του ABCD προκύπτει ότι $\angle DBA<\angle DBC$ αν και μόνο αν $\angle BDA<\angle BDC$.Άρα μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι P βρίσκεται μέσα στα τρίγωνα ACD και BCD.



Σχήμα 1

Υποθέτουμε πρώτα ότι το ABCD είναι εγγράψιμο. Έστω ότι BP και DP τέμνουν την AC στα K και L αντίστοιχα (Σχήμα 1).Τα τρίγωνα DAB , DLC και CKB είναι όμοια διότι:

$$\angle ACB=\angle ADB, \angle ABD=\angle ACD \text{ και } \angle PBC=\angle DBA \ , \ \angle PDC=\angle BDA.$$

Άρα $\angle PLK=\angle PKL \Rightarrow PK=PL.$

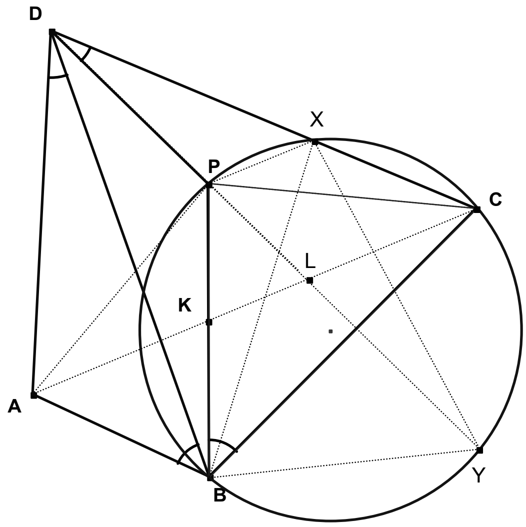
Τα τρίγωνα ADL και BDC είναι επίσης όμοια, επομένως έχουμε:

$$\frac{AL}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{KC}{BC}\Rightarrow AL=KC.$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε ότι επειδή $\angle ALP=\angle CKP \Rightarrow AP=CP$.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι AP=CP.

Έστω ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BCP τέμνει ξανά τις ευθείες CD και DP στα σημεία X και Y αντίστοιχα (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Επειδή τα τρίγωνα ADB και PDX είναι όμοια έχουμε: $\frac{AD}{DB}=\frac{PD}{DX}$. Από την τελευταία σχέση και από το ότι $\angle ADP = \angle BDX$ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ADP και BDX είναι επίσης όμοια. Επομένως έχουμε:

$$\frac{BX}{AP}=\frac{BD}{AD}=\frac{XD}{PD} \quad (1)$$

Ομοίως ,τα τρίγωνα DPC και DXY είναι όμοια. Αυτό μας δίνει:

$$\frac{YX}{CP}=\frac{XD}{PD} \quad (2)$$

Αφού AP=CP, προκύπτει από τις (1) και (2) ότι BX=YX. Άρα έχουμε:

$$\angle DCB = \angle XYB = \angle XBY = \angle XPY =$$
$$= \angle PDX + \angle PXD = \angle ADB + \angle ADB = 180^o - \angle BAD$$

Από την παραπάνω ισότητα συμπεραίνουμε ότι το ABCD είναι εγγράψιμο τετράπλευρο.

Πρόβλημα 6. Ένας θετικός ακέραιος ονομάζεται *εναλλάσων* ,αν στη δεκαδική του αναπαράσταση ,για κάθε δύο διαδοχικά ψηφία του το ένα είναι άρτιο και το άλλο είναι περιττό .Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους n που έχουν ένα πολλαπλάσιο το οποίο είναι *εναλλάσων* αριθμός.

Λύση: Ένας θετικός ακέραιος n έχει ένα *εναλλάσων* πολλαπλάσιο αν και μόνο αν ο n δεν είναι διαιρετός με το 20.

Αν ο n διαιρείται με το 20 τότε τα τελευταία του δυο δεκαδικά ψηφία είναι άρτια ,άρα δεν υπάρχει *εναλλάσων* πολλαπλάσιο. Οι υπόλοιποι όλοι αριθμοί n έχουν *εναλλάσων* πολλαπλάσιο.

Θεωρούμε χωριστά τις δυνάμεις του 2 και τους αριθμούς της μορφής $2\cdot 5^n$.

Με τον συμβολισμό $u^k \,//\, a$ σημαίνει ότι το u^k είναι η υψηλότερη δύναμη του u που διαιρεί τον α .

<u>*Λήμμα 1:*</u> Κάθε δύναμη του 2 έχει πολλαπλάσιο με άρτιο αριθμό ψηφίων.

<u>*Απόδειξη του Λήμματος 1.*</u>

Αρκεί να κατασκευάσουμε μια άπειρη ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεκαδικών ψηφίων τέτοια ώστε:

$$a_n \equiv n+1 \pmod 2, \quad 2^{2n-1} \,//\, \overline{a_{2n-1}...a_1} \quad , \quad 2^{2n+1} \,//\, \overline{a_{2n}a_{2n-1}...a_1}$$

για κάθε n. Αρχίζουμε με $a_1 = 2, a_2 = 7$.

Αν η ακολουθία είναι κατασκευασμένη μέχρι τον a_{2n}, θέτουμε $a_{2n+1} = 4$.Τότε ο a_{2n+1} είναι άρτιος και $2^{2n+1} \,//\, \overline{a_{2n+1}a_{2n}...a_1} = 4\cdot 10^{2n} + \overline{a_{2n}a_{2n-1}...a_1}$, επειδή $2^{2n+1} \,//\, \overline{a_{2n}a_{2n-1}...a_1}$ από την υπόθεση της επαγωγής και $2^{2n+2} \,//\, 4\cdot 10^{2n}$.

Θέτουμε $\overline{a_{2n+1}...a_1} = 2^{2n+1}A$,με A περιττό. Τώρα ,ο a_{2n+2} πρέπει να είναι περιττός και τέτοιος ώστε $2^{2n+3} \,//\, \overline{a_{2n+2}a_{2n+1}...a_1} = a_{2n+2}10^{2n+1} + \overline{a_{2n+1}a_{2n}...a_1} = 2^{2n+1}\left[a_{2n+2}5^{2n+1} + A\right]$.

Το τελευταίο μας δείχνει πάντοτε ότι $5a_{2n+2} + A \equiv 4 \pmod 8$.Οι λύσεις της τελευταίας ισοτιμίας είναι περιττοί ,αφού A είναι περιττός .Επιπρόσθετα , η λύση a_{2n+2} μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο $\{1,2,...,7\}$.Έτσι συμπληρώθηκε η κατασκευή.

<u>*Λήμμα 2:*</u> Κάθε αριθμός της μορφής $2\cdot 5^n, n=1,2,...,$ έχει ένα *εναλλάσων* πολλαπλάσιο με ένα άρτιο αριθμό ψηφίων.

<u>*Απόδειξη του Λήμματος 2 .*</u>

Κατασκευάζουμε μια άπειρη ακολουθία $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεκαδικών ψηφίων τέτοια ώστε

$$b_n \equiv n+1 \pmod 2 \;\text{ και }\; 2\cdot 5^n \;\text{ να διαιρεί }\; \overline{b_n...b_1} \;\text{ για κάθε } n.$$

Κανείς ,μπορεί να ξεκινήσει με $b_1 = 0, b_2 = 5.$ Υποθέτουμε ότι $b_1,...,b_n$ έχουν ήδη κατασκευαστεί και έστω $\overline{b_n...b_1} = 5^l B$,όπου $l \geq n$ και B δεν διαιρείται με το 5.

Το επόμενο ψηφίο b_{n+1} πρέπει να είναι τέτοιο ώστε $b_{n+1} \equiv n+2\left(\bmod 2\right)$ και 5^{n+1} διαιρεί

τον

$$\overline{b_{n+1}b_n...b_1} = b_{n+1}10^n + \overline{b_n...b_1} = 5^n\left[b_{n+1}2^n + 5^{l-n}B\right].$$

Η τελευταία είναι αληθής οποτεδήποτε ο $b_{n+1}2^n + B$ διαιρείται με το 5.Τώρα ,το σύστημα των ταυτόχρονων ισοτιμιών $b_{n+1} \equiv n+2\left(\bmod 2\right), b_{n+1}2^n + B \equiv 0\left(\bmod 5\right)$ έχει μια λύση από το Κινέζικο Θεώρημα υπολοίπων , αφού 2^n και 5 είναι πρώτοι μεταξύ τους .Επίσης , μια λύση b_{n+1} μπορεί να επιλεγεί από το σύνολο $\{0,1,2,...,9\}$ όπως χρειάζεται.

Παίρνουμε τώρα την γενική περίπτωση όπου $n = 2^a5^\beta k$, όπου k είναι σχετικά πρώτος με το 10.Αν ο n δεν διαιρείται με το 20 τότε ο 2^a5^β είναι μια δύναμη του 2 , μια δύναμη του 5 ,ή είναι ένας αριθμός της μορφής $2\cdot 5^\beta$.

Από τα λήμματα 1 και 2 , σε όλες τις περιπτώσεις για τον 2^a5^β έχουμε ένα άρτιο *εναλλάσων* πολλαπλάσιο M με ένα άρτιο αριθμό $2m$ ψηφίων. Είναι φανερό ότι όλοι οι ακέραιοι της μορφής $\overline{MM....M}$ είναι επίσης *εναλλάσων* πολλαπλάσιο του 2^a5^β.

Αποδεικνύουμε ότι μερικοί από αυτούς είναι ένα πολλαπλάσιο του
$n = 2^a5^\beta k$.Θεωρούμε τους αριθμούς

$$C_l = 1+10^{2m}+...+10^{2m(l-1)}, l = 1,2,...,k+1.$$

Κάποιοι δυο από αυτούς , C_{l_1} και C_{l_2} με $l_1 < l_2$,είναι ισότιμοι *modulo* k από την αρχή της περιστεροφωλιάς. Άρα ο k διαιρεί την διαφορά τους $C_{l_2} - C_{l_1} = C_{l_2-l_1}\cdot 10^{2ml_1}$.Και επειδή ο k σχετικά πρώτος με το 10 έχουμε ότι ο k διαιρεί τον $C_{l_2-l_1}$.Τώρα είναι άμεσο ότι ο $C_{l_2-l_1}\cdot M$, είναι ένας αριθμός της μορφής $\overline{MM....M}$,και αυτός είναι ένα *εναλλάσων* πολλαπλάσιο του *n*.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003
Λευκωσία, Κύπρος
Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122
cms@cms.org.cy , www.cms.org.cy

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΤΑΚΤΙΚΑ ΜΕΛΗ
(Ειδικότητες Μαθηματικών)

Ημερομηνία αίτησης: ....

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως τακτικό μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από το καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____
(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία :

ΕΠΩΝΥΜΟ: ....
ΟΝΟΜΑ: ....
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ: ....
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ: ....
ΑΡ. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: .... Α.Κ.Α.: .... Π.Μ.Π.: ....

ΠΤΥΧΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*
B.S. □ ΕΤΟΣ: .... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ....
M.S. □ ΕΤΟΣ: .... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ....
Ph.D. □ ΕΤΟΣ: .... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ....
Άλλο □ ΕΤΟΣ: ....

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ
Οδός και Αριθμός: ....
Πόλη: ....Ταχ. Κώδικας: ....
Χωριό...
Τηλέφωνα................................/ ..../ ....

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ
Ιδιότητα- Βαθμός:..
Σχολείο-Ίδρυμα-Υπηρεσία: ....
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα .... Ιδιωτικό Τομέα...............

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

....

Αριθμός απόδειξης:.................... *Εγγραφή: £2*
Ημερομηνία απόδειξης:.................... *Ετήσια Συνδρομή: £10*
****Να επισυναπτούν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας***

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003

Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122

cms@cms.org.cy , www.cms.org.cy

ΑΙΤΗΣΗ ΕΓΓΡΑΦΗΣ ΓΙΑ ΕΚΤΑΚΤΑ ΜΕΛΗ

(Ειδικότητες εκτός Μαθηματικών ή για φοιτητές)

Ημερομηνία αίτησης......................

Προς το Διοικητικό Συμβούλιο της ΚΥ.Μ.Ε.

Παρακαλώ να δώσετε την έγκρισή σας για να εγγραφώ ως έκτακτο μέλος της ΚΥ.Μ.Ε. Δηλώνω ότι κατέχω τα απαιτούμενα από το καταστατικό προσόντα και ότι αποδέχομαι τις διατάξεις του.

Με τιμή

____

(υπογραφή)

Παρακαλούμε να συμπληρωθούν τα πιο κάτω στοιχεία :

ΕΠΩΝΥΜΟ: ....
ΟΝΟΜΑ: ....
ΠΑΤΡΩΝΥΜΟ: ....
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ: ....
ΑΡ. ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: .... Α.Κ.Α.: .... Π.Μ.Π.: ....

ΠΤΥΧΙΑ *

B.S. ☐ ΕΤΟΣ: .... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ....
M.S. ☐ ΕΤΟΣ: .... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ....
Ph.D. ☐ ΕΤΟΣ: .... ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ: ....
Άλλο ☐ ΕΤΟΣ: ....

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΟΙΚΙΑΣ

Οδός και Αριθμός: ....
Πόλη: ....Ταχ. Κώδικας: ....
Χωριό...
Τηλέφωνα.............................../ ..../ ....

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΠΑΣΧΟΛΗΣΗ

Ιδιότητα- Βαθμός ....
Σχολείο-Ίδρυμα-Υπηρεσία.......................................
Χρόνια Εκπαιδευτικής Υπηρεσίας: Δημόσιο Τομέα .... Ιδιωτικό Τομέα...............

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

....

Αριθμός απόδειξης: .... Εγγραφή: £2
Ημερομηνία απόδειξης: .... Ετήσια Συνδρομή: £10

***Να επισυναπτούν φωτοαντίγραφα των διπλωμάτων σας**

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Στασίνου 36, Γραφείο 102, Στρόβολος 2003

Λευκωσία, Κύπρος

Τηλ. 22378101, Φαξ: 22379122

cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy